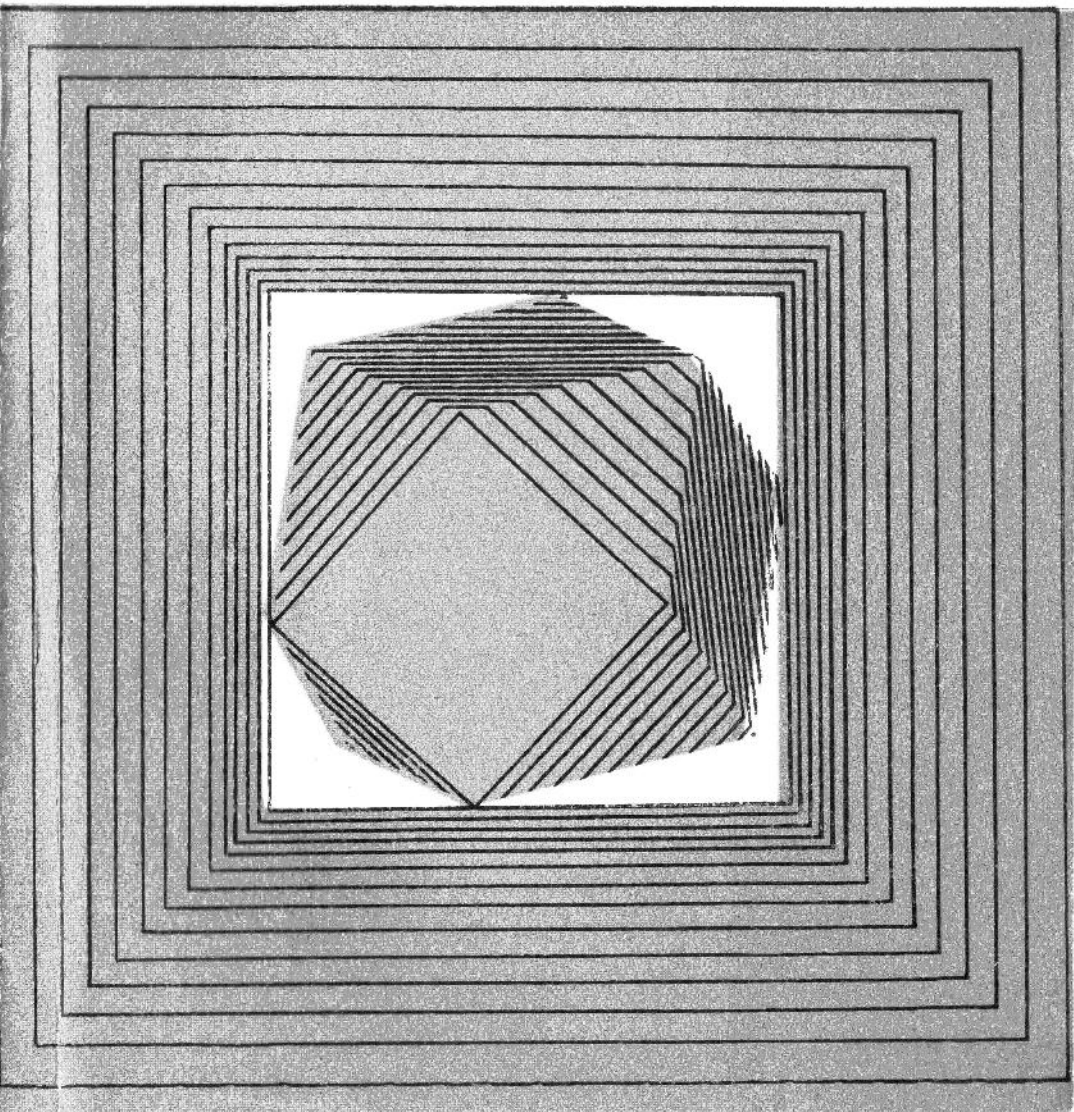
УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК **23**



СОДЕРЖАНИЕ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 23

Редактор *В. Н. Забелин*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Художественный редактор *В. Е. Петренко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. П. Пипенко*

Информ. бланк № 4393

Сдано в набор 23.11.79. Подписано в печать 03.09.80.
БЦ 08692. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 3.
Лит. гарн. Выс. печать. 8,5 усл. печ. л. 10. уч.-изд. л.
Тираж 1000 экз. Изд. № 760. Зак. 9-466. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики имени М. В. Фрунзе в городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 310003, Харьков-3, Университетская, 16. Зак. 1629.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 23

Республиканский межведомственный научный сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1980

22.151 УДК 513
У45

Украинский геометрический сборник, вып. 23: Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1980. — 134+3 с.

В сборнике рассмотрены вопросы геометрии «в целом» (однозначная определенность выпуклой поверхности, оценка главных радиусов кривизны, свойства седловых поверхностей и пр.), геометрии обобщенных пространств (дифференцирование Ли на многообразиях, подвижность пространств), классической дифференциальной геометрии (сети на поверхности, двумерные поверхности в четырехмерном пространстве, поверхности симметрии, расслоение комплексов прямых в конгруэнции и др.).

Для научных работников математических специальностей. Списки лит. в конце статей.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет. Тел. 40-14-92.

Редакция естественнонаучной литературы

У $\frac{20203-057}{М226(04)-80}$ 428—80 1702040000

УДК 513

Ю. А. Аминов

О ГРАССМАНОВОМ ОБРАЗЕ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть F^2 — двумерная поверхность в 4-мерном евклидовом пространстве E^4. Нормальную плоскость в точке $x \in F^2$ обозначим через N_x. Поставим в соответствие каждой точке x плоскость, параллельную N_x и проходящую через фиксированную точку 0. Этим устанавливается отображение F^2 в грассманово многообразие $G_{2,4}$. Грассманов образ F^2 будем обозначать через Γ^2. Мы изучим некоторые геометрические свойства грассманова образа.

Пусть в E^4 единичные нормали ξ и η к поверхности F^2 имеют декартовы координаты ξ^i и η^i. Плюккеровы координаты грассманова образа имеют вид $p^{i_1 i_2} = \xi^{[i_1}\eta^{i_2]}$. Введем на F^2 ортогональные координаты u_1, u_2. Коэффициенты метрического тензора F^2 обозначим через g_{ij}. Пусть при $k = 1, 2$ L_{ij}^k — коэффициенты второй квадратичной формы для ξ и η, r — радиус-вектор поверхности. С помощью формул Вейнгартена находим

$$\frac{\partial p^{i_1 i_2}}{\partial u_k} = -L_{ki}^1 g^{ij} r_{u_j}^{[i_1}\eta^{i_2]} - L_{ki}^2 g^{ij} \xi^{[i_1} r_{u_j}^{i_2]}.$$

Найдем вид метрики грассманова образа F^2. Метрику в $G_{2,4}$ зададим в виде

$$d\bar{s}^2 = \sum_{(i_1 i_2)} (dp^{i_1 i_2})^2, \tag{1}$$

где суммирование производится по всем сочетаниям $(i_1 i_2)$. Повернем оси координат в E^4 с координатными ортами e_j так, чтобы в выбранной точке P имело место $r_{u_j} = \sqrt{g_{jj}} e_j$, $j = 1, 2$; $\xi = e_3$; $\eta = e_4$. Тогда в точке P получим $dp^{12} = 0$; $dp^{13} = L_{k1}^2 du^k / \sqrt{g_{11}}$; $dp^{14} = -L_{k1}^1 du^k / \sqrt{g_{11}}$; $dp^{23} = L_{k2}^2 du^k / \sqrt{g_{22}}$; $dp^{24} = -L_{k2}^1 du^k / \sqrt{g_{22}}$; $dp^{34} = 0$. Следовательно, метрика грассманова образа, которую мы обозначим через $d\sigma^2$, имеет вид

$$d\sigma^2 = \left[\frac{(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2}{g_{11}} + \frac{(L_{12}^1)^2 + (L_{12}^2)^2}{g_{22}}\right] du_1^2 + \\ + 2\left[\frac{L_{11}^1 L_{21}^1 + L_{11}^2 L_{12}^2}{g_{11}} + \frac{L_{12}^1 L_{22}^1 + L_{12}^2 L_{22}^2}{g_{22}}\right] du_1 du_2 + \\ + \left[\frac{(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2}{g_{22}} + \frac{(L_{21}^1)^2 + (L_{21}^2)^2}{g_{11}}\right] du_2^2.$$

Грассманов образ и его метрика имеют инвариантный смысл. Полученное выражение $d\sigma^2$ не зависит от выбора осей координат в E^4. Поэтому оно справедливо в любой точке поверхности. Повернем нормали ξ и η в N_x так, чтобы они были параллельны осям эллипса нормальной кривизны. Кроме того, координаты на F^2 возьмем так, чтобы конец вектора кривизны в каждой точке $x \in F^2$ для линии u_1 был расположен в одной из вершин эллипса нормальной кривизны. Если a и b — полуоси, α и β — координаты центра этого эллипса, то коэффициенты вторых квадратичных форм такие: $L^1_{11} = (\alpha + a) g_{11}$; $L^2_{11} = \beta g_{11}$; $L^1_{12} = 0$; $L^2_{12} = b\sqrt{g_{11}g_{22}}$; $L^1_{22} = (\alpha - a) g_{22}$; $L^2_{22} = \beta g_{22}$. При указанном выборе нормалей линейный элемент Γ^2 записывают так: $d\sigma^2 = g_{11}[(\alpha + a)^2 + \beta^2 + b^2] du_1^2 + 4\beta b\sqrt{g_{11}g_{22}} du_1 du_2 + g_{22}[(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b^2] du_2^2$. Отсюда находим выражение для элемента площади грассманова образа $d\tilde{S} = [(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)^2 + 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)]^{1/2} \sqrt{g_{11}g_{22}} du_1 du_2$. Так как гауссова кривизна K метрики F^2 определяется по формуле $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2$, то мы можем записать $d\tilde{S} = [K^2 + 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)]^{1/2} \sqrt{g_{11}g_{22}} du_1 du_2$. Отношение элемента площади Γ^2 к элементу площади F^2 имеет вид $\frac{d\tilde{S}}{dS} = [K^2 + 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)]^{1/2} \geqslant |K|$. Отсюда можно заключить, что грассманов образ поверхности с $K \neq 0$ является регулярным подмногообразием в $G_{2,4}$. Для минимальной поверхности $\alpha = \beta = 0$ грассманово отображение является конформным, $d\sigma^2 = |K| ds^2$, при этом отношение площадей по модулю равно внутренней кривизне $|K|$ поверхности.

Найдем выражение для гауссовой кривизны $\tilde{K}$ метрики грассманова образа поверхности с нулевым гауссовым кручением. В этом случае одна из полуосей эллипса нормальной кривизны, например b равна нулю. Тогда координаты u_1, u_2 для $d\sigma^2$ ортогональные. Получим

$$\tilde{K} = -\frac{1}{2\tilde{W}}\left\{\left[\frac{1}{\tilde{W}}\left(\frac{(L^1_{11})^2 + (L^2_{11})^2}{g_{11}}\right)_{u_2}\right]_{u_2} + \left[\frac{1}{\tilde{W}}\left(\frac{(L^1_{22})^2 + (L^2_{22})^2}{g_{22}}\right)_{u_1}\right]_{u_1}\right\},$$

где $\tilde{W} = \sqrt{g_{11}g_{22}}\sqrt{K^2 + 4\beta^2 a^2}$. Используем два уравнения Кодацци [см. 1]:

$$\frac{\partial L^1_{11}}{\partial u_2} - \frac{L^1_{11}}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} - \frac{L^1_{22}}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = \mu_{21|2} L^2_{11};$$

$$\frac{\partial L^2_{11}}{\partial u_2} - \frac{L^2_{11}}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} - \frac{L^2_{22}}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = \mu_{12|2} L^1_{11}.$$

Первое из них умножим на $2L^1_{11}/g_{11}$, а второе — на $2L^2_{11}/g_{11}$. Складывая, получим $\frac{\partial}{\partial u_2}\left\{\left[(L^1_{11})^2 + (L^2_{11})^2\right]/g_{11}\right\} = K\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}$. Аналогично находим $\frac{\partial}{\partial u_1}\left\{\left[(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2\right]/g_{22}\right\} = K\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}$. Подставим эти выражения в формулу для $\tilde{K}$. Обозначим $T = K/\sqrt{K^2 + 4\beta^2 a^2}$. Гауссова кривизна метрики грассманова образа имеет вид для поверхности с нулевым гауссовым кручением

$$\tilde{K} = T^2 - \frac{1}{2\tilde{W}}\left\{\frac{(g_{11})_{u_2} T_{u_2} + (g_{22})_{u_1} T_{u_1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right\}. \tag{2}$$

Если T постоянно на поверхности, то кривизна метрики грассманова образа постоянна и равна T^2.

С помощью следующей теоремы можно указать геометрический смысл членов, входящих в эту формулу. Пусть $У_1$ и $У_2$ — касательные векторы к Γ^2. Тогда T^2 — кривизна $G_{2,4}$ для площадки, определяемой $У_1$ и $У_2$.

Теорема 1. *Кривизна многообразия $G_{2,4}$ для касательной площадки к грассманову образу поверхности $F^2 \subset E^4$ есть*

$$\overline{K}(У_1, У_2) = \frac{K^2 + 4a^2b^2}{K^2 + 4(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)}. \tag{3}$$

Как известно [2], кривизна грассманова образа лежит в интервале $[0, 2]$. Из формулы (3) следует, что для поверхности F^2 с нулевым гауссовым кручением $\overline{K}$ лежит в интервале $[0, 1]$, для минимальной поверхности — в интервале $[1, 2]$. Минимальные поверхности, у которых эллипс нормальной кривизны — окружность, имеют грассманов образ, расположенный на вполне геодезической сфере, радиуса $1/\sqrt{2}$. Используя уравнение Гаусса для подмногообразия $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$ и (3), заключаем, что второй член справа в формуле (2) является внешней кривизной Γ^2 в $G_{2,4}$:

$$K_e = -\frac{1}{2\tilde{W}}\left\{\frac{(g_{11})_{u_2} T_{u_2} + (g_{22})_{u_1} T_{u_1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right\}.$$

Докажем теорему 1. Если точка из $G_{2,4}$ задается с помощью вектора $p = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})$ в E^6, то в точке p касательные векторы к Γ^2 имеют вид

$$У_1 = (0, \beta, -(\alpha + a), b, 0, 0); \quad У_2 = (0, b, 0, \beta, a - \alpha, 0).$$

Для того чтобы вычислить кривизну $G_{2,4}$, воспользуемся формулой из работы [2]. В этой работе точки из $G_{n,n+m}$ задаются с помощью $n \times m$ матриц. Найдем выражение этих матриц через плюккеровы координаты $p^{i_1 i_2}$. Пусть N — двумерная плоскость, соответствующая точке из грассманова многообразия. Пусть $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ — векторы из этой плоскости, имеющие вид

$$\bar{\xi}_1 = \sum_{i=1}^{2} Z_1^i e_i + e_3; \qquad \bar{\xi}_2 = \sum_{i=1}^{2} Z_2^i e_i + e_4.$$

Тогда матрица $Z = \|Z_j\|$ однозначно задает плоскость N и, следовательно, точку на грассмановом многообразии. Найдем выражение компонент этой матрицы через плюккеровы координаты. Заметим, что, вообще говоря, $\overline{\xi}_1$ и $\overline{\xi}_2$ не единичные и не ортогональные друг другу, а координаты $p^{i_1 i_2}$ мы вычисляли с помощью ортонормированного базиса в N, ξ_1 и ξ_2. Пусть $\overline{\xi}_i = a_i^j \xi_j$ и $\overline{p}^{i_1 i_2} = \overline{\xi}_1^{[i_1} \overline{\xi}_2^{i_2]}$. Тогда легко найти соотношение $\overline{p}^{i_1 i_2} = \det|a_i^j| \, p^{i_1 i_2}$, т. е. плюккеровы координаты для косого базиса отличаются от $p^{i_1 i_2}$ на один и тот же сомножитель. С помощью разложений $\overline{\xi}_1$ и $\overline{\xi}_2$ находим $Z_1^1 = \overline{p}^{14}$; $Z_1^2 = \overline{p}^{24}$; $Z_2^1 = \overline{p}^{31}$; $Z_2^2 = \overline{p}^{32}$. Касательные векторы к грассманову образу имеют вид $Z_{u_\alpha} = \left\| \dfrac{\partial Z_j^i}{\partial u_\alpha} \right\|$. В точке $Z = 0$ все плюккеровы координаты, кроме p^{34}, равны нулю. Поэтому в точке $Z = 0$ после сокращения на общий множитель $\det|a_i^j|$ получим следующие касательные векторы:

$$\begin{pmatrix} p_{u_\alpha}^{14} & p_{u_\alpha}^{24} \\ p_{u_\alpha}^{31} & p_{u_\alpha}^{32} \end{pmatrix}, \quad \varkappa = 1,\ 2.$$

Используя ранее полученные выражения для производных плюккеровых координат в точке $Z = 0$, находим касательные векторы

$$\mathcal{Y}_1 = \begin{pmatrix} -(\alpha + a), & 0 \\ -\beta, & -b \end{pmatrix}; \quad \mathcal{Y}_2 = \begin{pmatrix} 0, & a - \alpha \\ -b, & -\beta \end{pmatrix}.$$

Кривизна $G_{n,\, n+m}$ в точке $Z = 0$ для площадки, определяемой $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, дается формулой

$$\overline{K}(\mathcal{Y}_1,\ \mathcal{Y}_2) = \frac{2\,(\mathrm{Tr}\, \Lambda_1 \Lambda_1^* + \mathrm{Tr}\, \Lambda_2 \Lambda_2^*)}{4\, \mathrm{Tr}\,(\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_1^*)\, \mathrm{Tr}\,(\mathcal{Y}_2 \mathcal{Y}_2^*) - [\mathrm{Tr}\,(\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2^* + \mathcal{Y}_2 \mathcal{Y}_1^*)]^2},$$

где мы обозначили матрицы $\Lambda_1 = \mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2^* - \mathcal{Y}_2 \mathcal{Y}_1^*$; $\Lambda_2 = \mathcal{Y}_1^* \mathcal{Y}_2 - \mathcal{Y}_2^* \mathcal{Y}_1$, и Tr означает след матрицы. Нетрудно найти

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2ba \\ -2ba & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Tr}\,(\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_1^*) = (\alpha + a)^2 + \beta^2 + b^2; \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathcal{Y}_2 \mathcal{Y}_2^*) = (\alpha - a)^2 + \beta^2 + b^2;$$

$$\mathrm{Tr}\,(\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2^* + \mathcal{Y}_2 \mathcal{Y}_1^*) = 4b\beta.$$

Следовательно, кривизна $\overline{K}(\mathcal{Y}_1,\ \mathcal{Y}_2)$ для площадки, касательной к грассманову образу поверхности, будет равна

$$\overline{K}(\mathcal{Y}_1,\ \mathcal{Y}_2) = \frac{K^2 + 4a^2 b^2}{K^2 + 4\,(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)}.$$

Замечание. Если $\overline{K} > 1$, то выражение $\Delta \doteq (ab)^2 - (a\beta)^2 - (b\alpha)^2 > 0$; если $\overline{K} = 1$, то $\Delta = 0$; если $\overline{K} < 1$, то $\Delta < 0$. Это замечание используется в дальнейшем.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть Γ^2 — двумерное подмногообразие в грассмановом многообразии $G_{2,4}$. *Существует ли регулярная поверхность в E^4, имеющая Γ^2 своим грассмановым образом?* Аналогичный вопрос можно поставить и для многомерных подмногообразий в других грассмановых многообразиях $G_{n,l}$.

Поставленный вопрос можно переформулироват, так. Пусть заданы два векторных поля $\xi_\nu = \xi_\nu(u_1, u_2)$, где $\xi_\nu = \{\xi_\nu^i\}$ — два 4-мерных единичных, ортогональных друг другу вектора, задающих точку из Γ^2. Существуют ли такие четыре функции $x_i = x_i(u_1, u_2)$, $i = 1, \ldots, 4$, что выполняется система уравнений

$$\sum_{i=1}^{4} x_{iu_\alpha}\xi_\nu^i = 0, \quad \alpha = 1, \ 2; \quad \nu = 1, \ 2, \text{ и ранг матрицы } \| x_{iu_\alpha} \|$$

равен 2?

Обозначим через $p^{i_1 i_2}$ плюккеровы координаты точки из Γ^2 и $\lambda^{ij} = p^{ij}/p^{34}$. Можем предполагать, что в точке P координата $p^{34} = 1$ и в ее окрестности $p^{34} \neq 0$. Систему запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_{3u_\alpha}\xi_1^3 + x_{4u_\alpha}\xi_1^4 &= -\sum_{i=1}^{2} x_{iu_\alpha}\xi_1^i; \\ x_{3u_\alpha}\xi_2^3 + x_{4u_\alpha}\xi_2^4 &= -\sum_{i=1}^{2} x_{iu_\alpha}\xi_2^i, \quad \alpha = 1, \ 2. \end{aligned} \tag{4}$$

Предполагая, что $p^{34} \neq 0$, с помощью этой системы находим

$$x_{3u_\alpha} = -\sum_{i=1}^{2} x_{iu_\alpha}\lambda^{i4}; \quad x_{4u_\alpha} = -\sum_{i=1}^{2} x_{iu_\alpha}\lambda^{3i}.$$

Записывая условие равенства смешанных производных для каждой из функций x_3 и x_4, получим два уравнения:

$$\sum_{i=1}^{2} (x_{iu_1}\lambda_{u_2}^{i4} - x_{iu_2}\lambda_{u_1}^{i4}) = 0; \quad \sum_{i=1}^{2} (x_{iu_1}\lambda_{u_2}^{3i} - x_{iu_2}\lambda_{u_1}^{3i}) = 0. \tag{5}$$

Обозначим через c и d столбцы $c = \begin{pmatrix}\lambda^{24} \\ \lambda^{32}\end{pmatrix}$; $d = \begin{pmatrix}\lambda^{14} \\ \lambda^{31}\end{pmatrix}$. Возможны три случая:

1. Уравнения (5) линейно зависимы.
2. Два минора $[c_{u_1}c_{u_2}]$, $[d_{u_1}d_{u_2}]$ равны нулю, но уравнения линейно независимы, например, минор $[d_{u_1}c_{u_1}] \neq 0$.
3. Общий случай. Хотя бы один из указанных миноров, например $[d_{u_1}d_{u_2}]$, отличен от нуля.

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1. По условию

$$\text{ранг} \begin{pmatrix} \lambda_{u_2}^{14} & \lambda_{u_1}^{14} & \lambda_{u_2}^{24} & \lambda_{u_1}^{24} \\ \lambda_{u_2}^{31} & \lambda_{u_1}^{31} & \lambda_{u_2}^{32} & \lambda_{u_1}^{32} \end{pmatrix} = 1. \tag{6}$$

Так как Γ^2 — регулярная поверхность, то в точке P, в которой выполнено $p^{34}=1$, $p^{12}_{u_i}=p^{34}_{u_i}=0$ имеет место

$$\text{ранг}\begin{pmatrix}\lambda^{13}_{u_1} & \lambda^{14}_{u_1} & \lambda^{23}_{u_1} & \lambda^{24}_{u_1}\\ \lambda^{13}_{u_2} & \lambda^{14}_{u_2} & \lambda^{23}_{u_2} & \lambda^{24}_{u_2}\end{pmatrix}=2. \tag{7}$$

Из системы (5) рассмотрим одно невырождающееся уравнение, например,

$$x_{1u_1}\lambda^{14}_{u_2}-x_{1u_2}\lambda^{14}_{u_1}+x_{2u_1}\lambda^{24}_{u_2}-x_{2u_2}\lambda^{24}_{u_1}=0.$$

Три коэффициента этого уравнения в ноль не обращаются. Допустим, что коэффициенты при производных функции x_2 равны нулю, т. е. $\lambda^{24}_{u_1}=\lambda^{24}_{u_2}=0$. В силу условия (6) получим $\lambda^{32}_{u_1}=$ $=\lambda^{32}_{u_2}=0$ и

$$\begin{vmatrix}\lambda^{14}_{u_2} & \lambda^{14}_{u_1}\\ \lambda^{31}_{u_2} & \lambda^{31}_{u_1}\end{vmatrix}=0,$$

что противоречит условию (7). Поэтому будем предполагать, что один из коэффициентов $\lambda^{24}_{u_2}$, $\lambda^{24}_{u_1}\neq 0$. Пусть, например, $\lambda^{24}_{u_1}\neq 0$. Аналогично доказывается, что хотя бы один из коэффициентов $\lambda^{14}_{u_1}$, $\lambda^{14}_{u_2}\neq 0$. Поэтому уравнение можно разрешить относительно x_{2u_2}, при этом уравнение будет содержать одну из производных функций x_1. Пусть, например, $\lambda^{14}_{u_2}\neq 0$. Зададим функции $x_1(u_1, u_2)$, $x_2(u_1, 0)$ так, чтобы на линии u_1

$$\begin{vmatrix}x_{1u_1}, & x_{2u_1}\\ \lambda^{24}_{u_1}x_{1u_2}, & x_{1u_1}\lambda^{14}_{u_2}-x_{1u_2}\lambda^{14}_{u_1}+x_{2u_1}\lambda^{24}_{u_2}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{8}$$

Тогда из уравнения находим x_2, а затем и остальные координаты. Условие (8) означает, что поверхность F^2 регулярна.

2. При некоторых числах θ и γ должны выполняться соотношения $d_{u_2}=\theta d_{u_1}$, $c_{u_2}=\gamma c_{u_1}$, при этом, так как Γ^2 — регулярная поверхность, $\theta\neq\gamma$. Система записывается в таком виде:

$$(x_{1u_1}\theta-x_{1u_2})\,d_{u_1}+(x_{2u_1}\gamma-x_{2u_2})\,c_{u_1}=0. \tag{9}$$

Так как $[d_{u_1}c_{u_1}]\neq 0$, то должна выполняться система уравнений

$$x_{1u_2}=x_{1u_1}\theta;\quad x_{2u_2}=x_{2u_1}\gamma. \tag{10}$$

На линии u_1 задаем функции $x_1(u_1, 0)$, $x_2(u_1, 0)$ с не равными нулю производными. Из системы (10) находим x_1 и x_2, а затем x_3 и x_4. Так как ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix}x_{1u_1}, & x_{1u_2}\\ x_{2u_1}, & x_{2u_2}\end{Vmatrix}$$

отличен от нуля, то поверхность F^2 регулярна в достаточно малой окрестности точки P.

3. При условии $[d_{u_1}d_{u_2}]\neq 0$ из уравнений (5) находим x_{1u_1} и x_{1u_2}:

$$x_{1u_1}=x_{2u_1}A-x_{2u_2}B;\quad x_{1u_2}=-x_{2u_1}C+x_{2u_2}D, \tag{11}$$

где мы обозначили $A=-t\,[d_{u_1}c_{u_2}]$; $B=-t\,[d_{u_1}c_{u_1}]$; $C=t\,[d_{u_2}c_{u_2}]$; $D=t\,[d_{u_2}c_{u_1}]$; $t=([d_{u_2}d_{u_1}])^{-1}$. Записывая условие совместности для соотношений (11), получим одно линейное уравнение второго порядка для функции x_2, коэффициенты которого определяются грассмановым образом Γ^2:

$$-x_{2u_2u_2}B+x_{2u_1u_1}C+x_{2u_1u_2}(A-D)+x_{2u_1}\{A_{u_2}+C_{u_1}\}-$$
$$-x_{2u_2}\{B_{u_2}+D_{u_1}\}=0. \tag{12}$$

Если из системы (5) выразить x_{2u_1} и x_{2u_2} и записать уравнение для x_1, то легко увидеть, что коэффициенты при старших производных в уравнении для x_1 с точностью до общего множителя совпадают с соответствующими коэффициентами в уравнении для x_2. Далее, можно было бы получить уравнение для x_2, исключая функции x_1, x_3 и x_4 в ином порядке из первоначальной системы. Допустим, что мы сначала исключаем x_1 и x_3, так что получается уравнение, связывающее x_2 и x_4:

$$x_{4u_1}\bar d_{u_2}-x_{4u_2}\bar d_{u_1}+x_{2u_1}\bar c_{u_2}-x_{2u_2}\bar c_{u_1}=0,\quad \text{где}$$
$$\bar d=\begin{pmatrix}\bar\lambda^{43}\\ \bar\lambda^{14}\end{pmatrix};\quad \bar c=\begin{pmatrix}\bar\lambda^{23}\\ \bar\lambda^{12}\end{pmatrix};\quad \bar\lambda^{ij}=\frac{p^{ij}}{p^{13}}. \tag{13}$$

Если $[\bar d_{u_2}\bar d_{u_1}]\neq 0$, то из этого уравнения определим x_{4u_1} и x_{4u_2}:

$$x_{4u_1}=\{x_{2u_1}[\bar c_{u_2}\bar d_{u_1}]-x_{2u_2}[\bar c_{u_1}\bar d_{u_1}]\}/[\bar d_{u_2}\bar d_{u_1}];$$
$$x_{4u_2}=\{x_{2u_2}[\bar d_{u_2}\bar c_{u_1}]-x_{2u_1}[\bar d_{u_2}\bar c_{u_2}]\}/[\bar d_{u_2}\bar d_{u_1}].$$

Записывая условие совместности, получим второе уравнение для x_2:

$$-x_{2u_2u_2}[\bar c_{u_1}\bar d_{u_1}]+x_{2u_1u_1}[\bar d_{u_2}\bar c_{u_2}]+x_{2u_1u_2}([\bar c_{u_2}\bar d_{u_1}]-[\bar d_{u_2}\bar c_{u_1}])+\cdots=0. \tag{14}$$

Но оказывается, что это уравнение с точностью до общего множителя совпадает с уравнением (12). Мы рассмотрим лишь коэффициенты при старших производных. Очевидно, $\bar\lambda^{ij}=\lambda^{ij}/\lambda^{13}$. Следовательно, столбец $\bar d$ можно записать и так: $\bar d=\begin{pmatrix}-1/\lambda^{13}\\ \lambda^{14}/\lambda^{13}\end{pmatrix}$.

Для преобразования $\bar c$ используем уравнение, которое связывает плюккеровы координаты точки из $G_{2,4}$, $p^{12}p^{34}+p^{13}p^{42}+p^{14}p^{23}=0$. Разделим его на $(p^{34})^2$ и получим $\lambda^{12}=-\lambda^{13}\lambda^{42}-\lambda^{14}\lambda^{23}$. Используя формулы (13) и последнее соотношение, можно записать

$$\bar c=\begin{pmatrix}\lambda^{23}/\lambda^{13}\\ \lambda^{12}/\lambda^{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\lambda^{42}\end{pmatrix}-\lambda^{23}\bar d.$$

С помощью этих соотношений для $\bar{c}$ и $\bar{d}$ находим

$$[\bar{c}_{u_1}\bar{d}_{u_1}] = [c_{u_1}d_{u_1}]/(\lambda^{13})^2; \quad [\bar{d}_{u_2}\bar{c}_{u_2}] = [d_{u_2}c_{u_2}]/(\lambda^{13})^2;$$

$$[\bar{c}_{u_2}\bar{d}_{u_1}] = [c_{u_2}d_{u_1}]/(\lambda^{13})^2 - \lambda^{23}[\bar{d}_{u_2}\bar{d}_{u_1}], \quad [\bar{d}_{u_2}\bar{c}_{u_1}] =$$
$$= [d_{u_2}c_{u_1}]/(\lambda^{13})^2 - \lambda^{23}[\bar{d}_{u_2}\bar{d}_{u_1}].$$

Следовательно, соответствующие коэффициенты уравнений (12) и (14) при вторых производных равны с точностью до общего множителя.

Случай 2, рассмотренный выше, вписывается в схему общего случая. Действительно, и в этом случае можно записать некоторое уравнение второго порядка гиперболического типа для координат x_i. Запишем такое уравнение для x_2. В силу системы (10) получим $x_{2u_1}c_{u_2} - x_{2u_2}c_{u_1} = 0$. Следовательно,

$$x_{2u_1}[c_{u_2}d_{u_1}] - x_{2u_2}[c_{u_1}d_{u_1}] = 0; \quad x_{2u_1}[d_{u_2}c_{u_2}] - x_{2u_2}[d_{u_2}c_{u_1}] = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по u_2, второе по u_1 и складывая, получим искомое уравнение

$$-x_{2u_2u_2}[c_{u_1}d_{u_1}] + x_{2u_1u_2}([c_{u_2}d_{u_1}] - [d_{u_2}c_{u_1}]) + x_{2u_1u_1}[d_{u_2}c_{u_2}] + \cdots = 0,$$

где точками обозначены члены с первыми производными.

Нами проверено, что при повороте декартовых координат в E^4 новые коэффициенты при старших производных уравнения (12), вычисленные для новой системы координат, пропорциональны прежним коэффициентам. Имеет место

Теорема 2. *В общем случае каждая компонента радиус-вектора x поверхности $F^2 \subset E^4$, имеющей заданный грассманов образ Γ^2, удовлетворяет линейному уравнению второго порядка, коэффициенты которого определяются грассмановым образом, при этом главная часть этих уравнений одна и та же для всех координат x_i. Если для площадки, касательной к Γ^2, кривизна многообразия $G_{2,4}$ удовлетворяет неравенству $\bar{K} > 1$, то тип уравнения эллиптический, если $\bar{K} < 1$, то тип уравнения гиперболический, если $\bar{K} = 1$, то тип параболический.*

Вырожденный случай 1 соответствует грассманову образу поверхности, у которой в каждой точке x эллипс нормальной кривизны вырожден в отрезок на прямой, проходящей через точку x. Соответствующая кривизна $\bar{K}$ равна 1. В частном случае к этому классу поверхностей относятся поверхности, лежащие в E^3.

В случае 2 эллипс нормальной кривизны вырождается в отрезок, но прямая, на которой он лежит, не проходит через точку x. В этом случае $\bar{K} \leqslant 1$.

Докажем заключительную часть теоремы 2. Тип уравнения (12) определяется выражением $\Delta = -[d_{u_2}c_{u_2}][c_{u_1}d_{u_1}] - \frac{1}{4}([c_{u_2}d_{u_1}] + [c_{u_1}d_{u_2}])^2$. Если $\Delta > 0$, то в точке P уравнение имеет эллиптический тип, если $\Delta = 0$ — параболический, а при $\Delta < 0$ — гиперболический. В соответствии с этим точки поверхности Γ^2 в общем случае будем разделять на три типа. В соответствии с типом уравнения ставится краевая задача. Например, если в некоторой области G тип всех точек Γ^2 эллиптический, то на границе области зададим непрерывную функцию $\tilde{x}_2(s)$. Тогда с точностью до сдвига в пространстве E^3 с координатами x_1, x_3, x_4 существует единственная поверхность $F^2 \subset E^4$, имеющая заданный грассманов образ и такая, что $x_2(s) = \tilde{x}_2(s)$. Заметим однако, что поверхность может иметь особенности.

Выразим коэффициенты уравнения (12) при старших производных через величины, связанные с эллипсом нормальной кривизны поверхности F^2. Пусть ξ и η — нормали к F^2, имеющие в точке P координаты $\xi = (0, 0, 1, 0)$, $\eta = (0, 0, 0, 1)$. Тогда в точке P плюккеровы координаты $P^{ij} = 0$, если $(ij) \neq (34)$ и $p^{34} = 1$. Нетрудно найти, что в точке P $p^{14}_{u_\alpha} = \xi^1_{u_\alpha}$; $p^{24}_{u_\alpha} = \xi^2_{u_\alpha}$; $p^{31}_{u_\alpha} = \eta^1_{u_\alpha}$; $p^{32}_{u_\alpha} = \eta^2_{u_\alpha}$. Следовательно, в точке P уравнение записывается так:

$$x_{2u_1u_1}\begin{vmatrix} \xi^1_{u_2} & \xi^2_{u_2} \\ \eta^1_{u_2} & \eta^2_{u_2} \end{vmatrix} + x_{2u_1u_2}\left\{\begin{vmatrix} \xi^2_{u_2} & \xi^1_{u_1} \\ \eta^2_{u_2} & \eta^1_{u_1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi^1_{u_2} & \xi^2_{u_1} \\ \eta^1_{u_2} & \eta^2_{u_1} \end{vmatrix}\right\} - $$
$$- x_{2u_2u_2}\begin{vmatrix} \xi^2_{u_1} & \xi^1_{u_1} \\ \eta^2_{u_1} & \eta^1_{u_1} \end{vmatrix} + \cdots = 0.$$

Используем уравнения Вейнгартена $\xi_{u_\alpha} = -L^1_{\alpha k} g^{km} x_{u_m} = \mu_{12|\alpha}\eta$; $\eta_{u_\alpha} = -L^2_{\alpha k} g^{km} x_{u_m} + \mu_{21|\alpha}\xi$. Нетрудно найти, что при замене координат тип уравнения не меняется. Кроме того, заметим, что Δ — инвариант относительно поворотов векторов ξ и η в нормальной плоскости. Можем считать, что ξ и η параллельны главным осям эллипса нормальной кривизны. Координаты на F^2 возьмем, как и раньше, и ортонормированными в точке P. Кроме того, координаты в E^4 повернем так, что в точке P $x_{u_i} = e_i$, $i = 1, 2$.

Используя уравнения Вейнгартена и значения коэффициентов L^k_{il}, получим $\xi^1_{u_1} = -L^1_{11} = -a - \alpha$; $\eta^1_{u_1} = \eta^2_{u_2} = -L^2_{11} = -\beta$; $\xi^2_{u_1} = \xi^1_{u_2} = -L^1_{12} = 0$; $\eta^1_{u_2} = \eta^2_{u_1} = -L^2_{12} = -b$; $\xi^2_{u_2} = -L^1_{22} = a - \alpha$. Следовательно, $\Delta = (ab)^2 - (b\alpha)^2 - (a\beta)^2$. Из замечаний к теореме 1 вытекает указанная классификация уравнения (12) в зависимости от кривизны $G_{2,4}$ для площадки, касательной к Γ^2. Для поверхности с нулевым гауссовым кручением $\Delta \leqslant 0$. В частности, тор Клифферда, у которого индикатриса нормальной кривизны вырождена в отрезок и $a \neq 0$, $\beta \neq 0$, $b = 0$, дает пример замкнутой поверхности с гиперболическим грассмановым образом.

Если Гауссова кривизна метрики поверхности $K > 0$, то ее грассманов образ гиперболический или параболический. Действительно, если $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 > 0$, то либо $\alpha^2 - a^2 > 0$, либо $\beta^2 - b^2 > 0$. Допустим, имеет место первое неравенство.

Тогда $\Delta = b^2(a^2 - \alpha^2) - (a\beta)^2 \leqslant 0$. Для минимальной поверхности грассманов образ эллиптический.

Выберем на Γ^2 координаты такие, что уравнение (12) записывается в каноническом виде. Например, в гиперболическом случае при таком выборе координат $B = C = 0$. Система уравнений для компонент радиус-вектора поверхности F^2 имеет вид $x_{1u_1} = x_{2u_1}A$; $x_{1u_2} = x_{2u_2}D$; $x_{3u_1} = -(A\lambda^{14} + \lambda^{24})x_{2u_1}$; $x_{3u_2} = -(D\lambda^{14} + \lambda^{24})x_{2u_2}$; $x_{4u_1} = -(A\lambda^{31} + \lambda^{32})x_{2u_1}$; $x_{4u_2} = -(D\lambda^{31} + \lambda^{32})x_{2u_2}$. Используя эти соотношения, находим коэффициенты линейного элемента E, F и G поверхности F^2. Далее с помощью длинных, хотя и несложных выкладок находим

$$EG - F^2 = \frac{(A-D)^2}{(p^{34})^2} x_{2u_1}^2 x_{2u_2}^2.$$

Следовательно, *если уравнение* (12) *строго гиперболическое, т. е.* $A - D \neq 0$, $p^{34} \neq 0$ *и* $x_{2u_1}x_{2u_2} \neq 0$, *то поверхность* F^2 *регулярна.*

В эллиптическом случае выберем координаты на Γ^2 так, что $A - D = 0$ и $BC < 0$. Можно найти

$$EG - F^2 = \frac{1}{(p^{34})^2}[x_{2u_1}^2 C - x_{2u_2}^2 B]^2.$$

Итак, *если уравнение* (12) *строго эллиптическое,* $p^{34} \neq 0$ *и* $x_{2u_1}^2 + x_{2u_2}^2 \neq 0$, *то поверхность* F^2 *регулярна.*

В качестве примера рассмотрим поверхность в $G_{2,4}$ эллиптического типа, для которой уравнение (12) записывается в виде уравнения Лапласа. Хорошо известно представление $G_{2,4}$ в виде произведения двух двумерных сфер $S_1^2 \times S_2^2$. Если ввести обозначения $\alpha_1 = p^{12} + p^{34}$; $\alpha_2 = p^{13} + p^{42}$; $\alpha_3 = p^{14} + p^{23}$; $\beta_1 = p^{12} - p^{34}$; $\beta_2 = p^{13} - p^{42}$; $\beta_3 = p^{14} - p^{23}$, то сферы S_1^2 и S_2^2 задаются соотношениями $\sum \alpha_i^2 = \sum \beta_i^2 = 1$. Поверхность Γ_1^2 эллиптического типа зададим в виде произведения $S_1^2 \times \{Q\}$, где Q точка из S_2^2 с координатами $\beta_1 = -1$; $\beta_2 = \beta_3 = 0$. На сфере S_1^2 введем стереографические координаты u_1, u_2, т. е. положим $p^{34} = (1 + u_1^2 + u_2^2)^{-1}$; $p^{13} = u_1 p^{34}$; $p^{14} = u_2 p^{34}$. Так как $\beta_2 = \beta_3 = 0$, то $p^{13} = p^{42}$; $p^{14} = p^{23}$. Следовательно,

$$d = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}.$$

Находим коэффициенты уравнения (12): $B = -1$; $C = 1$; $A = D = 0$. Итак, уравнение (12) для поверхности Γ_1^2 записывается в виде уравнения Лапласа $x_{2u_1u_1} + x_{2u_2u_2} = 0$. Для любой области, гомеоморфной кругу, с достаточно регулярной границей существует решение этого уравнения такое, что $x_{2u_1}^2 + x_{2u_2}^2 \neq 0$.

Для поверхности, достаточно близкой к Γ_1^2, уравнение (12) будет мало отличаться от уравнения Лапласа. Поэтому *для области, гомеоморфной кругу, на поверхности, достаточно близкой к* Γ_2^1, *существует регулярная поверхность с данным грассмановым образом.*

Укажем следующую геометрическую интерпретацию типов грассманова образа: *если в точке P тип гиперболический, то существует некоторое множество опорных гиперплоскостей E^3 в точке P, т. е. эти гиперплоскости касаются F^2 в точке P и в некоторой окрестности ее пересекаются с F^2 только в точке P. В параболическом случае эта гиперплоскость единственна либо не существует. В эллиптическом случае опорная гиперплоскость не существует.*

Для доказательства запишем уравнения поверхности при подходящем выборе координат в таком виде: $x_3 = (\alpha - a) x_1^2 + (\alpha + a) x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)$; $x_4 = \beta x_1^2 + 2b x_1 x_2 + \beta x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)$. Пусть уравнение гиперплоскости E^3 есть $-\sin\varphi\, x_3 + \cos\varphi x_4 = 0$. Тогда с точностью до бесконечно малых $o(x_1^2 + x_2^2)$ для пересечения $F^2 \cap E^3$ имеем уравнение $x_1^2[-\sin\varphi(\alpha - a) + \cos\varphi\beta] + 2b\cos\varphi x_1 x_2 + x_2^2[-\sin\varphi(\alpha + a) + \cos\varphi\beta] = 0$. Решаем это уравнение относительно отношения x_1/x_2. Дискриминант уравнения имеет вид $(b^2 - \beta^2)\cos^2\varphi + 2\beta\alpha\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi[\alpha^2 - a^2]$. Если $\Delta < 0$, то найдутся углы φ, при которых этот дискриминант отрицателен. Следовательно, при этих значениях φ пересечение $F^2 \cap E^3$ состоит только из точки. Аналогично можно рассмотреть во всех остальных случаях.

От типа грассманова образа поверхности существенно зависит ее локальное поведение. Рассмотрим проекции поверхности $F^2 \subset E^4$ на трехмерное пространство $E^3(\tau)$, проведенное через нормальную плоскость N_x, касательный вектор τ и точку P. Пусть e_1 и e_2 — ортонормированный базис в касательной плоскости, выбранный, как и выше, согласованно с эллипсом нормальной кривизны, e_3 и e_4 — нормали к F^2, параллельные его главным осям. Пусть вектор $\tau = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, x_i — декартовы координаты, соответствующие базису e_i с началом в точке P. Тогда радиус-вектор проекции F^2 на $E^3(\tau)$, которую мы обозначим $\overline{F}^2$, с точностью до бесконечно малых третьего порядка относительно x_i, $i = 1, 2$, имеет вид $\bar{r} = \tau(\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2) + e_3[(\alpha + a) x_1^2 + (\alpha - a) x_1^2] + e_4[\beta x_1^2 + 2b x_1 x_2 + \beta x_2^2]$. Будем предполагать, что не все величины α, β, a, b равны нулю одновременно. В зависимости от направления τ точка P для поверхности может быть обыкновенной точкой или особой. Направление τ, для которого $\overline{F}^2(\tau)$ не имеет особенности в точке P, определяется из уравнения

$$ab + a\beta\sin 2\theta - \alpha b\cos 2\theta = 0. \qquad (15)$$

Если все коэффициенты этого уравнения равны нулю, то $\overline{F}^2(\tau)$ при любом τ является плоскостью. Далее будем предполагать, что не все коэффициенты этого уравнения равны нулю.

Корни θ_i уравнения (15) отсутствуют, если $(a\beta)^2 + (\alpha b)^2 - (ab)^2 < 0$. При этом условии при любом τ поверхность $\bar{F}^2$ в точке P имеет особенность (рис. 1). Вид поверхности $\bar{F}^2$ напоминает двулистную риманову поверхность. В точке P поверхность касается направления τ. Пересечение поверхности плоскостью, проведенной через τ и $n \in N_x$, даёт две параболы, касающиеся τ, ветви которых направлены в разные полуплоскости. Для некоторого сечения одна из этих парабол вырождается в полупрямую, являющуюся линией самопересечения поверхности. Из вида проекции $\bar{F}^2$ легко вытекает, что поверхность F^2 с эллиптическим грассмановым образом не может быть замкнутой.

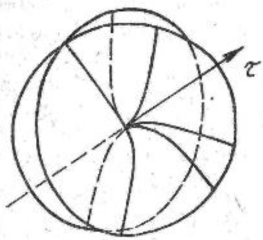


Рис. 1.

Если $(ab)^2 - (a\beta)^2 - (\alpha b)^2 < 0$, и $\theta \neq \theta_i$, то $\bar{F}^2$ является поверхностью с особенностью в точке P, заключенной в некотором двугранном угле. Вид $\bar{F}^2$ изображен на рис. 2. Пересечение $\bar{F}^2$ с плоскостью, проведенной через τ и $n \in N_x$ состоит либо из одной точки P, либо из двух парабол, касающихся τ, и ветви которых направлены в одну полуплоскость. В частном случае одна из парабол вырождается в полупрямую. Если $\theta = \theta_i$, то проекции не имеют особенности и являются параболическими цилиндрами. Поверхности, изображенные на рис. 1 и 2, были изучены в дипломной работе студентки ХГУ О. Грицань.

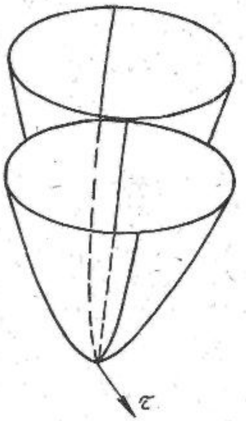


Рис. 2.

Если $(a\beta)^2 + (\alpha b)^2 - (ab)^2 = 0$, то в общем случае существует лишь одно пространство $E^3(\tau_1)$ такое, что проекция $\bar{F}^2$ не имеет особенности в точке P. Если $\tau \neq \tau_1$, то $\bar{F}^2$ имеет вид, изображенный на рис. 3. Пересечение $\bar{F}^2$ с плоскостью, проходящей через τ и вектор $n \in N_x$, состоит из параболы и прямой. Для некоторого сечения эта парабола вырождается в полупрямую, которая является линией самопересечения поверхности. Поверхность $\bar{F}^2$ касается плоскости $\alpha b^2 x_3 + \beta a^2 x_4 = 0$ и лежит в одном из полупространств, на которые $E^3(\tau)$ разбиваются этой плоскостью.

Рассмотрим теперь замкнутую регулярную поверхность Γ^2 в $G_{2,4}$. При каких условиях Γ^2 является грассмановым образом замкнутой поверхности $F^2 \subset E^4$?

Пусть F^2 — замкнутая поверхность в E^4 и $E^3(e)$ — произвольное трехмерное пространство, не пересекающее F^2, e — нормаль к $E^3(e)$. Передвигая $E^3(e)$ параллельно, мы коснемся поверхности F^2 в некоторой точке x. Касательная плоскость к F^2 в точке x содержится в $E^3(e)$. Следовательно, нормальная плоскость N_x к F^2 содержит вектор e. Рассмотрим многообразие всех двумерных плоскостей в E^4, проходящих через вектор e. Ему соответствует замкнутое двумерное подмногообразие в $G_{2,4}$. Обозначим его через $\Lambda^2(e)$. Итак, *грассманов образ замкнутой регулярной поверхности пересекается с любым циклом* $\Lambda^2(e)$. Аналогичное условие имеет место *для замкнутого регулярного подмногообразия* $F^m \subset E^{m+p}$: *грассманов образ пересекается с любым вполне геодезическим циклом* $G_{p-1,\, m+p}(e)$. Является ли указанное необходимое условие на Γ^2 и достаточным для существования F^2?

Условие замкнутости можно записать с помощью плюккеровых координат. Пусть $q^{i_1 i_2}$ — компоненты бивектора, касательного к замкнутой ориентируемой поверхности F^2. Разобьем F^2 на односвязные области U_k, в каждой из которых введем ортогональные координаты u_1, u_2. Тогда в каждой из этих областей можно записать $q^{i_1 i_2} = x_{u_1}^{[i_1} x_{u_2}^{i_2]} \times \times \frac{1}{\sqrt{EG}}$. Интеграл от $q^{i_1 i_2}$ по площади области U_k выражается через интеграл по границе области

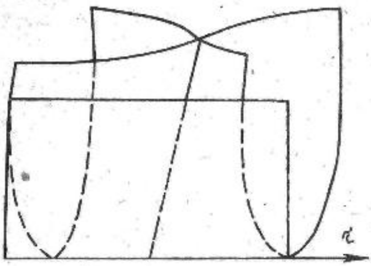


Рис. 3.

$$\int\limits_{U_k} q^{i_1 i_2}\, dS = \int\limits_{\partial U_k} x^{[i_1}\, dx^{i_2]}.$$

Заметим, что интеграл по границе ∂U_k зависит лишь от ее ориентации и не зависит от выбора координат на U_k. Возьмем сумму интегралов по всем областям U_k. Так как для двух соседних областей границы противоположно ориентированы, то в сумме граничные интегралы взаимно уничтожаются. Следовательно, интегралы по всей поверхности F^2 от $q^{i_1 i_2}$ равны нулю. Компоненты бивектора касательной плоскости связаны с компонентами бивектора нормальной плоскости соотношением $q^{i_1 i_2} = p^{i_1 i_2}$, где i_1, i_2, i_3, i_4 — четная подстановка чисел 1, 2; 3, 4. Итак, имеем следующее необходимое условие на Γ^2 для существования замкнутой поверхности F^2: *найдется такая положительная функция* $\psi = \frac{dS}{d\tilde{S}}$, *что для всех плюккеровых координат*

$$\int\limits_{\Gamma^2} p^{i_1 i_2} \psi\, d\tilde{S} = 0.$$

Аналогичное условие можно записать для грассманова образа любого замкнутого подмногообразия евклидова пространства.

Грассманов образ можно использовать и для введения локальных геометрических инвариантов распределения k-мерных плоскостей T^k в евклидовом пространстве E^{k+p}. Рассмотрим плоскость E^l,

$l \leqslant p$, проходящую через точку x_0 и ортогональную к $T^k(x_0)$. Если каждой точке $x \in E^l$ из достаточно малой окрестности точки x_0 поставить в соответствие плоскость $T^k(x)$, то получим отображение этой окрестности из E^l в некоторое, в общем случае, l-мерное подмногообразие $\Gamma^l \subset G_{k,\,k+p}$. Назовем кривизной распределения плоскостей по отношению к площадке E^l отношение l-мерных элементов площадей грассманова образа и его прообраза:

$$K(T^k,\ E^l) = \frac{d\widetilde{S}^l}{dS^l}.$$

В заключение заметим, что при $k > 2$ можно построить пример k-мерной поверхности $\Gamma^k \subset G_{k,\,k+p}$, для которой не существует, даже локально, k-мерная поверхность в E^{k+p}, имеющая Γ^k своим грассмановым образом. Грассманов образ неголономного многообразия изучался также в работе [3].

Список литературы: 1. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948. 316 с. 2. *Wong Y. C.* Sectional curvatures of Grassmann manifolds.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, vol. 60, No 1, p. 75-79. 3. *Wagner V.* Differential geometry of the family of R_k, s in R_n and of the family of totally geodesic S_{k-1}, s in S_{n-1} of positive curvature.— Мат. сборник, 1942, т. 10 (52), с. 165—212.

Поступила 20 декабря 1978 г.

УДК 513

Я. П. Бланк, Е. А. Королев

О ПОВЕРХНОСТЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА, НЕСУЩИХ БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО СЕТЕЙ ПЕРЕНОСА

Задача отыскания поверхностей, несущих бесконечное множество сетей переноса, решена для евклидова пространства [1], квазиэллиптического [2] и изотропного [3]. В работе [4] сделана попытка решения этой задачи для эллиптического пространства. Настоящая работа содержит ее полное решение.

В эллиптическом пространстве поверхность переноса допускает каноническое представление

$$x = a(u)\,b(v), \tag{1}$$

где x, a, b — кватернионы.

В работе [5] было доказано, что в эллиптическом пространстве сеть переноса характеризуется тем, что она чебышевская и клиффордово сопряженная. Напомним, что две прямые, касательные к поверхности, называются клиффордово сопряженными, если одна служит образующей цилиндра из параллелей Клиффорда, описанного около поверхности, а вторая — касательной к линии касания этого цилиндра с поверхностью.

Аналитически условие клиффордовой сопряженности выражается так:

$$(b_{ik} + \varepsilon_{ik})\, du^i \delta u^k = 0, \tag{2}$$

где b_{ik} — второй тензор поверхности; ε_{ik} — дискриминантный тензор.

Если координатная сеть есть сеть переноса, то

$$E = G = 1;\ F = \cos\omega;\ M = b_{12} = \sin\omega. \tag{3}$$

Уравнение (2) для сети

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u,\ v);\ \frac{\delta v}{\delta u} = \psi(u,\ v) \tag{4}$$

принимает вид $L + 2\varphi\sin\omega + N\varphi\psi = 0$, $L = b_{11}$, $N = b_{22}$, или $N\psi + \sin\omega = -L/\varphi - \sin\omega = \sigma$. Чтобы сеть (4) была чебышевской, функция σ, в силу условий Сервана — Бианки, должна удовлетворить уравнениям

$$\begin{aligned}(\sigma^2 + b)\,\sigma_u &= a_1\sigma^3 + b_1\sigma^2 + c_1\sigma + d_1;\\ (\sigma^2 + b)\,\sigma_v &= a_2\sigma^3 - b_2\sigma^2 + c_2\sigma - d_2,\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}&b = LN - M^2;\ a_1 = (\ln N^2\sin\omega)_u;\ b_1 = L\left(\ln\frac{L^3\sin^2\omega}{N}\right)_v -\\ &-4\sin\omega\,(\ln N)_u;\ c_1 = LN\left(\ln\frac{LN}{\sin^2\omega}\right)_u + 2\,\frac{\sin^3\omega}{N}\left(\ln\frac{N}{\sin^2\omega}\right)_v -\\ &-b\left(\ln\frac{N^2}{\sin\omega}\right)_u;\ d_1 = \sin^3\omega\left(\frac{LN}{\sin^2\omega}\right)_u - \frac{\sin^4\omega}{N}\left(\frac{LN}{\sin^2\omega}\right)_v\end{aligned} \tag{6}$$

и a_2, b_2, c_2, d_2 получаются из a_1, b_1, c_1, d_1, если в них поменять местами u и v, а также L и N.

В формулах (6) для коэффициентов a_1, b_1, c_1, d_1 использованы уравнения Петерсона — Кодацци

$$L_v\sin\omega = N\omega_u;\ N_u\sin\omega = L\omega_v. \tag{7}$$

Условие интегрируемости системы (5), по сокращении на $\sigma^2 + b$, принимает вид

$$\begin{aligned}&[(a_1)_v - (a_2)_u]\,\sigma^3 + [(b_1)_v + (b_2)_u]\,\sigma^2 + [(c_1)_v - (c_2)_u]\,\sigma +\\ &+ [(d_1)_v - (d_2)_u] + A(\sigma^2 - b) + B\sigma + C = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}A &= -(a_1b_2 + b_1a_2);\ B = 2(a_1c_2 - c_1a_2) + a_2b_u - a_1b_v;\\ C &= b_1c_2 + c_1b_2 - 3(a_1d_2 + d_1a_2) - b_2b_u - b_1b_v.\end{aligned} \tag{9}$$

Если поверхность несет бесконечное множество сетей переноса, система (5) вполне интегрируема и все коэффициенты при разных степенях σ в уравнении (8) равны нулю:

$$(a_1)_v - (a_2)_u = 0; \tag{10}$$

$$(b_1)_v + (b_2)_u + A = 0; \tag{11}$$

$$(c_1)_v - (c_2)_u + B = 0; \tag{12}$$

$$(d_1)_v + (d_2)_u - Ab + C = 0. \tag{13}$$

Из условия (10) следует $\left(\ln\frac{N}{L}\right)_{uv} = 0$, поэтому

$$L = \lambda U(u);\ N = \lambda V(v). \tag{14}$$

Подставив эти значения в уравнения Петерсона — Кодацци (7), находим

$$U\frac{\partial\lambda}{\partial v}\sin\omega=\lambda V\omega_u;\ \ V\frac{\partial\lambda}{\partial u}\sin\omega=\lambda U\omega_v.$$

Положим $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\mu$. Тогда эти уравнения примут вид

$$U(\ln\lambda)_v=V(\ln\mu)_u;\ V(\ln\lambda)_u=U(\ln\mu)_v. \tag{15}$$

Если $U=0$, из формул (14) следует $L=0$, а так как по уравнениям (3) $M=\sqrt{EG-F^2}=\sin\omega$, то кривизна поверхности $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}+1=0$. По теореме Бианки на поверхности нулевой кривизны в эллиптическом пространстве существует сеть переноса, состоящая из асимптотических линий. Если поверхность нелинейчатая, то эта сеть переноса единственная [6]. Если же поверхность нулевой кривизны линейчатая, то ее прямолинейные образующие являются параллелями Клифорда и на ней сеть переноса допускает функциональный произвол, так как любая расположенная на ней кривая при параллельном переносе вдоль параллелей Клифорда образует сеть переноса. Исключив этот тривиальный случай, будем в дальнейшем считать $U\neq 0$, $V\neq 0$. Вместо переменных u, v можно ввести новые независимые переменные u_1, v_1 по формулам

$$u_1=\int U\,du;\ v_1=\int V\,dv.$$

Уравнения (15) преобразуются так: $(\ln\lambda)_{v_1}=(\ln\mu)_{u_1}$; $(\ln\lambda)_{u_1}=(\ln\mu)_{v_1}$, откуда следует

$$\lambda=\frac{h(u_1+v_1)}{f(u_1-v_1)};\ \mu=h(u_1+v_1)\cdot f(u_1-v_1).$$

Мы можем считать, что функции h и f одновременно не сводятся к постоянным, так как тогда $\omega=\text{const}$, а, следовательно, $K=0$. Внеся в уравнение Гаусса $LN+\sin\omega\cdot\omega_{uv}=0$ значения L, N и ω, преобразуем его к виду

$$h(1+h^2f^2)^3+4f^3[(1+h^2f^2)(h''f-hf'')-\\-2hf(h'^2f^2-h^2f'^2)]=0. \tag{16}$$

Возможны три случая:

$$1^0.\ h'\neq 0,\ f'\neq 0;\ 2^0.\ h'=0;\ h=h_0\neq 0;\ f'\neq 0;\\ 3^0.\ f'=0;\ f=f_0\neq 0;\ h'\neq 0. \tag{17}$$

В случае 1^0, решая функциональные уравнения (16), находим

$$h'^2=-\frac{h^6}{4}+C\frac{h^4}{4}+C_1\frac{h^2}{2}+C_2;\\ 4f^2f'^2=-4C_2f^6+2C_1f^4-Cf^2-1. \tag{18}$$

В случае 2^0

$$4f^2f'^2=(1+h_0^2f^2)^2(4h_1f^2-1),\ (h_0,\ h_1 — \text{постоянные}). \tag{19}$$

В случае 3°

$$4f^4h'^2 = (1 + f_0^2h^2)(4f_1f_0^4 - h^2), \quad (f_0, \ f_1 \text{ — постоянные}). \tag{20}$$

Заметим, что уравнения (19) и (20) представляют собой частные случаи уравнений (18). Действительно, уравнение (19) можно записать так: $4f^2f'^2 = -4C_2f^6 + 2C_1f^4 - Cf^2 - 1$, где

$$C_2 = -h_1h_0^4; \ C_1 = 4h_0^2h_1 - h_0^4/2; \ C = 2h_0^2 - 4h_1,$$

но при этих значениях постоянных C, C_1, C_2 обращается в тождество и первое уравнение системы (18), если в нем положить $h = h_0 = \text{const}$. Аналогичное имеет место и в случае уравнения (20).

Рассмотрим уравнение (11). Положив $\sin\omega = 2\nu$, находим для a_1, a_2, b_1, b_2 из формул (6) значения

$$a_1 = U\frac{\partial \ln(\lambda^2\nu)}{\partial u_1}; \ a_2 = V\frac{\partial \ln(\lambda^2\nu)}{\partial v_1}; \ b_1 = \lambda UV\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\ln\frac{\lambda^2\nu^2}{V}\right) - \\ - 8U_\nu\frac{\partial \ln\lambda}{\partial u_1}; \ b_2 = \lambda UV\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\ln\frac{\lambda^2\nu^2}{U}\right) - 8U_\nu\frac{\partial \ln\lambda}{\partial v_1}.$$

Уравнение (11) можно записать так:

$$\left(\frac{b_1}{\lambda^2\nu}\right)'_v + \left(\frac{b_2}{\lambda^2\nu}\right)'_u = 0,$$

или, в развернутом виде, обозначив $\lambda\nu = e^\theta$, так:

$$-\ddot{U} - \ddot{V} + 3(\dot{U}\theta_{u_1} + \dot{V}\theta_{v_1}) + 2U(\theta_{u_1u_1} - \theta_{u_1}^2) + \\ + 2V(\theta_{v_1v_1} - \theta_{v_1}^2) + 8e^\theta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_{u_1v_1} = 0. \tag{21}$$

Здесь $\dot{U} = \frac{dU}{du_1}$; $\ddot{U} = \frac{d^2U}{du_1^2}$; $\dot{V} = \frac{dV}{dv_1}$; $\ddot{V} = \frac{d^2V}{dv_1^2}$. Условие (12) принимает вид

$$\ddot{V} - \ddot{U} + \dot{U}\left[3\theta_{u_1} - 2\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right)\right] - \dot{V}\left[3\theta_{v_1} - 2\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)\right] + \\ + 2U\left[\frac{C}{2}\left(h^2 - \frac{1}{f^2}\right) + 2C_1 - \frac{8h'f'}{hf}\right] - 2V\left[\frac{C}{2}\left(h^2 - \frac{1}{f^2}\right) + \right. \\ \left. + 2C_1 + \frac{8h'f'}{hf}\right] = 0. \tag{22}$$

Из этих уравнений удается определить функции U, V. Запишем уравнения (21) и (22) следующим образом: $-\ddot{U} - \ddot{V} + A_1\dot{U} + B_1\dot{V} + D_1(U + V) + E_1 = 0$; $-\ddot{U} + \ddot{V} + A_2\dot{U} + B_2\dot{V} + D_2U + D_3V = 0$. Отсюда следует

$$2\ddot{U} = (A_1 + A_2)\dot{U} + (B_1 + B_2)\dot{V} + (D_1 + D_2)U + \\ + (D_1 + D_3)V + E_1 = 0; \tag{23}$$

$$2\ddot{V} = (A_1 - A_2)\dot{U} + (B_1 - B_2)\dot{V} + (D_1 - D_2)U + \\ + (D_1 - D_3)V + E_1 = 0. \tag{24}$$

2*

Продифференцируем равенство (13) по v_1, (14) по u_1 и, внеся в полученные выражения значения $\ddot{U}$, $\ddot{V}$ из формул (23), (24), получим

$$P_1\dot{U} + \left(N_1 - K_1\frac{h'}{h}\frac{f'}{f}\right)\dot{V} + 2\left(\frac{h'}{h}M_1 + \frac{f'}{f}Q_1\right)U +$$

$$+ 2\left(\frac{h'}{h}T_1 + \frac{f'}{f}S_1\right)V + 8\left(C - 12C_2\frac{f^2}{h^2}\right)\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right) = 0; \qquad (25)$$

$$\left(N_1 + K_1\frac{h'}{h}\frac{f'}{f}\right)\dot{U} + P_1\dot{V} + 2\left(\frac{h'}{h}T_1 - \frac{f'}{f}S_1\right)U +$$

$$+ 2\left(\frac{h'}{h}M_1 - \frac{f'}{f}Q_1\right)V + 8\left(C - 12C_2\frac{f^2}{h^2}\right)\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) = 0, \qquad (26)$$

где P_1, Q_1, S_1, T_1, M_1, N_1, K_1 имеют следующие значения:

$$P_1 = \left(h^2 + \frac{1}{f^2}\right)\left(h^2 - \frac{1}{f^2} - 16C_2\frac{f^2}{h^2}\right);$$

$$Q_1 = 4h^4 + 32C_2\frac{1}{h^2} - C\left(h^2 + \frac{1}{f^2}\right) - 12C_2\left(f^2 + \frac{1}{h^2}\right);$$

$$M_1 = \frac{4}{f^4} - 32C_2f^2 + \left(h^2 + \frac{1}{f^2}\right) + 12C_2\left(f^2 + \frac{1}{h^2}\right);\; N_1 = 4\left\{2\frac{h'^2}{h^2}\times\right.$$

$$\times\frac{2 - h^2f^2}{1 + h^2f^2} + \frac{f'^2}{f^2}\cdot\frac{6h^2f^2}{1 + h^2t^2} - \frac{3}{4}h^4 - \frac{1}{4f^4} - \frac{6C_2}{h^2} + 8C_2f^2 - 4C_1 + \qquad (27)$$

$$\left. + \frac{C}{2f^2}\right\};\; S_1 = -12C_2\left(f^2 + \frac{1}{h^2}\right) + C\left(h^2 + \frac{1}{f^2}\right) + 32C_2\frac{1}{h^2} +$$

$$+ 4h^4 + 8C_1;\; T_1 = 12C_2\left(f^2 + \frac{1}{h^2}\right) - C\left(h^2 + \frac{1}{h^2}\right) -$$

$$- 32C_2f^2 + \frac{4}{f^4} + 8C_1;\; K_1 = 16.$$

Умножим равенство (25) на $\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}$, а (26) на $\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}$ и вычтем второе из первого — свободные члены уничтожаются:

$$\dot{U}\left[\left(N_1 + K_1\frac{f'^2}{f^2} - P_1\right)\frac{h'}{h} + \left(N_1 + K_1\frac{h'^2}{h^2} + P_1\right)\frac{f'}{f}\right] +$$

$$+ \dot{V}\left[\left(P_1 - N_1 - K_1\frac{f'^2}{f^2}\right)\frac{h'}{h} + \left(P_1 + N_1 + K_1\frac{h'^2}{h^2}\right)\frac{f'}{f}\right] +$$

$$+ 2U\left[(T_1 - M_1)\frac{h'^2}{h^2} + (Q_1 - S_1)\frac{f'^2}{f^2} + (T_1 - S_1 + M_1 - Q_1)\frac{h'}{h}\frac{f'}{f}\right] +$$

$$+ 2V\left[(M_1 - T_1)\frac{h'^2}{h^2} + (S_1 - Q_1)\frac{f'^2}{f^2} +\right.$$

$$\left. + (T_1 - S_1 + M_1 - Q_1)\frac{h'}{h}\cdot\frac{f'}{f}\right] = 0.$$

Этому уравнению можно придать следующий вид:

$$\dot{U}\left(\frac{h'}{h}N_3 + \frac{f'}{f}M_3\right) + \dot{V}\left(-\frac{h'}{h}N_3 + \frac{f'}{f}M_3\right) + 2U\left(T_3 +\right.$$

$$\left. + S_3\frac{h'}{h}\frac{f'}{f}\right) + 2V\left(-T_3 + S_3\frac{h'}{h}\cdot\frac{f'}{f}\right) = 0, \qquad (28)$$

где

$$N_3=\frac{1}{1+h^2f^2}\Big[-8h^4+h^6f^2-9\frac{h^2}{f^2}-\frac{4}{f^4}+16C_1h^2f^2+$$
$$+C_2\left(\frac{8}{h^2}+40f^2-24h^2f^4\right)-C\left(6h^2+2h^4f^2+\frac{2}{f^2}\right)\Big];$$
$$M_3=\frac{1}{1+h^2f^2}\Big[-10h^4-h^6f^2-7\frac{h^2}{f^2}-\frac{2}{f^4}+16C_1h^2f^2+$$
$$+C_2\left(-\frac{8}{h^2}+8f^2-40h^2f^4\right)+C\left(2h^2+2h^4f^2+\frac{2}{f^2}\right)\Big]; \tag{29}$$
$$T_3=-\left(h^2+\frac{1}{f^2}\right)\Big[2CC_2\left(\frac{1}{h^2}-f^2\right)+\left(2C_1+\frac{C^2}{2}\right)\left(h^2-\frac{1}{f^2}\right)-$$
$$-\frac{C}{2}\left(h^4+\frac{1}{f^4}\right)-8C_1C_2\frac{f^2}{h^2}\Big];\; S_3=-8\left(2C_3\frac{f^2}{h^2}+h^2-\frac{1}{f^2}\right)\left(h^2+\frac{1}{f^2}\right).$$

Заметим, что если продифференцировать уравнение (21) по u_1, v_1 мы вновь получим то же самое уравнение (21). Если же продифференцировать (22) по u_1, v_1 и из полученного уравнения исключить $\ddot{U}-\ddot{V}$ с помощью (22), придем к следующему уравнению:

$$\left(\frac{h'}{h}N_4+\frac{f'}{f}M_4\right)\dot{U}-\left(\frac{h'}{h}N_4-\frac{f'}{f}M_4\right)\dot{V}+$$
$$+\left(T_4+\frac{h'}{h}\frac{f'}{f}S_4\right)2U-\left(T_4-\frac{h'}{h}\frac{f'}{f}S_4\right)2V=0, \tag{30}$$

где

$$N_4=2\left(-4C_2\frac{f^2}{h^2}+h^2+\frac{2}{f^2}+C\right);\; M_4=2\Big(4C_3\frac{f^2}{h^2}+2h^2+$$
$$+\frac{1}{f^2}-C\Big);\; T_4=2C_2C\left(\frac{1}{h^2}-f^2\right)+\left(h^2-\frac{1}{f^2}\right)\left(2C_1+\frac{C^2}{2}\right)-$$
$$-\frac{C}{2}\left(h^4+\frac{1}{f^4}\right)-8C_1C_2\frac{f^2}{h^2};\; S_4=8\left(h^2-\frac{1}{f^2}+2C_3\frac{f^2}{h^2}\right). \tag{31}$$

Так как $T_4=-T_3$, $S_4=-S_3$, при сложении уравнений (28) и (30) члены с U, V взаимно уничтожаются и получается уравнение, содержащее лишь члены $\dot{U}$, $\dot{V}$, а именно:

$$\dot{U}\left[(N_3+N_4)\frac{h'}{h}+(M_3+M_4)\frac{f'}{f}\right]+\dot{V}\Big[-(N_3+N_4)\frac{h'}{h}+$$
$$+(M_3+M_4)\frac{f'}{f}\Big]=0. \tag{32}$$

Но

$$N_3+N_4=M_3+M_4=\frac{1}{1+h^2f^2}\Big[3h^6f^2+\frac{h^2}{f^2}+$$
$$+16C_1h^2f^2+C_2(24f^2-32h^2f^4)-2Ch^2\Big], \tag{33}$$

уравнение (32) принимает вид

$$(N_3+N_4)\left[\left(\frac{h'}{h}+\frac{f'}{f}\right)\dot{U}+\left(\frac{f'}{f}-\frac{h'}{h}\right)\dot{V}\right]=0. \tag{34}$$

Первый множитель $N_3 + N_4$ отличен от нуля. Действительно, в противном случае по формуле (33) $\frac{3h^6 + 16C_1h^2 + 24C_2}{h^2} = \frac{2C + 32C_2f^4 - 1/f^2}{f^2}$, т. е. $h' = f' = 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно,

$$\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)\dot{U} + \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h}\right)\dot{V} = 0. \tag{35}$$

Продифференцируем уравнение (35) по u_1 и по v_1:

$$\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{u_1}\dot{U} + \left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)\ddot{U} + \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h}\right)_{u_1}\dot{V} = 0; \tag{36}$$

$$\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{v_1}\dot{U} + \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h}\right)_{v_1}\dot{V} + \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h}\right)\ddot{V} = 0. \tag{37}$$

Умножим соотношение (36) на $\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}$ и (37) на $\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}$ и сложим полученные уравнения, учтя (35), получим

$$\left(\frac{h'^2}{h^2} - \frac{f'^2}{f^2}\right)(\ddot{U} - \ddot{V}) + \left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{u_1}\left[\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right)\dot{U} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)\dot{V}\right] = 0. \tag{38}$$

С другой стороны, продифференцировав уравнение (35) по u_1, v_1, получим

$$\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{v_1}(\ddot{U} - \ddot{V}) + \left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{u_1v_1}\dot{U} + \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h}\right)_{u_1v_1}\dot{V} = 0. \tag{39}$$

Исключив $\ddot{U} - \ddot{V}$ из соотношений из (38) и (39), получим

$$\tilde{A}\dot{U} - \tilde{B}\dot{V} = 0, \tag{40}$$

где $\tilde{A} = \left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{u_1}\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{v_1}\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) - \left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{u_1v_1}\left(\frac{h'^2}{h^2} - \frac{f'^2}{f^2}\right)$;

$$\tilde{B} = \left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{u_1}\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{v_1}\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right) - \left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right)_{u_1v_1}\left(\frac{h'^2}{h^2} - \frac{f'^2}{f^2}\right).$$

Здесь $\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)_{u_1v_1} = A_{21}\frac{h'}{h} + B_{21}\frac{f'}{f}$; $\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right)_{u_1v_1} = A_{21}\frac{h'}{h} - B_{21}\frac{f'}{f}$,

где $A_{21} = -2h^4 + \frac{C}{2}h^2 + 2C_2\frac{1}{h^2}$; $B_{21} = \frac{2}{f^4} + \frac{C}{2f^2} + 2C_2f^2$. Если обозначить $C_{21} = \left(\frac{h''}{h} - \frac{h'^2}{h^2}\right)^2 - \left(\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2}\right)^2$, уравнение (40) принимает вид

$$\dot{U}\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right)\left[C_{21} - \left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)\left(A_{21}\frac{h'}{h} + B_{21}\frac{f'}{f}\right)\right] -$$
$$-\dot{V}\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right)\left[C_{21} - \left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right)\left(A_{21}\frac{h'}{h} - B_{21}\frac{f'}{f}\right)\right] = 0. \tag{40'}$$

Определитель системы двух линейных и однородных относительно U, V уравнений (35), (40′)

$$\Delta = 2\frac{h'}{h}\frac{f'}{f}\left(2C_{21} - \left(\frac{h'^2}{h^2} - \frac{f'^2}{f^2}\right)(A_{21} - B_{21}\right).$$

Пусть $h' \cdot f' \neq 0$. Если $\Delta = 0$, то

$$2\left[\left(\frac{Ch^2}{4} - \frac{h^4}{2} + \frac{C^2}{h^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2f^4} - C_2 f^2 - \frac{C}{4f^2}\right)^2\right] =$$
$$= \left(-2h^4 + \frac{Ch^2}{2} + 2C_2\frac{1}{h^2} - \frac{2}{f^4} - \frac{C}{2f^2} - 2C_2 f^2\right) \times$$
$$\times \left(-\frac{h^4}{4} + \frac{Ch^2}{4} + \frac{C^2}{h^2} + \frac{C}{4f^2} + \frac{1}{4f^2} + \frac{1}{4f^4} + C_2 f^2\right).$$

Продифференцировав это тождество по $\alpha = u_1 + v_1$, $\beta = u_1 - v_1$, получим

$$0 = \left(-8h^3 + Ch - \frac{4C^2}{h^3}\right)\left(-\frac{C}{2f^3} - \frac{1}{f^5} + 2C_2 f\right) +$$
$$+ \left(-h^3 + \frac{Ch}{2} - \frac{2C_2}{h^3}\right)\left(\frac{8}{f^5} + \frac{C}{f^3} - 4C_2 f\right),$$

что противоречит допущению $h'f' \neq 0$. Итак, в случае 1^0, т. е. если $h'f' \neq 0$, $\Delta \neq 0$, следовательно, $\dot{U} = \dot{V} = 0$. Подставим эти значения в уравнения (22) и (21); уравнение (22) принимает вид

$$\left[\frac{C}{2}\left(h^2 - \frac{1}{f^2}\right) + 2C_1\right](U - V) - \frac{8h'f'}{hf}(U + V) = 0, \tag{41}$$

уравнение (21) — вид

$$(U + V)\left[3C_2\left(f^2 - \frac{1}{h^2}\right) - C_1\right] + C + 12C_2\frac{f^2}{h^2} = 0, \tag{42}$$

где U, V — постоянные. Дифференцируя (42) по α, β, находим $C_2 = 0$; $C = C_1(U + V)$. Дифференцируя уравнение (41) по α, β, находим

$$\left(\frac{h'}{h}\right)_\alpha \left(\frac{f'}{f}\right)_\beta (U + V) = 0, \quad \text{так как} \quad \left(\frac{h'}{h}\right)_\alpha \neq 0; \quad \left(\frac{f'}{f}\right)_\beta \neq 0,$$

отсюда следует $U + V = 0$; $C = 0$. Итак, при $h'f' \neq 0$ $C = C_1 = C_2 = 0$, U, V — постоянны, причем $U + V = 0$.

Пусть теперь $h'f' = 0$. При этом надлежит рассмотреть два случая: 2^0 $h' = 0$, $h = h_0 \neq 0$, $f' \neq 0$; 3^0 $f' = 0$, $f = f_0 \neq 0$, $h' \neq 0$. В случае 2^0 из уравнения (35) следует $U = \varkappa u_1 + \varkappa_1$; $V = -\varkappa v_1 + \varkappa_2$. В случае 3^0 получим $U = \varkappa u_1 + \varkappa_1$; $V = \varkappa v_1 + \varkappa_2$ ($\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — постоянные). Подставив эти значения в уравнения (21) и (22), убедимся, что $\varkappa = 0$; $\varkappa_1 = \varkappa_2$. Итак, во всех трех случаях (1^0, 2^0, 3^0) функции U и V постоянны.

Остается рассмотреть при этих значениях U и V уравнение (43). Оно принимает следующий вид:

$$UV\left\{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2\left(\ln\frac{\lambda}{\nu}\right)_{u_1v_1}+\frac{\lambda}{\nu}\left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_{u_1}\frac{\nu_{v_1}}{\nu}+\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_{v_1}\frac{\nu_{u_1}}{\nu}\right]-U\left\{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_{u_1u_1}+\right.\right.$$

$$\left.+2\frac{\lambda_{u_1}}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_{u_1}\right\}-V\left\{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_{v_1v_1}+2\frac{\lambda_{v_1}}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_{v_1}\right\}=0.$$

Внеся сюда значения $\lambda = h/f$, $\nu = hf/(1+h^2f^2)$ и воспользовавшись выражением (18) для h', f', в случае 1^0 приходим к многочлену относительно h, f с постоянными коэффициентами, из которого следует $h' = f' = 0$, что противоречит предположению 1^0.

В случае 2^0 приходим к многочлену относительно f, из которого следует $f' = 0$, в случае 3^0 — к многочлену относительно h, из которого следует $h' = 0$, что противоречит предположениям 2^0, 3^0. Следовательно, единственными поверхностями эллиптического пространства, несущими бесконечное множество сетей переноса, служат линейчатые поверхности с образующими — параллелями Клиффорда.

Список литературы. 1. *Lie S.* Die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem.— Leipz. Ber., 1896, 48 h. 2. 3, S. 141—198. 2. *Моторный Л. Т.* О поверхностях, несущих континуум сетей квазипереноса.— Укр. геометр. сб., 1965. вып. 1, с. 75—86. 3. *Stachel H.* Quasielliptische Schiebflächen mit unendlich vielen Schiebnetzen. I. II.— Math. Nachr., 1975, Bd 68, S. 239—254, 255—264. 4. *Бланк Я. П.* О поверхностях изотропного пространства, несущих бесконечное множество сетей переноса.— Укр. геометр. сб., 1975, № 17, с. 23—33. 5. *Бланк Я. П.* К проблеме Н. Г. Чеботарева об обобщенных поверхностях переноса.— Зап. мат. отд. физ.-мат. ф-та ХГУ и Харьк. мат. о-ва, 1952, № 23, с. 103—112. 6. *Бланк Я. П.* О поверхностях сдвига эллиптического пространства.— Зап. науч.-исслед. ин-та математики и механики ХГУ и Харьк. мат. о-ва, 1950, № 20, с. 61—76.

Поступила 4 декабря 1978 г.

УДК 513

А. А. Борисенко

О ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ С ПОЛЕМ ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Пусть F^l — поверхность в римановом пространстве R^n. Если в каждой точке поверхности F^l все вторые квадратичные формы погружения и метрический тензор одновременно приводятся к диагональному виду, то мы говорим, что на поверхности существует поле главных направлений. В работе [1] Ю. А. Аминов доказал, что на поверхности F^l отрицательной двумерной кривизны в евклидовом пространстве E^n поле главных направлений, если оно существует, голономно, т. е. линии кривизны можно взять за координатные. Это обобщено на случай поверхностей отрицательной внешней двумерной кривизны в пространствах: сферическом S^n, комплексном проективном и кватернионном проективном [2].

Здесь рассматриваются компактные поверхности отрицательной внешней кривизны в сферическом пространстве, на которых существует поле главных направлений.

Теорема 1. *Пусть F^l — компактная поверхность в сферическом пространстве S^n, кривизна которой по двумерным площадкам <1. Если на F^l существует поле главных направлений, то тор T^l является конечнократным накрывающим многообразием поверхности F^l.*

Теорема 2. *Пусть F^l — компактная поверхность в S^n, кривизна которой по двумерным площадкам удовлетворяет либо неравенству $0 \leqslant K < 1$, либо $K \leqslant 0$. Если на поверхности существует поле главных направлений, то кривизна $K=0$ и поверхность локально изометрична евклидову пространству.*

Теорема 2 является обобщением следующей теоремы, доказанной ранее [3]: пусть F^l — компактная поверхность постоянной кривизны $K<1$ в S^{2l-1}. Тогда кривизна равна нулю. В этом случае также на поверхности существует поле главных направлений, хотя при ее доказательстве использована голономность поля асимптотических направлений [3].

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на следующие леммы:

Лемма 1 [2]. *Пусть F^l — поверхность отрицательной внешней кривизны в S^n. Если на F^l существует поле главных направлений, то оно голономно.*

Лемма 2 [4]. *Если на торе T^l задана метрика неположительной двумерной кривизны, то она плоская.*

Лемма 3 [5]. *Если на торе T^l задана метрика неотрицательной двумерной кривизны, то она плоская.*

Доказательство теоремы 1 идет аналогично доказательству теоремы 3 в работе [3]. Пусть Φ — конечнократное накрывающее многообразие поверхности F^l, на котором поля главных направлений образуют глобальные векторные поля V_i [3]. На многообразии Φ индуцируется метрика, локально изометричная метрике на F^l. Из леммы 1 следует, что локально линии кривизны (интегральные траектории векторных полей V_i) можно брать за координатные линии. Поэтому на многообразии Φ можно ввести локально-евклидову метрику. Накрывающим пространством для компактного локально-евклидова многообразия является тор T^l [6, с. 212]. Тор T^l является накрывающим пространством и для поверхности F^l.

Доказательство теоремы 2. На торе T^l индуцируется метрика, локально изометричная метрике поверхности F^l. Она удовлетворяет условию либо леммы 2, либо леммы 3. Поэтому на торе индуцируется плоская метрика. Поэтому кривизна поверхности равна нулю.

Замечание. В евклидовом пространстве не существует компактных поверхностей отрицательной двумерной кривизны, которые несли бы поле главных направлений. Накрывающим пространством для такой поверхности должен быть тор. Но на торе нельзя, как следует из леммы 2, задать метрику отрицательной кривизны.

Список литературы: 1. *Аминов Ю. А.* О погружении областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— Докл. АН СССР, 1977, с. 236, № 3, с. 521—524. 2. *Лисица В. Т.* О голономности главных направлений подмногообразий отрицательной внешней кривизны в пространственных формах.— Укр. геометр. сб., 1978, вып. 22, с. 96—102. 3. *Борисенко А. А.* О компактных поверхностях отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве.— Укр. геометр. сб., 1976, вып. 19, с. 9—11. 4. *Law-son, Yau S.* Compact manifolds nonpositive curvature.— J. Dif. Geometry, 1972, vol. 6, No 1—2, p. 211-229. 5. *Cheeger I., Gromoll D.* Manifolds of nonnegative curvature.— Ann. of Math., 1972, vol. 96. No 3, p. 413—443. 6. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometri, vol. 1. N. Y., 1963. 329 p.

Поступила 25 декабря 1978 г.

УДК 513

А. А. Борисенко

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССАХ ПОНТРЯГИНА КОМПАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. О внутренней кривизне k-седловых поверхностей. Полная l-мерная поверхность F^l в евклидовом пространстве E^n называется k-седловой, если для любой r-мерной плоскости E^r, $2 \leqslant r \leqslant l$, будет $H_k(F^l, F^l \cap E^r) = 0$, где H_k — k-мерная группа гомологий Виеториса с коэффициентами из группы целых чисел [1]. Это определение принадлежит С. З. Шефелю. Когда $k = 2$, то двумерная кривизна поверхности неположительна.

Пусть M^l — риманово многообразие, M^l_q — касательное пространство в точке q, $P \subset M^l_q$ есть k-мерная плоскость M^l_q. Проведем из точки q геодезические, касающиеся плоскости P. В достаточно малой окрестности точки q геодезические образуют регулярную k-мерную поверхность $F(P, q)$. Кривизна Липшица —

Киллинга геодезической поверхности $F(P, q)$ называется k-мерной секционной кривизной в направлении плоскости P. Если в касательном пространстве M_q^l ввести ортонормированный базис такой, что первые k векторов $e_1, \ldots, e_k \in P$, то k-мерная секционная кривизна

$$\gamma_k(P, q) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} k!} \sum_{i, j \in S_k} \varepsilon(i) \varepsilon(j) R_{i_1 i_2 j_1 j_2} \ldots R_{i_{k-1} i_k j_{k-1} j_k}.$$

Здесь S_k — множество всех подстановок степени k; $\varepsilon(i)$ — знак подстановки i; R_{ijkl} — компоненты тензора кривизны многообразия M^l в точке q. Кривизна определена только для четных k.

Введем определение ранга второй квадратичной формы поверхности F^l в римановом пространстве R^{l+p}. Пусть $A_{is}(\boldsymbol{n}, q)$ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности F^l в точке q относительно единичной нормали $\boldsymbol{n}$. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}, q)$ — матрица коэффициентов, $r(\boldsymbol{n}, q) = \operatorname{rang} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}, q)$. Рангом второй квадратичной формы поверхности F^l в точке q называется целое неотрицательное число $r(q) = \max\limits_{\boldsymbol{n} \in S^{p-1}} r(\boldsymbol{n}, q)$, где S^{p-1} — сфера единичных нормалей в точке q, $r_0 = \max r(q)$ по всем точкам поверхности. Индексом $\nu(q)$ точки $q \in F^l$ называется максимальная размерность подпространства $L(q) = F_q^l$ такого, что $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}, q)\boldsymbol{y} = 0$ для любого $\boldsymbol{y} \in L(q)$, где $\boldsymbol{n}$ — произвольная нормаль в точке q.

Лемма 1. [1]. *Пусть F^l — полная поверхность в E^{l+p}. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* 1) *F^l — k-седловая поверхность;* 2) *для любой точки $q \in F^l$ и произвольной нормали $\boldsymbol{n}$ в этой точке вторая квадратичная форма F^l относительно нормали $\boldsymbol{n}$ имеет не более $k-1$ характеристического числа одного знака.*

Отсюда следует, что для k-седловой поверхности $r_0 \leqslant 2(k-1)$.

Лемма 2. *Если ранг второй квадратичной формы поверхности в E^{l+p} не превосходит $2(k-1)$, то $\gamma_{2k} = 0$.*

Теорема 1. *Пусть F^l — k-седловая поверхность в E^{l+p}. Тогда:* (*а*) $(-1)^{k-1}\gamma_{2(k-1)} \geqslant 0$; *б*) $\gamma_{2k} = 0$.

Справедливо в некотором смысле обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть F^l — поверхность неположительной k-мерной кривизны в E^{l+p}. Тогда F^l есть $(P(k-1)+1)$-седловая поверхность.*

Теорема имеет смысл при $p \leqslant (l-1)/(k-1)$. При $k = 2$ она доказана В. В. Глазыриным [1].

Доказательство теоремы 1.

А. Не ограничивая общности, можно считать, что размерность поверхности равна $2(k-1)$. Пусть q — произвольная точка $F^{2(k-1)}$; $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_p$ — ортонормированный базис нормалей в точке q; A_{ij}^r — коэффициенты второй квадратичной формы относительно нормали $\boldsymbol{n}_r$. Тогда $\sum \lambda_r A_{ij}^r$ — коэффициенты второй квадратичной формы относительно нормали $\boldsymbol{n}=\sum_r \lambda_r \boldsymbol{n}_r$. Из леммы 1 следует, что

$$(-1)^{(k-1)} \det\left(\sum_r \lambda_r A_{ij}^r\right) \geqslant 0 \tag{1}$$

при любых λ_r. Возьмем $2^{2(k-1)}$ единичных нормалей с координатами $\lambda_r = \pm 1/\sqrt{p}$. Вычислим детерминанты матриц коэффициентов вторых квадратичных форм относительно этих нормалей и сложим их. Мы получим сумму детерминантов матриц $A_{i_1,\dots,i_p}$, составленных из столбцов матриц A_{ij}^r, но из каждой матрицы входит четное число столбцов. Детерминанты матриц $A_{i_1,\dots,i_p}$, в которые входят нечетное число столбцов из одной матрицы, взаимно уничтожаются при сложении. Заметим, что полученная сумма неотрицательна. С другой стороны, с помощью формулы Гаусса получим, что

$$\gamma_{2(k-1)} = \frac{1}{2^{k-1}(2k-2)!} \sum_{r_1=1}^{p} \dots \sum_{r_p=1}^{p} \sum_{j} \Big[\sum_{i} \varepsilon(i)\,\varepsilon(j) \times$$
$$\times \left(A_{i_1 j_1}^{r_1} A_{i_2 j_2}^{r_1} - A_{i_1 j_2}^{r_1} A_{i_2 j_1}^{r_1}\right) \dots \left(A_{i_{2k-3} j_{2k-3}}^{r_p} \times\right.$$
$$\left.\times A_{i_{2k-2} j_{2k-2}}^{r_p} - A_{i_{2k-3} j_{2k-2}}^{r_p} A_{i_{2k-2} j_{2k-3}}^{r_p}\right) \Big].$$

Из теоремы Лапласа следует, что в квадратных скобках стоит детерминант матрицы $A_{r_1,\dots,r_p}$, в которой столбцы с номерами j_1, j_2 взяты из матрицы A_{ij}^r, а с номерами j_{2k-3}, j_{2k-2} — из матрицы $A_{ij}^{r_p}$, т. е. $2(k-1)$-мерная кривизна есть сумма детерминантов матриц $A_{r_1,\dots,r_p}$ с четным числом столбцов из различных матриц A_{ij}^r. Используя неравенство (1) и последнее замечание, находим, что $(-1)^{k-1}\gamma_{2(k-1)} \geqslant 0$.

Б. Пусть F $2k$-мерная поверхность. Тогда $\det(\lambda_r A_{ij}^r) = 0$ при любых λ_r, так как ранг второй квадратичной формы $\leqslant 2(k-1)$. Поэтому $\gamma_{2k} = 0$.

Доказательство леммы 2 совпадает с доказательством пункта Б.

О кривизнах по площадкам меньшей размерности ничего определенного сказат нельзя. Это следует из примера гиперповерхности, заданной явно в виде $z = x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2 - x_k^2 - \dots - x_{2(k-1)}^2$.

Пусть задана система квадратичных уравнений

$$A_{ij}^r x^i x^j = 0,\ i,\ j = 1,\ \dots,\ l;\ r = 1,\ \dots,\ N. \tag{2}$$

Обозначим через $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ вектор с компонентами $A_{ij}^r x^i x^j$, скобками $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение в E^l.

Лемма 3. [2]. *Если в системе уравнений* (2) $N \leqslant (l-1)/(k-1)$ *и для любых наборов* k *линейно независимых векторов* $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in E^l$, *где* k — *четное число,*

$$\gamma_k = \sum \varepsilon(i)\,\varepsilon(j)\,(\langle A(u_{i_1}, u_{j_1})\,A(u_{i_2}, u_{j_2})\rangle - \langle A(u_{i_1}, u_{j_2})\,A(u_{i_2}, u_{j_1})\rangle)\ldots(\langle A(u_{i_{k-1}}, u_{j_{k-1}}), A(u_{i_k}, u_{j_k})\rangle - \langle A(u_{i_{k-1}}, u_{j_k})\,A(u_{i_k}, u_{j_{k-1}})\rangle) \leqslant 0,$$

то система (2) *имеет нетривиальное действительное решение.*

Доказательство теоремы 2. Пусть F^l — поверхность неположительной k-мерной кривизны в E^{l+p}, где $p \leqslant (l-1)/(k-1)$. Тогда система уравнений $A^r_{ij}x^ix^j = 0$, где A^r_{ij} — коэффициенты вторых квадратичных форм относительно ортонормированного базиса нормалей n_r в произвольной точке $q \in F^l$, удовлетворяет условию леммы 3. Нетривиальное решение этой системы — это асимптотическое направление поверхности. Отсюда следует, что для каждой нормали есть не более $p(k-1)$ главных кривизн одного знака. Из леммы 1 следует седлообразность поверхности.

II. О характеристических классах Понтрягина компактных поверхностей в сферическом пространстве. В работе [2] было дано определение k-мерной внешней кривизны для l-мерных поверхностей в римановом пространстве R^{l+p}. Для плоскости $P \subset F^l_q$, натянутой на взаимно перпендикулярные векторы $e_1, \ldots, e_k$, k-мерная кривизна определяется по следующей формуле:

$$\bar{\gamma}_k(P, q) = \frac{1}{2^{k/2}k!}\sum \varepsilon(i)\,\varepsilon(j)\,\bar{R}_{i_1i_2j_1j_2}\ldots\bar{R}_{i_{k-1}i_kj_{k-1}j_k},$$

где $\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - \tilde{R}_{ijkl}$, а $\tilde{R}_{ijkl}$, R_{ijkl} — компоненты тензора кривизны объемлющего и погруженного многообразия.

Для внешней кривизны поверхностей в римановом пространстве справедливо утверждение леммы 2.

Лемма 4 [2]. *Пусть F^l есть l-мерная поверхность неположительной k-мерной секционной кривизны в R^{l+p}. Тогда* $r \leqslant 2p(k-1)$, $\nu \geqslant l-(k-1)(p^2+p)$.

Характеристические классы Понтрягина компактного дифференцируемого многообразия M^l — это классы когомологий $p_k(M^l) \in H^{4k}(M^l, Z)$. Если на многообразии M^l задана связность и $\Omega = (\Omega_{ij})$ — кососимметрическая матрица кривизны этой связности, то замкнутая внешняя дифференциальная форма, отвечающая характеристическому классу Понтрягина, имеет вид

$$p_k(M^l) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}(2k)!}\sum_{i,\,j}\delta^{j_1,\,\ldots,\,j_{2k}}_{i_1,\,\ldots,\,i_{2k}}\Omega^{i_1}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_{2k}}_{j_{2k}},$$

где суммирование по всем упорядоченным подмножествам $(i_1, \ldots, i_{2k})$ из $(1, \ldots, l)$ и всем перестановкам $(j_1, \ldots, l_{2k})$ из $(i_1, \ldots, i_{2k})$, $\delta^{j_1,\ldots,j_{2k}}_{i_1,\ldots,i_{2k}}$ — знак подстановки $\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_{2k} \\ j_1, & \ldots, & j_{2k}\end{pmatrix}$ [3]. Классы Понтрягина с действительными коэффициентами компактного ориентируемого многообразия постоянной двумерной кривизны равны нулю [4]. Для многообразий постоянной s-мерной кривизны $p_k(M^l) = 0$ для всех $k \geqslant s/2$ [5].

Для поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в сферическом пространстве имеется аналогичное утверждение.

Теорема 3. *Если ранг второй квадратичной формы компактной поверхности F^l в сферическом пространстве $S^{l+p} \leqslant r_0 < l$, то $p_k(F^l) = 0$ при $k > r_0$.*

Замечание. Теорема нетривиальна при $r_0 < l/4$.

Следствие 1. Пусть F^l — компактная поверхность неположительной внешней s-мерной кривизны в S^{l+p}. Тогда $p_k(F^l) = 0$ при $k > 2p(s-1)$.

Для поверхностей, удовлетворяющих следствию 1, по лемме 4 $r \leqslant 2p(s-1)$. Непосредственно применяя теорему 3, получим нужное утверждение.

Следствие 2. Пусть F^l — компактная поверхность в сферическом пространстве S^{l+p}, кривизна которой по двумерным площадкам $\leqslant 1$. Тогда $p_k(F^l) = 0$ при $k > 2p$.

Поверхности, удовлетворяющие условию следствия 2, являются поверхностями неположительной внешней двумерной кривизны.

Теорема 4. *Если индекс второй квадратичной формы компактной поверхности F^l в S^{l+p} постоянен и равен $\nu_0 \geqslant 2$, то $p_k(F^l) = 0$ при $k \geqslant 1 + \frac{1}{4}(l - \nu_0)$.*

Эта теорема является следствием теоремы 5.2 из работы [6].

Следствие 3. Пусть F^l — компактная поверхность неположительной s-мерной кривизны в S^{l+p}. Если индекс $\nu \geqslant 2$ постоянен, то $p_k(F^l) = 0$ при $k \geqslant 1 + \frac{1}{4}(s-1)(p^2+p)$.

Следствие 4. Пусть F^l — компактная поверхность в S^{l+p}, внутренняя кривизна которой по двумерным площадкам $\leqslant 1$. Если индекс $\nu \geqslant 2$ постоянен, то $\bar{p}_k(F^l) = 0$ при $k \geqslant 1 + \frac{1}{4}(p^2+p)$.

Для поверхности F^l в S^{l+p} компоненты тензора кривизны поверхности F^l имеют вид

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_{r=1}^{p} (A^r_{ik}A^r_{jl} - A^r_{il}A^r_{jk}); \tag{3}$$

$$\Omega_{ij} = R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{4}$$

где ω^k — базисные линейные формы в касательном пространстве F^l_q;

$$\overline{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}); \tag{5}$$

$$\overline{\Omega}_{ij} = \overline{R}_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l - \omega^l \wedge \omega^j; \tag{6}$$

(6) — внешняя форма кривизны. Введем формы

$$\Theta^q_{i_1 \dots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_j \delta^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_q} \Omega_{j_1 j_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{q-1} j_q}; \tag{7}$$

$$\overline{\Theta}^q_{i_1\dots i_q} = \frac{1}{q!}\sum_i \delta^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_q}\overline{\Omega}_{j_1 j_2}\wedge\dots\wedge\overline{\Omega}_{j_{q-1}j_q}. \qquad (8)$$

Форма (7) рассматривалась в работе [5]. Пусть $A_s = (A_{1s}, A_{2s})$ — разбиение $(i_1, \dots, i_q)$ на два множества $A_{1s} = (l_1, \dots, l_{q-2s})$, $A_{2s} = (m_1, \dots, m_{2s})$. Тогда, учитывая формулы (6), (7), (8), мы получим, что

$$\Theta^q_{i_1\dots i_q} = \frac{1}{q!}\sum_{s=0}^{q/2}\sum_{A_s}(q-2s)!\ \omega^{l_1}\wedge\dots\wedge\omega^{l_{q-2s}}\wedge\overline{\Theta}^{2s}_{m_1\dots m_{2s}}, \qquad (9)$$

где $\sum\limits_{A_s}$ — сумма по всем разбиениям $(i_1, \dots, i_q)$ на множества A_{1s}, A_{2s}.

Лемма 5. *Если поверхность F^l в S^{l+p} имеет постоянную внешнюю q-мерную кривизну, то*

$$\overline{\Theta}^q_{i_1\dots i_q} = C\omega^{i_1}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q} \qquad (10)$$

для всех $1\leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant l$.

В частности, если $\overline{\gamma}_q = 0$, то

$$\overline{\Theta}^q_{i_1\dots i_q} = 0. \qquad (11)$$

Форма $\overline{\Theta}^q_{i_1\dots i_q}$ обладает теми же формальными свойствами, что и форма $\Theta^q_{i_1\dots i_q}$. Для формы $\overline{\Theta}^q_{i_1\dots i_q}$ выполняется аналог первого и второго тождества Бианки для тензора кривизны. Это легко следует из статьи [6]. Для формы $\Theta^q_{i_1\dots i_q}$ аналогичное утверждение доказано в работе [5].

Доказательство теоремы 3. Характеристический класс Понтрягина $p_k(M^l)$ представляется также замкнутой дифференциальной $4k$-формой

$$\frac{[(2k)!]^2}{(2^k k!)^2(2\pi)^{2k}}\sum_i \Theta^{2k}_{i_1\dots i_{2k}}\wedge\Theta^{2k}_{i_1\dots i_{2k}}, \qquad (12)$$

где суммирование по всем размещениям $i = (i_1, \dots, i_{2k})$ из $(1, \dots, l)$ [5]. Так как ранг второй квадратичной формы $F^l \leqslant r_0$, где r_0 — четное число, то по лемме 2 $\overline{\gamma}_{r_0+2s} = 0$ при $s \geqslant 1$. По лемме 5

$$\overline{\Theta}^{r_0+2s}_{i_1\dots i_{r_0+2s}} = 0. \qquad (13)$$

Из формулы (9) и уравнения (13) следует, что

$$\Theta^{2k}_{i_1\dots i_{2k}} = \frac{1}{2k!}\sum_{s=0}^{r_0/2}\sum_{A_s}\omega^{l_1}\wedge\dots\wedge\omega^{l_{2k-r_0/2}}\wedge\omega^{l_{2k-2s}}\dots\wedge\overline{\Theta}^{2s}_{m_1\dots m_{2s}}.$$

Внешнее произведение этой формы на себя содержит в каждом слагаемом внешнее произведение $\omega^{l_1}\wedge\dots\wedge\omega^{l_{2k-r_0/2}}\dots\wedge\omega^{l_{2k-2s}}\times\wedge\omega^{l'_1}\dots\wedge\omega^{l'_{2k-r_0/2}}\dots\wedge\omega^{l'_{2k-2s'}}$, где $l_1, \dots, l_{2k-2s}$, $l'_1, \dots,$

$i'_{2k-2s'}$ — элементы из $(i_1, \ldots, i_{2k})$. Если $k > r_0$, то два из этих индексов должны совпадать и внешнее произведение равно нулю. Отсюда следует $p_k(F^l) = 0$.

III. Об эйлеровой характеристике компактных поверхностей в евклидовом пространстве. Поверхность F^l в E^{l+p} называется выпуклой, если в каждой точке существует ортогональный базис нормалей $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_p$, для которых вторые квадратичные формы знакоопределены. Если одна из форм является положительно определенной, то поверхность называется строго выпуклой. Двумерная кривизна строго выпуклых поверхностей положительна.

Теорема 5. *Если F^{2l} — компактная строго выпуклая поверхность в E^{2l+p}, то эйлерова характеристика поверхности положительна.*

Доказательство теоремы 5. Тензор кривизны определяет симметричную квадратичную форму кривизны Φ на пространстве бивекторов $\Lambda^2 F^l_q$; $\Phi = R_{ijkl} a^{ij} a^{kl}$, где $a = (a^{ij})$ — компоненты бивектора. По формуле Гаусса

$$R_{ijkl} = \sum_r (A^r_{ik} A^r_{jl} - A^r_{il} A^r_{jk}).$$

Формы $(A^r_{ik} A^r_{jl} - A^r_{il} A^r_{jk}) a^{ij} a^{kl} \geqslant 0$, а одна из них положительно определена. Поэтому Φ положительно определена. Джонсон доказал: если форма кривизны компактного четномерного риманова многообразия положительно определена, то эйлерова характеристика положительна [3]. Поверхности положительной двумерной кривизны коразмерности 2 в евклидовом пространстве являются строго выпуклыми [7].

Список литературы: 1. *Глазырин В. В.* Топологические и метрические свойства k-седловых поверхностей.— Докл. АН СССР, 1977, т. 233, с. 1028—1030. 2. *Борисенко А. А.* Полные l-мерные поверхности неположительной внешней кривизны в римановом пространстве.— Мат. сборник, 1977, т. 104 (146); 4(12), с. 559-577. 3. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry, vol. 2. N. Y., 1969. 470 p. 4. *Chern S. S.* On the curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold.— Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1955, vol. 20, p. 117-126. 5. *Thorpe J.* Sectional curvatures and characteristic classes.— Ann. of Math., 1964, vol. 80, No 3, p. 429-443. 6. *Gray A.* Some relations between curvature and characteristic classes.— Math. Ann., 1970, B. 184, H. 4, p. 257-268. 7. *Weinstein A.* Positively curved n-manifolds in R^{n+2}.— J. Dif. Geometry, 1970, vol. 4, p. 1—4.

Поступила 25 декабря 1978 г.

УДК 513

Т. А. Горзий, Л. Л. Гулида

О СТРОЕНИИ ОБЩЕЙ ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Регулярные выпуклые гиперповерхности сепарабельного гильбертова пространства H исследованы, например, в работах [1; 2; 3]. Одно свойство общих выпуклых гиперповерхностей пространства H было доказано авторами [4]. В настоящей заметке рассмотрена теорема о связи между строением полных выпуклых гиперповерхностей пространства H и строением их сферического изображения. Эта теорема доказана для гиперповерхностей класса C^∞ [5]. Оказалось, что предложенный в статье [5] метод позволяет провести доказательство и для общих выпуклых гиперповерхностей.

Дадим некоторые определения. Под полной выпуклой общей гиперповерхностью F будем понимать границу выпуклого тела K в H. Будем говорить, что гиперповерхность F ограничивает некоторый луч, если существует некоторый луч $\{x + ty,\ t \geqslant 0\}$, который целиком состоит из точек тела K. Если такого луча не существует, то F не ограничивает ни одного луча.

В каждой точке выпуклой гиперповерхности существует опорная гиперплоскость к F [6]. Внешней нормалью к опорной гиперплоскости в точке $x_0 \in F$ назовем всякий единичный вектор n такой, что $(n,\ x - x_0) \geqslant 0$ для всех точек $x \in F$.

Рассмотрим единичную гиперсферу Σ пространства H: $\Sigma = \{x \in H \mid \|x\| = 1\}$. Множество всех единичных внешних нормалей к F описывает на Σ множество, которое называется сферическим изображением F. Будем обозначать его $\nu(F)$. Имеет место следующая

Теорема: 1) *F ограничена тогда и только тогда, когда $\nu(F)$ совпадает с Σ;* 2) *F неограничена, она ограничивает хотя бы один луч тогда и только тогда, когда $\nu(F)$ лежит в замкнутой полугиперсфере:* 3) *F неограничена, она не ограничивает ни одного луча тогда и только тогда, когда $\nu(F)$ всюду плотно на Σ и не имеет внутренних точек.*

Так как доказательство теоремы аналогично данному в работе [5], в настоящей заметке оно не приводится.

Существование полных выпуклых гиперповерхностей, которые не ограничены и не ограничивают при этом ни одного луча, является спецификой бесконечномерного случая. Пример такой гиперповерхности класса C^∞ построен в работе [5]. Приведем еще один пример гиперповерхности такого строения, не предполагающий ее регулярности.

Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в l_2. Рассмотрим замкнутое выпуклое множество K, которое является общей частью замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостями с внешними нормалями e_i и $-e_i$ и отстоящих от начала координат на расстояние α_i соответственно. Выберем последовательность (α_i) такую, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_i < \ldots$.

Множество K содержит всякий шар пространства радиуса меньше α_1 с центром в начале координат, поэтому K — выпуклое тело. Граница F тела K представляет собой неограниченную гиперповерхность, так как на ней лежат точки $x = (0, 0, \ldots, \pm\alpha_i, 0, \ldots)$, для которых $\|x\| = \alpha_i$, а последовательность (α_i) неограничена по условию. Покажем, что при этом F не ограничивает ни одного луча. В самом деле, пусть $x \in K$, $y \in K$. Рассмотрим прямую

$$z = tx + (1-t)\,y, \ -\infty < t < +\infty. \tag{1}$$

Она пересекается с каждой парой гиперплоскостей $(ze_i) = \pm\alpha_i$ при $t = (y_i \pm \alpha_i)/(y_i - x_i)$, если $y_i - x_i \neq 0$. Это означает, что отрезок $tx + (1-t)\,y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, параллелен плоскостям с внешними нормалями $\pm e_i$, но тогда прямая (1) пересекается со всеми другими гиперплоскостями, ограничивающими K. Пусть z_1 и z_2 — точки пересечения (1) с гиперплоскостями $(ze_i) = \alpha_i$ и $(ze_i) = -\alpha_i$ соответственно. Легко подсчитать длину отрезка $tz_1 + (1-t)\,z_2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; она равна $\|z_1 - z_2\| = \left|\frac{2\alpha_i}{y_i - x_i}\right| \|x - y\|$, где $y_i - x_i \neq 0$. Этот отрезок полностью состоит из точек K, если прямая (1) параллельна e_i; в противном случае отрезок прямой (1), лежащий внутри K, не превосходит $\min\limits_i \left\{\left|\frac{2\alpha_i}{y_i - x_i}\right| \|x - y\|\right\}$.

Таким образом, гиперповерхность F отсекает отрезок конечно длины от прямой, проходящей через произвольные точки x и тела K, и, следовательно, гиперповерхность F не ограничивает н одного луча.

Список литературы: 1. *Jonker L.* Hypersurfaces of nonnegative curvatures i Hilbert space.— Trans. Amer. Math. Soc., 1972, vol. 169, p. 468-474. 2. *Тита ренко Ю. В.* Теорема Бонне для поверхностей в гильбертовом пространстве.- Вестн. Моск. ун-та, 1971, № 5, с. 72—80. 3. *Кизнер З. И.* О поверхностя в гильбертовом и псевдогильбертовом пространствах.— Вестн. Моск. ун-та 1975, № 2, с. 74—82. 4. *Горзий Т. А., Гулида Л. Л.* Об одном свойстве вы пуклых гиперповерхностей гильбертова пространства.— В кн.: Тезисы докл Всесоюз. науч. конф. по неевклидовой геометрии «150 лет геометрии Лобачев ского». Казань, 1976, с. 86. 5. *Andrade R. L.* Complete convex hypersurface of a Hilbert space.— J. Dif. Geometry, 1975, vol. 4, p. 491-499. 6. *Бураго Ю. Д. Залгаллер В. А.* Достаточные признаки выпуклости.— Записки науч. семинаро ЛОМИ, 1974, т. 45, с. 3—52.

Поступила 20 ноября 1978 г

УДК 513

А. М. Гурин

О ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ВЕРШИНАМИ

В. А. Залгаллером и его учениками найден полный перечень выпуклых правильногранных многогранников, т. е. многогранников, все грани которых — правильные многоугольники [1]. А. Д. Милка предложил задачу, двойственную задаче, решенной В. А. Залгаллером: перечислить выпуклые многогранники с равноугольными вершинами, т. е. с вершинами, у каждой из которых все плоские углы равны.

Заметим, что условие правильности грани содержит два требования: равенство внутренних углов и равенство сторон. Если к требованию равноугольности вершин добавить второе требование — равенство ребер, получим двенадцать многогранников. Это пять правильных, пять правильногранных ($2M_1$, $2M_3$, M_{25}, Π_3+3M_2, $2M_2+A_4$ [1]) и два ромбоэдра [2, табл. VII, фиг. 2, 14]. Если в качестве второго добавить требование равенства двугранных углов, получим 32 многогранника. Многогранники, удовлетворяющие указанным дополнительным требованиям, а также вырожденные многогранники (т. е. дважды покрытые многоугольники) в предлагаемой статье не рассматриваются. В работе устанавливаются следующие факты:

Теорема 1. *С точностью до изоморфизма существует только конечное множество различных замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, кроме двух бесконечных серий бипирамид и многогранников, двойственных антипризмам.*

Теорема 2. *Если бесконечный полный выпуклый многогранник с равноугольными вершинами имеет конечное ребро, то число его граней конечно.*

1. Введем следующие обозначения и термины. M — выпуклый многогранник с равноугольными вершинами. *Тип грани*, например (l, l, n), означающий треугольную грань с двумя l-гранными и одной n-гранной вершинами; допускаются сокращения: $(l, l, n) \equiv (l^2, n)$; если две k-гранные вершины имеют разные плоские углы, их обозначения отличаются верхними индексами: $(3, 4, 3', 5)$. *Блоком* называется абстрактный многогранник с краем; край состоит из свободных ребер и углов. $[k, n]$ — ребро соединяющее вершины k и n (т. е. k-гранную и n-гранную вершины). $\{k, n\}$ — двугранный угол при ребре $[k, n]$. $[k, l, m]$ — угол, образованный ребрами $[k, l]$ и $[l, m]$. $v(k)$ — мера плоского угла k-гранной вершины. $\Theta[k, l] = v(k) + v(l)$ — сумма плоских углов в концах ребра $[k, l]$; $\Theta(k, l, m, n)$ — сумма внутренних углов грани (k, l, m, n).

2. Кроме известных формул суммы внутренних углов выпуклого n-угольника: α) $S_n = \pi(n-2)$ — замкнутого и β) $S_n \geqslant \pi(n-1)$ — бесконечного, — будут использованы следующие очевидные факты, вытекающие из равноугольности вершин многогранника M: γ) $v(k) \leqslant 2\pi/k$; δ) всякая трехгранная вершина — правильная; ε) две трехгранные вершины с общим ребром конгруэнтны (следствие из δ); ζ) две треугольные грани с общим ребром равны; η) у четырехгранной вершины противоположные двугранные углы равны.

3. В лемме 1 устанавливаются все допустимые типы граней многогранника M. Некоторые возможности склеивания граней выясняются в леммах 2—5. В леммах 6—10 исследуется возможность использования ряда блоков как частей многогранника M. В лемме 11 устанавливаются ограничения применимости типов граней, после чего легко доказываются обе теоремы.

4. **Лемма 1.** *Возможные типы конечных граней многогранника содержатся в таблице. Бесконечные грани могут быть лишь следующих типов:* (n), $n = 3, 4, \ldots, \infty$, и $(3, n)$, $n = 3, 4, 5$.

Доказательство легко следует из α, β и γ.

Тип грани	Границы для n	Тип грани	Границы для n	Тип грани	Границы для n
$3^2, n$	3—∞	$3, 11, n$	11—13	$3^2, 4, n$	4—11
$3, 4, n$	4—∞	$4^2, n$	4—∞	$3, 4, 3, n$	4—11
$3, 5, n$	5—∞	$4, 5, n$	5—19	$3^2, 5, n$	5—7
$3, 6, n$	6—∞	$4, 6, n$	6—11	$3, 5, 3, n$	5—7
$3, 7, n$	7—41	$4, 7, n$	7—9	$3, 4^3$	—
$3, 8, n$	8—23	$5^2, n$	5—9	$3, 4^2, 5$	—
$3, 9, n$	9—17	$5, 6, n$	6—7	$3, 4, 5, 4$	—
$3, 10, n$	10—14	$3^3, n$	3—∞	$3^4, n$	3—5

Лемма 2. *Грань* $(3^2, n)$ *принадлежит только правильному тетраэдру.*

Доказательство. Треугольник $(3^2, n)$, согласно ε, равнобедренный, поэтому $v(3) < \pi/2$, $\Theta[3, 3] < \pi$. К ребру $[3, 3]$ таблица разрешает подклеивать треугольник, четырехугольник и пятиугольник. В случае четырехугольника $(3^2, k, l)$ будет $\Theta[k, l] > \pi$; тогда хотя бы $v(k) > \pi/2$ — это угол трехгранной вершины, что противоречит ε. Аналогично устанавливается противоречие для пятиугольника. Треугольник, согласно ξ, можно подклеить только равный исходному. Любая подклейка в два остающиеся свободные угла приводит к тетраэдру, который, в силу δ и ε, будет правильным.

Лемма 3. *Пусть у пары граней (k^3, l) и (m^3, n) или (k^4, l) и (m^4, n) вершины k и m трехгранные и пусть эта пара граней соединена ребром $[k, m]$ или имеет общую вершину. Тогда $v(k) = v(m)$ и $v(l) = v(n)$. Если вершина l трехгранная, то и вершина n тоже трехгранная.*

Доказательство легко следует из α и δ.

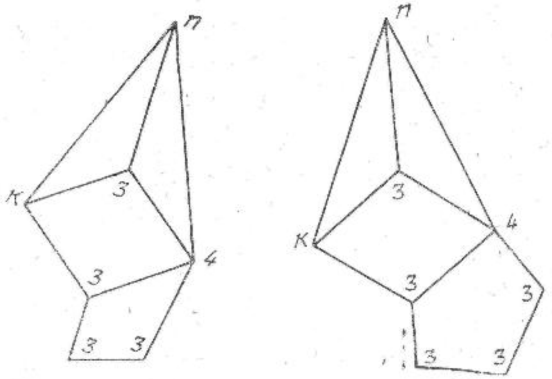


Рис. 1.

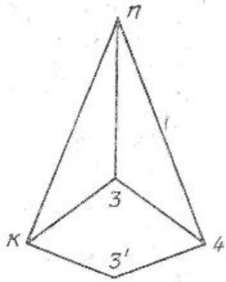


Рис. 2.

Лемма 4. *Если m и n — правильные многогранные углы с общим ребром, то из неравенства $m < n$ следует неравенство $v(m) > v(n)$.*

Доказательство становится очевидным, если рассмотреть сферическое изображение многогранных углов.

Лемма 5. *Для граней $(3^3, n)$ и $(3^4, n)$ имеет место неравенство $v(3) > v(n)$.*

Доказательство следует из α и γ.

5. **Лемма 6.** *На многограннике M для всех n и k не существует блоков, представленных на рис. 1.*

Доказательство. Согласно ε и η вершина 4 у этих блоков правильная, поэтому все трехгранные углы равны. Из ξ следует, что $v(k) = v(4)$, грань $(3, 4, 3, k)$ — параллелограмм, $\Theta[3, 4] = \pi$ и треугольник $(3, 4, n)$ не существует. Лемма доказана.

Лемма 7. *Блок, изображенный на рис. 2, при $n \geqslant 8$ на многограннике M не существует.*

Доказательство. По лемме 1 возможно только $k = 4, 5$. Пусть $k = 5$. Ребро $[5, n]$ имеют грани $(5, n, h)$, где $h = 3, 4, 5$.

При $h=4$, 5 легко получить, что $\Theta(5, 3, 4, 3')<2\pi$. Значит, к ребру $[5, n]$ можно подклеить только $(5, 3, n)$. Так как $v(5)=v(4)$, то по свободному ребру $[4, n]$ можно подклеить только $(4, n, 3)$. Угол $[3', 4, 3]$ имеют грани типа $(3', 4, 3, s)$, где $s=3, \ldots, 7$, и $(3^4, 4)$. Подклеив $(3^3, 4)$ и $(3^4, 4)$, получим блоки, рассмотренные в лемме 6. При $s=6$, 7 будет $\Theta(5, 3, 4, 3')<2\pi$. Остается $s=4$, 5. К свободному углу $[5, 3', s]$ можно подклеить либо $(5, 3', s)$, либо $(5, 3', s, 3)$. Подклеивание треугольника приводит к $v(3)=\pi$. Если подклеить четырехугольник, пятигранный угол станет правильным, как и четырехгранный, что будет противоречить лемме 4.

Пусть $k=4$. Как и при $k=5$, по свободному ребру $[4, n]$. можно подклеить только $(4, n, h)$, где $h=3$, 4, 5, а к свободному углу $[3', 4, h]$ — только $(3', 4, h, s)$, где $s=4$, 5. При $h=3$ по свободному углу $[n, h, s]$ можно подклеить только (n, h, s); затем подклеим $(4, n, h_1)$ и $(h_1, 4, 3', s)$, где $v(h_1)=v(h)$. При $h_1=3$ и $s=4$ получим замкнутый многогранник M $(n=6)$. Остальные варианты не дают многогранников. При $h=4'$ и $s=4$ двугранный угол $[s, 4']$ в два раза больше двугранного угла $\{4, 4'\}$, так как многогранный угол $4'$ составлен из двух трехгранных углов 3. Но это противоречит равенству $v(s)=v(4)$, откуда следует, что $\{4, 4'\}=\{s, 4'\}$; при $s=5$ получается $\Theta(3', 4, 3, 4)<2\pi$. Если $h=5$ и $s=4$, то от пятигранного угла h можно отсечь трехгранный угол 3. Но поскольку двугранный угол $\{5, s\}$ равен двугранному углу $\{4, 3\}$, оставшаяся часть пятигранного угла будет дважды покрытым двугранным углом, что невозможно.

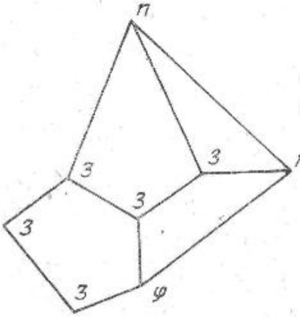


Рис. 3.

Вершины с равными плоскими углами в обозначении будут отличаться нижними индексами.

Лемма 8. *На многограннике M не существует блока, изображенного на рис. 3, при $n\geqslant 12$, каковы бы ни были k и φ.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда $v(n)<\pi/6$, $v(3)>11\pi/18$, $v(k)\in(2\pi/9, \pi/3)$. По лемме 2 будет $k\neq 3$, по лемме 1 — $\varphi=4{,}5$. Пусть $\varphi=4$. К углу $[3, 3, n]$ можно подклеить только четырехугольник $(3^3, n)$, по получившемуся углу $[3, 3, 3]$ — либо $(3^3, n_1)$, либо $(3^4, \varphi_1)$. Подклеив $(3^3, n_1)$, получим свободный угол $[n_1, 3, n]$, к которому никакую грань нельзя подклеить, так как $\Theta[n_1, 3, n]<\pi$. Грань $(3^4, \varphi_1)$ можно подклеить только так, чтобы не получился свободный угол $[\varphi_1, 3, n]$, иначе $v(\varphi_1)=v(k)$ и $\Theta(3^4, \varphi_1)<3\pi$. Подклеив $(3^4, \varphi_1)$, получим угол $[\varphi_1, 3, 4]$, который имеют грани $(\varphi_1, 3, 4)$ и $(\varphi_1, 3, 4, x)$, где $x=3', 4', 5$. Треугольник $(\varphi_1, 3, 4)$ нужно сразу исключить, так как $\Theta(\varphi_1, 3, 4)>\pi$. Подклеим четырехугольник. При $x=3'$ будет $\Theta(\varphi_1, 3, 4, 3')>$

$> 2\pi$. При $x = 4'$, 5 к свободному углу $[x, 4, k]$ можно подклеить только треугольник; тогда $v(3) = 3\pi/5 < 11\pi/18$, что невозможно.

Пусть $\varphi = 5$. Аналогичным построением получим свободный угол $[\varphi_1, 3, 5]$, причем $\Theta(\varphi_1, 3, 5) > \pi$. Подклеим затем четырехугольник $(\varphi_1, 3, 5, x)$, где $x = 3'$ и $v(3') < v(3)$. Если $\varphi_1 = 4$, то $v(3') = v(3)$, что противоречит неравенству $v(3') < v(3)$. Пусть $\varphi_1 = 5$. Подклеив грань $(3^3, n)$, получим угол $[3, 3, 5]$, в который можно вклеить $(3^2, 5, k_1)$ или $(3^4, 5)$. Если вклеить $(3^4, 5)$, то пятигранный угол станет правильным и снова будет $v(3') = v(3)$. Вклеим $(3^2, 5, k_1)$. По свободному ребру $[k_1, 5]$ можно подклеить $(k_1, 5, t)$ или $(k_1, 5, 3^2)$. Подклеив $(k_1, 5, t)$, по свободному углу $[t, \varphi_1, 3]$ можно будет подклеить треугольник или четырехугольник. При треугольнике получим $v(k_1) = v(3')$, что невозможно, а при четырехугольнике — снова $v(3') = v(3)$. Если же подклеить $(k_1, 5, 3^2)$, пятигранный угол станет правильным и снова будет $v(3') = v(3)$. Лемма доказана.

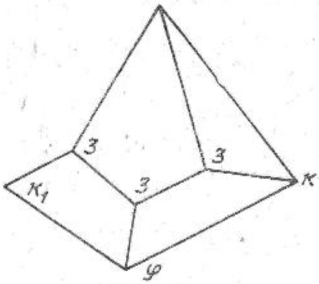


Рис. 4.

Лемма 9. *Блок, изображенный на рис. 4, при $k = 4{,}5$ и $n \geqslant 12$ на многограннике M не существует.*

Доказательство. Из условий леммы следует $v(n) < \pi/6$, $v(3) > 11\pi/18$, $v(k) \in (2\pi/9, \pi/3)$, $k \neq 3$ (лемма 2), $\varphi = 4{,}5$ и $v(\varphi) > v(k)$.

Пусть $k = 4$. Тогда $\varphi \neq 4$, иначе $v(\varphi) = v(k)$. Положим $\varphi = 5$. По ребру $[k, n]$ подклеим $(3, k, n)$; тогда в угол $[5, k, 3]$ можно вклеить только $(5, k, 3^2)$. Рассмотрим двугранный угол $\{5, k\}$. В вершине k его можно представить как сумму двух равных двугранных углов. В вершине же 5 его можно разбить на три двугранных угла, причем два из них равны между собой и больше соответствующих углов при вершине k, что невозможно.

Пусть $k = 5$. По свободному ребру $[5, n]$ подклеим $(3, 5, n)$; по ребру $[3, n]$ этого треугольника подклеим грань $(3^3, n)$, а в свободный угол $[3, 3, 5]$ вклеим $(3^2, 5, \varphi_1)$, где $\varphi_1 = 4{,}5$; получим свободный угол $[\varphi, 5, \varphi_1]$. Так как $v(5) < \pi/3$, а φ и φ_1 принимают значения 4 или 5, то по углу $[\varphi, 5, \varphi_1]$ можно подклеить только треугольник, но тогда $\Theta(\varphi, 5, \varphi_1) < \pi$, так как $v(\varphi) = v(k)$. Снова получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 10. *Изображенный на рис. 5 блок при $n \geqslant 12$ и $k = 3, 4, 5$ не может быть частью многогранника M.*

Доказательство. Угол $[3, 3, k]$ имеют грани $(3^2, k, \varphi)$ и $(3^4, k)$. Если подклеить $(3^4, k)$, то будет $\Theta(3^4, k) < 3\pi$, что невозможно. Подклеивая четырехугольник $(3^2, k, \varphi)$, получим блок, который на многограннике M не существует по лемме 9. Лемма доказана.

6. **Лемма 11.** *Многогранник M не содержит граней* $(3, 4, n)$, $(3, 5, n)$, $(3, 6, n)$ *соответственно при* $n \geqslant 12$, 15, 16; *грани*

$(4^2, n)$, $(3^3, n)$ *соответственно при* $n \geqslant 15$, 42 *имеют только бипирамиды и многогранники, двойственные антипризмам.*

Доказательство. К грани $(3, 4, n)$ по ребру $[3, n]$ можно подклеить грани $(3, k, n)$, где $k = 4, \ldots, 11$, и $(3^3, n)$. Подклеим треугольник $(3, k, n)$; по свободному углу $[4, 3, k]$ можно подклеить лишь $(4, 3, k, m)$, при $m = 3'$, так как $v(m) = v(3) + 2v(n)$. По лемме 7 такой блок не может входить в многогранник M при $n \geqslant 8$. Блок из двух граней $(3, 4, n)$ и $(3^3, n)$ не входит в M по лемме 10. Для грани $(3, 4, n)$ лемма доказана.

Рассмотрим грань $(3, 5, n)$. Ребро $[3, n]$ имеют грани $(3, k, n)$ при $k = 5, \ldots, 9$ и грань $(3^3, n)$. По лемме 10 блок из граней $(3, 5, n)$ и $(3^3, n)$ в M не существует. К ребру $[3, n]$ подклеим треугольник $(3, k, n)$. К углу $[5, 3, k]$ можно подклеить только $(5, 3, k, m)$, причем $m = 3'$, $k = 5$. К ребру $[5, n]$ подклеим грань $(3, 5, n)$ и к новому ребру $[3, n]$ — еще такую же грань; в образовавшийся угол $[5, 3, 5]$ вклеим четырехугольник $(5, 3, 5, 3')$. Угол $[3', 5, 3']$ имеют грани $(3', 5, 3', s)$, $s = 3, \ldots, 7$, и $(3^4, 5)$. Если подклеить грань $(3^4, 5)$, то в процессе дальнейшего построения многогранника придем к пятиугольнику (3^5), имеющему общую вершину с гранью $(3^4, 5)$, чего по лемме 3 не может быть. Подклеим к углу $[3', 5, 3']$ грань $(3', 5, 3', s)$. К свободным ребрам $[n, 5]$ и $[3, n]$ имеем право подклеивать только треугольник $(3, 5, n)$, а к свободным углам $[3', 5, 3']$ — только $(3', 5, 3', s)$. Такие построения будут приводить к замкнутым многогранникам M. Значениям s будут соответствовать у них значения $n = 2s$, т. е. $n < 15$. Для остальных трех граней доказательства полностью не приводятся ввиду их громоздкости, они только намечены.

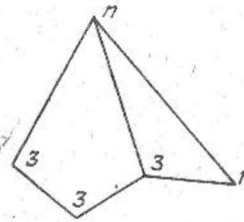


Рис. 5.

Грань $(3, 6, n)$. Для оценки n достаточно воспользоваться результатом леммы 8 и доказать лемму 9 при $k = 6$.

Грань $(4^2, n)$. При $n \geqslant 15$ свободное ребро $[4, n]$ имеют грани $(4^2, n)$ и $(4, 5, n)$. Если для построения замкнутого многогранника M использовать только треугольники $(4^2, n)$, получим бесконечную серию бипирамид. В других случаях наибольшее значение n, при котором существует замкнутый многогранник M, равно 14.

Грань $(3^3, n)$. При $n \geqslant 42$ только этот четырехугольник имеет ребро $[3, n]$. Если к свободному углу $[3, 3, 3]$ подклеить $(3^3, n)$, дальнейшее построение приведет к многограннику, двойственному антипризме, при любом фиксированном n; этих многогранников — бесконечная серия. Если к углу $[3, 3, 3]$ подклеивать другие грани, будут получаться многогранники M, для которых будет $n \leqslant 42$.

7. Доказательство теоремы 1. Если исключить бипирамиды и многогранники, двойственные антипризмам, то согласно

лемме 11 из таблицы 1 исключаются все шесть бесконечных серий, начиная с $n = 42$, и остается конечное число возможных типов граней.

Сумма кривизн всех вершин замкнутого выпуклого многогранника равна 4π. В силу равноугольности вершин многогранника M кривизны вершин можно перераспределить по граням, причем каждый тип грани будет нести определенную кривизну: например, тип (k, l, n) несет кривизну $\pi(2/k + 2/l + 2/n - 1)$. Из возможных типов граней можно составить конечное число наборов с суммарной кривизной 4π. Только часть этих наборов допускает построение одной или некоторого конечного числа гомеоморфных сфере разверток с такими типами граней. Каждой такой развертке по теореме А. Д. Александрова [3] отвечает единственный выпуклый многогранник. Только в части этих разверток при склеивании грани не будут переламываться или служить продолжением друг друга. Эти случаи охватят все выпуклые многогранники с равноугольными вершинами, отличные от бипирамид и многогранников, двойственных антипризмам. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Бесконечный полный выпуклый многогранник гомеоморфен плоскости и сумма кривизн его вершин не превосходит 2π. Из граней, остающихся после исключения бипирамид и многогранников, двойственных антипризмам (лемма 11), невозможно составить бесконечный набор граней с конечной суммарной кривизной. Если многогранник M имеет бесконечную грань, оценка для n в лемме 11 понижается до $n = 5$. Поэтому граница блока, принадлежащего бесконечному многограннику M, состоит из конечного числа ребер, и к ней можно подклеить лишь конечное число бесконечных граней. Теорема доказана.

Выпуклые многогранники с равноугольными вершинами будут перечислены в следующих статьях.

Автор выражает благодарность А. Д. Милке за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями.— Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. Стеклова АН СССР. М.— Л., 1967, т. 2. 2. *Brückner M.* Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Leipzig, 1900. 227 S und XII Taf. 3. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М., Гостехиздат, 1950. 428 с.

Поступила 15 октября 1978 г.

УДК 513

А. И. Егоров

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ. II

Эта статья является непосредственным продолжением работы [1], где введены все необходимые термины и обозначения. Для удобства чтения напомним их.

Пространством линейных элементов общей аффинной связности называется многообразие $X_{2n-1}(x, \dot{x})$, в котором задано поле фундаментального геометрического объекта с компонентами $\{\Lambda^i_{jk}(x, \dot{x}), C^i_{jk}(x, \dot{x})\}$, преобразующимися при переходе к новой системе координат по закону [2]

$$\Lambda^{i'}_{jk} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\Lambda^\alpha_{\beta\gamma};$$

$$C^{i'}_{jk} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}C^\alpha_{\beta\gamma},$$

где $\dot{x}^l$ — псевдовектор, C^i_{jk} и Λ^i_{jk} — соответственно тензор минус первой и объект нулевой степени однородности относительно координат $\dot{x}^l$ в точке $(x, \dot{x})$, в общем случае несимметричные по нижним индексам, причем выполняется условие $C^i_{jk}\dot{x}^k = 0$. Такие пространства коротко обозначены через $N_{n,\dot{x}}$. Если выполняется также и условие $C^i_{jk}\dot{x}^j = 0$, класс таких пространств обозначен через $M_{n,\dot{x}}$. Аффинная связность в $N_{n,\dot{x}}$ может быть задана набором объектов: $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\Lambda^i_{(jk)}$; $\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}\Lambda^i_{[jk]}$; $\hat{C}^i_{jk} = \frac{1}{2}C^i_{(jk)}$; $\hat{\Omega}^i_{jk} = \frac{1}{2}C^i_{[jk]}$, причем в $M_{n,\dot{x}}$ выполняются условия $\hat{C}^i_{jk}\dot{x}^k = 0$; $\Omega^i_{jk}\dot{x}^k = 0$.

Чтобы инфинитезимальное преобразование $\tilde{x}^i = x^i + v^i(x)t$ определяло движение, необходимо и достаточно равенство нулю производной Ли по направлению вектора $v(x)$ от всех объектов, задающих связность:

$$D\Gamma^i_{jk} = 0;\quad D\Omega^i_{jk} = 0;\quad D\hat{C}^i_{jk} = 0;\quad D\hat{\Omega}^i_{jk} = 0. \tag{1}$$

Введен тензор K^i_{jkl}, определяемый формулой

$$\frac{1}{2}K^i_{jkl} = \partial_{[l}\Gamma^i_{|j|k]} + \Gamma^i_{p[l}\Gamma^p_{|j|k]} + \Gamma^i_{j[l\cdot|p}\Gamma^p_{\sigma|k]}\dot{x}^\sigma. \tag{2}$$

Введены функции $u^i_j = v^i_{,j}$, где запятая перед индексом j обозначает ковариантное дифференцирование в смысле связности Γ^i_{jk}. Условия интегрируемости системы этих вспомогательных уравнений $u^i_j = v^i_{,j}$ и уравнений (1) приводятся к виду $DK^i_{jkl} = 0$; $D\Gamma^i_{jk\cdot r\ldots r} = 0$; $D\hat{C}^i_{jk\cdot r\ldots r} = 0$; $D\Omega^i_{jk} = 0$; $D\Omega^i_{jk\cdot r\ldots r} = 0$; $D\hat{\Omega}^i_{jk\cdot r\ldots r} = 0$, где под знаком лиевой производной стоит частная производная нужного порядка по $\dot{x}^r$, обозначаемая точкой перед индексом r.

Все доказательства теорем и лемм проводятся в специальной системе координат, связанной с данной точкой $(x, \dot{x})$; в этой системе

$$\dot{x}^i = \delta^i_1, \tag{3}$$

(δ^i_j — символ Кронекера), и поэтому индекс 1 занимает особое положение, а в символах вида H^2_{34}, H^2_{33}, $H^2_{13\cdot 3}$ и т. п. индексы 2, 3, 4 могут быть заменены любыми различными числами из ряда 2, 3, . . . , n.

В части I этой статьи [1] рассматривались только пространства $M_{n,\dot{x}}$; здесь, во II части,— как пространства $M_{n,\dot{x}}$, так и более общие пространства $N_{n,\dot{x}}$. Ссылки на формулы I части имеют вид (I.5).

§ 1. Структура тензора связности C^i_{jk} пространства $N_{n,\dot{x}}$, допускающего группу движений порядка $r > n^2 - 2n + 6$. Максимально подвижные пространства $N_{n,\dot{x}}$ с тензором связности $C^i_{jk} \neq 0$. Для определения структуры тензора C^i_{jk} построим матрицу типа (I.4):

$$T_1 = \left\| T^\alpha_\beta \binom{i}{jk}, \quad T^\alpha_\beta \binom{i}{jkl} \right\|, \tag{4}$$

элементами которой являются коэффициенты при функциях u^α_β в уравнениях $DC^i_{jk} = 0$, $DC^i_{jk\cdot l} = 0$ в специальной системе координат (3), или (I.3). Если тензор C^i_{jk} $(i \neq 1;\ i \neq j,\ k)$ отличен от нуля, возможны три случая: 1) $C^3_{12} \neq 0$; 2) $C^3_{22} \neq 0$, а все составляющие вида $C^3_{12} = 0$; 3) $C^2_{34} \neq 0$, а все составляющие вида $C^3_{12} = C^3_{22} = 0$.

В случае 1 минор порядка $3n - 5$ матрицы T_1 (4), составленный из коэффициентов при функциях u^2_2, u^j_3, u^1_k, u^2_l, u^2_3 в уравнениях $DC^i_{jk} = 0$ с индексами $\binom{3}{12}$, $\binom{j}{12}$, $\binom{3}{k2}$, $\binom{3}{1l}$, $\binom{3}{13}$, где $k = 2, 3, \ldots, n$; $j, l = 4, 5, \ldots, n$, с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей C^3_{12}. В случае 2 выделим минор порядка $3n - 4$ матрицы T_1, состоящий из коэффициентов при функциях u^j_3, u^2_k, u^1_l, u^1_2, u^2_1 в уравнениях с индексами $\binom{j}{22}$, $\binom{3}{2k}$, $\binom{3}{22l}$, $\binom{3}{222}$, $\binom{3}{12}$; $j, k, l = 3, 4, \ldots, n$, который только постоянным множителем отличается от произведения степени составляющей C^3_{22} на множитель $(2C^3_{22} - C^3_{12\cdot 2})(C^3_{22} + C^3_{12\cdot 2})$. Так как оба выражения, стоящие в скобках, не могут одновременно обратиться в нуль, то искомый неравный нулю минор имеет порядок по крайней мере $3n - 5$. В последнем, третьем случае минор порядка $4n - 14$ матрицы T_1, образованный коэффициентами при функциях u^j_2, u^3_k, u^4_l, u^1_s в уравнениях $\binom{j}{34}$, $\binom{2}{k4}$, $\binom{2}{3l}$, $\binom{2}{34s}$, $j = 3, 4, \ldots, n$; $k, l, s = 5, 6, \ldots$, с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей C^2_{34}. Поэтому, если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, в рассматриваемой точке будет $C^i_{jk} = 0$ $(i \neq 1;\ i \neq j, k)$. Отсюда следует, что тензор C^i_{jk} в любой координатной системе и для любой точки $(x, \dot{x})$ пространства $N_{n,\dot{x}}$ необходимо имеет строение

$$C^i_{jk} = \delta^i_j D_k + \delta^i_k B_j + \dot{x}^i D_{jk}, \tag{5}$$

где тензоры D_i и B_k — минус первой, а тензор D_{jk} — минус второй степени однородности относительно координат $\dot{x}^i$, причем $D_p \dot{x}^p = 0$; $B_j + D_{jp}\dot{x}^p = 0$.

Теорема 1. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то тензор связности C^i_{jk} необходимо имеет структуру* (5).

Из результатов работы [3] следует, что не существует пространств $N_{n,\dot{x}}$ с тензором $C^i_{jk} \neq 0$, допускающих группы движений порядка $r > n^2 + 1$. С другой стороны, пространство со связностью

$$\Gamma^i_{jk} = 0; \quad \Omega^i_{jk} = 0; \quad C^i_{jk} = \delta^i_k A_j + \dot{x}^i A_{j\cdot k}, \tag{6}$$

где $A_1 = c/\dot{x}^1$ $(c = \mathrm{const} \neq 0)$, остальные $A_i = 0$, допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 + 1$. Операторы группы: p_i, $x^j p_i$, $x^1 p_1$; $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 2, 3, \ldots, n$. Таким образом, верна

Теорема 2. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $N_{n,\dot{x}}$ с тензором связности $C^i_{jk} \neq 0$ равен $n^2 + 1$.*

Исследуем теперь инвариантный при движениях тензор $D_{i\cdot j}$.

Лемма 1. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$, то тензор $D_{i\cdot j} = 0$.*

Для доказательства леммы рассмотрим матрицу вида (I.12):

$$T_2 = \| T^\alpha_\beta(ij), \ T^\alpha_\beta(ijk) \|, \tag{7}$$

элементами которой являются коэффициенты при функциях u^α_β в уравнениях $DD_{i\cdot j} = 0$; $DD_{i\cdot j\cdot k} = 0$. Предположим, что тензор $D_{i\cdot j}$ отличен от нуля. Тогда достаточно рассмотреть следующие возможные случаи в специальной системе координат (3): 1) $D_{1\cdot 2} \neq 0$; 2) $D_{2\cdot 2} \neq 0$, а все составляющие вида $D_{1\cdot 2} = 0$; 3) $D_{2\cdot 3} \neq 0$, а все составляющие вида $D_{1\cdot 2} = D_{2\cdot 2} = 0$.

Заметим, что в силу теоремы 6 статьи [1] рассматриваемый тензор $D_{i\cdot j}$ в нашем случае симметрический, т. е. $D_{j\cdot k} = D_{k\cdot j}$. В случае 1 ранг матрицы T_2 не меньше $2n - 2$. Действительно, минор порядка $2n - 2$ этой матрицы, составленный из коэффициентов при функциях u^2_j, u^1_k $(j, k = 2, 3, \ldots, n)$ в уравнениях $(1j)$, $(2k)$ с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $D_{1\cdot 2}$. В случае 2 ранг матрицы T_2 не меньше $2n - 2$, так как минор такого порядка этой матрицы, образованный из коэффициентов при функциях u_j^2, u_k^1 (j, $k = 2, 3, \ldots, n$) в уравнениях (2j), (22k) с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $D_{2\cdot 2}$. Наконец, в третьем случае ранг матрицы T_2 не меньше $3n-9$, ибо ее минор порядка $3n-9$, составленный из коэффициентов при функциях u_i^2, u_j^3, u_k^1 (i, j, $k = 4, 5, \ldots, n$) в уравнениях (i3), (2j), (23k) с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $D_{2\cdot 3}$. Лемма доказана. Следовательно, имеет место

Теорема 3. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$, то тензор связности C^i_{jk} имеет алгебраическую структуру*

$$C^i_{jk} = \delta^i_k B_j + \dot{x}^i D_{jk}; \quad B_j + D_{jp}\dot{x}^p = 0. \tag{8}$$

Пространства $N_{n,\dot{x}}$, у которых тензор связности $C^i_{jk} \neq 0$ и имеет структуру, отличную от (8), обозначим символом $R_{n,\dot{x}}$. Рассмотрим пространство $\dot{R}_{n,\dot{x}}$ со связностью $\Gamma^i_{jk} = 0$; $\Omega^i_{jk} = 0$; $C^i_{jk} = \delta^i_j A_k$, где $A_1 = -\dot{x}^2/(\dot{x}^1)^2$, $A_2 = 1/\dot{x}^1$, остальные $A_i = 0$. Оно допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - n + 2$. Операторы группы: p_i, $x^1p_1 + x^2p_2$, x^1p_2, x^ip_j ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 3, 4, \ldots, n$).

Теорема 4. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $R_{n,\dot{x}}$ равен $n^2 - n + 2$.*

Пространства $N_{n,\dot{x}}$, у которых тензор связности $C^i_{jk} = C^i_{j\cdot k}$, будем обозначать символом $R'_{n,\dot{x}}$. Легко видеть, что пространство (6) является таким пространством. Поэтому верна

Теорема 5. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $R'_{n,\dot{x}}$ равен $n^2 + 1$.*

Ясно, что в пространствах $R'_{n,\dot{x}}$ тензор C^i_j, имеющий нулевую степень однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$, в общем случае не инвариантен при движениях. Заметим, что пространство $R_{n,\dot{x}}$ со связностью $\Gamma^i_{jk} = 0$; $\Omega^i_{jk} = 0$; $C^i_{jk} = \delta^i_j A_k$; где $A_1 = 1/\dot{x}^1$; $A_2 = -1/\dot{x}^2$; остальные $A_i = 0$, также допускают полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - n + 2$. Операторы группы: p_i, x^1p_1, x^2p_2, x^ip_j; $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 3, 4, \ldots, n$.

Класс пространств $N_{n,\dot{x}}$, у которых тензор связности $C^i_{jk} \neq 0$ и имеет структуру, отличную от (5), будем обозначать символом $T_{n,\dot{x}}$. Такое пространство со связностью $\Gamma^i_{jk} = 0$, $C^2_{11} = -\dot{x}^3/(\dot{x}^1)^2$, $C^2_{13} = -1/\dot{x}^1$, $\Omega^i_{jk} = 0$, остальные $C^i_{jk} = 0$, допускает полную группу движений порядка $r = n^2 - 2n + 5$. Операторы группы: p_k, x^1p_3, x^1p_2, x^3p_2, x^1p_1, $x^2p_2 + x^3p_3$, x^ip_j, x^ip_2, x^1p_i, x^3p_j (i, $j = 4, 5, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$).

Итак, имеет место

Теорема 6. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $T_{n,\dot{x}}$ равен $n^2 - 2n + 5$.*

§ 2. Структура тензоров $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ и K^i_{jkl} пространства $M_{n,\,\dot{x}}$, допускающего группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$. Построим матрицу вида (I.23):

$$T_3 = \left\| T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jkl},\quad T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jkls}\right\|. \qquad (9)$$

Ее элементами служат коэффициенты при функциях u^{α}_{β} в уравнениях $D\Gamma^i_{jk\cdot l} = 0$; $D\Gamma^i_{jk\cdot l\cdot s} = 0$ в специальной системе координат (3). Если предположить, что $\Gamma^i_{jk\cdot l} \neq 0$ $(i \neq 1;\ i \neq j,\ k,\ l)$, то будут возможны следующие случаи: 1) $\Gamma^2_{11\cdot 3} = 0$; 2) $\Gamma^2_{13\cdot 3} \neq 0$, а все составляющие вида $\Gamma^2_{11\cdot 3} = 0$; 3) $\Gamma^2_{13\cdot 4} \neq 0$, все составляющие вида $\Gamma^2_{11\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 3} = 0$; 4) $\Gamma^2_{33\cdot 3} \neq 0$, все составляющие вида $\Gamma^2_{11\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 4} = 0$; 5) $\Gamma^2_{33\cdot 4} \neq 0$, все составляющие вида $\Gamma^2_{11\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 4} = \Gamma^2_{33\cdot 3} = 0$; 6) $\Gamma^2_{34\cdot 4} \neq 0$, все составляющие вида $\Gamma^2_{11\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 4} = \Gamma^2_{33\cdot 3} = \Gamma^2_{33\cdot 4} = 0$; 7) $\Gamma^2_{34\cdot 5} \neq 0$, все составляющие вида $\Gamma^2_{11\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 3} = \Gamma^2_{13\cdot 4} = \Gamma^2_{33\cdot 3} = \Gamma^2_{33\cdot 4} = \Gamma^3_{34\cdot 4} = 0$.

В случае 1 минор порядка $3n - 5$ матрицы T_3 (9), построенный из коэффициентов при функциях u^3_j, u^k_2, u^1_l $(l = 2, 3, \ldots, n;\ j, k = 3, 4, \ldots n)$ в уравнениях $\binom{2}{11j}$, $\binom{k}{113}$, $\binom{2}{1l3}$ с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Gamma^2_{11\cdot 3}$. В случае 2 матрица T_3 (9) имеет минор, составленный из коэффициентов при функциях u^3_j, u^k_2, u^1_l, u^3_2 $(j = 3, 4, \ldots, n;\ k = 4, 5, \ldots, n;\ l = 2, 3, \ldots, n)$ в уравнениях $\binom{2}{1j3}$, $\binom{k}{133}$, $\binom{2}{l33}$, $\binom{2}{123}$; его порядок также равен $3n - 5$, и он с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Gamma^2_{13\cdot 3}$. В случае 3 степени составляющей $\Gamma^2_{13\cdot 4}$ с точностью до постоянного множителя равен минор порядка $4n - 11$ той же матрицы, составленный из коэффициентов при функциях u^3_j, u^l_2, u^1_k, u^4_s $(j,\ l = 3, 5, \ldots, n;\ k = 2, 3, \ldots, n;\ s = 5, 6, \ldots, n)$ в уравнениях $\binom{2}{1j4}$, $\binom{l}{134}$, $\binom{k}{k34}$, $\binom{2}{13s}$. В случае 4 рассматриваем минор порядка $3n - 4$ матрицы T_3 (9), составленный из коэффициентов при функциях u^j_2, u^1_k, u^3_l, u^3_1, u^1_3 $(j = 1, 2, \ldots, n;\ l,\ k = 4, 5, \ldots, n)$ в уравнениях $\binom{j}{333}$, $\binom{2}{333k}$, $\binom{2}{33l}$, $\binom{2}{3333}$, $\binom{2}{133}$; с точностью до постоянного множителя этот минор равен произведению степени составляющей $\Gamma^2_{33\cdot 3}$ и множителя $(\Gamma^2_{33\cdot 3} - \Gamma^2_{13\cdot 3\cdot 3})(\Gamma^2_{33\cdot 3} + \Gamma^2_{13\cdot 3\cdot 3})$. Ясно, что эти два сомножителя одновременно в нуль обратиться не могут. Отсюда следует, что ранг матрицы T_3 (9) равен по крайней мере $3n - 5$. В случае 5 составляем минор порядка $4n - 14$ той же матрицы из коэффициентов при функциях u^j_2, u^3_k, u^1_l, u^4_s $(j, l = 4, 5, \ldots, n;\ k,\ s = 5, 6, \ldots, n)$ в уравнениях $\binom{2}{3k4}$, $\binom{2}{334l}$, $\binom{2}{33s}$, $\binom{j}{334}$. Он с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Gamma^2_{33\cdot4}$. В случае 6 минор порядка $4n-15$, составленный из коэффициентов при функциях u^i_2, u^3_j, u^1_k, u^4_l в уравнениях $\binom{i}{344}$, $\binom{2}{j44}$, $\binom{2}{344k}$, $\binom{2}{34l}$, $j, k, l = 5, 6, \ldots, n$; $i = 4, 5, \ldots, n$, с точностью до знака равен степени компоненты $\Gamma^3_{34\cdot4}$. В последнем случае 7 минор порядка $5n-25$ матрицы $T_3(9)$, составленный из коэффициентов при функциях u^j_2, u^3_k, u^1_l, u^4_s, u^5_m в уравнениях $\binom{j}{345}$, $\binom{2}{k45}$, $\binom{2}{345l}$, $\binom{2}{3s5}$, $\binom{2}{34m}$, $j, k, l, s, m = 6, 7, \ldots, n$, с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Gamma^2_{34\cdot5}$. Отсюда следует

Лемма 2. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то в рассматриваемой точке справедливы равенства $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ ($i \neq 1$; $i \neq j, k, l$).*

Из этих условий следует, что для любой точки пространства $M_{n,\dot{x}}$ и произвольной системы координат

$$\Gamma^i_{jk\cdot l} = \delta^i_j M_{kl} + \delta^i_k M_{jl} + \delta^i_l B_{jk} + \dot{x}^i B_{jk\cdot l}, \tag{10}$$

где тензоры M_{kl} и B_{kl} — минус первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$, причем $M_{kp}\dot{x}^p = 0$, $B_{jk} = B_{kj}$.

Теорема 7 *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то тензор $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ необходимо имеет строение* (10).

Класс пространств $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Gamma^i_{jk\cdot l} \neq 0$ и имеет строение, отличное от (10), будем обозначать символом $R_{n,\dot{x}}$. Из теоремы 7 вытекает, что возможный порядок групп движений G_r в этих пространствах удовлетворяет неравенству $r \leqslant n^2 - 2n + 5$. Рассмотрим пространство $R_{n,\dot{x}}$ со связностью $\Omega^i_{jk} = 0$; $\hat{C}^i_{jk} = 0$; $\hat{\Omega}^i_{jk} = 0$; $\Gamma^2_{11} = \dot{x}^3/\dot{x}^1$; остальные $\Gamma^i_{jk} = 0$. Это пространство допускает полную группу движений порядка $r = n^2 - 2n + 5$. Операторы группы: p_i, $2x^1p_3 - (x^1)^2 p_2$, x^1p_2, x^3p_2, $x^1p_1 + 2x^2p_2 + x^3p_3$, $x^2p_2 + x^3p_3$, x^jp_k, x^jp_2, x^2p_k, x^1p_j; $j, k = 4, 5, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 8. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $R_{n,\dot{x}}$ равен $n^2 - 2n + 5$.*

Применяя к тензору M_{kl} теоремы 6 и 18 из статьи [1], получим, что тензор M_{kl} равен нулю, если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$. Поэтому верна

Теорема 9. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений порядка $r > n^2 - n + 2$, то тензор $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ необходимо имеет следующую структуру:*

$$\Gamma^i_{jk\cdot l} = \delta^i_l B_{jk} + \dot{x}^i B_{jk\cdot l}; \quad \Gamma^p_{pk\cdot l} = 0, \; B_{jk\cdot l} = B_{jl\cdot k}. \tag{11}$$

Теорема 10. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 6$ или $r > n^2 - n + 2$, то тензор $\Lambda^i_{jk\cdot l}$ имеет строение*

$$\Lambda^i_{jk\cdot l} = \delta^i_j (M_{kl} + \Omega_{k\cdot l}) + \delta^i_k (M_{jl} - \Omega_{j\cdot l}) + \\ + \delta^i_l (B_{jk} + \Omega_{jk}) + \dot{x}^i (B_{jk\cdot l} + \Omega_{jk\cdot l}), \qquad (12)$$

или, соответственно,

$$\Lambda^i_{jk\cdot l} = \delta^i_l B_{jk} + \dot{x}^i B_{jk\cdot l}; \qquad (13)$$

тензоры Ω_k и Ω_{jk} определены в работе [1, § 1].

Из теоремы 9 следует, что не существует пространств $X_{n,\dot{x}}$ [1], допускающих группы движений порядка $r > n^2 - n + 2$. Класс пространств $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Gamma^i_{jk\cdot l} \neq 0$ и имеет строение, отличное от (11), обозначим символом $P_{n,\dot{x}}$. Точность границы $r = n^2 - n + 2$ следует из существования пространства $P_{n,\dot{x}}$ со связностью $\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j$; $\Omega^i_{jk} = \alpha(\delta^i_j A_k - \delta^i_k A_j)$; $\widehat{C}^i_{jk} = 0$, $\widehat{\Omega}^i_{jk} = 0$, где $A_1 = \dot{x}^2/\dot{x}^1$, $A_2 = 1$, остальные $A_i = 0$, α — постоянная; это пространство допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - n + 2$. Отметим также, что максимальный порядок групп движений в пространствах $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Lambda^i_{jk\cdot l} \neq 0$ и имеет строение, отличное от (10), равен $n^2 - n + 2$. Пространства $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Gamma^i_{jk\cdot l} \neq 0$ и удовлетворяет условию $\Gamma^s_{jk\cdot s}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$, обозначим символом $C_{n,\dot{x}}$. Такое пространство со связностью

$$\Gamma^i_{jk} = \alpha_1 (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j) + \beta_1 \dot{x}^i (A_{j\cdot k} + A_{k\cdot j});$$

$$\Omega^i_{jk} = \alpha_2 (\delta^i_j A_k - \delta^i_k A_j) + \beta_2 \dot{x}^i (A_{j\cdot k} - A_{k\cdot j}); \quad \widehat{C}^i_{jk} = 0; \quad \widehat{\Omega}^i_{jk} = 0,$$

где $A_1 = \dot{x}^2/\dot{x}^1$, $A_2 = -1$, остальные $A_i = 0$; α_1, β_1, α_2, β_2 — постоянные, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - n + 2$. Из сказанного следует

Теорема 11. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $P_{n,\dot{x}}$ и $C_{n,\dot{x}}$ равен $n^2 - n + 2$.*

Заметим, что таков же максимальный порядок групп движений в пространствах $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Lambda^i_{jk\cdot l} \neq 0$ и удовлетворяет условию $\Lambda^\sigma_{jk\cdot\sigma}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$.

Перейдем теперь к исследованию структуры тензора K^i_{jkl} (2). Как известно, этот тензор удовлетворяет следующим условиям: $K^i_{jkl} = -K^i_{jlk}$, $K^i_{jkl} + K^i_{klj} + K^i_{ljk} = 0$.

Построим матрицу T_3 (9), элементами которой являются коэффициенты

$$T^\alpha_\beta \binom{i}{jkl} = \delta^\alpha_j K^i_{\beta kl} + \delta^\alpha_k K^i_{j\beta l} + \delta^\alpha_l K^i_{jk\beta} - \delta^i_\beta K^\alpha_{jkl} + \delta^\alpha_1 K^i_{jkl\cdot\beta};$$

$$T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jkls} = \delta^{\alpha}_{j} K^{i}_{\beta kl\cdot s} + \delta^{\alpha}_{k} K^{i}_{j\beta l\cdot s} + \delta^{\alpha}_{l} K^{i}_{jk\beta\cdot s} + \\ + \delta^{\alpha}_{s} K^{i}_{jkl\cdot\beta} - \delta^{i}_{\beta} K^{\alpha}_{jkl\cdot s} + \delta^{\alpha}_{1} K^{i}_{jkl\cdot s\cdot\beta} \tag{14}$$

при функциях u^{α}_{β} в уравнениях $DK^{i}_{jkl} = 0$; $DK^{i}_{jkl\cdot s} = 0$ в специальной системе координат (3). Матрицу будем обозначать через T_3 (14).

Лемма 3. *Если пространство $M_{n,\varkappa}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то в рассматриваемой точке*

$$K^{i}_{jkl} = 0 \quad (i \neq 1;\ i \neq j,\ k,\ l). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Предположим, что равенство (15) не выполняется. Тогда достаточно рассмотреть пять случаев: 1) $K^{2}_{113} \neq 0$; 2) $K^{3}_{221} \neq 0$; 3) $K^{2}_{314} \neq 0$; 4) $K^{2}_{334} \neq 0$; 5) $K^{2}_{345} \neq 0$.

В случае 1 составим минор порядка $3n - 5$ матрицы T_3 (14) из коэффициентов при функциях u^{2}_{2}, u^{1}_{2}, u^{k}_{2}, u^{3}_{l}, u^{1}_{j}, u^{1}_{3} ($k = 3, 4, \ldots, n$; $j, l = 4, 5, \ldots, n$) в уравнениях $\binom{2}{113}$, $\binom{1}{113}$, $\binom{k}{113}$, $\binom{2}{11l}$, $\binom{2}{13l}$, $\binom{2}{313}$: С точностью до знака этот минор равен $\left(K^{2}_{113}\right)^{3n-5}$. Отсюда следует, что $K^{2}_{113} = 0$. В случае 2 предварительно выделим минор порядка $3n - 5$ матрицы T_3 (14), составленный из коэффициентов при функциях u^{3}_{3}, u^{2}_{3}, u^{1}_{3}, u^{k}_{3}, u^{1}_{l}, u^{2}_{s}, u^{2}_{1} ($l,\ k,\ s = 4, 5, \ldots, n$) в уравнениях $\binom{3}{221}$, $\binom{2}{221}$, $\binom{1}{221}$, $\binom{3}{121}$, $\binom{k}{221}$, $\binom{3}{22l}$, $\binom{2}{21s}$. Он с точностью до знака равен $\left(K^{3}_{221}\right)^{3n-6}\left(K^{3}_{221} - K^{3}_{121\cdot 2}\right)$, откуда следует, что $K^{3}_{221} = -K^{3}_{121\cdot 2}$. Учитывая это соотношение, а также, что $K^{2}_{113} = 0$, рассмотрим минор порядка $3n-5$, получающийся из предыдущего заменой $\binom{3}{121} \to \binom{3}{2212}$, $u^{2}_{1} \to u^{1}_{2}$. Этот минор с точностью до знака равен степени составляющей K^{3}_{221}. Следовательно, и случай 2 невозможен, т. е. все составляющие вида $K^{3}_{221} = 0$. Случай 3 также невозможен, так как степени составляющей K^{2}_{314} с точностью до знака равен минор порядка $4n - 14$ той же матрицы, состоящий из коэффициентов при функциях u^{2}_{2}, u^{1}_{2}, u^{1}_{k}, u^{3}_{l}, u^{4}_{s}, u^{m}_{2} ($k,\ l,\ m,\ s = 5, 6, \ldots, n$) в уравнениях $\binom{2}{314}$, $\binom{2}{324}$, $\binom{2}{3k4}$, $\binom{2}{l14}$, $\binom{2}{31s}$, $\binom{m}{314}$. Из тождества $K^{2}_{134} + K^{2}_{341} + K^{2}_{413} = 0$ находим также, что все составляющие вида $K^{2}_{134} = 0$.

В случае 4 сначала установим, что: а) $K^{2}_{331\cdot 3} = 0$; б) $K^{2}_{3314} = 0$; в) $K^{2}_{314\cdot 3} = 0$. Равенство «а» следует из того, что минор порядка $3n - 5$ матрицы T_3 (14), составленный из коэффициентов при функциях u^{2}_{2}, u^{3}_{2}, u^{3}_{k}, u^{4}_{l}, u^{s}_{2}, u^{1}_{2}, u^{1}_{5}, u^{1}_{6} в уравнениях $\binom{2}{334}$, $\binom{2}{234}$, $\binom{2}{k34}$, $\binom{2}{33l}$, $\binom{s}{334}$, $\binom{1}{334}$, $\binom{2}{3353}$, $\binom{2}{3363}$, $k, s = 4, 5, \ldots, n$; $l = 5, 6, \ldots, n$, с точностью до знака равен $\left(K^{2}_{334}\right)^{3n-7}\left(K^{2}_{331\cdot 3}\right)^{2}$. Если в только что рассмотренном миноре сделать замену, соответствующую замене уравнений

$\binom{2}{\ldots}$ на $\binom{2}{3351}$ и $\binom{2}{3363}$ на $\binom{2}{3364}$, получим минор, с точностью до знака равный $(K^2_{334})^{3n-7}(K^2_{331\cdot 4})^2$, откуда следует «б». Справедливость же «в» вытекает из того, что минор порядка $4n-14$ матрицы T_3 (14), состоящий из коэффициентов при функциях u^3_j, u^4_k, u^l_2, u^1_s (l, $j=4$, $5, \ldots, n$; k, $s=5$, 6, $\ldots$, n) в уравнениях $\binom{2}{j34}$, $\binom{2}{33k}$, $\binom{l}{334}$, $\binom{\ldots}{\ldots}$, с точностью до знака равен произведению $(K^2_{334})^{4n-16}(K^2_{314\cdot 3})^2$. Чтобы убедиться в невозможности случая 4, достаточно в миноре, рассмотренном в случае 3а, сделать замену, соответствующую замене $u^1_5 \to u^3_1$, $u^1_6 \to u^4_1$, $\binom{2}{3353} \to \binom{2}{314}$, $\binom{2}{3363} \to \binom{2}{331}$; полученный минор с точностью до знака равен степени составляющей K^2_{334}, которая поэтому равна нулю. Наконец, невозможен и случай 5, поскольку минор порядка $4n-17$ матрицы T_3 (14), образованный коэффициентами при функциях u^2_2, u^3_k, u^4_l, u^5_m, u^s_2 (k, l, $m=6$, 7, $\ldots$, n; $s=4$, 5, $\ldots$, n) в уравнениях $\binom{2}{345}$, $\binom{2}{k45}$, $\binom{2}{3l5}$, $\binom{2}{34m}$, $\binom{s}{345}$, с точностью до знака равен степени составляющей K^2_{345}. Лемма доказана.

Равенства (15) позволяют заключить, что тензор K^i_{jkl} имеет следующее строение:

$$K^i_{jkl} = \delta^i_j (P_{kl} - P_{lk}) + \delta^i_k P_{jl} - \delta^i_l P_{jk} + \dot{x}^i D_{jkl} \tag{16}$$

в любой координатной системе и для любой точки пространства $M_{n,\dot{x}}$; в этой формуле тензоры P_{jl} и D_{jkl} — соответственно нулевой и минус первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$, причем $D_{jkl} = -D_{jlk}$, $D_{jkl} + D_{klj} + D_{ljk} = 0$.

Теорема 12. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то тензор K^i_{jkl} имеет строение* (16).

Для пространств $X_{n,x}$, рассмотренных в работе [1], верна

Теорема 12′. *Если пространство $X_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то тензор K^i_{jkl} имеет строение* (16), *причем $D_{jkl} = P_{jl\cdot k} - P_{jk\cdot l}$; $P_{jl\cdot k} = -P_{kl\cdot j}$.*

Справедливость этой теоремы следует из того, что $K^\alpha_{\beta\lambda\mu\cdot\delta} = -K^\alpha_{\delta\lambda\mu\cdot\beta}$ в пространствах $X_{n,\dot{x}}$.

Собирая результаты обеих частей статьи, получаем:

Теорема 13. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ или $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 6$, то в $M_{n,\dot{x}}$ тензоры $\Gamma^i_{jk\cdot l}$, Ω^i_{jk}, $\widehat{C}^i_{jk}$, K^i_{jkl}, $\widehat{\Omega}^i_{jk}$, C^i_{jk}, $\Lambda^i_{jk\cdot l}$ имеют структуру соответственно* (10), (I.17), (I.7), (16), (I.10), (I.11), (12), *а в пространстве $N_{n,\dot{x}}$ тензоры $\Gamma^i_{jk\cdot l}$, Ω^i_{jk}, C^i_{jk}, $\Lambda^i_{jk\cdot l}$ — структуру* (10), (I.17), (5) *и* (12).

Список литературы: 1. *Егоров А. И.* Максимально подвижные пространства линейных элементов аффинной связности.— Укр. геометр. сб., 1979, вып. 22, с. 47—59. 2. *Лаптев Б. Л.* Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления.— Изв. физ.-мат. о-ва. Казань, 1938, т. 10, № 3, с. 3—38. 3. *Егоров А. И.* О движениях в пространствах общей аффинной связности.— Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 6, с. 1266—1269.

Поступила 11 июня 1977 г.

УДК 513

В. Ф. Игнатенко

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ МНОГОГРАННИКА 3_{21}

Согласно формулам Плюккера [1, с. 139] плоская кривая четвертого порядка C_4 не может иметь больше 28 двойных касательных. При этом существуют кривые C_4, имеющие ровно 28 двойных вещественных касательных [2]. Группа автоморфизмов всех 28 таких касательных кривой C_4 определяет в вещественном евклидовом пространстве E^7 группу симметрий G порядка $8 \cdot 9!$ многогранника 3_{21} [например, 3; 4]. Алгебра I многочленов, инвариантных относительно G, рассматривается, наряду с другими алгебрами, в целом ряде работ [4—14 и др.]. В п. 1° настоящей статьи доказывается [15], что *в прямоугольной декартовой системе координат независимые образующие степеней n_i $(i=\overline{1,\ 7})$ алгебры I с точностью до постоянного множителя имеют вид*

$$\sum_{s=1}^{63} \eta_s^{n_i}, \quad i=\overline{1,\ 7}, \tag{1}$$

где $\eta_s = 0$ есть нормированное уравнение всех 6-мерных плоскостей симметрий многогранника 3_{21}; $n_i = 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$.

В п. 2°, как следствие, получены образующие алгебры L многочленов, инвариантных относительно группы симметрий правильного 24-гранника вещественного пространства E^4; при этом в п. 3° найдена их связь с образующими L, полученными другими способами.

Многочлены вида (1) используются также в работах [16—20] при изучении других алгебр многочленов, инвариантных относительно дискретных групп симметрий вещественного пространства E^m.

1°. Пусть многочлены I_i $(i=\overline{1,\ m})$ принадлежат алгебре I_0 многочленов, инвариантных относительно некоторой дискретной группы симметрий G_0 пространства E^m; $n_i = \deg I_i$ $(n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_m)$ и $N(G_0)$ — число всех $(m-1)$-мерных плоскостей симметрии, которые задают группу G_0. Если произвольный инвариант $I_{i'}$ $(1 < i' \leqslant m)$ не является многочленом относительно $I_1, \ldots, I_{i'-1}$, причем

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = N(G_0) + m, \tag{2}$$

то I_i ($i = \overline{1, m}$) образуют полный базис алгебры I_0 (признак полного базиса).

Многогранник 3_{21} имеет 56 вершин. Их можно задать так: восемь точек (± 1, 0, ± 1, ± 1, 0, 0, 0) и все, получаемые из них циклическими перестановками координат [3]. Тогда 63 плоскости симметрии многогранника 3_{21} определятся уравнениями

$$x_i = 0 \ (i = \overline{1, 7});\ x_i \pm x_j \pm x_k \pm x_l = 0, \tag{3}$$

в каждом из которых, начиная с 8-го, индексы i, j, k, l принимают значения только одной из следующих четверок чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5;\quad 1,\ 2,\ 4,\ 7;\quad 1,\ 3,\ 6,\ 7;\quad 1,\ 4,\ 5,\ 6;$$
$$2,\ 3,\ 4,\ 6;\quad 2,\ 5,\ 6,\ 7;\quad 3,\ 4,\ 5,\ 7. \tag{4}$$

Плоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_6 = 0$, $x_1 - x_2 + x_4 - x_7 = 0$, $x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 0$, $x_3 - x_4 - x_5 - x_7 = 0$ задают фундаментальную область группы симметрий G многогранника 3_{21}; она является симплициальным конусом с вершиной в начале координат.

Так как многогранник 3_{21} симметричен относительно координатных плоскостей $x_i = 0$, то все числа n_i четны. Пусть $I_1 = \sum_{i=1}^{7} x_i^2$ есть сферическая образующая, общая для всех конечных дискретных групп симметрий пространства E^7. Форма $\theta_r = \sum_{s=1}^{63} \eta_s^r$ четной степени $r \geqslant 2$, где $\eta_s = 0$ — нормированные уравнения (3), инвариантна относительно G. При этом $I_1 = \frac{1}{2}\Theta_2$, $\Theta_4 = 3I_1^2$. Обозначим через I_2 форму

$$2^2 \cdot 3^{-1}\Theta_6 = 2\sum x_i^6 + 5\sum x_i^4 x_j^2 + 15 \sum_{i<j<k} x_i^2 x_j^2 x_k^2; \tag{5}$$

здесь и дальше предполагается, что в каждом члене каждой суммы все индексы различны и принадлежат только одной из четверок чисел (4). Легко проверить, что $I_2 \neq cI_1^3$, т. е. I_1 и I_2 независимы.

Рассмотрим такие случаи:

1. $r = 8$. В развернутом виде форма

$$I_3 = 2^3\Theta_8 = 9\sum x_i^8 + 14\sum x_i^6 x_j^2 + 35 \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 +$$
$$+ 105 \sum_{j<k} x_i^4 x_j^2 x_k^2 + 630 \sum_{i<j<k<l} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2. \tag{6}$$

Пусть

$$I_3 = a_1 I_1^4 + a_2 I_2 I_1. \tag{7}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при x_1^8, $x_1^6 x_2^2$, $x_1^4 x_2^4$, получим несовместную систему трех линейных уравнений относительно переменных a_1 и a_2:

$$a_1 + 2a_2 = 9;\quad 4a_1 + 7a_2 = 14;\quad 6a_1 + 10a_2 = 35. \tag{8}$$

Это зн чит, что равенство (7) невозможно.

2. $r = 10$. Форма

$$I_4 = 2^6 3^{-1}\Theta_{10} = 22 \sum x_i^{10} + 15 \sum x_i^8 x_j^2 + 70 \sum x_i^6 x_j^4 + \\ + 210 \sum_{j<k} x_i^6 x_j^2 x_k^2 + 525 \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 x_k^2 + 3150 \sum_{j<k<l} x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2. \tag{9}$$

Если

$$I_4 = a_1 I_1^5 + a_2 I_2 I_1^2 + a_3 I_3 I_1, \tag{10}$$

то, приравняв соответствующие коэффициенты при x_1^{10}, $x_1^4 x_2^4 x_3^2$, $x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2$, получим следующую систему линейных уравнений: $a_1 + 2a_2 + 9a_3 = 22$; $6a_1 + 12a_2 + 49a_3 = 105$; $12a_1 + 24a_2 + 63a_3 = 0$. Она несовместна, и равенство (10) также невозможно.

3. $r = 12$. Форма

$$I_5 = 2^8 \cdot 3^{-1}\Theta_{12} = 86 \sum x_i^{12} + 22 \sum x_i^{10} x_j^2 + 165 \sum x_i^8 x_j^4 + \\ + 308 \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + 2310 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 + 495 \sum_{j<k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 + \\ + 13\,860 \sum_{j<k<l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 5775 \sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 + 34\,650 \sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2. \tag{11}$$

Пусть

$$I_5 = a_1 I_1^6 + a_2 I_2^2 + a_3 I_2 I_1^3 + a_4 I_3 I_1^2 + a_5 I_4 I_1. \tag{12}$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при x_1^{12}, $x_1^{10} x_2^2$, $x_1^8 x_2^4$, $x_1^6 x_2^6$, $x_1^6 x_2^4 x_3^2$. Тогда, как и в случае $r = 10$, получим несовместную систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 9a_4 + 22a_5 = 86; \quad 6a_1 + 20a_2 + 11a_3 + 32a_4 + \\ + 37a_5 = 22; \quad 15a_1 + 45a_2 + 26a_3 + 72a_4 + 85a_5 = 165; \\ 10a_1 + 29a_2 + 17a_3 + 49a_4 + 70a_5 = 154; \\ 60a_1 + 220a_2 + 116a_3 + 427a_4 + 805a_5 = 2310. \end{gathered} \tag{13}$$

Следовательно, равенство (12) не выполняется.

4. $r = 14$. Форма

$$I_6 = 2^{11}\Theta_{14} = 2052 \sum x_i^{14} + 182 \sum x_i^{12} x_j^2 + 2002 \sum x_i^{10} x_j^4 + \\ + 6006 \sum_{j<k} x_i^{10} x_j^2 x_k^2 + 45045 \sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 + 6006 \sum x_i^8 x_j^6 + \\ + 270\,270 \sum_{j<k<l} x_i^8 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 84\,084 \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 + \\ + 1\,261\,260 \sum_{k<l} x_i^6 x_j^4 x_k^2 x_l^2 + 3\,153\,150 \sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 x_l^2 + \\ + 210\,210 \sum_{j<k} x_i^6 x_j^4 x_k^4. \tag{14}$$

Если

$$I_6 = a_1 I_1^7 + a_2 I_2^2 I_1 + a_3 I_2 I_1^4 + a_4 I_3 I_2 + \\ + a_5 I_3 I_1^3 + a_6 I_4 I_1^2 + a_7 I_5 I_1, \tag{15}$$

то имеем следующую несовместную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 18a_4 + 9a_5 + 22a_6 + 86a_7 &= 2052;\\
7a_1 + 24a_2 + 13a_3 + 73a_4 + 41a_5 + 59a_6 + 108a_7 &= 182;\\
21a_1 + 65a_2 + 37a_3 + 185a_4 + 104a_5 + 122a_6 + 187a_7 &= 2002;\\
35a_1 + 103a_2 + 60a_3 + 291a_4 + 170a_5 + 225a_6 + 473a_7 &= 6006;\\
42a_1 + 150a_2 + 79a_3 + 485a_4 + 243a_5 + 314a_6 + 539a_7 &= 6006,\\
140a_1 + 498a_2 + 266a_3 + 1771a_4 + 952a_5 + 1750a_6 + 4928a_7 &= 84\,084;\\
105a_1 + 375a_2 + 199a_3 + 1235a_4 + 678a_5 + 1130a_6 + 2970a_7 &= 45\,045.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Одночлены равенства (15), при которых сравниваются соответствующие коэффициенты, ясны по числам, стоящим в правых частях уравнений системы (16). Итак, равенство (15) невозможно. Следовательно, все инвариантные формы I_t $(t = \overline{1,\ 6})$ могут принадлежать полному базису алгебры I. При этом, согласно формуле (2), 7-я независимая образующая должна иметь 18-ю степень.

5. $r = 18$. Форма

$$\begin{aligned}
I_7 = 2^{14}\,3^{-1}\Theta_{18} = 5462\sum x_i^{18} + 51\sum x_i^{16}x_j^2 + 1020\sum x_i^{14}x_j^4 +\\
+ 3060\sum_{j<k} x_i^{14}x_j^2x_k^2 + 6188\sum x_i^{12}x_j^6 + 46\,410\sum x_i^{12}x_j^4x_k^2 +\\
+ 278\,460\sum_{j<k<l} x_i^{12}x_j^2x_k^2x_l^2 + 14\,586\sum x_i^{10}x_j^8 + 204\,204\sum x_i^{10}x_j^6x_k^2 +\\
+ 510\,510\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^4x_k^4 + 3\,063\,060\sum_{k<l} x_i^{10}x_j^4x_k^2x_l^2 +\\
+ 328\,185\sum_{i<j} x_i^8x_j^8x_k^2 + 1\,531\,530\sum x_i^8x_j^6x_k^4 + 9\,189\,180\sum_{k<l} x_i^8x_j^6x_k^2x_l^2 +\\
+ 22\,972\,950\sum_{j<k} x_i^8x_j^4x_k^4x_l^2 + 2\,858\,856\sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6 +\\
+ 42\,882\,840\sum_{i<j} x_i^6x_j^6x_k^4x_l^2 + 107\,207\,100\sum_{j<k<l} x_i^6x_j^4x_k^4x_l^4.
\end{aligned} \qquad (17)$$

Если предположить, что I_7 является многочленом относительно I_t $(t = \overline{1,\ 6})$, то снова получим несовместную систему линейных уравнений; приводить ее здесь не будем.

Таким образом, формы I_i $(i = \overline{1,\ 7})$ являются независимыми образующими алгебры I. Уравнение произвольной 6-мерной алгебраической поверхности пространства E^7, инвариантной относительно группы симметрий G многогранника 3_{21} и не содержащей плоскостей симметрии (3), можно записать так:

$$\varphi(I_i) = 0, \quad i = \overline{1,\ 7}, \qquad (18)$$

где φ — многочлен.

2°. Рассмотрим некоторые свойства поверхностей (18). Пусть $y_1 = x_{i_0}$, $y_2 = x_{j_0}$, $y_3 = x_{k_0}$, $y_4 = x_{l_0}$, где i_0, j_0, k_0, l_0 есть произвольно выбранная четверка чисел из (4); пусть 4-плоскость $E^4(y_\alpha)$, $\alpha = \overline{1,\ 4}$, определяется уравнениями $x_\tau = x_\nu = x_\sigma = 0$; $\{\tau, \nu, \sigma\} \cap \cap \{i_0, j_0, k_0, l_0\} = \varnothing$. Например, $E^4(x_1, x_2, x_3, x_5)$ задается уравнениями $x_4 = x_6 = x_7 = 0$. Эта 4-плоскость пересекает поверхности $I_i = c$ $(i = \overline{1,\ 7})$ по 3-поверхностям, определяемым в ней уравнениями

$$L_i(y_\alpha) = c. \tag{19}$$

соответственно. Тогда *многочлены* $\varphi(L_i)$ *принадлежат алгебре многочленов, инвариантных относительно группы симметрий правильного 24-гранника 4-плоскости* E^4, *причем формы* L_1, L_2, L_3, L_5 *составляют полный базис алгебры* L *этой группы.*

Действительно, 3-плоскости симметрии правильного 24-гранника зададим в E^4 уравнениями

$$y_\alpha = 0 \ (\alpha = \overline{1,\ 4}), \quad y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm y_4 = 0 \tag{20}$$

и

$$y_\alpha \pm y_\beta = 0 \ (\alpha,\ \beta = \overline{1,\ 4};\ \alpha < \beta). \tag{21}$$

В пространстве E^7 уравнения (20) определяют плоскости симметрии поверхностей (18). Так как 4-плоскость E^4 ортогональна указанным 12 плоскостям, то 3-поверхности (19) в E^4 симметричны относительно 3-плоскостей (20). Развернутый вид форм L_i [см. (5), (6), (9), (11), (14), (17)] показывает, что поверхности (19) имеют 3-плоскости симметрии (21). Следовательно, $L_i \in L$.

Если бы между формами L_1, L_2, L_3 и L_5 существовала зависимость, она выражалась бы соотношениями (7) и (12) при $a_5 = 0$, поскольку I_4 не участвует в образовании L_i. Но соотношение (7) не существует, так как система (8) несовместна, а (12) — так как несовместна система первых четырех уравнений (13) при $a_5 = 0$. Следовательно, эти формы независимы. Поскольку их степени удовлетворяют равенству (2) при $m = 4$, эти формы составляют полный базис алгебры L.

3°. Обозначим через P_λ, где число $\lambda \geqslant 2$ четно, сумму возведенных в степень λ левых частей нормированных уравнений (20) и (21) в E^4. Формы $P_\lambda \in L$. В частности, $P_6 = 15L_1^3$. В работе [17] доказано, что образующая 6-й степени алгебры L имеет вид

$$A = \sum y_\alpha^4 y_\beta^2 - 3 \sum_{\alpha<\beta<\gamma} y_\alpha^2 y_\beta^2 y_\gamma^2;$$

здесь и дальше в каждом члене каждой суммы все индексы различны и принимают значения 1, 2, 3, 4. Форма P_8 после упрощения приводится к образующей 8-й степени

$$B = \sum_{\alpha<\beta} y_\alpha^4 y_\beta^4 - \sum_{\beta<\gamma} y_\alpha^4 y_\beta^2 y_\gamma^2 + 6y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2.$$

Развернутый вид рассматриваемых в дальнейшем форм будем приводить с точностью до постоянного множителя. Форма

$$P_{12} = 17 \sum y_\alpha^{12} + 34 \sum y_\alpha^{10} y_\beta^2 + 255 \sum y_\alpha^8 y_\beta^4 + 476 \sum_{\alpha<\beta} y_\alpha^6 y_\beta^6 +$$

$$+90\sum_{\beta<\gamma} y_\alpha^8 y_\beta^2 y_\gamma^2 + 420\sum y_\alpha^6 y_\beta^4 y_\gamma^2 + 1050\sum_{\alpha<\beta<\gamma} y_\alpha^4 y_\beta^4 y_\gamma^4 +$$
$$+2520\sum_{\beta<\gamma<\delta} y_\alpha^6 y_\beta^2 y_\gamma^2 y_\delta^2 + 6300\sum_{\substack{\alpha<\beta\\ \gamma<\delta}} y_\alpha^4 y_\beta^4 y_\gamma^2 y_\delta^2.$$

(В работе [17] при вычислении 2, 3, и 4-го коэффициентов этой формы допущены ошибки.) Форма

$$P_{12} = 17L_1^6 + 18\tfrac{2}{3}A^2 - 68AL_1^3 + 253\tfrac{1}{3}BL_1^2. \qquad (22)$$

Пусть Q_λ есть сумма λ-х степеней левых частей нормированных уравнений (20). Так как формы Q_λ инвариантны относительно плоскостей (20) и (21), то они принадлежат алгебре L. Форма

$$Q_6 = 3\sum y_\alpha^6 + 5\sum_{\alpha<\beta} y_\alpha^4 y_\beta^2 + 30\sum_{\alpha<\beta<\gamma} y_\alpha^2 y_\beta^2 y_\gamma^2.$$

Так как $Q_6 = 3L_1^3 - 4A$, то она является образующей 6-й степени алгебры L. Найденная в п. 2° образующая $L_2 = 2L_1^3 - A$.

Форма $Q_8 = 33\sum y_\alpha^8 + 28\sum y_\alpha^6 y_\beta^2 + 70\sum_{\alpha<\beta} y_\alpha^4 y_\beta^4 + 420\sum_{\beta<\gamma} y_\alpha^4 y_\beta^2 y_\gamma^2 +$

$$+2520 y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2.$$

Поскольку $Q_8 = 33L_1^4 - 104AL_1 + 80B$, она является образующей 8-й степени L; $L_3 = 9L_1^4 - 22AL_1 + 25B$.

Форма $Q_{12} = 171\sum y_\alpha^{12} + 22\sum y_\alpha^{10} y_\beta^2 + 165\sum y_\alpha^8 y_\beta^4 +$

$$+308\sum_{\alpha<\beta} y_\alpha^6 y_\beta^6 + 4620\sum y_\alpha^6 y_\beta^4 y_\gamma^2 + 990\sum_{\beta<\gamma} y_\alpha^8 y_\beta^2 y_\gamma^2 +$$
$$+27\,720\sum_{\beta<\gamma<\delta} y_\alpha^6 y_\beta^2 y_\gamma^2 y_\delta^2 + 11\,550\sum_{\alpha<\beta<\gamma} y_\alpha^4 y_\beta^4 y_\gamma^4 + 69\,300\sum_{\substack{\alpha<\beta\\ \gamma<\delta}} y_\alpha^4 y_\beta^4 y_\gamma^2 y_\delta^2.$$

Упростим ее так:

$$Q_{12}' = \frac{1}{4}(171L_1^6 - Q_{12}) = 251\sum y_\alpha^{10} y_\beta^2 + 600\sum y_\alpha^8 y_\beta^4 +$$
$$+778\sum_{\alpha<\beta} y_\alpha^6 y_\beta^6 + 1410\sum y_\alpha^6 y_\beta^4 y_\gamma^2 + 1035\sum_{\beta<\gamma} y_\alpha^8 y_\beta^2 y_\gamma^2 -$$
$$-1800\sum_{\beta<\gamma<\delta} y_\alpha^6 y_\beta^2 y_\gamma^2 y_\delta^2 + 960\sum_{\alpha<\beta<\gamma} y_\alpha^4 y_\beta^4 y_\gamma^4 - 9630\sum_{\substack{\alpha<\beta\\ \gamma<\delta}} y_\alpha^4 y_\beta^4 y_\gamma^2 y_\delta^2.$$

Поскольку форма Q_{12}' не является многочленом относительно L_1, A, B, ее можно взять в качестве образующей 12-ой степени алгебры L. Форма P_{12}, учитывая (22), такой образующей не является. Образующая

$$L_5 = 86L_1^6 + 6\tfrac{5}{12}A^2 - 23\tfrac{3}{8}AL_1^3 + 87\tfrac{1}{12}BL_1^2 - 1\tfrac{7}{8}Q_{12}'.$$

Список литературы: 1. *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М., ИЛ, 1952. 236 с. 2. *Blum R.*, *Guinand A. P.* A quartic with 28 real bitangents. — Canad. Math. Bull.", 1964. vol. 7, No 3, p. 399-404. 3. *Frame J. S.* The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents. — Annali di Matematica, 1951, vol. 32, p. 83-119. 4. *Coxeter H. S. M.* The product of the generators of a finite group generated by reflections.— Duke Math. J., 1951, vol. 18, p. 765-782. **5.** *Witt E.* Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liesch Ringe.— Abh. Mat. Sem. Hamb. Univ., 1941, Bd 14, S. 289—322. **6.** *Yen C. T.* Sur les polynomes de Poincaré des groupes simples exceptionnels. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1949, vol. 228, p. 628-630. **7.** *Racah G.* Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie. — Atti della Acad. Naz. dei Lincei, 1950, vol. 8, p. 108-112. **8.** *Coleman A. J.* The Betti number of the simple Lie groups.— Can. J. Math., 1958, vol. 10, p. 349-356. **9.** *Steinberg R.* Finite reflection groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1959, vol. 91, p. 493-504. **10.** *Weiner M. M.* Invariants of finite reflection groups. Doct. diss./Yeshiva Univ., 1968. 92 p. **11.** *Flatto L., Weiner M. M.* Invariants of finite reflection group and mean value problems. I. — Amer. J. Math., 1969, vol. 51, No 3, p. 591-598. **12.** *Flatto L., Weiner M. M.* Invariants of finite reflection group and mean value problems. II. — Amer. J. Math., 1970, vol. 92, No 3. p. 552-561. **13.** *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М., Мир, 1972. 334 с. **14.** *Фоменко А. Т.* Полиномы Пуанкаре некоторых однородных пространств.— Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1970, вып. 15, с. 128—152. **15.** *Игнатенко В. Ф.* Об одной алгебре полиномов.— В кн.: Пятая Прибалт. геометр. конф. Тезисы докл. Друскининкай, 1978, с. 30. **16.** *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Об алгебраических поверхностях в E^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника. — Укр. геометр. сб. Харьков, 1971, вып. 11, с. 26—31. **17.** *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* К общему уравнению алгебраической поверхности в E^4 с симметрией правильного 24-гранника.— Укр. геометр. сб. Харьков, 1972, вып. 12, с. 57—59. **18.** *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Общее уравнение алгебраической поверхности с симметрией правильного 600-гранника в пространстве E^4.— Укр. геометр. сб. Харьков, 1973, вып. 13, с. 71—74. **19.** *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Алгебраические поверхности с симметрией правильного m-мерного симплекса. — Укр. геометр. сб. Харьков, 1974, вып. 16, с. 3—8. **20.** *Игнатенко В. Ф.* О плоских алгебраических кривых с осями симметрии.— Укр. геометр. сб. Харьков, 1978, вып. 21, с. 31—33.

Поступила 26 октября 1978 г.

УДК 513

Н. И. Кованцов, Ч. Раднаа

К ВОПРОСУ О РАССЛОЕНИИ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ В НОРМАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ

Вопрос о расслоении комплекса прямых в нормальные конгруэнции был предметом рассмотрения еще в прошлом веке [1; 2]. Однако эти рассмотрения носили лишь общий характер. Ограничения на поверхности, расслаивающие комплекс, не ставились.

В последнее время вопросом о расслоении комплекса в нормальные конгруэнции занялись снова, но теперь эти расслоения связываются со строением и частным видом расслаивающих поверхностей [3; 4]. В упомянутых работах рассматривались те расслоения, когда расслаивающие поверхности являются поверхностями постоянной полной кривизны, поверхностями постоянной средней кривизны (в частности, минимальными), поверхностями Вейнгартена (с линейным соотношением между полной и средней кривизнами). Рассматривались также случаи так называемых K- и H-расслоений, т. е. таких, в которых расслаивающие поверхности вдоль каждого луча имеют одну и ту же полную или среднюю кривизну, не будучи в то же время поверхностями постоянных соответствующих кривизн.

Исследование расслоений привело к выделению на каждом луче произвольного комплекса некоторых инвариантно связанных с ним точек, т. е. к некоторому инвариантному алгебраическому уравнению на абсциссу точки расслаивающей поверхности. Обращение в тождество этого уравнения выделяло некоторые интересные классы комплексов, для которых были найдены безынтегральные представления.

В настоящей работе рассмотрены все упомянутые выше расслоения с более общей точки зрения и показано, что целый ряд полученных результатов может быть распространен на более общие классы объектов. Получен один интересный класс комплексов, который изучается по той же схеме, что и в [5; 6]. Отличие этих рассмотрений от приведенных в [5; 6] заключается в том, что вместо уравнения Лапласа на функции λ и τ, как это было в работах [5; 6], получены уравнения гиперболического типа на подобные же функции. Последнее обстоятельство помешало получить для поверхностей, ортогональных к нормальным конгруэнциям, расслаивающим комплекс, формулы, аналогичные формулам Вейерштрасса и Шварца.

Прежде всего приведем некоторые основные понятия и формулы. Известно, что если комплекс прямых в трехмерном эвклидовом пространстве отнесен к нормальному трехграннику A, e_1, e_2, e_3 (A — центр луча, e_1 — орт главной нормали, e_2 — орт бинормали, e_3 — орт луча), то в деривационных уравнениях, определяющих смещение трехгранника, $dA = \omega^i e_i$, $de_i = \omega_i^j e_j$, $\omega_i^j = -\omega_j^i$ (i, $j = 1, 2, 3$), следует положить

$$\omega^2 = k\omega_3^1, \tag{1}$$

где k — коэффициент, носящий название кривизны комплекса.

Продолжая уравнение (1) в соответствии с уравнениями структуры, получим

$$\omega_1^2 = p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2;\ dk = \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2;$$

$$\omega^3 = (kp - \beta)\,\omega^1 + (k\alpha - \gamma)\,\omega_3^1 + (k\beta - r)\,\omega_3^2, \tag{1'}$$

где k, p, q, r, α, β, γ — некоторые функции от параметров u, v, θ, определяющих положение луча в каждом конкретно заданном комплексе. Формы ω^i, ω_i^j зависят также от параметров u, v, θ и их дифференциалов.

Всякий комплекс можно расслоить в однопараметрическое семейство конгруэнций. Для этого достаточно задать произвольное вполне интегрируемое дифференциальное уравнение $d\theta = A\,du + B\,dv$ (A и B — функции от u, v и θ) или $\omega^1 = a\omega_3^1 + b\omega_3^2$.

Конгруэнции, составляющие комплекс, будут нормальными, если $b = k$, т. е.

$$\omega^1 = a\overset{1}{\omega}_3 + k\overset{2}{\omega}_3. \qquad (2)$$

Произвольную точку на луче комплекса можно задать радиусом-вектором $M = A + te_3$ относительно некоторого полюса в эвклидовом пространстве, который предполагается фиксированным. Если точка M описывает поверхность, ортогональную лучам нормальной конгруэнции, принадлежащей комплексу, то полная и средняя кривизны такой поверхности определяются [3; 5] формулами

$$K = \frac{1}{t^2 + at - k^2}; \quad H = -\frac{a + 2t}{t^2 + at - k^2}. \qquad (3)$$

Из равенств (3) можно найти a соответственно:

$$a = \frac{1 - K(t^2 - k^2)}{Kt}; \quad a = -\frac{2t + H(t^2 - k^2)}{Ht + 1}. \qquad (4)$$

Если положить, например, $K = \text{const}$ или $H = \text{const}$, то, как показывают формулы (4), a оказывается некоторой функцией вида [см. 5] $a = \frac{a_1 t^2 + 2b_1 t + c_1}{2b_2 t + c_2}$, коэффициенты a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$ являются некоторыми функциями от k (в частности, они могут быть постоянными). Внося значение a (то или иное) в уравнение (2) и требуя его полной интегрируемости, т. е. дифференцируя его внешним образом и приравнивая нулю коэффициент при $[\overset{1}{\omega}_3\overset{2}{\omega}_3]$, мы приходим соответственно к уравнению четвертой степени [см. 5]:

$$t^4K^2p - 2K^2\alpha t^3 + (-2Kp + K^2q + 2K^2k\beta)t^2 +$$
$$+ (-2K^2k\gamma + 2K\alpha)t + Kr + K^2k^2r + p + Kk^2p = 0 \qquad (5)$$

или

$$pH^2t^4 - 2H(\alpha H + 2p)t^3 + [H^2(q + 2k\beta) + 6\alpha H + 4p]t^2 -$$
$$- 2[H^2k\gamma + H(q + 2k\beta) + 2\alpha]t + H^2k^2r + 2Hk\gamma +$$
$$+ q + r + 2k\beta + k^2p = 0. \qquad (6)$$

Уравнения (5) и (6) в общем случае не исчезают тождественно. Следовательно, на каждом луче произвольного комплекса имеем соответствующую инвариантно определяемую комплексом четверку точек аналогично тому, как на каждом луче определена четверка инфлекционных центров. Заметим кстати, что четверку инфлекционных центров мы получим, если в равенствах (3) приравняем нулю знаменатель, откуда $a = (k^2 - t^2)/t$.

Точки, определяемые уравнениями (5) и (6), обладают тем свойством, что если расслоить комплекс в нормальные конгруэнции, то в этих точках поверхности, ортогональные к этим конгруэнциям, имеют полную или среднюю кривизну, для которой соответственно выполнено равенство $dK = 0$, $dH = 0$. Однако сами поверхности не являются в общем случае поверхностями постоянной полной или постоянной средней кривизны. Они становятся такими лишь при условии исчезновения уравнения (5) или (6), т. е. при условии

$$p = \alpha = \gamma = r = q + 2k\beta = 0. \tag{6a}$$

Последние же равенства характеризуют линейный комплекс.

Обобщая рассмотренные расслоения, возьмем в качестве a произвольную функцию, зависящую от t и k,

$$a = f(t, k). \tag{7}$$

Внося эту функцию в уравнение (2) и требуя полной интегрируемости этого уравнения, п идем к следующему уравнению:

$$pf^2 + 2\alpha f + (k^2 p - r) f_t - (\alpha k + \gamma) f_k + 2k(pk + \beta) + \\ + q + k^2 p - r = 0. \tag{8}$$

Если, в частности,

$$f = \frac{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_m} \tag{9}$$

($a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ — функции от k), то уравнение (8) будет алгебраическим; его степень относительно t в общем случае будет равна $2h$, где $h = \max(n, m)$.

Однако какова бы ни была функция (7), уравнение (8) тождественно исчезает тогда и только тогда, когда все его коэффициенты обращаются в нуль, что снова приводит к (6a), т. е. к линейному комплексу.

Если функция f зависит только от t, то $f_k = 0$ и уравнение (8) принимает вид

$$pf^2 + 2\alpha f + (k^2 p - r) f_t + 2k(pk + \beta) + q + k^2 p - r = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) тождественно исчезает, если имеют место равенства $p = \alpha = r = q + 2k\beta = 0$. Комплекс прямых, для которого выполнены эти равенства, был получен ранее в статье [7], там же дано его безынтегральное представление. Он определяется следующей вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений

$$\omega^2 = k\omega_3^1;\ \omega_1^2 = \beta\omega_3^2;\ dk = -2k\beta\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2; \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1;\ d\beta + (1 + \beta^2)\,\omega_3^1 = 0;\ \ d\gamma = -3\beta\gamma\omega_3^1. \tag{11}$$

Широта класса таких комплексов — шесть постоянных.

Найдем уравнение комплекса (11) в плюккеровых координатах, что раньше сделано не было. В работе [7] были найдены координаты центра A текущего луча комплекса:

$$x = -\operatorname{tg} u\,(c_2\theta\cos\theta - c_2\sin\theta - c_3\cos\theta); \\ y = -\operatorname{tg} u\,(c_2\theta\sin\theta + c_2\cos\theta - c_3\sin\theta); \tag{12} \\ z = v + \int \frac{c}{\sin u\cos u}\,du + \frac{1}{2}c_2\theta^2 - c_3\theta,$$

где u, v, θ — параметры, определяющие луч; они связаны с фо мами ω^i и ω_i^j следующим образом:

$$du = \omega_3^1;\; dv = \beta^{-1}\sqrt{1+\beta^2}\,\omega^3;\; d\theta = \sqrt{1+\beta^2}\,\omega_3^2.$$

При этом орты неподвижной координатной системы, в котор записаны уравнения (12), выбраны так: $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1 \sin u \sin \theta +$ $+ \boldsymbol{e}_2 \cos\theta - \boldsymbol{e}_3 \cos u \sin\theta$; $\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{e}_1 \sin u \cos\theta + \boldsymbol{e}_2 \sin\theta + \boldsymbol{e}_3 \cos u \cos\theta$; $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_1 \cos u + \boldsymbol{e}_3 \sin u$. В этой системе координат вектор $\boldsymbol{e}_3$ лу комплекса определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{i}\cos u \sin\theta + \boldsymbol{j}\cos u\cos\theta + \boldsymbol{k}\sin u. \qquad (1$$

Рассмотрим на луче комплекса две точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_3$, коо динаты которых определяются из формул (12) и (13). Плюккеров координаты луча комплекса имеют вид $\rho p^{12} = x^1\alpha_3^2 - x^2\alpha_3^1 =$ $-\sin u\,(c_2\theta - c_3)$; $\rho p^{13} = -x^1\alpha_3^3 + x^3\alpha_3^1 = -\frac{\sin^2 u}{\cos u}(c_2\theta\cos\theta - c_2\sin\theta$ $- c_3\cos\theta) - \cos u \sin\theta\left(f(u) + v + \frac{1}{2}c_2\theta^2 - c_3\theta\right)$; $\rho p^{23} = x^3\alpha_3^2 -$ $-x^2\alpha_3^3 = \cos u\cos\theta\,(v + f(u) + \frac{1}{2}c_2\theta^2 - c_2\theta) + \sin u \operatorname{tg} u\,(c_2\theta\sin\theta$ $+ c_2\cos\theta - c_3\sin\theta)$; $\rho p^{14} = \alpha_3^1 = -\cos u\sin\theta$; $\rho p^{24} = \alpha_3^2 = \cos u\cos$ $\rho p^{34} = \alpha_3^3 = \sin u$. $x^1 = x$; $x^2 = y$; $x^3 = z$; ρ — множитель пропо циональности. Исключая из этих равенств параметры ρ, u, v, получим уравнение комплекса в плюккеровых координатах

$$\frac{p^{14}}{p^{24}} = \operatorname{tg}\frac{p^{12} - c_3 p^{34}}{c_2 p^{34}}. \qquad (1$$

Если f не зависит от t, то уравнение (8) принимает вид pf^2 $+ 2\alpha f - (\alpha k + \gamma) f_k + 2k(pk + \beta) + q + k^2 p - r = 0$. Оно тожд ственно исчезает, если $p = \alpha = 2k\beta + q = r = \gamma = 0$. Это — лине ный комплекс, расслоение которого в нормальные конгруэнци было изучено ранее.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях мы имеем де с линейным комплексом или с комплексом, определяемым урав нием (14). Заметим, что линейный комплекс является частным сл чаем комплекса (14). Именно, если в (14) положит $c_2 = 0$, то м должны также положить $p^{12} - c_3 p^{34} = 0$, а это уравнение лине ного комплекса.

Пусть теперь в уравнении (2) конгруэнций, расслаивающ комплекс, $\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2$, коэффициент $a = \text{const}$, т. е. он не з висит ни от k, ни от t. В таком случае уравнение (8) принима вид

$$pa^2 + 2\alpha a + 2k(pk + \beta) + q + k^2 p - r = 0. \qquad (1$$

Если это равенство сохраняется при любом значении коэффиц ента a, то $p = \alpha = 0$, $2k\beta + q - r = 0$. Класс таких комплекс описывается следующей системой уравнений:

$$\omega^2 = k\omega_3^1;\ \omega_1^2 = \beta\omega_3^2;\ dk = q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2;$$

$$\omega^3 = -\beta\omega^1 - \gamma\omega_3^1 - (k\beta + q)\,\omega_3^2;\ d\beta + (1+\beta^2)\,\omega_3^1 = 0; \tag{16}$$

$$dq = A\omega_3^1 + (B + \beta\gamma)\,\omega_3^2;\ d\gamma = B\omega_3^1 + (A - 2k + 3\beta q)\,\omega_3^2,$$

где A, B — параметры продолжения. Широта класса таких комплексов — две функции одного аргумента.

Система (16) похожа на систему, полученную в статье [5]; безынтегральное представление комплекса (16), как можно показать, аналогично тому, какое дано в указанной статье. Для каждого из таких комплексов уравнение (2) будет вполне интегрируемо в силу (15).

Легко убеждаемся в том, что имеют место, как и в случае комплекса [5, (17)], соотношения $D\omega_3^1 = 0$; $D(\sqrt{1+\beta^2}\,\omega_3^2) = 0$. Из них следует, что ω_3^1 и $\sqrt{1+\beta^2}\omega_3^2$ есть полные дифференциалы некоторых функций от u, v, θ. Произведя необходимую замену переменных, можно положить $\omega_3^1 = du$, $\sqrt{1+\beta^2}\omega_3^2 = d\theta$. В таком случае из (16) находим $\beta = -\operatorname{tg} u$ $(\pi/2 < u < \pi)$ (постоянное интегрирования считаем внесенным в аргумент u), $dk = q\,du + (\gamma/\sqrt{1+\beta^2})\,d\theta$, откуда $q = k_u$, $\gamma = \sqrt{1+\beta^2}\,k_\theta$. Если внести эти значения q и γ в четвертое уравнение (16) и продифференцировать его внешним образом, то придем к уравнению не эллиптического, как в случае комплекса [5, (17)], а гиперболического типа

$$\frac{1}{\cos^2 u} K_{\theta\theta} - k_{uu} + 3\operatorname{tg} u k_u + 2k = 0. \tag{17}$$

Решение этого уравнения существует с широтой две функции одного аргумента, что совпадает с широтой класса комплексов (16). Решив (17) и подставив функцию $k(u, \theta)$ в (16), найдем соответствующие комплексы.

Как и в случае [5, (17)], вектор

$$\boldsymbol{p} = \frac{-\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\beta^2}} \tag{18}$$

постоянен в комплексе (16). Уравнение $\omega_3^1 = 0$ выделяет цилиндры (обозначим их через U), образующие которых параллельны вектору (18); эти цилиндры описываются центром луча A комплекса. Линии $\omega_3^1 = \omega^3 = 0$ на цилиндре U есть его линии откоса, наклоненные к образующим под углом U. Каждый цилиндр комплекса (не смешивать с цилиндрами U) есть плоскость, касательная к цилиндру U. Вектор $\boldsymbol{e}_2$ нормален к цилиндру U.

Как и ранее, может быть введена прямоугольная декартова система координат с ортами $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{k}\cos u - (\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j})\sin\theta$; $\boldsymbol{e}_2 = -\cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}\sin u + (\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos 0\boldsymbol{j})\cos u$, где принято $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$.

Линии пересечения цилиндра U и плоскости $xy(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{d\theta}=(k_u-k\operatorname{tg}u)\cos^2 u\sin\theta;$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-(k_u-k\operatorname{tg}u)\cos^2 u\cos\theta, \tag{19}$$

причем $\omega^1=\omega_3^1=0$. Чтобы проинтегрировать эти уравнения, следует предварительно найти решение уравнения (17), т. е. функцию $k(u, \theta)$, и, подставив ее в (19), положить $u=\text{const}$.

Кривые (19) становятся окружностями при $k_0=0$, уравнение (17) в этом случае становится обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка $k''-3\operatorname{tg}uk'-2k=0$. Его решение есть $k=(c_1\sin u+c_2)\cos^{-2}u$, c_1, $c_2=\text{const}$. При $c_1=0$ комплекс становится линейным.

Вернемся к общему случаю (17). Положив $v=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right|$ [см. 8], а также $\lambda=\frac{k}{\operatorname{ch}^2 v}$, $\tau=\frac{t}{\operatorname{ch}^2 v}$, мы приведем (17) к виду

$$\lambda_{vv}-\lambda_{\theta\theta}+2\operatorname{th}v\lambda_v=0, \tag{20}$$

а уравнение $\omega^3+dt=0$ — к виду $d\tau=-\lambda_v\,d\theta+\left(-\lambda_\theta-2\tau\operatorname{th}v-\right.$ $\left.-a\frac{\operatorname{sh}v}{\operatorname{ch}^3 v}\right)dv$, откуда

$$\tau_\theta=-\lambda_v, \tau_v=-\lambda_\theta-2\tau\operatorname{th}v-a\frac{\operatorname{sh}v}{\operatorname{sh}^3 v}. \tag{21}$$

В работе [5] уравнению (20) соответствовало уравнение Лапласа, уравнениям (21) — условия Коши—Римана $\tau_\theta=\lambda_v$, $\tau_v=-\lambda_\theta$.

Поверхности σ, ортогональные к конгруэнциям $\omega^1=a\omega_3^1+$ $+k\omega_3^2$, находятся так же, как и в работе [5], однако теперь их квадратичные формы будут иметь следующие коэффициенты: первая $\varphi_1=E\,dv^2+2F\,dv\,d\theta+G\,d\theta^2$

$$E=(\lambda^2+\tau^2)\operatorname{ch}^2 v+\frac{a}{\operatorname{ch}^2 v}(a+2\tau\operatorname{ch}^2 v);$$

$$F=\lambda(a+2\tau\operatorname{ch}^2 v),\ G=(\lambda^2+\tau^2)\operatorname{ch}^2 v, \tag{22}$$

вторая $\varphi_2=L\,dv^2+2M\,dv\,d\theta+N\,d\theta^2$

$$L=-\frac{a}{\operatorname{ch}^2 v}-\tau;\ M=\lambda;\ N=-\tau. \tag{23}$$

Между коэффициентами (22), (23) имеют место соотношения

$$E=-a\frac{M^2+L^2}{L-N};\ F=aM\frac{L+N}{L-N};\ G=-a\frac{M^2+N^2}{L-N}. \tag{24}$$

Эти равенства полностью характеризуют рассматриваемые поверхности (равенства выписаны в специальных системах координат на них). Действительно, если ввести переменные τ, λ, v и представить коэффициенты второй квадратичной формы в виде (23), равенства (24) дадут коэффициенты первой квадратичной формы в виде (22).

Равенства (21), а потому и (20), также оказываются следствием равенств (22) и (23). В самом деле, безотносительно к какому-либо комплексу будем считать, что поверхность σ описана точкой M, которая представлена в виде $M = A + te_3$, при этом e_3 есть нормаль поверхности σ. Полагая $dA = \omega^i e_i$; $de_i = \omega_i^j e_j$; $e_i e_j = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), получим $dM = \tilde{\omega}^1 e_1 + \tilde{\omega}^2 e_2$, где

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 + t\omega_3^1,\ \tilde{\omega}^2 = \omega^2 + t\omega_3^2; \tag{25}$$

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3 + dt = 0. \tag{26}$$

Все формы ω^i, ω_i^j есть функции параметров v, θ и их дифференциалов, удовлетворяющие известным уравнениям структуры.

Считая, что σ — не торс, положим $\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2$; $\omega^2 = k\omega_3^1$; $\omega_3^1 = -\frac{dv}{\operatorname{ch} v}$; $\omega_3^2 = \frac{d\theta}{\operatorname{ch} v}$; $a = \mathrm{const}$. Эти равенства определят свойства искомой поверхности; k — неизвестная функция от v, θ. Равенства (25) примут вид

$$\tilde{\omega}^1 = -\left(\frac{a}{\operatorname{ch} v} + \tau \operatorname{ch} v\right) dv + \lambda \operatorname{ch} v\, d\theta;$$

$$\tilde{\omega}^2 = -\lambda \operatorname{ch} v\, dv + \tau \operatorname{ch} v\, d\theta, \tag{27}$$

где $\lambda = k \operatorname{ch}^{-2} v$; $\tau = t \operatorname{ch}^{-2} v$. Формы $\tilde{\omega}^i$, ω_i^j также удовлетворяют уравнениям структуры $D\tilde{\omega}^i = [\tilde{\omega}^j \omega_j^i]$, $D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Положим $\omega_1^2 = h\omega_3^1 + \beta\omega_3^2$. Тогда из равенства $D\omega_3^1 = [\omega_3^2 \omega_2^1] = 0$ следует $h = 0$, а из равенств $D\omega_3^2 = [\omega_3^1 \omega_1^2] = \beta[\omega_3^1 \omega_3^2] = -\frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^2 v} \times [dv\, d\theta] = \operatorname{sh} v [\omega_3^1 \omega_3^2]$, находим $\beta = \operatorname{sh} v$, следовательно, $\omega_1^2 = \operatorname{th} v\, d\theta$.

Продифференцируем внешним образом равенства (27), учтя (26): $[\tilde{\omega}^2 \omega_2^1] = \lambda \operatorname{sh} v [dv\, d\theta] = (\lambda_v \operatorname{ch} v + \lambda \operatorname{sh} v + \tau_\theta \operatorname{ch} v) \cdot [dv\, d\theta]$;

$$[\tilde{\omega}^1 \omega_1^2] = -\left(a\frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^2 v} + \tau \operatorname{sh} v\right)[dv\, d\theta] = (\tau_v \operatorname{ch} v + \tau \operatorname{sh} v + \lambda_\theta \operatorname{ch} v)[dv\, d\theta].$$

Сравнивая коэффициенты при $[dv\, d\theta]$, приходим к равенствам (21), что и требовалось.

Таким образом, поверхность σ определяется следующей вполне интегрируемой системой деривационных уравнений:

$$dM = \left[-\left(\frac{a}{\operatorname{ch} v} + \tau \operatorname{ch} v\right) dv + \lambda \operatorname{ch} v\, d\theta\right] e_1 + (-\lambda\, dv + \tau\, d\theta) \operatorname{ch} v\, e_2,$$

$$de_1 = \operatorname{th} v\, d\theta\, e_2 + \frac{dv}{\operatorname{ch} v} e_3;\ de_2 = -\operatorname{th} v\, d\theta\, e_1 - \frac{d\theta}{\operatorname{ch} v} e_3;$$

$$de_3 = -\frac{dv}{\operatorname{ch} v} e_1 + \frac{d\theta}{\operatorname{ch} v} e_2, \tag{28}$$

где τ и λ — функции, удовлетворяющие условиям (21). Такие именно поверхности ортогональны к нормальным конгруэнциям, расслаивающим комплекс (16). Опишем это расслоение.

Пусть задан комплекс (16). Отнесем его к параметрам v, θ, w, положив $\omega_3^1 = -\frac{dv}{\operatorname{ch} v}$, $\omega_3^2 = \frac{d\theta}{\operatorname{ch} v}$ (на параметр w не налагаем никаких условий). Кривизна k комплекса будет в таком случае функцией лишь v и θ. Находим функцию $\lambda = \frac{k}{\operatorname{ch}^2 v}$, а из системы (21) (ее полная интегрируемость следует из (17), а потому и из (20)) с произволом в одну постоянную — функцию $\tau(v, \theta, c_1)$ ($c_1 = \mathrm{const}$). Интегрируем уравнение (2) при $a = \mathrm{const}$ (его полная интегрируемость обеспечивается уравнениями (16)). Решение существует с произволом в одну постоянную

$$w = w(v, \theta, c_2), \; c_2 = \mathrm{const}. \tag{29}$$

Это уравнение определяет однопараметрическое семейство нормальных конгруэнций, в которые расслаивается комплекс (16). Расслоение не является функциональным, поскольку коэффициент a не зависит от координаты t точки $M = A + te_3$, описывающей ортогональную к конгруэнции (29) поверхность σ.

Интегрируем уравнения (28), внеся в них определяемую комплексом функцию $k(v, \theta)$ и найденную интегрированием уравнений (21) функцию $\tau(v, \theta, c_1)$ ($c_1 = \mathrm{const}$). Постоянные интегрирования для уравнений (28) выберем так, чтобы векторы e_1, e_2, e_3 совпадали с соответствующими векторами подвижного трехгранника комплекса (16) — это возможно в силу совпадения форм ω_1^2, ω_2^3, ω_3^1 у комплекса и у поверхности (28). Точку M выберем так, чтобы $t = \tau \operatorname{ch}^2 v$. Получим однопараметрическое (параметр c_1) семейство поверхностей (28), ортогональных к конгруэнциям (29) при каждом фиксированном c_2. Изменяя c_2, получим двупараметрическое семейство таких поверхностей.

Список литературы: 1. *Transon A.* Memoire sur les propriétés d'un ensemle de droites menées de tous les points de léspace, suivant une loi continue. — Journal de l'école Politechnique, 1861. v. 22, № 32. 2. *Turriere E.* Sur les congruences de normales qui appartiennent a un complexe donné. — Annales de la faculte des sciences de l'université de Toulouse», 1910. s. 3, vol. 2. 3. *Кованцов Н. И., Носаль Т. В.* Расслоение комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве в нормальные конгруэнции. — Укр. геометр. сб., 1973, вып. 14, с. 28—44. 4. *Носаль Т. В.* Дважды расслаиваемые комплексы в трехмерном евклидовом пространстве. — Укр. геометр. сб., 1974, вып. 16, с. 64—68. 5. *Кованцов Н. И.* Расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной средней кривизны. — Укр. геометр. сб. 1976, вып. 19, с. 65—77. 6. *Кованцов Н. И.* Об одном обобщении минимальных поверхностей. — Укр. геометр. сб., 1977, вып. 20, с. 48—56. 7. *Ко-*

…ов *Н. И.*, *Мягков В. И.* О *K*-расслоении комплекса прямых. — Укр. геом. сб., 1975, вып. 18, с. 74—84. 8. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1977. 735с.

Поступила 26 апреля 1978 г.

УДК 513

В. Н. Кокарев

ОЦЕНКА ГЛАВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В E^{n+1} ПО ВТОРОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЕЕ УСЛОВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ

В работе А. В. Погорелова [1] доказано существование априорной оценки радиусов нормальной кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности с данной элементарной симметрической функцией главных радиусов кривизны. В настоящей работе подобная задача рассматривается для второй элементарной симметрической функции главных условных радиусов кривизны [2] замкнутой выпуклой гиперповерхности; в ее решении будем следовать методу А. В. Погорелова [см. также 3].

Пусть S и E — замкнутые выпуклые гиперповерхности в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}; $\sigma_2 = \sum\limits_{i<j} \tilde{R}_i \tilde{R}_j$ — вторая элементарная симметрическая функция главных условных радиусов кривизны $\tilde{R}_i$ гиперповерхности S относительно E; H и H^0 — опорные функции S и E соответственно, $h(v_1, \ldots, v_n)$ и $h^0(v_1, \ldots, v_n)$ — те же функции на гиперплоскости $x_{n+1} = 1$ [1]. Тогда условные радиусы кривизны в окрестности точки $v_1 = \cdots = v_n = 0$ находятся из уравнения

$$\operatorname{Det} | h_{ij} - h^0_{ij} \tilde{R} | = 0; \ i, j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

[2]; индекс i внизу при h и h^0 означает дифференцирование их по v_i.

Так как $\operatorname{Det} | h^0_{ij} | = 1/\lambda^{n+2} K_E$ [1], где $\lambda = (1 + v_1^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2}$, K_E — гауссова кривизна E, то коэффициент при $\tilde{R}^{n-2}$ в (1) равен $S_2 = (-1)^n C_n^2 D(h_{ij}, h_{ij}, \underbrace{h^0_{ij}, \ldots, h^0_{ij}}_{n-2}) = (-1)^n \sigma_2 / \lambda^{n+2} K_E$; здесь D — символ смешанного дискриминанта [3].

Пусть радиус нормальной кривизны гиперповерхности S достигает максимума в точке X. Направим i-ю ось декартовой системы координат параллельно i-му главному направлению S в точке X $(i = 1, \ldots, n)$. Направление оси x_{n+1} возьмем совпадающим с направлением внешней нормали гиперповерхности S в точке X. Тогда функция $w = h_{11} (1 + v_1^2 + \cdots + v_n^2)^{3/2} / (1 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$ будет в точке $v_1 = \cdots = v_n = 0$ достигать абсолютного максимума, равного наибольшему радиусу нормальной кривизны гиперповерхности S [1]. Таким образом, i-й радиус кривизны в точке X будет равен $h_{ii}(0, \ldots, 0)$ и $h_{11}(0, \ldots, 0) \geqslant h_{22}(0, \ldots, 0) \geqslant \cdots \geqslant h_{nn}(0, \ldots, 0)$; кроме того, если $i \neq j$, то $h_{ij}(0, \ldots, 0) = 0$. В дальнейшем все величины, вычисленные в точке $(0, \ldots, 0)$, будем записывать без указания точки.

Оценим сверху h_{11} в точке $(0, \ldots, 0)$. Вычислив в этой точке w_i и w_{ij}, получим

$$h_{11i} = 0;\ w_{11} = h_{1111} + 3h_{11};\ w_{ii} = h_{11ii} + h_{11}\,(i > 1);$$
$$w_{ij} = h_{11ij}\ (i \neq j). \tag{2}$$

Коэффициент при $h^0_{i_1j_1}h^0_{i_2j_2}\ldots h^0_{i_kj_k}$ в разложении определителя $\operatorname{Det}|h^0_{ij}|$ обозначим через $A^{j_1j_2\ldots j_k}_{i_1i_2\ldots i_k}$. В силу специального выбора системы координат для коэффициента S_2 и его первой и второй производных по v_1 в точке $(0, \ldots, 0)$ получаются выражения

$$S_2 = (-1)^n \sum_{i<j} h_{ii}h_{jj}A^{ij}_{ij}; \tag{3}$$

$$S_2' = (-1)^n \left(\sum h_{ij1}h_{kk}A^{kj}_{ki} + \sum h^{0\prime}_{ij}h_{kk}h_{ll}A^{klj}_{kli}\right); \tag{4}$$

$$S_2'' = (-1)^n \left(\sum h_{ij1}h_{kl1}A^{jl}_{ik} + 2\sum h_{ij1}h^{0\prime}_{kl}h_{ss}A^{jls}_{iks} + \right.$$
$$\left. + \sum h_{ij11}h_{ll}A^{lj}_{li} + \sum h^{0\prime\prime}_{ij}h_{pp}h_{qq}A^{jpq}_{ipq} + \sum h^{0\prime}_{ij}h^{0\prime}_{kl}h_{qq}h_{pp}A^{jlpq}_{ikpq}\right); \tag{5}$$

штрих означает дифференцирование по v_1.

Оценим слагаемые в правой части (5). Пусть $\{\gamma_s\}$ — множество всех декартовых систем координат в E^{n+1}. Для каждой такой системы γ_s на гиперплоскости $x_{n+1} = 1$ для гиперповерхности E рассмотрим функцию $h^0(v_1, \ldots, v_n)$, которую обозначим через $h^{\gamma_s}(v_1, \ldots, v_n)$. Введем обозначение

$$\varkappa = \max_{\substack{\gamma_s,\ i>1 \\ p,\ q,\ (i\neq j)}} \left\{\left|3 + \frac{h^{\gamma_s}_{1111}A^{1pq}_{1pq}}{A^{pq}_{pq}}\right|, \left|1 + \frac{h^{\gamma_s}_{11ii}A^{ipq}_{ipq}}{A^{pq}_{pq}}\right|, \left|\frac{h^{\gamma_s}_{11ij}}{R^0}\right|\right\}.$$

Все величины, стоящие в фигурных скобках, считаются для системы координат γ_s при $v_1 = \cdots = v_n = 0$; R^0 — максимальный радиус нормальной кривизны гиперповерхности E в точке, соответствующей точке $(0, \ldots, 0)$. Пусть в любой точке a на E выполняется условие

$$\left(\frac{R^0(a)}{r^0(a)}\right)^{2(n-2)} \leqslant 1 + \frac{1}{n^2(n-2)^2}, \tag{6}$$

где $R^0(a)$ и $r^0(a)$ — соответственно максимальный и минимальный радиусы кривизны E в точке a. Тогда можно доказать, что при $i \neq j$ будет $|A^{ipq}_{ipq}| \leqslant (r^0)^{n-2}/(n-2)\,R^0$, и для четвертого слагаемого в (5) получается оценка

$$\sum_{p<q} h_{ij}^{0'} h_{pp} h_{qq} A_{ipq}^{ipq} \leqslant (\varkappa - 1)(n-2)(-1)^n S_2 -$$
$$-2 \sum_{p>q>1} h_{pp} h_{qq} (r^0)^{n-2} + (n-3)\varkappa(-1)^n S_2. \qquad (7)$$

Из условия (6) вытекает, что при $i \neq j$ будет $|A_{ij}^{ll}| < \frac{(r^0)^{n-2}}{n-2}$. Следовательно, квадратичная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n-2} A_{li}^{li} & A_{li}^{lj} \\ A_{li}^{lj} & \frac{1}{n-2} A_{lj}^{lj} \end{pmatrix}, \ i \neq j = l,$$

— положительно определенная. Так как $d^2 w \leqslant 0$ в точке $(0, \ldots, 0)$, то

$$\frac{1}{n-2} w_{ii} A_{li}^{li} + 2 w_{ij} A_{li}^{lj} + \frac{1}{n-2} w_{jj} A_{lj}^{lj} \leqslant 0;$$

отсюда при $i, j \neq 1$; $l \neq i \neq j$ с помощью (2) получаем

$$\left(\frac{1}{n-2} h_{ii11} A_{li}^{li} + 2 h_{ij11} A_{li}^{lj} + \frac{1}{n-2} h_{jj11} A_{lj}^{lj}\right) h_{ll} \leqslant \frac{-2 h_{11} h_{ll}}{n-2} (r^0)^{n-2}. \quad (8)$$

Аналогично при $i = 1$ находим

$$\left(\frac{1}{n-2} h_{1111} A_{l1}^{l1} + 2 h_{1j11} A_{l1}^{lj} + \frac{1}{n-2} h_{jj11} A_{lj}^{lj}\right) h_{ll} \leqslant \frac{-4 h_{11} h_{ll}}{n-2} (r^0)^{n-2}. \quad (9)$$

Считая $l \neq 1$, просуммируем (8) и (9) по всем i, j при условии, что i, j и l различны. Получим $h_{ll} \sum h_{ij11} A_{li}^{lj} \leqslant -(n+1) h_{11} h_{ll} \times (r^0)^{n-2}$. В (9) $l \neq 1$, поэтому, суммируя неравенства (8) при $l = 1$ по всем различным и отличным от единицы i и j, получаем $h_{11} \sum h_{ij11} A_{i1}^{j1} \leqslant -(n-1) h_{11}^2 (r^0)^{n+2}$. Из двух последних соотношений выводим оценку для третьего слагаемого в (5): $\sum h_{ij11} h_{ll} A_{li}^{lj} \leqslant -(n-1) h_{11} (r^0)^{n-2} \sum h_{ii} - 2 \sum_{l>1} h_{11} h_{ll} (r^0)^{n-2}$. Отсюда и из (7) найдем

$$\sum h_{ij11} h_{ll} A_{lj}^{lj} + \sum_{p<q} h_{ij}^{0''} h_{pp} h_{qq} A_{ipq}^{jpq} \leqslant -(n-1) h_{11} (r^0)^{n-2} \sum h_{ii} -$$
$$-2(-1)^n S_2 (r^0)^{n-2} (R^0)^{2-n} + (2\varkappa n - 5\varkappa - n + 2)(-1)^n S_2. \quad (10)$$

Введем обозначение

$$\Theta(X) = \max_{\eta} \left| \frac{dK_n}{ds}(X, \eta) \right|, \qquad (11)$$

где $\frac{dK_n}{ds}(X, \eta)$ — производная нормальной кривизны геодезической по длине ее дуги в точке X в направлении η. Максимум берется по всем направлениям на E в точке X.

Можно доказать, что $|h_{ijk}^0| \leqslant \Theta(X)$. Тогда, поскольку $h_{ij}^{0'} = h_{ij1}$, оценка пятого слагаемого в (5) примет вид

$$\sum_{p<q} h_{ij}^{0'} h_{kl}^{0'} h_{pp} h_{qq} A_{ikpq}^{jlpq} \leqslant (n-2)^2 (n-3)^2 \Theta^2 \frac{(-1)^n S_2 (R^0)^{n-4}}{(r^0)^{n-2}}. \quad (12)$$

Считая $D(h_{ij}, h_{ij}, \underbrace{h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0}_{n-2})$ функцией $\frac{n(n+1)}{2}$ переменных h_{ij} $(i \leqslant j)$ и полагая $dh_{ij} = h_{1j1}$, получаем $C_n^2 dD = \sum h_{ij1} h_{kk} A_{ki}^{kj}$, или, учитывая (4),

$$C_n^2 dD = (-1)^n S_2 - \sum_{k<l} h_{ij}^{0'} h_{kk} h_{ll} A_{kli}^{klj}. \quad (13)$$

Кроме того,

$$C_n^2 d^2 D = \sum h_{ij1} h_{kl1} A_{ik}^{jl}. \quad (14)$$

Используя неравенства А. Д. Александрова для смешанных дискриминантов, можно доказать следующее неравенство для любых положительно определенных форм h_{ij}^1 и h_{ij}^2 $(0 < t < 1)$: $D(th_{ij}^1 + (1-t)h_{ij}^2, th_{ij}^1 + (1-t)h_{ij}^2, \underbrace{h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0}_{n-2})^{1/2} \geqslant tD(h_{ij}^1, h_{ij}^1, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)^{1/2} + (1-t)D(h_{ij}^2, h_{ij}^2, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)^{1/2}$, где знак равенства стоит тогда и только тогда, когда $h_{ij}^1 = \alpha h_{ij}^2$. Это означает, что во всех точках пространства $R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ переменных h_{ij}, где форма h_{ij} положительно определенная, функция $D(h_{ij}, h_{ij}, \underbrace{h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0}_{n-2})^{1/2}$ строго вогнута по всем направлениям, за исключением направления $e_1 = (h_{11}, h_{12}, \ldots, h_{nn})$, в котором она линейна. Отсюда для собственных чисел матрицы $\left(\frac{\partial^2 D^{1/2}}{\partial h_{ij} \partial h_{kl}}\right)$ следует $\lambda_N \leqslant \cdots \leqslant \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 = 0$.

Пусть $e = (h_{111}, \ldots, h_{ij1}, \ldots, h_{nn1})$, тогда как $h_{11i} = 0$, $h_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Для векторов e и e_1 находим

$$\cos(\widehat{e, e_1}) = \frac{\sum\limits_{i \leqslant j} h_{ij1} h_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i \leqslant j} h_{ij1}^2} \sqrt{\sum\limits_{i \leqslant j} h_{ij}^2}} = \frac{\sum\limits_{1 < i \leqslant j} h_{ij1} h_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i \leqslant j} h_{ij1}^2} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} h_{ii}^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\sum\limits_{1 < i \leqslant j} h_{ij1}^2} \sqrt{\sum\limits_{i > 1} h_{ii}^2}}{\sqrt{\sum\limits_{1 < i \leqslant j} h_{ij1}^2} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} h_{ii}^2}} \leqslant \sqrt{\frac{n-1}{n}};$$

аналогично убедимся, что $\cos(\widehat{e, e_1}) \geqslant -\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Следовательно, косинус угла между вектором e и гиперплоскостью, ортогональной вектору e_1, будет не меньше, чем $\sqrt{1/n}$. Тогда $d^2 D^{1/2}(e, e_1) \leqslant$

$\frac{\lambda_2}{n}|e|^2$, или $d^2D^{1/2}\leqslant\frac{\lambda_2}{n}\sum_{i<j}h_{ij1}^2$. Отсюда, учитывая (13) и (14), получаем

$$\sum h_{ij1}h_{kl1}A_{ik}^{jl}\leqslant\frac{2\lambda_2\left((-1)^nS_2\right)^{1/2}}{n\left(C_n^2\right)^{1/2}}\sum_{i<j}h_{ij1}^2+$$
$$+\frac{1}{2(-1)^nS_2}\Big((-1)^nS_2'-\sum_{k<l}h_{ij}^{0\prime}h_{kk}h_{ll}A_{kli}^{klj}\Big)^2. \qquad (15)$$

Так как $|A_{kli}^{klj}|\leqslant(R^0)^{n-3}$, то

$$\Big((-1)^nS_2'-\sum_{k<l}h_{ij}^{0\prime}h_{kk}h_{ll}A_{kli}^{klj}\Big)^2\leqslant$$
$$\leqslant 2(S_2')^2+2(n-2)^4\Theta^2S_2^2(R^0)^{2(n-3)}(r^0)^{2(2-n)}. \qquad (16)$$

В силу того, что $\lambda_2<0$, квадратные трехчлены относительно h_{ij1} оцениваются, а именно:

$$\sum h_{ij1}h_{kl1}A_{ik}^{jl}+2\sum h_{ij1}h_{kl}^{0\prime}h_{ss}A_{iks}^{jls}\leqslant$$
$$\leqslant(-1)^n\{(n-2)^4\Theta^2S_2(R_0)^{2(n-3)}/(r^0)^{2(n-2)}+(S_2')^2/S_2\}-$$
$$-n^2(C_n^2)^{1/2}(n-1)^3(n-2)^4h_{11}^2(R^0)^{2(n-3)}\Theta^2/4\lambda_2\left((-1)^nS_2\right)^{1/2}. \quad (17)$$

Теперь остается оценить λ_2 — максимальное из отрицательных собственных чисел матрицы $\left(\frac{\partial^2D^{1/2}}{\partial h_{ij}\,\partial h_{kl}}\right)$. Для удобства будем оценивать минимальное из положительных чисел матрицы $\left(-\frac{\partial^2D^{1/2}}{\partial h_{ij}\,\partial h_{kl}}\right)$. Порядок этой матрицы обозначим через N, ее собственные числа $\mu_N\geqslant\cdots\geqslant\mu_2>0$, $\mu_1=0$. Сумму всех главных миноров k-го порядка этой матрицы обозначим через $\sum M_k$; тогда $\mu_2\geqslant\geqslant\sum M_{N-1}/\sum M_{N-2}$.

Введем в $R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ новые координаты

$$y_{ii}=h_{ii};\ y_{ij}=\sqrt{2}h_{ij}\,(i<j) \qquad (18)$$

и метрику: расстоянием между точками (y_{ij}^1) и (y_{ij}^2) назовем число $|(y_{ij}^1),(y_{ij}^2)|=\Big(\sum_{i<j}(y_{ij}^1-y_{ij}^2)^2\Big)^{1/2}$. Тогда $R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ станет евклидовым пространством, y_{ij} — декартовыми координатами. Имеют место соотношения $\frac{\partial^2D^{1/2}}{\partial y_{ii}\,\partial y_{jj}}=\frac{\partial^2D^{1/2}}{\partial h_{ii}\,\partial h_{jj}}$; если $i\neq j$, $k\neq l$, то

$$\frac{\partial^2D^{1/2}}{\partial y_{ii}\,\partial y_{kl}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2D^{1/2}}{\partial h_{ii}\,\partial h_{kl}};\ \frac{\partial^2D^{1/2}}{\partial y_{ij}\,\partial y_{kl}}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2D^{1/2}}{\partial h_{ij}\,\partial h_{kl}}. \qquad (19)$$

Следовательно, матрица $\left(-\frac{\partial^2 D^{1/2}}{\partial y_{ij}\partial y_{kl}}\right)$ получается из матрицы $\left(-\frac{\partial^2 D^{1/2}}{\partial h_{ij}\partial h_{kl}}\right)$ умножением на $1/\sqrt{2}$ строк и столбцов с номерами (ij), $i \neq$ (Номера строк и столбцов, как и номера переменных, обознач двумя индексами). Если через $\sum Q_k$ обозначить сумму всех главн миноров k-го порядка матрицы $\left(-\frac{\partial^2 D^{1/2}}{\partial y_{ij}\partial y_{kl}}\right)$, то, сравнивая $\sum Q_k$ $\sum M_k$, получим $\mu_2 \geqslant \frac{1}{2}\sum Q_{N-1} \Big/ \sum Q_{N-2}$.

Квадрат расстояния между точками (h_{ij}^1) и (h_{ij}^2) есть $|(h_{ij}^1), (h_{ij}^2)|^2 = \sum_{i<j}(y_{ij}^1 - y_{ij}^2)^2$, где y_{ij}^1, y_{ij}^2 — декартовы координаты этих точ Из (18) следует, что $|(h_{ij}^1),\ (h_{ij}^2)|^2 = \sum (h_{ii}^1 - h_{ii}^2)^2 + 2\sum (h_{ij}^1 - h_{ij}^2)^2$.

Рассмотрим матрицу $U = (h_{ij}^1 - h_{ij}^2)$; пусть U' получена из транспонированием. Тогда $|(h_{ij}^1),\ (h_{ij}^2)|^2 = \mathrm{Sp}\, UU'$. Повернем тепе оси $x_1, \ldots, x_n$, оставляя ось x_{n+1} без изменения. При этом коо динаты (v_i) преобразуются в координаты $(\tilde{v}_i)$. Матрицы вторых пр изводных функций h' и h^2 в новых координатах в точке $(0, \ldots,$ получаются из матриц (h_{ij}^1) и (h_{ij}^2) с помощью ортогональной ма рицы перехода. Значит, матрица U преобразуется с помощью то же ортогональной матрицы. Поэтому $\mathrm{Sp}\, UU'$ от направления ос $v_1, \ldots, v_n$ не зависит, следовательно, не зависит и расстояни $|(h_{ij}^1),\ (h_{ij}^2)|$. Но функция D имеет геометрический смысл: $C_n^2 D(h_{ij}, h_{ij}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0) = \sigma_2/\lambda^{n+2} K_E$ и, значит, тоже не изменяется пр повороте осей. Таким образом, поворот осей $v_1, \ldots, v_n$ являетс изометрическим отображением окрестности точки (h_{ij}) в окрестнос точки $(\tilde{h}_{ij})$, причем в соответственных точках значения функции равны. Поэтому при повороте осей не изменяются и собственны числа матрицы $\left(-\frac{\partial^2 D^{1/2}}{\partial y_{ij}\partial y_{kl}}\right)$, и при оценке λ_2 можно направить ос так, как это удобно.

Направим каждую из осей $x_i\ (i \leqslant n)$ по i-му главному напра лению E в точке, внешняя нормаль в которой имеет направлени оси x_{n+1}. Тогда $h_{ii}^0 = R_i^0$ — главному i-му радиусу кривизны гипер поверхности E в этой точке; $h_{ij}^0 = 0$ при $i \neq j$; $D = \sum_{i<j}(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2)\, R_1^0 \ldots \hat{R}_i^0 \ldots \hat{R}_j^0 \ldots R_n^0 = \frac{1}{K_E}\sum_{i<j}\frac{h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2}{R_i^0 R_j^0}$; здесь $\wedge$ означает про пуск сомножителя. Введем обозначения $D_{(ij)} = \frac{\partial D}{\partial h_{ij}}$; $D_{(ij)(kl)} = \frac{\partial^2 D}{\partial h_{ij}\partial h_{kl}}$; $S^i = \sum_{j \neq i}\frac{h_{jj}}{R_j^0}$. Тогда $D_{(ii)} = \frac{1}{K_E R_i^0}\sum_{j \neq i}\frac{h_{jj}}{R_j^0} = \frac{S^i}{K_E R_i^0}$. При $i <$

будет $D_{(ij)} = -\frac{2h_{ij}}{K_E R_i^0 R_j^0}$; $D_{(ii)(ii)} = 0$; $D_{(ii)(kl)} = 0$ при $k \neq l$; $D_{(ij)(kl)} = 0$,

если пары (ij) и (kl) разные; $D_{(ii)(jj)} = \frac{1}{K_E R_i^0 R_j^0}$; $D_{(ij)(ij)} = \frac{-2}{K_E R_i^0 R_j^0}$;

$$\frac{\partial^2 D^{1/2}}{\partial h_{ij}\,\partial h_{kl}} = \frac{1}{2} D^{-3/2}\left(DD_{(ij)(kl)} - \frac{1}{2} D_{(ij)} D_{(kl)}\right).$$

Обозначим через $\Delta_{k,\,m}^{(i_1 i_1)\ldots(i_k i_k);\,(i_1 j_1)\ldots(i_m,\,j_m)}$ главный минор матрицы $\left(-\frac{\partial^2 D^{1/2}}{\partial h_{ij}\,\partial h_{kl}}\right)$; его верхние индексы, стоящие до точки с запятой,— номера строк, стоящие после, пары, составленные из разных чисел,— номера столбцов матрицы. Его вычисление облегчается тем, что строки матрицы $\left(-\frac{1}{2} D_{(ij)} D_{(kl)}\right)$ линейно зависимы, а $D_{(ij)(kl)}$ не содержат h_{ij} и имеют простой вид. Не проводя вычислений, запишем окончательный результат. Обозначим множество $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ через $\mathfrak{N}$, множество всех пар $\{i_t j_t\}$ с $i_t < j_t$, среди которых нет пар $(i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m)$ через $\mathfrak{M}$. Тогда

$$\Delta_{k,\,m}^{(i_1 i_1)\ldots(i_k i_k);\,(i_1 j_1)\ldots(i_m j_m)} =$$

$$= \frac{D^{k+m-5/2}}{2K_E^{k+m+1}\,(R_{i_1}^0 \ldots R_{i_k}^0)^2\,(R_{i_1}^0 R_{j_1}^0 \ldots R_{i_m}^0 R_{j_m}^0)} \times$$

$$\times \left\{-(k-1) \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{h_{ii}}{R_i^0}\frac{h_{jj}}{R_j^0} - \frac{k-2}{2} \sum_{i \in \mathfrak{N}} (S^i)^2 + \sum_{\substack{i<j\\ i,\,j \in \mathfrak{N}}} S^i S^j + \right.$$

$$\left. + (k-1) \sum_{(i_t j_t) \in \mathfrak{M}} \frac{h_{i_t j_t}^2}{R_{i_t}^0 R_{j_t}^0}\right\}.$$

Далее, $\sum Q_{N-1} = \sum_i \Delta_{n-1,\,s}^{(\widehat{ii});} + \sum_{(ij)} \Delta_{n,\,s-1}^{;(\widehat{ij})}$, где $s = n(n-1)/2$; знак $(\widehat{ii})$ означает, что отсутствует (ii), все остальные пары присутствуют; суммирование идет в первой сумме по всем i, во второй — по всем парам (ij), $i < j$. Затем

$$\sum Q_{N-2} = \sum_{i<j} \Delta_{n-2,\,s}^{(\widehat{ii})(\widehat{jj});} + \sum_{i,\,(kl)} \Delta_{n-1,\,s-1}^{(\widehat{ii});\,(\widehat{kl})} + \sum_{(ij)(kl)} \Delta_{n,\,s-2}^{;\,(\widehat{ij})(\widehat{kl})}.$$

Имеем $\Delta_{n-1,\,s}^{(\widehat{ii})} \geqslant \frac{D^{n+s-7/2}}{2K_E^{n+s}\,(R^0)^{2n+2s-2}}\left\{-(n-2) \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{h_{ii}}{R_i^0}\frac{h_{jj}}{R_j^0} - \right.$

$\left. - \frac{n-3}{2} \sum_{p \neq i} (S^p)^2 + \sum_{(p<q) \neq i} S^p S^q\right\}$. В данном случае множество $\mathfrak{M}$ пусто. Тогда

$$\sum_i \Delta^{(\widehat{ii})}_{n-1,\, s} \geqslant \frac{D^{n+z-7/2}}{2K_E^{n+s}(R^0)^{2n+2s-2}} \Big\{-(n-2)\, n \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{h_{ii}}{R_i^0}\frac{h_{jj}}{R_j^0} - $$

$$- \frac{(n-3)(n-1)}{2} \sum_{i=1}^{n} (S^i)^2 + (n-2) \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} S^i S^j \Big\}.$$

Легко подсчитать, что в фигурных скобках при $(h_{11}/R_1^0)^2$ буд... стоять коэффициент $(n-1)/2$, при $h_{11}\, h_{22}/R_1^0 R_2^0$ — нуль. В силу си... метрии с такими же коэффициентами будут все $(h_{ii}/R_1^0)^2$ и $(h_{ii}/R_i^0) \times (h_{jj}/R_j^0)$, $i<j$, и поэтому

$$\sum_i \Delta^{(\widehat{ii})}_{n-1,\, s} \geqslant \frac{D^{n+s-7/2}}{2K_E^{n+s}(R^0)^{2n+2s-2}} \frac{n-1}{2} \sum \left(\frac{h_{ii}}{R_i^0}\right)^2.$$

После аналогичных вычислений находим

$$\sum_{(ij)} \Delta^{;(ij)}_{n,\, s-1} \geqslant 0;\ \sum_{i<j} \Delta^{(\widehat{ii})(\widehat{jj});}_{n-2,\, s} \leqslant \frac{D^{n+s-9/2}}{2K_E^{n+s-1}(r^0)^{2n+2s-4}} \times$$

$$\times \left\{\frac{(n-1)(n-2)}{2} \sum \left(\frac{h_{ii}}{R_i^0}\right)^2 + \sum_{i<j} \frac{h_{ii}}{R_i^0}\frac{h_{jj}}{R_j^0}\right\};\ \sum_{i,\,(kl)} \Delta^{(\widehat{ii});\,(\widehat{kl})}_{n-1,\, s-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D^{n+s-9/2}}{2K_E^{n+s-1}(r^0)^{2n+2s-4}} \left\{\frac{n(n-1)}{4} \sum \left(\frac{h_{ii}}{R_i^0}\right)^2 + n(n-2) \sum_{i<j} \frac{h_{ii}}{R_i^0}\frac{h_{jj}}{R_j^0}\right\};$$

$$\sum_{(ij),\,(kl)} \Delta^{;(\widehat{ij})(\widehat{kl})}_{n,\, s-2} \leqslant \frac{D^{n+s-9/2}}{2K_E^{n+s-1}(r^0)^{2n+2s-4}} (n-1)\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right) \sum_{i<j} \frac{h_{ii}}{R_i^0}\frac{h_{jj}}{R_j^0}$$

Теперь получаем оценку

$$\mu_2 \geqslant \frac{D^{-1/2}(r^0)^{2n+2s-4}}{4K_E(R^0)^{2n+2s-2}} \times$$

$$\times \frac{1}{n^2+n-4} \sum \left(\frac{h_{ii}}{R_i^0}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\sum \left(\frac{h_{ii}}{R_i^0}\right)^2 + \sum_{i<j} \frac{h_{ii}}{R_i^0}\frac{h_{jj}}{R_j^0}\right]^{-1}.$$

Так как функция $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j / \sum x_i^2$ достигает максимума при $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ и этот максимум равен $(n-1)/2$, то

$$\mu_2 \geqslant \frac{D^{-1/2}}{2n(n^2+n-4)K_E} \frac{(r^0)^{2n+2s-4}}{(R^0)^{2n+2s-2}},$$

а так как $C_n^2 D = (-1)^n S_2$, то

$$\lambda_2 \leqslant -\frac{(C_n^2)^{1/2}}{((-1)^n S_2)^{1/2} 2n(n^2+n-4)K_E} \frac{(r^0)^{2n+2s-4}}{(R^0)^{2n+2s-2}}.$$

Тогда, учитывая, что $K_E \leqslant (r^0)^{-n}$, из (17) получаем

$$\sum h_{ij1} h_{kl1} A_{ik}^{il} + 2 \sum h_{ij1} h_{kl}^{0'} h_{ss} A_{iks}^{ils} \leqslant$$
$$\leqslant (-1)^n \{S_2'^2/S_2 + (n-2)^4 \Theta^2 S_2 (R^0)^{2(n-3)}/(r^0)^{2(n-2)}\} +$$
$$+ n^3 (n-1)^3 (n-2)^4 \frac{(R^0)^{4n+2s-8}}{2\,(r^0)^{3n+2s-4}} \Theta^2 h_{11}^2 (n^2+n-4). \tag{20}$$

Обозначим $\sigma_2/K_E = \rho_2$; тогда $S_2 = (-1)^n \rho_2/\lambda^{n+2}$. В точке $(0, \ldots, 0)$ получим $(-1)^n S_2 = \rho_2$; $(-1)^n S_2' = \rho_2'$; $(-1)^n S_2'' = \rho_2'' - (n+2)\rho_2$. С учетом этих соотношений из (5) с помощью (10), (12) и (20) найдем

$$\rho_2'' \leqslant -(n-1) h_{11} (r^0)^{n-2} - \sum h_{ll} - 2\rho_2 (r^0/R^0)^{n-2} +$$
$$+ (2\varkappa n - 5\varkappa + 4)\rho_2 + (n-2)^2 (n-3)^2 \Theta^2 (R^0)^{n-4} (r^0)^{2-n} \rho_2 +$$
$$+ (n-2)^4 \Theta^2 (R^0)^{2(n-3)} (r^0)^{2(2-n)} \rho_2 + \rho_2'^2/\rho_2 +$$
$$+ n^3 (n-1)^3 (n-2)^4 (n^2+n-4) \frac{(R^0)^{4n+2s-8}}{2\,(r^0)^{3n+2s-4}} \Theta^2 h_{11}^2. \tag{21}$$

Имеем $\sum\limits_{l>1} h_{11} h_{ll} (r^0)^{n-2} \geqslant \frac{2}{n} (-1)^n S_2 (r^0/R^0)^{n-2}$. Тогда $-(n-1) \times h_{11} (r^0)^{n-2} \sum h_{ll} \leqslant -(n-1)(r^0)^{n-2} h_{11}^2 - 2(n-1)(-1)^n S_2 \times (r^0)^{n-2}/n (R^0)^{n-2}$. С учетом этого соотношения из (21) найдем $\{(n-1)(r^0)^{n-2} - n^3 (n-1)^3 (n-2)^4 (n^2+n-4) \frac{(R^0)^{4n+2s-8}}{2\,(r^0)^{3n+2s-4}} \Theta^2\} h_{11}^2 \leqslant \{-2\frac{2n-1}{n} (r^0/R^0)^{n-2} + 2\varkappa n - 5\varkappa + 4 + (n-2)^2 (n-3)^2 \Theta^2 \times \frac{(R^0)^{n-4}}{(r^0)^{n-2}} + (n-2)^4 \Theta^2 \frac{(R^0)^{2(n-3)}}{(r^0)^{2(n-2)}}\} \rho_2 + \frac{\rho_2'^2}{\rho_2} - \rho_2''$. Если коэффициент при h_{11}^2 положителен, то отсюда получается оценка на h_{11} — максимальный радиус кривизны гиперповерхности S. Дифференцирование по v_1 можно заменить дифференцированием по длине дуги большого круга на единичной гиперсфере [1].

Сформулируем окончательный результат.

Теорема. *Пусть замкнутая выпуклая гиперповерхность E в E^{n+1} такова, что в каждой ее точке $(R^0/r^0)^{2(n-2)} \leqslant 1 + n^{-2}(n-2)^{-2}$ и*

$$T = (r^0)^{n-2} - n^3 (n-1)^2 (n-2)^4 (n^2+n-4) \Theta^2 \frac{(R^0)^{4n+2s-8}}{2\,(r^0)^{3n+2z-4}} > 0.$$

Тогда для радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности S с заданной второй элементарной симметрической функцией σ_2 ее условных радиусов кривизны относительно E справедлива оценка $R \leqslant \max\limits_{a,\,t} (\sqrt{\Phi}/\sqrt{(n-1)T})$, где $\Phi = \{-\frac{2(2n-1)}{n} \times \left(\frac{r^0}{R^0}\right)^{n-2} + 2\varkappa n - 5\varkappa + 4 + (n-2)^2 (n-3)^2 \Theta^2 (R^0)^{n-4}/(r^0)^{n-2} + (n-2)^4 \Theta^2 (R^0)^{2(n-3)}/(r^0)^{2(n-2)}\} \rho_2 + \rho_2'^2/\rho_2 - \rho_2''$, а дифференцирование *функции $\rho_2 = \sigma_2/K_E$ выполняется по длине дуги большого круга исходящего из точки a на единичной гиперсфере; максимум берется по всем точкам гиперсферы и всем направлениям t.*

Чтобы выяснить, как этот результат относится к результату А. В. Погорелова, удобнее сравнить не окончательные результаты, а предшествующие им соотношения.

Если гиперповерхность E есть единичная гиперсфера, то $\Theta = 0$, $r^0 = R^0 = 1$, $\rho_2 = \sigma_2$ и (21) принимает вид $\sigma_2'' \leqslant -(n-1)\,h_{11}\sum h_{ii} + 2\sigma_2 + \sigma_2'^2/\sigma_2$. Это соотношение отличается от соответствующего в [1] только последним слагаемым, которое там имеет вид $\sigma_2'^2/2\sigma_2$.

Если в правой части неравенства (16) коэффициент 2 заменить в первом члене на $1+\varepsilon^2$, а во втором — на $1+\varepsilon^{-2}$, то полученный здесь результат может быть сделан сколь угодно близким к результату А. В. Погорелова.

Список литературы: 1. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. М., Наука, 1975. 95 с. 2. *Сапожников Б. Д.* Поверхности с заданной суммой главных условных радиусов кривизны в E^3.— В кн.: Современный анализ и геометрия/ЛГПИ, 1972, с. 183—192. 3. *Кокарев В. Н.* Оценка радиуса кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в E^{n+1} по второй элементарной симметрической функции ее условных радиусов кривизны.— Геометрия/ЛГПИ, 1975, вып. 4, с. 83—94. 4. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. — Мат. сборник, 2 : 5,6 (1937), 3 : 1,2 (1938), с. 227—251.

Поступила 15 мая 1978 г.

УДК 513

В. Т. Лисица

О ПОВЕРХНОСТЯХ С ПОЛЕМ ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В работе [1] Дж. Д. Мур рассматривал погружения пространств F^n постоянной кривизны k в пространства F^{2n-1} постоянной кривизны $K > k$ и доказал, что в этом случае первая и вторые квадратичные формы погружения поверхности F^n в F^{2n-1} для всех нормалей N к F^n одновременно приводятся к диагональному виду $ds^2 = \sum g_{ii} dx_i^2$; $\mathrm{II}_N = \sum \Omega_{N|ii} dx_i^2$ в каждой точке пространства F^n. Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности F^n в римановом пространстве относительно нормали N имеют вид $\Omega_{N|ij} = -\langle \nabla_{X_i} X_j; N \rangle$ [2, с. 123] (∇ — ковариантная производная в объемлющем пространстве, $\langle ; \rangle$ — скалярное произведение).

Если на поверхности F^n существует n взаимно ортогональных касательных векторных полей $X_1, \ldots, X_n$, для которых выполняется $\Omega_{N|ij} = -\langle \nabla_{X_i} X_j; N \rangle = 0$ при $i \neq j$ для всех нормалей N к F^n, то поля $X_1, \ldots, X_n$ называются главными векторными полями поверхности F^n. Таким образом, если первая и вторые квадратичные формы погружения поверхности F^n одновременно приводятся диагональному виду для всех нормалей N к поверхности F^n, то эта поверхность имеет n главных векторных полей. Факт существования главных направлений в пространствах постоянной кривизны использовал Ю. А. Аминов при изучении погружений областей n-мерного пространства Лобачевского в E^{2n-1} [3].

В настоящей заметке рассмотрим поверхности M^n отрицательной внешней кривизны в пространствах R^m постоянной кривизны. Потребуем, чтобы поверхность M^n имела в каждой точке n главных направлений. Введем обозначения: $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ — поля главных направлений поверхности M^n, K_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — внешние секционные кривизны поверхности M^n по двумерным площадкам, натянутым на $\boldsymbol{X}_i$ и $\boldsymbol{X}_j$. Пусть $p < n$. Условимся, что индексы изменяются в пределах $i, j, k = 1, \ldots, p$; $r, s, t = p + 1, \ldots, n$; $u, v, l, f = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, m$.

Основной результат заметки содержит сформулированная А. А. Борисенко

Теорема. *Пусть поверхность M^n отрицательной внешней кривизны в пространстве R^m постоянной кривизны в каждой точке $x \in M^n$ имеет n главных направлений $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$. Пусть внешние секционные кривизны поверхности M^n обладают следующими свойствами:* 1) $K_{ir} = K_{is}$ *и* $\frac{\partial K_{ir}}{\partial x_t} = 0$; 2) $K_{ir} \neq K_{st}$. *Тогда интегральные подмногообразия F^p распределения главных направлений $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$ являются вполне геодезическими в M^n и принадлежат $(m - n + p)$-мерным вполне геодезическим подпространствам пространства R^m.*

Доказательство теоремы опирается на ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть M^n — поверхность отрицательной внешней кривизны в пространстве R^m постоянной кривизны. Если в каждой точке $x \in M^n$ существует n главных направлений, то все они голономны.*

Лемма 1 является обобщением леммы, доказанной Ю. А. Аминовым в случае, когда объемлющее пространство евклидово [3]; она доказана в работе [4].

Лемма 2. *Если основная форма некоторого M^n имеет вид $ds^2 = g_{ij}dx_i dx_j + g_{rs}dx_r dx_s$, где функции g_{ij} не зависят от $x_{p+1}, \ldots, x_n$, то подпространства $x_r = \text{const}$ — вполне геодезические в M^n* [5, с. 224, упр. 13].

Будем обозначать через ∇ ковариантную производную в пространстве R^m, $\boldsymbol{n}_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, m - n)$ — взаимно ортогональные единичные нормали к поверхности M^n в R^m.

Рассмотрим некоторое p-мерное подмногообразие $F^p \subset M^n$. Пусть $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$ координатные векторные поля подмногообразия F^p, $\boldsymbol{X}$ — произвольное касательное к F^p векторное поле. Если $\nabla_X \boldsymbol{n}_\sigma = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{N}$ (где $\boldsymbol{N}$ — нормаль к M^n), то подмногообразие F^p будем называть *подмногообразием кривизны* поверхности M^n.

Лемма 3. *Пусть поверхность M^n в пространстве R^m постоянной кривизны в каждой точке $x \in M^n$ имеет n главных направлений. Для всякого распределения p главных направлений на поверхности M^n: $\boldsymbol{X}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{X}_{i_p}$, его интегральные подмногообразия F^p являются подмногообразиями кривизны поверхности M^n.*

Доказательство. В силу леммы 1 главные направления голономны, поэтому в качестве координатных линий на поверхности M^n можно выбрать линии кривизны. Интегральными подмногообразиями F^p распределения главных направлений $\boldsymbol{X}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{X}_{i_p}$ будут подмногообразия $x_{i_\sigma} = \mathrm{const}$ $(\sigma = p+1, \ldots, n)$, а координатными линиями на F^p будут линии кривизны $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$. Пусть $\boldsymbol{X}$ — произвольное касательное к F^p векторное поле. Его можно представить как $\boldsymbol{X} = \alpha_1 \boldsymbol{X}_{i_1} + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{X}_{i_p}$. Тогда $\nabla_X \boldsymbol{n}_\sigma = \alpha_1 \nabla_{X_{i_1}} \boldsymbol{n}_\sigma + \cdots + \alpha_p \nabla_{X_{i_p}} \boldsymbol{n}_\sigma$. Так как $\boldsymbol{X}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{X}_{i_p}$ — главные направления, то по свойству главных направлений $\nabla_{X_{i_k}} \boldsymbol{n}_\sigma = \lambda_{i_k} \boldsymbol{X}_{i_k} + \sum\limits_\tau \mu_{\tau\sigma} \boldsymbol{n}_\tau$ [5, с. 203]. Из последнего соотношения следует, что $\nabla_X \boldsymbol{n}_\sigma = \beta_1 \boldsymbol{X}_{i_1} + \cdots + \beta_p \boldsymbol{X}_{i_p} + \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{N}$ — линейная комбинация векторов $\boldsymbol{n}_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, m-n)$. Значит, F^p — подмногообразие кривизны поверхности M^n.

Лемма 4. *Пусть F^p — подмногообразие в римановом пространстве R^m, $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$ — координатные векторные поля на F^p. Подмногообразие F^p является вполне геодезическим в R^m тогда и только тогда, когда $\nabla_{X_i} \boldsymbol{X}_j$ представимы в виде линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$ $(i, j = 1, \ldots, p)$.*

Доказательство. Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности F^p относительно произвольной нормали $\boldsymbol{N}$ имеют вид

$$\Omega_{N|ij} = -\langle \nabla_{X_i} \boldsymbol{X}_j; \boldsymbol{N} \rangle. \tag{1}$$

Если F^p вполне геодезическое, то $\Omega_{N|ij} = 0$ для всех нормалей $\boldsymbol{N}$ к поверхности F^p. Тогда из (1) следует, что $\nabla_{X_i} \boldsymbol{X}_j$ представляют собой касательные к F^p векторы. Но тогда они представимы в виде линейных комбинаций координатных векторов $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$.

Пусть теперь $\nabla_{X_i} \boldsymbol{X}_j$ представляют собой линейные комбинации векторов $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$. Тогда из (1) следует, что $\Omega_{N|ij} = 0$ для всех нормалей $\boldsymbol{N}$ к F^p. Значит, F^p — вполне геодезическое подмногообразие в R^m [5, с. 222].

Рассмотрим некоторую поверхность F^p пространства R^m постоянной кривизны. Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_r$ — дифференцируемые ортогональные к F^p линейно независимые векторные поля, $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$ — координатные векторные поля поверхности F^p. Тогда верна

Лемма 5. *Если $\nabla_{X_i} \boldsymbol{X}_j$ и $\nabla_{X_i} \boldsymbol{n}_\sigma$ представимы в виде линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p, \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_r$, то F^p принадлежит $(p+r)$-мерному вполне геодезическому подпространству пространства R^m.*

Доказательство. 1. Докажем сначала это утверждение в случае $p=1$, т. е. когда F^p — кривая. Введем естественную параметризацию на кривой. Построим $(r+1)$-мерную поверхность M^{r+1} следующим образом: через каждую точку $s \in F^1$ проводим вполне геодезическую r-мерную поверхность $R^r(s)$, ортогональную к F^1 и натянутую на векторы $\boldsymbol{n}_1(s), \ldots, \boldsymbol{n}_r(s)$. Геометрическое место этих вполне геодезических поверхностей есть некоторая поверхность M^{r+1}. Если рассмотреть достаточно малую окрестность G кривой F^1 в пространстве R^m, то через каждую точку $x \in G \cap M^{r+1}$ проходит единственная геодезическая пространства R^m, ортогональная к F^1. Точка $x \in G \cap M^{r+1}$ принадлежит только одному пространству $R^r(s)$.

Введем в $G \cap M^{r+1}$ координаты. Пусть $\sigma(x, s)$ — геодезическая, ортогональная к F^1, соединяющая точки $s \in F^1$ и $x \in G \cap M^{r+1}$, $N(x, s)$ — касательный к этой геодезической вектор длины $\sigma(x, s)$. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — координаты этого вектора в базисе $\boldsymbol{n}_1(s), \ldots, \boldsymbol{n}_r(s)$. Будем считать координатами точки x на поверхности $G \cap M^{r+1}$ величины $(s; x_1, \ldots, x_r)$. Уравнение поверхности $G \cap M^{r+1}$ в векторной форме принимает вид:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s; x) = \boldsymbol{r}(s) + N(s; x), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r}(s)$ — уравнение кривой F^1 в векторной форме. В дальнейшем вместо $\boldsymbol{n}_\sigma(s)$ будем писать $\boldsymbol{n}_\sigma$, подразумевая, что $\boldsymbol{n}_\sigma$ зависят от s. Заметим, что $N(s; x) = x_1\boldsymbol{n}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{n}_r$. Тогда (2) можно записать как

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s; x) = \boldsymbol{r}(s) + x_1\boldsymbol{n}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{n}_r. \tag{2'}$$

Найдем координатные векторные поля поверхности $G \cap M^{r+1}$. Для этого продифференцируем по $s, x_1, \ldots, x_r$ правую и левую части уравнения (2'):

$$\tilde{X}_0 = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} + x_1\frac{\partial \boldsymbol{n}_1}{\partial s} + \cdots + x_r\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial s} = \boldsymbol{X}_0 + x_1\frac{\partial \boldsymbol{n}_1}{\partial s} + \\ + \cdots + x_r\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial s}; \quad \tilde{\boldsymbol{X}}_\sigma = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_\sigma} = \boldsymbol{n}_\sigma \ (\sigma = 1, \ldots, r). \tag{3}$$

$\tilde{\boldsymbol{X}}_\sigma = \boldsymbol{n}_\sigma$ являются координатными векторными полями вполне геодезического подмногообразия $R^r(s)$. Тогда по лемме 4 $\nabla_{\tilde{X}_\sigma}\boldsymbol{X}_\tau$ ($\sigma, \tau = 1, \ldots, r$) представимы в виде линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r$, а значит, и векторов $\tilde{\boldsymbol{X}}_0, \ldots, \tilde{\boldsymbol{X}}_r$. Покажем, что и $\nabla_{\tilde{X}_0}\tilde{X}k$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$ представимы в виде линейных комбинаций векторов $\tilde{X}_0, \ldots, X_r$. Найдем $\frac{\partial \boldsymbol{n}_\sigma}{\partial s}$ $(\sigma = 1, \ldots, r)$. По условию леммы

$$\nabla_{X_0}\boldsymbol{n}_\sigma = \varphi_{0\sigma}\boldsymbol{X}_0 + \sum_\tau \varphi_{\tau\sigma}\boldsymbol{n}_\tau. \tag{4}$$

Пусть y^α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ — координаты объемлющего пространства R^m. $y^\alpha(s)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ — уравнение кривой F^1 в R^m, $\frac{\partial y^\alpha}{\partial s}$, n_σ^α — координаты векторных полей $\boldsymbol{X}_0$ и $\boldsymbol{n}_\sigma$ в пространстве R^m. Запишем левую часть (4) в локальных координатах пространства R^m [5, с. 95]:

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial s} n^\gamma_{\sigma, \alpha} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial s}\left(\frac{\partial n^\gamma_\sigma}{\partial y^\alpha} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n^\beta_\sigma\right). \tag{5}$$

Здесь суммирование ведется по α и β $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$. Преобразуем правую часть (5):

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial s}\left(\frac{\partial n^\gamma_\sigma}{\partial y^\alpha} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n^\beta_\sigma\right) = \frac{\partial n^\gamma_\sigma}{\partial s} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n^\beta_\sigma \frac{\partial y^\alpha}{\partial s}. \tag{6}$$

Так как R^m — пространство постоянной кривизны, в нем можно ввести такие координаты, что его основная форма приведется к виду

$$ds^2 = \frac{dy^{1^2} + \cdots + dy^{m^2}}{\left[1 + \frac{K_0}{4}(y^{1^2} + \cdots + y^{m^2})\right]^2}, \tag{7}$$

где K_0 — кривизна пространства R^m [5, с. 108].

Введем обозначение $A = \left[1 + \frac{K_0}{4}(y^{1^2} + \cdots + y^{m^2})\right]$. Можно подсчитать

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}\frac{K_0 y^\gamma}{2} A; \quad \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} = -g_{\gamma\gamma}\frac{K_0 y^\alpha}{2} A; \tag{8}$$

$$\Gamma^\gamma_{\gamma\gamma} = -g_{\gamma\gamma}\frac{K_0 y^\gamma}{2} A; \quad \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 0, \ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Таким образом, в силу (8)

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n^\beta_\sigma \frac{\partial y^\alpha}{\partial s} = \sum_{\alpha \neq \gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\alpha} n^\alpha_\sigma \frac{\partial y^\alpha}{\partial s} + \sum_{\alpha \neq \gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} n^\gamma_\sigma \frac{\partial y^\alpha}{\partial s} + \sum_{\beta \neq \gamma} \Gamma^\gamma_{\gamma\beta} n^\beta_\sigma \frac{\partial y^\gamma}{\partial s} + \Gamma^\gamma_{\gamma\gamma} n^\gamma_\sigma \frac{\partial y^\gamma}{\partial s}. \tag{9}$$

Преобразуем теперь каждое слагаемое в правой части (9), используя соотношения (8). Так как метрика R^m имеет вид (7), то $\langle \boldsymbol{n}_\sigma; \boldsymbol{X}_0 \rangle = \sum_\alpha g_{\alpha\alpha} n^\alpha_\sigma \frac{\partial y^\alpha}{\partial s} = 0$. Учитывая это, получаем

$$\sum_{\alpha \neq \gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\alpha} n^\alpha_\sigma \frac{\partial y^\alpha}{\partial s} = \frac{K_0 y^\gamma}{2} A \langle \boldsymbol{n}_\sigma; \boldsymbol{X}_0 \rangle - \frac{K_0 y^\gamma}{2} A g_{\gamma\gamma} n^\gamma_\sigma \frac{\partial y^\gamma}{\partial s} = -g_{\gamma\gamma} n^\gamma_\sigma \frac{\partial y^\gamma}{\partial s} \frac{K_0 y^\gamma}{2} A; \tag{10}$$

$$\sum_{\alpha\neq\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}n^{\gamma}_{\sigma}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial s}=f_1 n^{\gamma}_{\sigma}+\frac{K_0 y^{\gamma}}{2}Ag_{\gamma\gamma}n^{\gamma}_{\sigma}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial s}, \tag{11}$$

где $f_1=-\frac{K_0}{2}A\sum_{\alpha}y^{\alpha}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial s}g_{\alpha\alpha}$;

$$\sum_{\beta\neq\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\gamma\beta}n^{\beta}_{\sigma}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial s}=f_2\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial s}+\frac{K_0 y^{\gamma}}{2}Ag_{\gamma\gamma}n^{\gamma}_{\sigma}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial s}, \tag{12}$$

где $f_2=-\frac{K_0}{2}A\sum_{\beta}y^{\beta}n^{\beta}_{\sigma}g_{\beta\beta}$; наконец,

$$\Gamma^{\gamma}_{\gamma\gamma}n^{\gamma}_{\sigma}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial s}=-\frac{K_0 y^{\gamma}}{2}Ag_{\gamma\gamma}n^{\gamma}_{\sigma}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial s}. \tag{13}$$

Складывая (10) — (13), находим

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}n^{\beta}_{\sigma}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial s}=f_1 n^{\gamma}_{\sigma}+f_2\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial s}; \tag{14}$$

суммирование в левой части (14) ведется по индексам α и β.

Теперь (6) в векторной форме имеет вид $\nabla_{X_0}\boldsymbol{n}_\sigma=\frac{\partial \boldsymbol{n}_\sigma}{\partial s}+f_1\boldsymbol{n}_\sigma+$ $+f_2\boldsymbol{X}_0$. С другой стороны, по условию леммы, $\nabla_{X_0}\boldsymbol{n}_\sigma=\varphi_{0\sigma}X_0+$ $+\sum_{\tau}\varphi_{\tau\sigma}\boldsymbol{n}_\tau$. Из последних двух равенств следует, что $\frac{\partial \boldsymbol{n}_\sigma}{\partial s}$ ($\sigma=$ $=1,\ldots,r$) представимо в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_r$, т. е.

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_\sigma}{\partial s}=f_{0\sigma}\boldsymbol{X}_0+f_{1\sigma}n_1+\cdots+f_{r\sigma}\boldsymbol{n}_r. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (3), получим

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_0=\varphi_0 X_0+\varphi_1\boldsymbol{n}_1+\cdots+\varphi_r\boldsymbol{n}_r. \tag{16}$$

Теперь найдем $\nabla_{\tilde{X}_0}\tilde{\boldsymbol{X}}_k$ ($k=0, 1, \ldots, r$). Как было отмечено, $\boldsymbol{n}_\sigma=\tilde{\boldsymbol{X}}_\sigma$ и $\nabla_{\tilde{X}_\sigma}\tilde{\boldsymbol{X}}_\tau$ ($\sigma, \tau=1, \ldots, r$) представимы в виде линейных комбинаций векторов $\tilde{\boldsymbol{X}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{X}}_r$. В силу (4) $\nabla_{n_\sigma}\boldsymbol{X}_0=\nabla_{X_0}\boldsymbol{n}_\sigma=$ $=\varphi_{0\sigma}X_0+\sum_{\tau}\varphi_{\tau\sigma}\boldsymbol{n}_\tau$, но из (16) следует, что

$$\boldsymbol{X}_0=\psi_0\tilde{\boldsymbol{X}}_0+\psi_1\tilde{X}_1+\cdots+\psi_r\tilde{\boldsymbol{X}}_r, \tag{17}$$

и тогда получаем, что $\nabla_{X_0}\boldsymbol{n}_\sigma=\nabla_{n_\sigma}X_0$ разлагаются только по векторам $\tilde{\boldsymbol{X}}_0, \tilde{\boldsymbol{X}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{X}}_r$. Кроме того, $\nabla_{X_0}\boldsymbol{X}_0$ в силу условия леммы и (17) тоже представимо в виде линейной комбинации векторов $\tilde{\boldsymbol{X}}_0, \ldots, \tilde{\boldsymbol{X}}_r$. Значит, $\nabla_{X_0}X_k$ ($k=0, \ldots, r$) также представимы в виде линейных комбинаций векторов $\tilde{\boldsymbol{X}}_0, \ldots, \tilde{\boldsymbol{X}}_r$. Но тогда $\nabla_{\tilde{X}_0}\tilde{\boldsymbol{X}}_k=\varphi_0\nabla_{X_0}\tilde{\boldsymbol{X}}_k+\sum_{\tau}\varphi_{\tau\sigma}\nabla_{\tilde{X}_\tau}\tilde{\boldsymbol{X}}_k$ ($k=0, 1, \ldots, r$) представимо в виде линейных комбинаций векторов $\tilde{\boldsymbol{X}}_0, \ldots, \tilde{\boldsymbol{X}}_r$.

Здесь построены локальные координаты на поверхности $G \cap M^{r+1}$ и $\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_r$ — локальные координатные векторные поля. Покроем поверхность $G \cap M^{r+1}$ пересекающимися координатными окрестностями. Каждая из них по лемме 4 является вполне геодезической, но тогда все они лежат в некоторых $(r+1)$-мерных вполне геодезических подпространствах пространства R^m. Покажем, что все эти подпространства совпадают. Действительно, если две окрестности имеют непустое $(r+1)$-мерное пересечение, тогда и $(r+1)$-мерные вполне геодезические поверхности, содержащие их, имеют непустое $(r+1)$-мерное пересечение. Но тогда эти поверхности просто совпадают. Отсюда и следует, что все окрестности, покрывающие $G \cap M^{r+1}$ лежат в одном и том же $(r+1)$-мерном вполне геодезическом подпространстве пространства R^m. Значит, и кривая F^1 лежит в этом же подпространстве.

2. Пусть теперь $p > 1$, т. е. F^p — некоторая поверхность в R^m. Возьмем точку $x \in F^p$ и во всех касательных к F^p направлениях проведем геодезические на поверхности F^p. Рассмотрим произвольную геодезическую c поверхности F^p. Пусть $\boldsymbol{e}_1$ — касательный вектор к c. Выберем в точке $x \in F^p$ ортонормированный базис касательного к F^p пространства так, что $\boldsymbol{e}_1$ входит в этот базис: $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$. Перенесем параллельно $\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ на поверхности F^p вдоль c. Получим вдоль c дифференцируемые векторные поля $\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k$, которые ортогональны к c. Так как $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ представимы в виде линейных комбинаций координатных векторных полей поверхности F^p, то из условия леммы будет следовать, что $\nabla_{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_i$ и $\nabla_{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{n}_\sigma$ $(i = 1, \ldots, p;\ \sigma = 1, \ldots, k)$ будут разлагаться по векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k$. Эти рассуждения можно повторить для любой геодезической поверхности F^p. Как следует из первой части доказательства, все геодезические на поверхности F^p принадлежат $(p+k)$-мерным вполне геодезическим подпространствам пространства R^m. В точке $x \in F^p$ все эти подпространства будут иметь одно и то же касательное $(p+k)$-мерное пространство, натянутое на векторы $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$. Значит, эти подпространства совпадают. Таким образом, вся поверхность F^p принадлежит $(p+k)$-мерному вполне геодезическому подпространству пространства R^m. Лемма доказана.

Доказательство второй части леммы 5, опирающееся на лемму для кривой, предложил А. А. Борисенко. Если предполагать, что кривизна кривой нигде не обращается в нуль, то лемму 5 для кривой можно получить с помощью формул Френе для n-мерного пространства.

Лемма 6. *Если некоторое подмногообразие F^p является вполне геодезическим и подмногообразием кривизны на поверхности M^n, погруженной в пространство R^m постоянной кривизны, то оно принадлежит $(m-n+p)$-мерному вполне геодезическому подпространству пространства R^m.*

Доказательство. Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — координатные векторные поля подмногообразия F^p; $\boldsymbol{n}_\sigma$ $(\sigma=1,\ldots,m-n)$ — нормали к M^n. Так как F^p — подмногообразие кривизны, то $\nabla_{X_i}\boldsymbol{n}_\sigma$ $(i=1,\ldots,p;\ \sigma=1,\ldots,m-n)$ представимы в виде линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{X}_i$, $\boldsymbol{n}_\sigma$ $(i=1,\ldots,p;\ \sigma=1,\ldots,m-n)$ Рассмотрим теперь $\nabla_{X_i}\boldsymbol{X}_j$ [6, с. 11]:

$$\nabla_{X_i}\boldsymbol{X}_j=\widetilde{\nabla}_{X_i}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{X}_i;\ \boldsymbol{X}_j), \tag{18}$$

где $\widetilde{\nabla}$ — ковариантное дифференцирование на поверхности M^n; $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{X}_i;\ \boldsymbol{X}_j)$ — некоторый вектор, ортогональный к M^n. Тогда $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{X}_i;\ \boldsymbol{X}_j)$ представим в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{n}_\sigma$ $(\sigma=1,\ldots,m-n)$. F^p — вполне геодезическое в M^n. Тогда по лемме 4 $\nabla_{X_i}\boldsymbol{X}_j$ $(i,\ j=1,\ldots,p)$ разлагаются по векторам $X_1,\ldots,X_p$. Из (18) получаем, что $\nabla_{X_i}\boldsymbol{X}_j$ представимы в виде линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{X}_i$, $\boldsymbol{n}_\sigma$ $(i=1,\ldots,p;\ \sigma=1,\ldots,m-n)$. По лемме 5 F^p принадлежит $(m-n+p)$-мерному вполне геодезическому подпространству пространства R^m.

Как показывают примеры 1 и 2, приведенные в конце заметки, подмногообразие F^p, которое является вполне геодезическим и подмногообразием кривизны на поверхности M^n, может принадлежать как $(p+1)$-мерному, так и $(m-n+p)$-мерному вполне геодезическому подпространству пространства R^m.

Прежде чем доказать теорему, напомним некоторые необходимые сведения. Пусть $\langle R(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Y};\ \boldsymbol{X}\rangle$, $\langle\widetilde{R}(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Y};\ \boldsymbol{X}\rangle$ — тензоры кривизны пространства R^m и поверхности M^n соответственно, $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ — касательные к M^n векторы. Согласно [7, с. 203] для пространств постоянной кривизны

$$\langle R(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Y};\ \boldsymbol{X}\rangle=K_0(\|\boldsymbol{X}\|^2\|\boldsymbol{Y}\|^2-\langle\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y}\rangle^2). \tag{19}$$

Доказательство теоремы. Так как на поверхности M^n существует n главных направлений, то они голономны в силу леммы 1. Тогда в качестве координатных линий можно выбрать линии кривизны. В этом случае первая и все вторые квадратичные формы поверхности приводятся к виду

$$ds^2=\sum g_{ii}dx_i^2;\quad \mathrm{II}_\sigma=\sum\Omega_{\sigma|ii}dx_i^2\quad(\sigma=1,\ldots,m-n). \tag{20}$$

Пусть $\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_n$ — координатные векторные поля поверхности M^n. Уравнения Гаусса примут вид [2, с. 125]

$$\langle\widetilde{R}(\boldsymbol{X}_l;\ \boldsymbol{X}_u)\boldsymbol{X}_u;\ \boldsymbol{X}_l\rangle-\langle R(\boldsymbol{X}_l;\ \boldsymbol{X}_u)\boldsymbol{X}_u;\ \boldsymbol{X}_l\rangle=$$
$$=\sum_\sigma\Omega_{\sigma|ll}\Omega_{\sigma|uu}\ (\sigma=1,\ldots,m-n). \tag{21}$$

Учтем, что $\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_n$ взаимно ортогональны и $\|\boldsymbol{X}_l\|^2=g_{ll}$. Кривизна поверхности M^n по двумерной площадке, натянутой на векторы $\boldsymbol{X}_l$ и $\boldsymbol{X}_u$, будет $\widetilde{K}_{lu}=\dfrac{\langle\widetilde{R}(X_l;\ X_u)X_u;\ X_l\rangle}{g_{ll}g_{uu}}$. Используя (19) и последнее соотношение, получим уравнения Гаусса в виде

$$g_{ll}g_{uu}K_{lu}=\sum_{\sigma}\Omega_{\sigma|ll}\Omega_{\sigma|uu},\tag{22}$$

где $K_{lu}=\tilde{K}_{lu}-K_0$. Уравнения Кодацци имеют вид

$$\frac{\partial\Omega_{\sigma|ll}}{\partial x_u}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ll}}{\partial x_u}\left(\frac{\Omega_{\sigma|ll}}{g_{ll}}+\frac{\Omega_{\sigma|uu}}{g_{uu}}\right)+\sum_{\tau}\mu_{\tau\sigma|u}\Omega_{\sigma|ll}\quad (l\neq u;\ l;\ u=1,\ \ldots,\ n).\tag{23}$$

Продифференцируем уравнение (22) по x_v $(v\neq l\neq u\neq v)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_v}(g_{ll}g_{uu}K_{lu})=\sum_{\sigma}\left(\Omega_{\sigma|ll}\frac{\partial\Omega_{\sigma|uu}}{\partial x_v}+\Omega_{\sigma|uu}\frac{\partial\Omega_{\sigma|ll}}{\partial x_v}\right).$$

Подставляя сюда вместо частных производных от $\Omega_{\sigma|uu}$ и $\Omega_{\sigma|ll}$ их выражения (23) и используя (22), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_v}(g_{ll}g_{uu}K_{lu})=\frac{1}{2}g_{ll}\frac{\partial g_{uu}}{\partial x_v}(K_{lu}+K_{lv})+\frac{1}{2}g_{uu}\frac{\partial g_{ll}}{\partial x_v}(K_{lu}+K_{uv})+$$
$$+\sum_{\tau,\sigma}\mu_{\tau\sigma|v}(\Omega_{\sigma|ll}\Omega_{\tau|uu}+\Omega_{\tau|ll}\Omega_{\sigma|uu}).$$

Так как $\mu_{\tau\sigma|l}=-\mu_{\sigma\tau|l}$ [5, с. 124], то последнее слагаемое здесь равно 0. Выполнив дифференцирование в левой части и приведя подобные члены, найдем

$$2g_{uu}g_{ll}\frac{\partial K_{uv}}{\partial x_v}=g_{uu}\frac{\partial g_{ll}}{\partial x_v}(K_{uv}-K_{ul})+g_{ll}\frac{\partial g_{uu}}{\partial x_v}(K_{lv}-K_{ul}).\tag{24}$$

Положим теперь $u=i,\ l=r,\ v=s$ $(i=1,\ \ldots,\ p;\ r,\ s=p+1,\ \ldots,\ n)$. По условию теоремы, $K_{ir}=K_{is}$ и не зависят от x_t $(t=p+1,\ \ldots,\ n)$; поэтому из (24) получим $g_{rr}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_s}(K_{rs}-K_{ir})=0$. Но так как $g_{rr}\neq 0$, $K_{rs}\neq K_{ir}$, то $\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_s}=0$ $(s=p+1,\ \ldots,\ n)$, т. е. g_{ii} зависят только от x_j $(i,\ j=1,\ \ldots,\ p)$. В силу леммы 2 отсюда и следует, что поверхности F^p, которые задаются уравнениями $x_r=\mathrm{const}$ $(r=p+1,\ \ldots,\ n)$, вполне геодезические на поверхности M^n.

Докажем теперь, что F^p принадлежат $(m-n+p)$-мерным вполне геодезическим подпространствам пространства R^m. Так как координатными линиями многообразий F^p являются линии кривизны поверхности M^n, то по лемме 3 F^p — подмногообразия кривизны поверхности M^n. А так как они, по доказанному, являются вполне геодезическими в M^n, то, по лемме 6, они будут принадлежать $(m-n+p)$-мерным вполне геодезическим подпространствам пространства R^m.

Приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрим поверхность F^3 в евклидовом пространстве E^5, которая задается уравнениями

$$y_1 = (2c)^{-1/2}\varphi(x_1)\cos\left(\sqrt{2c}x_2\right); \quad y_2 = (2c)^{-1/2}\varphi(x_1)\sin\left(\sqrt{2c}x_2\right);$$
$$y_3 = (2c)^{-1/2}\varphi(x_1)\cos\left(\sqrt{2c}x_3\right); \quad y_4 = (2c)^{-1/2}\varphi(x_1)\sin\left(\sqrt{2c}x_3\right);$$
$$y_5 = \int_0^{x_1} \sqrt{1-(1/c)\varphi'^2(t)}\,dt. \tag{25}$$

Чтобы поверхность F^3 имела отрицательную кривизну, функцию $\varphi(x_1)$ достаточно взять такой, чтобы выполнялось условие $\varphi\varphi'' > 0$. Нормалями к этой поверхности будут векторы $n_1 = \left(\cos z_2;\ \sin z_2;\ \cos z_3;\ \sin z_3;\ -\frac{\varphi'(x_1)}{c\sqrt{1-1/c\varphi'^2(x_1)}}\right)$, $n_2 = (\cos z_2;\ \sin z_2;\ -\cos z_3;\ -\sin z_3;\ 0)$, где $z_i = \sqrt{2c}x_i$; c — некоторая постоянная ($c > 0$). Как можно проверить, главные направления поверхности (25) касаются ее координатных линий. Координатные линии x_1 в данном примере являются геодезическими и линиями кривизны. Проверяется, что эти кривые плоские.

Пример 2. Поверхность F^3 в E^5 задается уравнениями

$$\begin{aligned} y_1 &= (1+c)^{-1/2}\operatorname{ch} x_1 \cos\left(\sqrt{1+c}x_2\right);\\ y_2 &= (1+c)^{-1/2}\operatorname{ch} x_1 \sin\left(\sqrt{1+c}x_2\right);\\ y_3 &= (1+c)^{-1/2}\operatorname{sh} x_1 \cos\left(\sqrt{1+c}x_3\right);\\ y_4 &= (1+c)^{-1/2}\operatorname{sh} x_1 \sin\left(\sqrt{1+c}x_3\right);\\ y_5 &= (1+c)^{-1/2}\int_0^{x_1}\sqrt{c-2\operatorname{sh}^2 t}\,dt, \quad c > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Нормалями к этой поверхности являются векторы

$$n_1 = \left(\operatorname{sh} x_1 \cos z_2;\quad \operatorname{sh} x_1 \sin z_2;\quad \operatorname{ch} x_1 \cos z_3;\quad \operatorname{ch} x_1 \sin z_3;\quad -\frac{\operatorname{sh}^2 x_1 + \operatorname{ch}^2 x_1}{\sqrt{c-2\operatorname{sh}^2 x_1}}\right),\quad n_2 = \left(\frac{\cos z_2}{\operatorname{sh} x_1};\ \frac{\sin z_2}{\operatorname{sh} x_1};\ -\frac{\cos z_3}{\operatorname{ch} x_1};\ -\frac{\sin z_3}{\operatorname{ch} x_1};\ 0\right),$$

где $z_i = \sqrt{1+c}x_i$. Можно проверить, что поверхность (26) имеет в каждой точке 3 главных направления и они касаются координатных линий x_1, x_2, x_3. Координатная линия x_1 является и геодезической, и линией кривизны. Как легко проверить, эта линия не плоская, а принадлежит пространству E^3.

Пример 3. Рассмотрим многообразие M^3 с метрикой, имеющей компоненты $g_{11} = e^{x_2+x_3}$, $g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$. Можно подсчитать, что в этом случае $K_{12} = K_{13} \neq K_{23}$, причем $K_{12} = K_{13}$ не зависят от x_2 и x_3, но координатные линии x_1 не являются геодезическими. Этот пример показывает, что только из внутренних свойств поверхности M^n при требованиях, наложенных на кривизну в условии теоремы, вообще говоря, не следует, что подмногообразия F^p являются вполне геодезическими.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. А. Борисенко за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы: 1. *Moore J. D.* Isometric immersions of space forms in space forms.— Pacific J. Math., 1972, vol. 40, № 1, p. 157—166. 2. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М., Мир, 1971. 343 с. 3. *Аминов Ю. А.* О погружении областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— ДАН СССР, 1977, т. 236, № 3, с. 521—524. 4. *Лисица В. Т.* О голономности главных направлений подмногообразий отрицательной внешней кривизны в пространственных формах.— Укр. геометр. сб., 1979, вып. 22, с. 96—102. 5. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., ГИИЛ, 1948. 316 с. 6. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry, vol. 2. New York, 1969. 470 p. 7. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry, vol. 1. New York, 1963. 329 p.

Поступила 18 декабря 1978 г.

УДК 513

А. И. Медяник

РАЗБИЕНИЕ E^n НА ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРЕСТЫ

М. Фреллер высказал [1] предположение, что n-мерное евклидово пространство E^n можно разбить на конгруэнтные многогранники, составленные из n-мерного куба и всех его зеркальных отражений в своих гипергранях. Эта гипотеза получила полное подтверждение в работе автора [2] (в [1] рассмотрен случай $n = 3$). В ней установлено, что для любого натурального n существует разбиение E^n на пространственные кресты, центры которых образуют параллелепипедальную решетку. Координаты центров при этом являются решениями сравнения $\sum_{i=1}^{n} ix_i \equiv 0 \pmod{2n+1}$. Следует однако заметить, что существование указанного разбиения E^n, как выяснилось позже, вытекает также из результатов опубликованной еще до появления [1] работы С. Стейна [3] (см. § 3 этой работы или доказательство теоремы 2.1 применительно к случаю кольца классов вычетов по модулю $2n+1$, необходимое разложение мультипликативной полугруппы которого строится тривиально). И хотя в статье [3] прямо не говорится об этом универсальном свойстве эвклидовых пространств, оно, безусловно, было известно С. Стейну. Поэтому небезынтересна также история самой задачи, но она изучена, к сожалению, недостаточно.

В настоящей статье продолжается начатое в [2] исследование вопроса о представлении с помощью системы сравнений произвольного решетчатого разбиения E^n на кресты.

В предыдущей работе доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть Q' — нормальное решетчатое разбиение E^n на пространственные кресты. Тогда радиусы-векторы центров* *всех его крестов удовлетворяют некоторой системе $k \leqslant n$ сравнений*

$$L_i(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod{m_i},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k, \tag{1}$$

где $L_i(\boldsymbol{x})$ — линейная функция координат векторов $\boldsymbol{x}$, принимающих целочисленные значения, и $\prod_1^k m_i = c(2n+1)$, причем m_i являются делителями числа $2n+1$, а число c — произведение степеней делителей числа $2n+1$.

Поскольку базис параллелепипедальной решетки определяется не однозначно, то представление (1) разбиения Q' — не единственно. В этой статье для каждого разбиения будет получено вполне определенное представление с $c = 1$.

Обозначим снова Q соответствующее Q' разбиение E^n на единичные кубы, $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$ — решетки центров всех кубов из Q и крестов из Q' соответственно, а X и X' — их группы векторов (по сложению). И пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с центром одного из крестов разбиения Q'.

Рассмотрим фактор-группу T, элементами которой являются классы смежности группы X относительно ее подгруппы X'. Векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ из X принадлежат одному и тому же классу смежности тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \in X'$. Поэтому легко проверить, что радиусы-векторы центров кубов, составляющих произвольный крест Q', принадлежат различным классам смежности и что радиусы-векторы центров кубов двух различных крестов, одинаково расположенных относительно их центров, принадлежат одному и тому же классу смежности. Значит, T состоит из $2n+1$ классов смежности t_α ($\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$), представителями которых соответственно являются

$$\boldsymbol{z}_0 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{z}_{n+i} = -\boldsymbol{e}_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — орт i-й оси координат.

Поставим в соответствие каждому t_α комплекс $\tau_\alpha = (l_1(\boldsymbol{x}),\ l_2(\boldsymbol{x}),\ \ldots,\ l_k(\boldsymbol{x}))$, где $\boldsymbol{x} \in t_\alpha$ и $l_i(\boldsymbol{x})$ — наименьший по абсолютной величине вычет числа $L_i(\boldsymbol{x})$ по модулю m_i ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$). Это соответствие корректно. Действительно, пусть $\boldsymbol{x}_1 \in t_\alpha$ и $\boldsymbol{x}_2 \in t_\alpha$. Тогда $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \in t_0 = X'$ и, значит, для всех i будет $L_i(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \equiv 0 \pmod{m_i}$, т. е.

$$L_i(\boldsymbol{x}_1) \equiv L_i(\boldsymbol{x}_2) \pmod{m_i}. \tag{3}$$

Следовательно, для всех $\boldsymbol{x} \in t_\alpha$ элементы комплекса τ_α определяются однозначно. Поэтому можно считать, что

$$\tau_\alpha = (l_1(\boldsymbol{z}_\alpha),\ l_2(\boldsymbol{z}_\alpha),\ \ldots,\ l_k(\boldsymbol{z}_\alpha)). \tag{4}$$

Наоборот, если для некоторых $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ и всех $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$ выполняются сравнения (3), то в силу линейности $L_i(\boldsymbol{x})$ вектор $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ является решением системы сравнений (1), т. е. $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$

принадлежат одному и тому же классу смежности. Это означает, что различным классам смежности соответствуют и различные комплексы. Поэтому множество τ_α ($\alpha = 0, 1, \ldots, 2n$) относительно операции покомпонентного сложения классов вычетов является группой, изоморфной T, причем соответствующими при этом являются элементы с одинаковыми номерами. Эту группу естественно будет отождествить с T.

Заметим, что вектор $\boldsymbol{z} = \sum\limits_{\alpha=1}^{2n} \lambda_\alpha \boldsymbol{z}_\alpha$ является решением системы (1), если $\sum\limits_{\alpha=1}^{2n} \lambda_\alpha \tau_\alpha = \tau_0$ (все λ_α — целые числа). Справедливо также обратное утверждение. А так как любое решение (1) можно представить в виде целочисленной линейной комбинации векторов $\boldsymbol{z}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$), то каждому решению этой системы можно сопоставить аналогичную линейную комбинацию элементов группы T.

Как известно, группа G называется неразложимой, если она не может быть представлена нетривиальным образом в виде прямого произведения $G = G_1 \times G_2$. В дальнейшем понадобится следующая теорема из теории групп [4, с. 25]:

Теорема об элементарных делителях: 1) *Конечная абелева группа неразложима тогда и только тогда, когда она является циклической порядка* p^a *(p — простое).* 2) *Всякая конечная абелева группа* $G \neq \{1\}$ *разлагается в прямое произведение неразложимых групп* $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$ (*), *где* G_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — циклическая группа порядка $p_i^{a_i}$ ($a_i > 0$, *p_i — простое*). *Совокупность порядков* $\{p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_m^{a_m}\}$ *образует систему элементарных делителей разложения* (*). 3) *Любые два разложения группы G в прямое произведение неразложимых групп имеют одинаковые системы элементарных делителей.*

Утверждение «3» этой теоремы означает, что любые две конечные абелевы группы изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же системы элементарных делителей. Произведение всех элементарных делителей группы, очевидно, равно ее порядку.

Итак, согласно последней теореме группу T можно разложить в прямое произведение $T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_m$, где T_i — неразложимая циклическая группа порядка $p_i^{a_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), причем произведение всех порядков равно $2n + 1$. Так как T_i изоморфна группе классов вычетов по модулю p_i^a, то T изоморфна прямому произведению T' таких групп. Элементами T' являются комплексы $\tau_\alpha = (l_{1\alpha}, l_{2\alpha}, \ldots, l_{m\alpha})$, где $l_{i\alpha}$ — целые и $|l_{i\alpha}| < \frac{1}{2} p_i^{a_i}$. Пусть соответствующими при указанном изоморфизме являются комплексы с одинаковыми номерами. Тогда для всех $i = 1, 2, \ldots, m$

$$l_{i0} = 0, \ l_{i,\, n+j} = -l_{ij} \ (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

Рассмотрим следующую систему сравнений:

$$L'_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} x_j \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p_i^{a_i}), \ \ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (6)$$

На основании 2) и (5) из (6) получаем, что $L'_i(\boldsymbol{z}_\alpha) = l_{i\alpha}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $\alpha = 0, 1, \ldots, 2n$. Поэтому, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{2n} \lambda_\alpha \tau'_\alpha = \tau'_0$, где λ_α — целые числа, то $L'_i\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{2n} \lambda_\alpha \boldsymbol{z}_\alpha\right) = \sum\limits_{\alpha=1}^{2n} \lambda_\alpha L'_i(\boldsymbol{z}_\alpha) = \sum\limits_{\alpha=1}^{2n} \lambda_\alpha l_{i\alpha} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p_i^{a_i})$, т. е. вектор $\boldsymbol{z} = \sum\limits_{\alpha=1}^{2n} \lambda_\alpha \boldsymbol{z}_\alpha$ является решением системы (6), а в силу изоморфизма групп T' и T — решением и системы (1). Верно и обратное. Значит, системы эти имеют одни и те же решения. Кроме того, по теореме об элементарных делителях совокупность последних группой T, а следовательно, разбиением, Q', определяется однозначно. Тем самым доказана

Теорема 2. *Пусть Q' — нормальное решетчатое разбиение E^n на пространственные кресты. Тогда радиусы-векторы их центров удовлетворяют некоторой системе сравнений*

$$L'_i(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p_i^{a_i}), \ \ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (7)$$

где $L'_i(\boldsymbol{x})$ — линейная функция координат вектора $\boldsymbol{x}$, p_i — простое число, a_i — целое положительное число, причем $\prod\limits_1^m p_i^{a_i} = 2n + 1$. Совокупность модулей при этом разбиением Q' определяется однозначно.

Число сравнений в (7) равно числу элементарных делителей группы T. Если модули всех сравнений взаимно просты, то, как легко заметить, эта система эквивалентна единственному сравнению

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{2n+1}{p_i^{a_i}} L'_i(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 2n + 1).$$

Аналогичное упрощение можно сделать и в общем случае. Пусть m_1 — наименьшее общее кратное (НОК) всех элементарных делителей группы T. Если $m_1 \neq 2n + 1$, то пусть m_2 — НОК всех элементарных делителей, за исключением тех взаимно простых делителей, произведение которых равно m_1. По построению m_2 является делителем m_1. Если $m_1 m_2 \neq 2n + 1$, то аналогично строится m_3 и т. д. Поскольку каждое из m_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ является произведением некоторых взаимно простых элементарных делителей T, то справедлива

Теорема 3. *Радиусы-векторы центров крестов нормального решетчатого разбиения Q' удовлетворяют системе сравнений $L_i(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, m_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, где m_i обладают тем* *свойством, что* m_{j+1} *является делителем* m^j $(j = 1, 2, \ldots, s-1)$ *и* $\prod\limits_{1}^{s} m_i = 2n+1$. *Модули этих сравнений разбиением* Q' *определяются однозначно.*

Докажем теперь теорему, обратную предыдущей.

Теорема 4. *Для любого разложения числа* $2n+1$ *на отличные от 1 множители* m_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ *такие, что для всех* $1 \leqslant j \leqslant s-1$ m_{j+1} *является делителем* m_j, *существует решетчатое разбиение* E^n *на пространственные кресты, радиусы-векторы центров которых удовлетворяют системе сравнений*

$$L_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \equiv 0 \pmod{m_i},\ i = 1, 2, \ldots, s, \tag{8}$$

где a_{ij} — *наименьший по абсолютной величине вычет числа* $A_{ij} = \left[\frac{1}{2} + \frac{2j-1}{2M_i}\right]$, *а* $M_i = \frac{1}{m_i}\prod\limits_{1}^{i} m_j$. *Представление* (8) — *единственное с точностью до преобразования прямоугольной системы координат.*

Доказательство. Пусть q — произвольный куб разбиения Q и $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}$ — радиус-вектор его центра. Тогда радиусы-векторы центров кубов, прилегающих к q по гиперграням, имеют вид $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{u}_{-i} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Докажем сначала, что один и только один из векторов $\boldsymbol{u}_\alpha$ $(\alpha = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$ удовлетворяет системе (8), т. е. что решения этой системы порождают разбиение E^n на кресты. Для этого надо показать, что комплексы $\omega_\alpha = (L_1(\boldsymbol{u}_\alpha), L_2(\boldsymbol{u}_\alpha), \ldots, L_s(\boldsymbol{u}_\alpha))$, $\alpha = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ попарно различны, т. е. что любые два из них отличаются хотя бы одной компонентой. В силу линейности $L_i(\boldsymbol{x})$ последнее утверждение достаточно доказать для комплексов $\omega_\alpha^0 = (L_1(\boldsymbol{u}_\alpha^0), L_2(\boldsymbol{u}_\alpha^0), \ldots, L_s(\boldsymbol{u}_\alpha^0))$, где $\boldsymbol{u}_\alpha^0 = \boldsymbol{u}_\alpha|_{x=0}$.

Легко проверить, что $-A_{ij} = \left[\frac{1}{2} + \frac{2(-j)-1}{2M_i}\right]$ $(i = 1, 2, \ldots, s;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$ и, значит, для всех i и α

$$L_i(\boldsymbol{u}_\alpha^0) \equiv \left[\frac{1}{2} + \frac{2\alpha-1}{2M_i}\right] \pmod{m_i}. \tag{9}$$

Пусть ω_α^0 и ω_β^0 — произвольные комплексы с $\alpha < \beta$. Так как $1 \leqslant \beta - \alpha < 2n+1$, то существует такое $1 \leqslant i \leqslant s$, что $M_i \leqslant \beta - \alpha < M_{i+1}$, где $M_{s+1} = 2n+1$. Но тогда, очевидно,

$$1 \leqslant \left[\frac{1}{2} + \frac{2\beta-1}{2M_i}\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{2\alpha-1}{2M_i}\right] < m_i,$$

т. е. по свойству (9) i-е компоненты ω_α^0 и ω_β^0 различны. А поскольку всех попарно различных комплексов не больше, чем

$\prod\limits_1^s m_i = 2n+1$, то среди $2n+1$ комплексов ω_α ($\alpha = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$) имеется такой, все компоненты которого равны нулю, причем он — единственный. Это и означает, что один и только один вектор $\boldsymbol{u}_\alpha$, $|\alpha| \leqslant n$ удовлетворяет системе (8).

Обозначим Q' разбиение E^n на кресты, порождаемое (8). Докажем, что множество $\overline{Q}'$ центров всех крестов этого разбиения является решеткой. Пусть $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ — линейно-независимые радиусы-векторы n точек множества $\overline{Q}'$, а R — параллелепипед, натянутый на эти векторы. Все вершины R принадлежат $\overline{Q}'$, так как сравнения (8) линейны. Поскольку точки Q' имеют целочисленные координаты, то объем любого параллелепипеда с вершинами в них выражается целым числом. И, значит, на множестве всех таких параллелепипедов функция объема достигает своего наименьшего значения. Пусть объем R равен этому значению. Тогда множеству $\overline{Q}'$ принадлежат только вершины R. Действительно, в противном случае найдется такой вектор $\boldsymbol{r} = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{r}_i$, удовлетворяющий системе (8), для которого $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), причем хотя бы для одного коэффициента разложения оба неравенства строгие. Пусть $0 < \lambda_j < 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{j-1}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{r}_n$, очевидно, меньше, чем объем R, что противоречит условию о минимальности последнего.

В силу линейности сравнений системы (8) радиусы-векторы всех узлов решетки с базисным параллелепипедом R удовлетворяют этой системе, а по свойству минимальности объема R они исчерпывают все ее решения, т. е. $\overline{Q}'$ является решеткой.

Докажем теперь последнее утверждение теоремы о единственности представления (8). Пусть имеется другое представление разбиения Q'

$$L_i' = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \equiv 0 \ (\operatorname{mod} m_i'),\ i = 1, 2, \ldots, s', \tag{10}$$

для которого $|b_{ij}| < \frac{1}{2} m_i'$ и $\prod\limits_1^{s'} m_i' = 2n+1$, причем m_j' делится на m_{j+1}' для всех $j = 1, 2, \ldots, s'-1$. По теореме 3 $s' = s$ и $m_i' = m_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s$).

Рассмотрим снова фактор-группу $T = X/X'$, связанную с разбиением Q'. В случае представления (8) согласно (4) T изоморфна группе комплексов

$$\tau_\alpha = (L_1(\boldsymbol{z}_\alpha), L_2(\boldsymbol{z}_\alpha), \ldots, L_s(\boldsymbol{z}_\alpha)) \ (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n), \tag{11}$$

а в случае представления (10) — группе комплексов

$$\tau_\alpha' = (L_1'(\boldsymbol{z}_\alpha), L_2'(\boldsymbol{z}_\alpha), \ldots, L_s'(\boldsymbol{z}_\alpha)) \ (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n). \tag{12}$$

Из равенства модулей одноименных сравнений систем (8) и (10) следует, что изоморфные между собой группы комплексов (11) и (12) отличаются только номерами своих элементов. Но для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ τ_i и τ_i' на основании (2) совпадают с i-ми столбцами матриц коэффициентов систем (8) и (10), а τ_{n+i} и τ_{n+i}' отличаются от них только знаками. Значит, система (10) после надлежащего изменения нумерации осей координат и выбора их направления превращается в систему (8). Это и означает, что представление (8) разбиения Q' является единственным с точностью до преобразования системы координат. Теорема 4 доказана полностью. Из последних двух теорем непосредственно получается

Следствие. Для каждого натуиального n существует столько существенно различных разбиений E^n на пространственные кресты, сколько имеется различных разложений числа $2n+1$ на отличные от 1 множители $m_1, m_2, \ldots, m_s$, каждый из которых, начиная со второго, является делителем предыдущего.

Список литературы: 1. *Freller M.* Egy térkitöltesi feladat.— Magy. tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. Kõzl, 1973, vol. 21, № 1—2, p. 71—72. 2. *Медяник А. И.* Одна задача о разбиении евклидова пространства.— Укр. геометр. сборник. Харьков, 1979, вып. 22, с. 109—114. 3. *Stein S. K.* Factoring by subsets.— Pac. J. of Math., 1967, vol. 22, № 3, p. 523-541. 4. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., Наука, 1969. 668 с.

Поступила 29 мая 1978 г.

УДК 513

Й. Микеш

О ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В работе вводится понятие степени подвижности келеровых пространств относительно нетривиальных голоморфно-проективных отображений, сохраняющих почти комплексную структуру. Оно аналогично понятию степени подвижности римановых пространств относительно геодезических отображений [1] и понятию порядка полных групп движений аффинно-связных и римановых пространств [2]. Затем обнаруживаются лакунарности в распределении степеней подвижности келеровых пространств относительно нетривиальных голоморфно-проективных отображений, сохраняющих почти комплексную структуру.

Вещественное риманово пространство четной размерности $n = 2N$ $(N > 1)$ с метрическим тензором g_{ij} называется келеровым пространством K_n, если в нем существует почти комплексная структура φ_i^h, которая имеет следующие свойства [3]:

$$\varphi_\alpha^h \varphi_i^\alpha = \delta_i^h; \ \varphi_{(ij)} = 0; \ \varphi_{i,j}^h = 0, \qquad (1)$$

где δ_i^h — символы Кронекера, $\varphi_{ij} = g_{i\alpha}\varphi_j^\alpha$, (i, j) — симметрирование по i, j, запятая обозначает ковариантную производную по связности K_n $(i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$. Отметим, что метрика K_n не предполагается знакоопределенной.

Как известно, тензоры Римана R^h_{ijk}, Риччи R_{ij} и голоморфно-проективной кривизны P^h_{ijk} келеровых пространств удовлетворяют следующим тождествам [3]:

$$R^h_{i\alpha\beta}\varphi^\alpha_j\varphi^\beta_k = R^h_{ijk};\ P^h_{i\alpha\beta}\varphi^\alpha_j\varphi^\beta_k = P^h_{ijk};\ R_{\alpha\beta}\varphi^\alpha_i\varphi^\beta_j = R_{ij}, \tag{2}$$

где $R_{ij} = R^\alpha_{ij\alpha}$;

$$P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n+2}\left(\delta^h_{[k}R_{j]i} + \varphi^h_{[k}\varphi^\alpha_{j]}R_{\alpha i} + 2\varphi^h_i R_{\alpha k}\varphi^\alpha_j\right), \tag{3}$$

$[k, j]$ — альтернирование по k, j.

Так как почти комплексная структура φ^h_i келерова пространства интегрируема, в окрестности любой точки K_n может быть выбрана голономная система координат, в которой выполняются условия

$$\varphi^{H+N}_I = -\varphi^H_{I+N} = \delta^H_I;\ \varphi^H_I = \varphi^{H+N}_{I+N} = 0;\ H, I = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

1. Необходимым и достаточным условием того, чтобы келерово пространство K_n допускало нетривиальное голоморфно-проективное отображение на $\overline{K}_n$, сохраняющее почти комплексную структуру (НГПО), является выполнение в общей по отображению системе координат следующих уравнений [3].

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_{(i}\psi_{j)} - \varphi^h_{(i}\varphi^\alpha_{j)}\psi_\alpha;\ \overline{\varphi}^h_i = \varphi^h_i;\ \psi_i = \psi_{,i} \neq 0.$$

Здесь $\Gamma^h_{ij}(\overline{\Gamma}^h_{ij})$ — символы Кристоффеля $K_n(\overline{K}_n)$; φ^h_i — почти комплексная структура $\overline{K}_n$.

K_n называется голоморфно-проективно плоским (ГПП), если оно допускает НГПО на плоское K_n. Необходимым и достаточным условием того, чтобы K_n было ГПП, является обращение в нуль тензора голоморфно-проективной кривизны [3].

В работе [4] показано, что K_n допускает НГПО тогда и только тогда, когда в нем существует решение уравнений

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda^*_i\varphi_{j)k}, \tag{5}$$

где λ_i — ненулевой градиентный вектор; $\lambda^*_i = \lambda^*_\alpha\varphi^\alpha_i$; $a_{ij} = a_{ji} = a_{\alpha\beta}\varphi^\alpha_i\varphi^\beta_j$. Из условий интегрируемости (5) следуют уравнения [4]:

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{i\alpha}R^\alpha_j - a_{\alpha\beta}R^{\alpha\ \ \beta}_{\cdot ij\cdot}, \tag{6}$$

где $R^h_i = g^{h\alpha}R_{\alpha i}$; $R^{h\ \ k}_{\cdot ij\cdot} = g^{k\alpha}R^h_{ij\alpha}$; $\mu = \lambda_{\alpha,\beta}g^{\alpha\beta}$; g^{ij} — элементы обратной матрицы для $\|g_{ij}\|$. Проальтернировав (6) по $[i, j]$, получим

$$a_{\alpha i}R^\alpha_j - a_{\alpha j}R^\alpha_i = 0. \tag{7}$$

Условия интегрируемости уравнений (5) в силу (6) имеют форму

$$a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl}=0; \tag{8}$$

$$\begin{aligned} T^{pq}_{ijkl} &= n\delta^p_{(i}R^q_{j)kl}+g_{l(i}\tilde{T}^{pq}_{j)k}-g_{k(i}\tilde{T}^{pq}_{j)l}+\\ &+\varphi_{l(i}\varphi^{\alpha}_{j)}\tilde{T}^{pq}_{\alpha k}-\varphi_{k(i}\varphi^{\alpha}_{j)}\tilde{T}^{pq}_{\alpha k}; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\tilde{T}^{pq}_{ik}=\delta^p_iR^q_k-R^{p}_{\cdot ik\cdot}{}^{q}.$$

Отсюда следует, что $a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl}+a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{\gamma l i \varepsilon}\varphi^{\gamma}_k\varphi^{\varepsilon}_j=0$ или на основании (2) и (9)

$$a_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)kl}+\varphi^{\beta}_{[k}a_{l]\alpha}R^{\alpha}_{\beta i\gamma}\varphi^{\gamma}_j=0. \tag{10}$$

Условия интегрируемости (6) имеют вид

$$\begin{aligned}(n+2)\lambda_\alpha R^{\alpha}_{ijk} &= g_{ij}(\mu_k+\lambda_\alpha R^{\alpha}_k)-g_{ik}(\mu_j-\lambda_\alpha R^{\alpha}_j)+\varphi_{i[j}\varphi^{\alpha}_{k]}\times\\ &\times R^{\beta}_{\alpha}\lambda_\beta+2\overset{*}{\lambda}_iR_{\alpha k}\varphi^{\alpha}_j+a_{\alpha i}R^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot kj,\beta}-a_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{ijk,\cdot}{}^{\beta},\end{aligned} \tag{11}$$

где $\mu_i=\mu_{,i}$; $R^{hi}_{\cdot\cdot jk}=g^{i\alpha}R^h_{\alpha jk}$; $R^h_{ijk,\cdot}{}^{l}=g^{l\alpha}R^h_{ijk,\alpha}$. Вследствие условий (2), отсюда получим $g_{i[j}M_{k]}+\varphi_{i[j}\varphi^{\alpha}_{k]}M_\alpha=0$, где $M_i=\mu_i-2\lambda_\alpha R^{\alpha}_i$. Свертывая последнее с g^{ij}, находим $M_i\equiv 0$, т. е.

$$\mu_{,i}=2\lambda_\alpha R^{\alpha}_i. \tag{12}$$

Тогда условия (11) преобразуются так:

$$(n+2)\lambda_\alpha P_{i\cdot jk}^{\cdot\alpha}-a_{\alpha i}R^{\beta\alpha}_{\cdot\cdot jk,\beta}-a_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{ijk,\cdot}{}^{\beta}=0, \tag{13}$$

где $P_{i\cdot jk}^{\cdot h}=g^{h\alpha}g_{i\beta}P^{\beta}_{\alpha jk}$. Условия интегрируемости (12) имеют вид

$$\lambda_\alpha R^{\beta\alpha}_{\cdot\cdot ij,\beta}-a_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{\cdot\gamma i\cdot}{}^{\beta}R^{\gamma}_j+a_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{\cdot\gamma j\cdot}{}^{\beta}R^{\gamma}_i=0. \tag{14}$$

Из проведенных рассуждений следует

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы K_n допускало нетривиальное голоморфно-проективное отображение на $\bar{K}_n$, сохраняющее почти комплексную структуру, является существование решения системы линейных дифференциальных уравнений типа Коши*

$$a_{ij,k}=\lambda_{(i}g_{j)k}-\overset{*}{\lambda}_{(i}\varphi_{j)k}; \tag{15а}$$

$$n\lambda_{i,j}=\mu g_{ij}+a_{i\alpha}R^{\alpha}_j-a_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{\cdot ij\cdot}{}^{\beta}; \tag{15б}$$

$$\mu_{,i}=2\lambda_\alpha R^{\alpha}_i, \tag{15в}$$

причем

$$a_{ij}=a_{ji}=a_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha}_i\varphi^{\beta}_j,\ \lambda_i=\lambda_{,i}\neq 0. \tag{16}$$

Для начальных значений Коши

$$\underset{0}{a}_{ij}=a_{ij}(x_0);\ \underset{0}{\lambda}_i=\lambda_i(x_0);\ \underset{0}{\mu}=\mu(x_0) \tag{17}$$

она, как известно, имеет не более одного решения. Поэтому множество всех решений уравнений (15) в данном пространстве K_n зависит в силу (16) не более чем от $N_0 = (N+1)^2$ произвольных параметров.

Для того чтобы выяснить, существуют ли нетривиальные решения этой системы, нужно изучить условия ее интегрируемости и их дифференциальные продолжения, которые представляют собой однородные линейные алгебраические уравнения относительно a_{ij}, λ_i, μ с коэффициентами из K_n. Им, естественно, должны удовлетворять и начальные значения (17). Условия интегрируемости (15) получены выше — это соотношения (8), (13) и (14).

Максимальное число r существенных параметров (17), от которых зависит общее решение системы (15) в данном K_n, будем называть степенью его подвижности относительно НГПО. Очевидно $r \leqslant N_0$. На вопрос о существовании K_n с максимальной степенью подвижности N_0 относительно НГПО дает ответ

Теорема 2. *Голоморфно-проективно плоские келеровы пространства являются пространствами с максимальной степенью подвижности относительно НГПО и только они.*

Доказательство. Пусть система (15) в K_n имеет решение при любых начальных значениях (17), удовлетворяющих (16). Тогда из (13) следует, что все компоненты $P^{\alpha}_{i\cdot jk} \equiv 0$, т. е. K_n по необходимости — ГПП. Наоборот, если K_n — ГПП, условия интегрируемости уравнений (15) выполняются тождественно. Таким образом, эта система вполне интегрируема и имеет решения при любых начальных условиях (17), а значит, множество всех ее решений зависит от $(N+1)^2$ существенных параметров. Теорема доказана.

2. Очевидно, что пространства, отличные от ГПП, обладают меньшей степенью подвижности относительно НГПО, чем N_0. Насколько она понижается, попытаемся ответить в дальнейшем.

Лемма 1. *Если K_n отлично от ГПП, то μ — выражается через λ_i, a_{ij} и объекты K_n.*

Доказательство. Условия интегрируемости (13) продифференцируем по x^l, в силу (15) получим:

$$\frac{n+2}{n}\mu P_{iljk} + \frac{n+2}{n}(a_{l\gamma}R^{\gamma}_{\alpha} - a_{\beta\gamma}R^{\beta}_{\cdot l\alpha\cdot}{}^{\gamma})P^{\alpha}_{i\cdot jk} -$$

$$-(\lambda_{(\alpha}g_{\beta)l} - \overset{*}{\lambda}_{(\alpha}\varphi_{\beta)l})(\delta^{\alpha}_{i}R^{\gamma\beta}_{\cdot\cdot jk,\gamma} + R^{\alpha}_{ijk,}{}^{\beta}_{\cdot}) - a_{\alpha i}R^{\beta\alpha}_{\cdot\cdot jk,\beta l} -$$

$$-a_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{ijk,}{}^{\beta}_{\cdot l} + (n+2)\lambda_{\alpha}P^{\alpha}_{i\cdot jk,l} = 0,$$

где $P_{hljk} = g_{h\alpha}P^{\alpha}_{ljk}$. Так как K_n отлично от ГПП, то $P_{hijk} \neq 0$, отсюда следует, что μ выражается через a_{ij}, λ_i и объекты K_n. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если K_n отлично от ГПП, то все компоненты вектора λ_i зависят от a_{ij} и объектов K_n.*

Доказательство. Продифференцируем (8) по x^m; учитывая (15), получим

$$n(\lambda_{(i}R_{j)mkl} + \overset{*}{\lambda}_{(i}\varphi^{\alpha}_{j)}R_{\alpha mkl} - g_{m(i}R^{\alpha}_{j)kl}\lambda_\alpha - \varphi_{m(i}\varphi^{\beta}_{j)}R^{\alpha}_{\beta kl}\lambda_\alpha) + \\ + g_{k(i}M_{j)ml} - g_{l)i}M_{j)mk} + \varphi_{k(i}\varphi^{\alpha}_{j)}M_{\alpha ml} - \varphi_{l(i}\varphi^{\alpha}_{j)}M_{\alpha mk} = \\ = -a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl,\,m}, \tag{18}$$

где $M_{ijk} = \tilde{M}_{ijk} + \varphi^{\alpha}_{i}\varphi^{\beta}_{k}\tilde{M}_{\alpha j\beta}$; $\quad M_{ijk} = \lambda_i R_{jk} + g_{ij}\lambda_\alpha R^{\alpha}_{k} - \lambda_\alpha R^{\alpha}_{(ij)k}$. Свертывая (18) с g^{im}, находим

$$\lambda_\alpha R^{\alpha}_{jkl} = \frac{1}{n+2}(\overset{*}{\lambda}_j R_{\alpha l}\varphi^{\alpha}_{k} + g_{j[k}B_{l]} + \varphi_{j[k}\varphi^{\alpha}_{l]}B_\alpha) + U_{jkl},$$

где $B_l = \lambda_\alpha R^{\alpha}_{l}$, $\quad U_{jkl} = -\frac{1}{n^2-4}a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{\gamma jkl,\,\varepsilon}g^{\gamma\varepsilon}$. Подставим последнее в (18) и свернем результат с g^{lm}:

$$n^2(\lambda_{(i}E_{j)k} + \overset{*}{\lambda}_{(i}\varphi^{\alpha}_{j)}E_{\alpha k}) - 8(R_{ij}\lambda_k - g_{ij}B_k) = V_{ijk}, \tag{19}$$

где $E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}$; $\quad R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$; $\quad V_{ijk} = n^2 W_{ijk\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$; $W_{ijklm} =$

$$= -\frac{1}{n}(a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl,\,m} + ng_{m(i}U_{j)kl} + n\varphi_{m(i}\varphi^{\alpha}_{j)}U_{\alpha kl} + g_{k(j}Y_{i)ml} - \\ - g_{l(j}Y_{i)mk} + \varphi_{k(j}\varphi^{\alpha}_{i)}Y_{\alpha ml} - \varphi_{l(j}\varphi^{\alpha}_{i)}Y_{\alpha mk}); \quad Y_{iml} = U_{(il)m} + \\ + \varphi^{\alpha}_{(i}\varphi^{\beta}_{l)}U_{\alpha\beta m}.$$

Свертывая (19) с g^{ij}, получаем $B_k = \frac{R}{n}\lambda_k + \frac{1}{4n(n+2)}V_{\alpha\beta k}g^{\alpha\beta}$, и оно принимает вид

$$n^2(\lambda_{(i}E_{j)k} + \overset{*}{\lambda}_{(i}\varphi^{\alpha}_{j)}E_{\alpha k}) - 8\lambda_k E_{ij} = Z_{ijk}, \tag{20}$$

где $\quad Z_{ijk} = V_{ijk} - \frac{2}{n(n+2)}g_{ij}V_{\alpha\beta k}g^{\alpha\beta}$.

Просимметрируем (20) по (j, k), в полученном выражении поменяем местами индексы i, k и, если его сложить с (20), найдем:

$$\lambda_{(i}E_{j)k} + \lambda_k E_{ij} = \frac{1}{2(n^2-4)}(Z_{ijk} + Z_{k(ij)}).$$

Учитывая последнее, нетрудно из (20) показать, что

$$\lambda_k E_{ij} = \frac{1}{n^2+4}\left(\frac{n^2}{2(n^2-4)}(2Z_{ijk} + Z_{k(ji)} + \varphi^{\alpha}_{(i}\varphi^{\beta}_{j)}Z_{k\alpha\beta}) - Z_{ijk}\right).$$

Следовательно, если K_n отлично от пространств Эйнштейна, т. е. $E_{ij} \neq 0$, то лемма справедлива.

Рассмотрим случай, когда $E_{ij} = 0$. Тогда (18) в силу предыдущего принимает вид:

$$\lambda_{(i}P_{j)mkl} = \overset{*}{\lambda}_{(i}\varphi^{\alpha}_{j)}P_{\alpha mkl} = W_{ijklm}. \tag{21}$$

Просимметрируем (21) по (j, m), в полученном выражении поменяем местами индексы i, m и, вычитая из (21), получим

$$\lambda_{(i}P_{j)mkl}-\lambda_m^* P_{\alpha ikl}\varphi_j^\alpha=\frac{1}{2}(W_{ijklm}-W_{mjkli}-W_{miklj}).$$

С помощью последнего соотношения формулу (21) преобразуем:

$$4\lambda_m P_{jikl}=W_{mjkli}-W_{miklj}+W_{m\alpha kl\beta}\varphi_{[j}^\alpha\varphi_{i]}^\beta.$$

Отсюда, поскольку K_n отлично от ГПП, видно, что λ_m выражается через a_{ij} и объекты K_n.

Лемма 3. *Если K_n отлично от пространств Эйнштейна, то в силу* (7) *среди компонент a_{ij} необходимо есть $n-2$ зависимых.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. среди a_{ij} не более $n-3$ зависимых компонент. Рассмотрим (7) в канонической системе координат (4). Напомним, что $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n$; $I, J, K, \ldots = 1, 2, \ldots, N$.

а) Покажем, что тогда при $I \neq J$ все компоненты $a_J^I=0$. Достаточно рассмотреть случай, когда $I=1$, $J=2$. Предположим, что $R_2^1 \neq 0$. В (7) положим $i=2$, $j=2+N$. В силу (2) и (16) получим:

$$a_{12+N}R_2^1+a_{12}R_2^{1+N}=\sum_{\alpha\neq 1,\ 1+N}a_{\alpha 2}R_{2+N}^\alpha.$$

Пусть теперь $i=I\neq 2$, $j=2$, а затем $i=I+N$; из (7) получим

$$a_{1I}R_2^1-a_{1I+N}R_2^{1+N}=a_{\alpha 2}R_I^\alpha-\sum_{\alpha\neq 1,\ 1+N}a_{\alpha I}R_2^\alpha;$$

$$a_{1I}R_2^{1+N}+a_{1I+N}R_2^1=a_{\alpha 2}R_{I+N}^\alpha-\sum_{\alpha\neq 1,\ 1+N}a_{\alpha I+N}R_2^\alpha.$$

Отсюда получаем, что $a_{1I}\,(I\neq 2)$, $a_{1I+N}\,(I\neq 1)$ в силу предыдущего зависят от остальных компонент. Таким образом, имеем $n-2$ зависимых компонент тензора a_{ij}. Следовательно, $R_2^1=0$ и, вообще, все $R_J^I=0$ при условии $I\neq J$.

б) Аналогично можно показать, что если $I\neq J$, то $R_J^{I+N}=0$. Таким образом, если среди параметров a_{ij} имеется не более $n-3$ зависимых, то в любой канонической системе координат $R_J^I=R_J^{I+N}=0$ для $I\neq J$. Линейное невырожденное преобразование канонической системы координат $x'^1=x^1+x^2+\cdots+x^N$, $x'^I=x^I$, $I>1$, $x'^{1+N}=x^{1+N}+x^{2+N}+\cdots+x^n$, $x'^{I+N}=x^{I+N}$ оставляет их каноническими. Если $I\neq J$, то $R_J'^I=R_J^{I+N}=0$. Учитывая тензорное преобразование компонент тензора Риччи $A_\alpha^h R_i^\alpha=A_i^\alpha R_\alpha'^h$, где $A_i^h=\frac{\partial x'^h}{\partial x^i}$, получим $R_I^I=R_1'^1$ при $h=1$, $i=I$; $R_I^{I+N}=R_I'^{I+N}$ при $h=1+N$, $i=I$. Тогда нетрудно видеть, что $R_i^h=a\delta_i^h+b\varphi_i^h$, где $a=R_1'^1$, $b=R_1'^{1+N}$. Последняя формула носит тензорный характер. Опуская индекс h, можем показать, что $b = 0$, т. е. K_n является пространством Эйнштейна, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если K_n отлично от ГПП ($n \geqslant 8$), то в силу (10) среди компонент a_{ij} необходимо есть $n-6$ зависимых.*

Доказательство. Допустим, что среди a_{ij} не более $n-7$ зависимых компонент. Рассмотрим (10) в канонической системе координат (4). Зафиксируем индексы $H, J, K, l = L$ или $L+N$, $K \neq l$.

А) $H \neq J, K, L$; $J \neq K, L$. Подставим в (10) $i = j = J$, $k = K$ будем иметь

$$2a_{HJ}R^{H}_{JKl} - 2a_{HJ+N}R^{H+N}_{JKl} + 2\sum_{\alpha \neq H,\ H+N} a_{\alpha J}R^{\alpha}_{JKl} + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{K+NJJ+N} - \\ - a_{\alpha K}R^{\alpha}_{\beta JJ+N}\varphi^{\beta}_{l} = 0.$$

Положим в (10) $i = I \neq J, K, L$; $j = J$; $k = K$, а затем $i = I + N$. Получим систему:

$$a_{HI}R^{H}_{JKl} - a_{HI+N}R^{H+N}_{JKl} + \sum_{\alpha \neq H,\ H+N} a_{\alpha I}R^{\alpha}_{JKl} + a_{\alpha J}R^{\alpha}_{IKl} + \\ + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{K+NIJ+N} - a_{\alpha K}R^{\alpha}_{\beta IJ+N}\varphi^{\beta}_{l} = 0;$$

$$a_{HI}R^{H+N}_{JKl} + a_{HI+N}R^{H}_{JKl} + \sum_{\alpha \neq H,\ H+N} a_{\alpha I+N}R^{\alpha}_{JKl} + a_{\alpha J}R^{\alpha}_{I+NKl} + \\ + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{K+NIJ} - a_{\alpha K}R^{\alpha}_{\beta IJ}\varphi^{\beta}_{l} = 0.$$

Если $R^{H}_{JKl} \neq 0$, то $n-6$ компонент, именно: a_{HI} $(I \neq K, L)$; a_{HI+N} $(I \neq H, J, K, L)$ — зависят от остальных. Если $R^{H+N}_{JKl} \neq 0$, то a_{HI} $(I \neq J, K, L)$; a_{HI+N} $(I \neq H, K, L)$ зависят от остальных компонент a_{ij}. Следовательно, если $H \neq J, K, L$; $J \neq K, L$; $l =$

$$= L \text{ или } L+N, \text{ то } R^{H}_{JKl} = R^{H+N}_{JKl} = 0. \tag{22}$$

Б) Пусть $H \neq J, L$; $J \neq L$; $l = L$ или $L+N$. В (10) подставим $j = k = J$; $i = I \neq J, L$, а затем $i = I + N$. Получим уравнения:

$$a_{HI}R^{H}_{JJl} - a_{HI+N}R^{H+N}_{JJl} + \sum_{\alpha \neq H,\ H+N} a_{\alpha I}R^{\alpha}_{JJl} + a_{\alpha J}R^{\alpha}_{IJl} + \\ + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{J+NIJ+N} - a_{\alpha J}R^{\alpha}_{\beta I\,J+N}\varphi^{\beta}_{l} = 0;$$

$$a_{HI}R^{H+N}_{JJl} + a_{HI+N}R^{H}_{JJl} + \sum_{\alpha \neq H,\ H+N} a_{\alpha I+N}R^{\alpha}_{JJl} + a_{\alpha J}R^{\alpha}_{I+NJl} + \\ + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{J+NIJ} - a_{\alpha J}R^{\alpha}_{\beta IJ}\varphi^{\beta}_{l} = 0.$$

Если $R^{H}_{JJl} \neq 0$ или $R^{H+N}_{JJl} \neq 0$, то a_{HI} $(I \neq J, L)$; a_{HI+N} $(I \neq H, J, L)$ зависят от остальных компонент. Следовательно, если $H \neq J, L$; $J \neq L$; $l = L$ или $L + N$, то

$$R^{H}_{JJl} = R^{H+N}_{JJl} = 0. \tag{23}$$

В) Пусть, наконец, $H \neq J, L$. Если в (10) положить $j = J$; $k = L$; $l = L + N$, $i = I$, а затем $i = I + N$ $(I \neq J, L)$, то аналогичным путем получим, что

$$R^{H}_{JLL+N} = R^{H+N}_{JLL+N} = 0. \qquad (24)$$

Также нетрудно из (10) получить:

$$R^{H}_{LLL+N} = R^{H+N}_{LLL+N} = 0, \text{ если } H \neq L. \qquad (25)$$

Равенства (22—25) имеют место в любой канонической системе координат. Из последнего следует, как нетрудно показать, что K_n является ГПП, если среди a_{ij} не более $n-7$ зависимых компонент. Лемма доказана.

На основании лемм 1—4 легко убедиться в справедливости следующих теорем:

Теорема 3. *Если K_n отлично от пространств Эйнштейна, то степень его подвижности относительно НГПО не превосходит числа $N^2 - 2N + 2$.*

Теорема 4. *Если K_n отлично от ГПП $(n \geqslant 8)$, то степень его подвижности относительно НГПО не превосходит числа $N^2 - 2N - 2$.*

Если K_n не является ГПП, тогда на основании лемм 1, 2 μ и λ_i выражаются через a_{ij}. Вследствие леммы 3 для K_n, отличных от пространств Эйнштейна, уравнениями (7) на a_{ij} налагается $n-2$ независимых условий, поэтому степень подвижности относительно НГПО понижается по крайней мере на $N^2 - 2N + 2$. И теорема 3 верна. В случае пространства K_n, отличного от ГПП $(n \geqslant 8)$, в соответствии с леммой 4 подвижность его относительно НГПО понижается еще на $n - 6$. Таким образом, теорема 4 справедлива.

3. В заключение приведем пример келеровых пространств, отличных от ГПП и обладающих большой степенью подвижности относительно НГПО. Обозначим через ГП приводимое пространство, метрика которого $ds^2 = d\tilde{s}^2 + d\bar{s}^2$, причем $d\tilde{s}^2$ — метрика плоского $2(N-2)$-мерного келерова пространства $\tilde{K}$, метрический тензор которого g_{IJ} и почти комплексная структура φ^I_J $(I, J, K, \ldots = 5, 6, \ldots, n)$. $d\bar{s}^2$ — метрика не плоского 4-мерного келерова пространства $\bar{K}$, метрический тензор $\bar{g}_{AB}$ и почти комплексная структура $\bar{\varphi}^A_B$ которого в некоторой системе координат удовлетворяют следующим требованиям:

$$\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{a+2b+2} = \partial_{ab} G; \quad \bar{g}_{ab+2} = 0; \quad G = e^{2x^1} f(x^2);$$
$$\bar{\varphi}^{a+2}_b = -\bar{\varphi}^a_{b+2} = \delta^a_b; \quad \bar{\varphi}^a_b = \bar{\varphi}^{a+2}_{b+2} = 0;$$
$$(A, B, C, \ldots = 1, 2, 3, 4; \; a, b = 1, 2).$$

Если положить $\varphi^I_J = \tilde{\varphi}^I_J$; $\varphi^A_B = \bar{\varphi}^A_B$; $\varphi^I_A = \varphi^A_I = 0$, то нетрудно показать, что ГП келерово пространство с почти комплексной структурой φ_j^i отлично от пространств Эйнштейна. Нетрудно показать, что в $\overline{K}$ существует векторное поле ξ_A, удовлетворяющее условию

$$\overline{\xi}_{A|B} = \overline{g}_{AB}, \tag{26}$$

знак $|$ — ковариантное дифференцирование в $\overline{K}$).

Теорема 5. *Степень подвижности ГП относительно НГПО не меньше* $(N-1)^2$.

Доказательство. Пусть в $\overline{K}$ вектор $\overline{\xi}_A$ удовлетворяет (26). Уравнения

$$\tilde{a}_{IJ\S K} = \tilde{\lambda}_{(I}\tilde{g}_{J)K} + \tilde{\lambda}_L\tilde{\varphi}^L_{(I}\tilde{\varphi}^M_{J)}\tilde{g}_{MK}; \quad \tilde{\lambda}_{I\S J} = 0; \tag{27}$$

$$\tilde{a}_{IJ} = \tilde{a}_{JI} = \tilde{a}_{KM}\tilde{\varphi}^K_I\tilde{\varphi}^M_J; \qquad \tilde{\lambda}_I \neq 0$$

(знак $\S$ — ковариантная производная в $\tilde{K}$) в соответствии с теоремой 2, вполне интегрируемы и имеют решение при любых начальных условиях $\underset{0}{\tilde{a}_{IJ}}$, $\underset{0}{\tilde{\lambda}_I}$, т. е. число независимых среди них равно $N^2 - 2N$.

Если положить $a_{AB} = sg_{AB}$, $s = \text{const}$, $a_{IJ} = \tilde{a}_{IJ}$; $a_{AI} = \overline{\xi}_A\tilde{\lambda}_I + \overline{\xi}_B\overline{\varphi}^B_A\tilde{\lambda}_J\tilde{\varphi}^J_I$; $\lambda_I = \tilde{\lambda}_I$; $\lambda_A = 0$, то уравнения (15) будут выполняться тождественно. За счет произвола постоянной s степень подвижности ГП относительно НГПО не меньше $(N-1)^2$. Теорема доказана.

Степень подвижности относительно НГПО пространств ГП (которые отличны от пространств Эйнштейна) отличается от верхней границы лакунарности, указанной в теореме 3, на число 1.

Изложенные здесь исследования, по существу, основаны на методах И. П. Егорова, разработанных им в теории движений аффинно-связных и римановых пространств [2].

В заключении хочу выразить свою искреннюю благодарность профессору Н. С. Синюкову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств.— ДАН СССР, 1966, т. 169, № 4, с. 770—772. 2. *Егоров И. П.* Движения в пространствах афинной связности.— В кн.: Учен. записки Пензенского пед. ин-та. Казань, 1965. 3. *T. Ōtsuki* and *Y. Toshiro.* On curves in Kählerian space.— Math. J. Okayama Un., 1954, vol. 4, p. 57-58. 4. *Домашев В. В., Микеш Й.* К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств.— Мат. заметки, 1978, т. 23, № 2, с. 297—304.

Поступила 16 марта 1978 г.

УДК 513

А. Д. Милка

ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ОБЩИХ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Замкнутые изометричные выпуклые поверхности в гиперболическом пространстве конгруэнтны. Этим решается известная проблема, поставленная в монографии [1] (см. также последующее замечание). Устанавливаются и другие теоремы единственности для гиперболического пространства. В частности, переносятся на рассматриваемый случай теоремы об однозначной определенности для выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве А. Д. Александрова и Е. П. Сенькина [2] — для поверхностей, закрепленных относительно точки, и А. В. Погорелова [1] — для поверхностей, закрепленных относительно плоскости.

Основные результаты работы излагаются в п. 5; они аналогичны известным для эллиптического пространства. Другие пункты работы — вспомогательные, приводятся для полноты изложения, так что п. 5, по существу, можно читать независимо. В них рассматриваются преобразования А. В. Погорелова пар изометричных объектов в пространствах с постоянной кривизной. Наряду с известными результатами приводятся и новые, представляющие самостоятельный интерес. Например, в п. 4 дается новое доказательство теоремы (см. п. 2) об условиях сохранения выпуклости регулярных поверхностей при указанных преобразованиях. Всюду под выпуклыми поверхностями, если не оговорено противное, подразумеваются общие выпуклые поверхности. Применяются терминология и обозначения, принятые в [1].

Замечание. Известные доказательства сформулированной теоремы — например, в [3; 4] — содержат ошибки. Эти доказательства опираются на принципиально неверное утверждение о возможности преобразования произвольных замкнутых неконгруентных изометричных выпуклых поверхностей в пространстве гиперболическом в такого же рода поверхности в евклидовом пространстве (подробнее см. § 2 и § 4).

1. Отображения А. В. Погорелова. Пусть E — четырехмерное векторное вещественное пространство со скалярным произведением, определяемым в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ квадратичной формой $\boldsymbol{z}^2 = \varepsilon z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, где $|\varepsilon| = 1$, $\boldsymbol{z} = z_0\boldsymbol{e}_0 + z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3$ — вектор в E. Для произведений векторов в E будем применять обозначения: скалярное $\boldsymbol{pq}$, векторное $\boldsymbol{pqr}$ и смешанное $\boldsymbol{pqrs}$ — соответственно $\varepsilon p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$,

$$\det\begin{pmatrix} \varepsilon e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \text{ и } \det\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}.$$

Свойства этих произведений считаем известными, например: $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{qrs}) = \boldsymbol{pqrs}$.

Будем интерпретировать в пространстве E эллиптическое ($\varepsilon = 1$) и гиперболическое ($\varepsilon = -1$) трехмерные пространства как полусферу $R(\boldsymbol{z}\,|\,\boldsymbol{z}^2 = \varepsilon,\ z_0 > 0)$, трехмерное евклидово — как плоскость $E_0(\boldsymbol{z}\,|\,z_0 = 0)$.

А. В. Погореловым найдены отображения, сопоставляющие пары точек $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')$ пространства R парам точек $(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'')$ пространства E_0:

$$\boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{x}' - \varepsilon \boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{x}'))/\lambda, \quad \boldsymbol{y}'' = (\boldsymbol{x}'' - \varepsilon \boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{x}''))/\lambda,$$
$$\lambda = \varepsilon \boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}''); \qquad (y)$$

$$\rho\boldsymbol{x}' = 2\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{e}_0(1 - \varepsilon\boldsymbol{y}'^2 + \varepsilon\boldsymbol{y}''^2), \quad \rho\boldsymbol{x}'' = 2\boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{e}_0(1 - \varepsilon\boldsymbol{y}''^2 + \varepsilon\boldsymbol{y}'^2),$$
$$\rho = (1 + 2\varepsilon\boldsymbol{y}'^2 + 2\varepsilon\boldsymbol{y}''^2 + (\boldsymbol{y}'^2 - \boldsymbol{y}''^2)^2)^{1/2}. \qquad (x)$$

Отображения $(\boldsymbol{y})$ и $(\boldsymbol{x})$ взаимны и обладают следующими важными свойствами: 1) если $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ описывают в R изометричные, в частности — конгруентные, множества, то таковыми будут и их (y)-образы в E_0, и обратно; 2) если соответствующие конгруентные множества в R — области, то отображения $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{y}'$, $\boldsymbol{x}'' \to \boldsymbol{y}''$ топологические и геодезические, и обратно. По этому поводу см. [1, гл. V, § 3].

Преобразования (y) и (x) сохраняют строгие неравенства между длинами соответствующих отрезков. Действительно, пусть, например, $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2'$ и $\boldsymbol{x}_1''$, $\boldsymbol{x}_2''$ — точки в R и пусть $|\boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_2'| < |\boldsymbol{x}_1'' - \boldsymbol{x}_2''|$. Тогда $(\boldsymbol{y}_1' - \boldsymbol{y}_2')^2 - (\boldsymbol{y}_1'' - \boldsymbol{y}_2'')^2 = (\boldsymbol{x}_1'/\lambda_1 - \boldsymbol{x}_2'/\lambda_2)^2 - (\boldsymbol{x}_1''/\lambda_1 - \boldsymbol{x}_2''/\lambda_2)^2 - \varepsilon(\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{x}_1'/\lambda_1 - \boldsymbol{x}_2'/\lambda_2))^2 + \varepsilon(\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{x}_1''/\lambda_1 - \boldsymbol{x}_2''/\lambda_2))^2 = 2(-\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2' + \boldsymbol{x}_1''\boldsymbol{x}_2'')/\lambda_1\lambda_2 = ((\boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_2')^2 - (\boldsymbol{x}_1'' - \boldsymbol{x}_2'')^2)/\lambda_1\lambda_2 < 0$.

Отображения (y) определены и на множествах единичной сферы в E, для которых не обязательно $x_0 > 0$. Сформулированные утверждения о свойствах $(\boldsymbol{y})$, как легко проверяется, справедливы для множеств сферы, в соответствующих точках которых $\varepsilon \boldsymbol{e}_0 \times \times (\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'') > 0$.

Отображения (x) определены в E_0 на соответствующих множествах, для которых $1 + \varepsilon(|\boldsymbol{y}'| + |\boldsymbol{y}''|) > 0$.

Приведенные неравенства дают условия для определенности отображений. В случае необходимости конкретные множества, на которых задано рассматриваемое отображение, можно расширить, продолжив соответственно отображение (y) или (x). При этом, естественно, на расширенном множестве проверяется определенность отображения; полезна формула $\rho^2 = (1 + \varepsilon(|\boldsymbol{y}'| + \boldsymbol{y}''|)^2) \times$

$(1+\varepsilon(|\boldsymbol{y}'|-|\boldsymbol{y}''|)^2)$. В рассматриваемых нами случаях в § 3 проверка нетривиальна, хотя и легко осуществляется, для (y) при $\varepsilon = 1$ и для (x) при $\varepsilon = -1$.

Отображения А. В. Погорелова можно рассматривать и для множеств, принадлежащих разным пространствам. В понятных обозначениях для соответствующих общих объектов (E', R', $\boldsymbol{e}'_0$, E'_0, $\boldsymbol{x}' \in R'$, $\boldsymbol{y}' \in E'_0$) и (E'', R'', $\boldsymbol{e}''_0$, E''_0, $\boldsymbol{x}'' \in R''$, $\boldsymbol{y}'' \in E''_0$) эти отображения записываются в виде: $\boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{x}' - \varepsilon \boldsymbol{e}'_0(\boldsymbol{e}'_0\boldsymbol{x}'))/\lambda$, $\boldsymbol{y}'' = (\boldsymbol{x}' - \varepsilon \boldsymbol{e}''_0(\boldsymbol{e}''_0\boldsymbol{x}''))/\lambda$, $\lambda = \varepsilon \boldsymbol{e}'_0\boldsymbol{x}' + \varepsilon \boldsymbol{e}''_0\boldsymbol{x}''$; $\boldsymbol{x}' = \rho(2\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{e}'_0 \times (1 - \varepsilon \boldsymbol{y}'^2 + \varepsilon \boldsymbol{y}''^2))$, $\boldsymbol{x}'' = \rho(2\boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{e}''_0(1 - \varepsilon \boldsymbol{y}''^2 + e\boldsymbol{y}'^2))$, $\rho = (1 + 2\varepsilon \boldsymbol{y}'^2 + 2\varepsilon \boldsymbol{y}''^2 + (\boldsymbol{y}'^2 - \boldsymbol{y}''^2)^2)^{1/2}$. Свойства отображений ($y$) и ($x$), сформулированные ранее, а также приведенные в следующем пункте, переносятся вместе с доказательствами на отмеченный общий случай.

2. Преобразование выпуклых поверхностей. Если $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ описывают в пространстве R изометричные поверхности F' и F'', то при определенных условиях точки $\boldsymbol{y}'$ и $\boldsymbol{y}''$ также описывают изометричные поверхности Φ' и Φ'' в E_0, и обратно [1]. Поверхности F' и Φ', а также F'' и Φ'', естественно называть соответствующими. Большое значение имеет выяснение условий, при которых из выпуклости рассматриваемых поверхностей в одном пространстве следует выпуклость их образов в другом. Эти условия, как достаточные, были получены для эллиптического пространства А. В. Погореловым [5] и для гиперболического — Г. Н. Гаюбовым [6]. Они также и необходимы, в чем непосредственно можно убедиться построением примеров. Последний факт весьма важен. Из него, например, следует, что произвольные неконгруентные изометричные выпуклые поверхности гиперболического пространства, видные из некоторой точки одинаковыми сторонами (см. ниже — определение), с помощью рассматриваемых отображений не могут быть переведены в такого же рода поверхности в евклидовом пространстве.

Определение. Будем говорить, что две выпуклые поверхности из соответствующих точек пространства *видны одинаковыми сторонами*, если поверхности к этим точкам обращены обе выпуклостью или обе вогнутостью, и *видны разными сторонами*, если одна обращена вогнутостью, другая — выпуклостью.

Замечание. Это определение существенно отличается от принятого в [1]; соответствие сторон (изометричных) выпуклых поверхностей там понимается иначе. Смешивание рассматриваемых определений недопустимо, так как ведет к неправильным толкованиям результатов [см. 3; 4; 7].

Сформулируем теорему о преобразованиях выпуклых поверхностей, объединив результаты [5] и [6] и добавив соответственно утверждение «необходимо». Для удобства, точки $\boldsymbol{e}_0 \in R$ и $O(0, 0, 0, 0) \in E_0$ временно назовем центрами. Выражение «поверхность видна из центра» будем здесь понимать в сильном смысле: лучи с началом в центре, проходящие через внутренние точки поверхности, строго ее пересекают.

Теорема 1. *Чтобы изометричные выпуклые поверхности, видные из соответствующего центра, имели своими образами при отображениях* (y), (x) *также изометричные выпуклые поверхности, в общем случае необходимы и достаточны следующие условия. При переходе из пространства большей (меньшей) кривизны в пространство с кривизной меньшей (большей) исходные выпуклые поверхности видны из центра одинаковыми (соответственно, разными) сторонами. В этих условиях из соответствующих центров разных пространств соответствующие выпуклые поверхности видны одинаковыми сторонами.*

Ввиду важности теоремы в п. 4 приводится, причем новое, ее доказательство. Оно основано на одном свойстве преобразований движений, определяемого отображениями (y) и (x), которое установлено в п. 3.

Из теоремы 1 в условиях рассматриваемых отображений для общего случая неконгруэнтных выпуклых поверхностей получаются важные следствия.

Следствие 1. *Полные выпуклые изометричные поверхности гиперболического (евклидова) пространства не переводятся в евклидово (эллиптическое) пространство в такого же рода поверхности.*

Следствие 2. *В гиперболическом или евклидовом пространстве вопрос об однозначной определенности метрикой для бесконечных выпуклых поверхностей не сводится к этому же вопросу для замкнутых выпуклых поверхностей или для выпуклых поверхностей с краем.*

Следствие 3. Теорема об однозначной определенности для замкнутых выпуклых поверхностей пространства гиперболического не сводится к этой же теореме для замкнутых выпуклых поверхностей евклидова пространства.

Второе следствие дает отрицательное решение соответствующей задачи, ставившейся в работе [3, Дополнение]; относящиеся сюда результаты статьи [7] ошибочны.

3. Вспомогательная лемма. Пусть $X', X'' \subset R$ и $Y', Y'' \subset E_0$ — конгруентные соответственно в R и E_0 открытые множества, связанные между собой отображениями (y) и (x). Расширим эти множества следующим образом. Построим в R открытый конус P' над X', содержащий центр e_0. Пусть $P'' \subset R$ — конгруентный P' конус над X'', определяемый на единичной сфере S в E соответствующим движением $X' \to X''$. Аналогично, начиная с X'', построим конус Q'' и соответствующий ему конус Q'. Множества $P' \cup Q'$ и $P'' \cup Q''$ на сфере S открыты, содержат e_0 и конгруентны. Условимся эти множества, их соответствующие точки обозначать прежними символами X', $\boldsymbol{x}'$ и X'', $\boldsymbol{x}''$. Легко устанавливается, что отображения (y) продолжаются на новые множества. Их образами при этом являются новые расширенные открытые множества Y' и Y'', содержащие O. Расширение множеств осуществимо и в обратном порядке, если начинать с Y. Далее рассматриваются только расширенные множества.

Введем в R и E_0 ориентацию, приняв в качестве «положительных» троек векторов в $\boldsymbol{e}_0$ и O соответственно тройку $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Отображения $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{y}'$, являясь топологическими и геодезическими, еще и дифференцируемы. Значит, эти отображения в соответствующих точках индуцируют невырожденные отображения касательных пространств. Следующий факт показывает, что отображения $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{x}''$ сохраняют ориентацию.

Лемма. Пусть $\boldsymbol{a}_0 \in X'$, $\boldsymbol{c}_0 \in Y'$ — точки, соответствующие при отображениях $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{y}'$. Пусть далее $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ — касательные векторы в этих точках к S и E_0, соответствующие по индексам при тех же отображениях. Тогда смешанные произведения $(\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)$ и $(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3)$ одновременно отличны от нуля и одного знака.

Доказательство. Первое утверждение леммы уже установлено. Второе, так как X' и Y' открыты и связны, достаточно проверить для случая $\boldsymbol{a}_i \equiv \boldsymbol{e}_i$. А здесь получаем:

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{c}_i/\lambda, \text{ где } \lambda > 0; \ (\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3) = (\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)/\lambda^3.$$

Лемма доказана.

Заметим, что лемма устанавливает локальное свойство попарно конгруентных множеств X', X'' и Y', Y'', которые связаны отображениями (y) и (x) и не обязательно содержат точки $\boldsymbol{e}_0$ и O. Лемма применима к случаю, когда даны совокупности векторов $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ и $(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$, $(\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3)$, определенным образом связанных отображениями (y), (x). В этих совокупностях $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0 \in R$, $\boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{d}_0 \in E_0$, и тройки векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ и $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$, $(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3)$, касательных к R и E_0 соответственно в точках $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ и $\boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{d}_0$, попарно конгруентны. Вместе с соответствующим доказательством лемма переносится на многомерное пространство, когда размерность E_0 произвольна.

4. Доказательство теоремы 1. Будем рассматривать лишь регулярные поверхности. Переход к общему случаю для эллиптического пространства изложен в [1]. Приведенные там рассуждения полностью переносятся на гиперболическое пространство. Отображения (y) и (x) исследуются аналогично, с применением леммы § 3; далее изучается только отображение (y); для полного доказательства теоремы достаточно рассмотреть одно отображение.

Пусть F', $E'' \subset R$ — изометричные строго выпуклые, видные из точки $\boldsymbol{e}_0$ поверхности, и Φ', $\Phi'' \subset E_0$ — их соответствующие (y)-образы. Найдем, например, условие для выпуклости поверхности Φ'.

Обозначим $\boldsymbol{a}_0 \in F'$, $\boldsymbol{b}_0 \in F''$ и $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_3$ соответствующие по изометрии точки и внутренние единичные нормали к поверхностям, $\boldsymbol{c}_0 \in \Phi'$ — точку, соответствующую $\boldsymbol{a}_0$, $\tilde{\boldsymbol{c}}_3$ — некоторый нормальный вектор к Φ' в $\boldsymbol{c}_0$. Пусть $\overline{\alpha}'$ и α'' — произвольные соответствующие по изометрии направления на F' и F'' в $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{b}_0$, а $k' > 0$ и $k'' \geq 0$ — нормальные кривизны поверхностей, отвечающие этим направлениям. Знак нормального приращения $\tilde{\boldsymbol{c}}_3\Delta\boldsymbol{y}'$ радиуса-вектора поверхности Φ' в точке $\boldsymbol{c}_0$ при смещении, соответствующем направлениям α, совпадает со знаком выражения $k'(\boldsymbol{a}_3 - \varepsilon\boldsymbol{c}_0 \times (\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a}_3))\tilde{\boldsymbol{c}}_3 + k''(-\varepsilon(\boldsymbol{c}_0\tilde{\boldsymbol{c}}_3)(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{b}_3)) \equiv k'A + k''B$.

Выберем в точке $\boldsymbol{a}_0$ независимые векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, касательные к F', такие, что $\boldsymbol{a}_3 = (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2)$. Пусть $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ — касательные к F'' векторы, соответствующие по изометрии $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, и $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ — касательные к Φ' векторы, образы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ при отображении (y'), $\boldsymbol{c}_3$ — (y')-образ $\boldsymbol{a}_3$. Положим $\tilde{\boldsymbol{c}}_3 = (\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2)$. Имеем соотношения $\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{a}_0/\lambda + \boldsymbol{e}_0\,(\divideontimes)$: $\quad \boldsymbol{c}_i = (\boldsymbol{a}_i\lambda - \varepsilon\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{b}_i))/\lambda^2 + \boldsymbol{e}_0\,(\divideontimes)$, где $\lambda > 0$; $i = 1, 2, 3$ и $(\divideontimes)$ — скалярные величины; $A + B = \lambda\boldsymbol{c}_3\tilde{\boldsymbol{c}}_3 = \lambda(\boldsymbol{c}_3\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2)$; $(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_3^2 = 1 > 0$. Применяя к системам векторов $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ и их $\boldsymbol{y}$-образов лемму § 3, находим $A + B > 0$.

Заменим в R в паре изометричных поверхностей F' и F'' поверхность F'' ее зеркальным образом $\overline{F}''$ по отношению к касательной к этой поверхности плоскости в точке $\boldsymbol{b}_0$; введем также (y) — преобразования соответствующих изометричных поверхностей F', $\overline{F}''$. Повторяя для новых поверхностей, для точек $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ и нормалей $\boldsymbol{a}_3$, $-\boldsymbol{b}_3$ проведенные рассуждения, вводя те же векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, получаем $A - B > 0$.

Следовательно, $A > 0$, и для выпуклости исходной поверхности Φ' в общем случае необходимо и достаточно лишь выполнение неравенства $B > 0$. Имеем $\boldsymbol{c}_0\tilde{\boldsymbol{c}}_3 = -(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a}_3)/\lambda^3$, $B = \varepsilon(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a}_3) \times (\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{b}_3)/\lambda^3$.

Случай $\varepsilon = 1$. $B > 0 \sim (\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{b}_3)$ одного знака $\sim$ поверхности F' и F'' из точки $\boldsymbol{e}_0$ видны в R одинаковыми сторонами.

Случай $\varepsilon = -1$. $B > 0 \sim (\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{b}_3)$ разных знаков $\sim$ поверхности F' и F'' из точки $\boldsymbol{e}_0$ видны в R разными сторонами.

Тем самым найдены условия для выпуклости поверхности Φ'. При выполнении этих условий (при выборе $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, когда $\boldsymbol{a}_3 = (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2)$, вектор $\tilde{\boldsymbol{c}}_3$ — внутренняя нормаль к Φ') поверхность F' в R к точке $\boldsymbol{e}_0$ и поверхность Φ' в E_0 к точке O обращены одинаковыми сторонами; поверхность Φ'' — также выпуклая. Неравенство $A + B > 0$ показывает, что конгруентные выпуклые поверхности в R при отображении (y) переходят в E_0 в выпуклые поверхности. Теорема доказана.

Теорема 1 для гладких поверхностей просто переносится на многомерное пространство, причем — вместе с соответствующими доказательствами, которые в данном случае значительно сокращаются и переписываются почти дословно (см. последующее замечание; здесь также нет необходимости отдельно рассматривать регулярные поверхности: ср. [8: 9]).

Подчеркнем, что основой приведенного доказательства, по существу, служит следующее предложение [5; 6], которое мы назовем леммой А. В. Погорелова:

Лемма. *Пусть τ', $\tau'' \subset R$ и γ', $\gamma'' \subset E_0$ — попарно изометричные плоскости в R и E_0, связанные между собой отображениями (y) и (x), $\boldsymbol{a}_0 \in \tau'$, $\boldsymbol{b}_0 \in \tau''$ и $\boldsymbol{c}_0 \in \gamma'$, $\boldsymbol{d}_0 \in \gamma''$ — соответствующие при этом точки, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ — произвольно заданные нормали соответственно к τ', τ'' и γ', γ''. Тогда выражения $\boldsymbol{ac} - \varepsilon(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c})$, $-\varepsilon(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c})$ — одного знака, если τ', τ'' обращены в R к $\boldsymbol{e}_0$ при $\varepsilon = 1$ одинаковыми, а при $\varepsilon = -1$ разными сторонами.* Аналогично (и *эквивалентно!): если γ', γ'' обращены в E_0 к O при $\varepsilon = 1$ разными, а при $\varepsilon = -1$ одинаковыми сторонами, то выражения $\boldsymbol{ac} - \varepsilon(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c})$; $\varepsilon(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a})(\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{d})$ — одного знака.*

Заметим, что нормали к τ, а также к γ, определяют стороны соответствующих изометричных плоскостей, которые и естественно называть одинаковыми. Лемма А. В. Погорелова имеет место и в многомерном пространстве.

Замечание. Небезынтересно, что в общем случае, когда $\dim E > 4$, результат вытекает из справедливости леммы в $\dim E_0 = 3$. Докажем это для первого, соответствующего отображению (y), утверждения леммы. Подчеркнем, что в этом утверждении плоскость γ' и связанные с ней векторы не фигурируют.

Пусть $E' \subset E$ — четырехмерное линейное подпространство, определяемое векторами $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{c}$. Пусть далее $E_0' = E_0 \cap E'$; $\bar{\tau}' = \tau' \cap E'$; $\bar{\tau}''$ — образ $\bar{\tau}'$ по изометрии $\tau' \leftrightarrow \tau''$; $\bar{\gamma}'$ — (y')-образ $\bar{\tau}'$; $E'' \subset E$ — четырехмерное линейное подпространство, содержащее $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}$ и $\bar{\tau}''$; $\boldsymbol{e}_0'' \in E''$ — единичный вектор, коллинеарный с проекцией $\boldsymbol{e}_0$ на E_0''. Очевидно, $\boldsymbol{c}_0 \in \bar{\gamma}'$, $\bar{\gamma}' \subset E_0'$, $\boldsymbol{c}_3$ — нормаль к $\bar{\gamma}'$, $\boldsymbol{e}_0''\boldsymbol{b} \neq 0$, знаки $\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}_0''\boldsymbol{b}$ совпадают, поскольку плоскость τ'' видна из точки $\boldsymbol{e}_0$. Теперь рассматриваемое утверждение следует из его справедливости для пространств E' и E'' у которых $\dim E_0' = \dim E_0'' = 3$, причем в E'' роль вектора $\boldsymbol{e}_0$ играет $\boldsymbol{e}_0''$.

5. Основные результаты. Здесь приводятся общие теоремы об однозначной определенности метрикой для ограниченных выпуклых поверхностей в гиперболическом пространстве R.

Теорема 2. *Пусть F', $F'' \subset R$ — выпуклые изометричные поверхности, видные из некоторой точки $\boldsymbol{e}$ одинаковыми сторонами. Тогда, если $\boldsymbol{e}$ не принадлежит внутренности выпуклой оболочки ни одной из поверхностей и если соответствующие по изометрии точки границ поверхностей одинаково отстоят от $\boldsymbol{e}$, то F' и F'' конгруентны.*

Теорема 3. *Замкнутые изометричные выпуклые поверхности в гиперболическом пространстве конгруентны.*

Теорема 4. *Пусть F', $F'' \subset R$ — изометричные выпуклые поверхности, обращенные к некоторой орисфере S одинаковыми сторонами. Тогда, если соответствующие по изометрии точки* *границ поверхностей одинаково отстоят от S, то F' и F'' конгруентны.*

Теорема 5. *Выпуклые изометричные шапки в гиперболическом пространстве конгруентны.*

Теорема 6. *Пусть F', $F'' \subset R$ — выпуклые изометричные поверхности, обращенные к некоторой плоскости τ одинаковыми сторонами. Тогда, если соответствующие по изометрии точки границ поверхностей одинаково отстоят от τ, то F' и F'' конгруентны.*

Теорема 3,4 и 4,5 в определенном смысле — крайние случаи соответственно теорем 2 и 6. Зависимость между теоремами: $2 \supset \supset 3$, $6 \supset 5$, $2 \to 4$, $6 \to 4$, $3 \to 5$. Теорема 6 устанавливается тем же методом, существенно опирающимся на теорему 3, что и аналогичный результат в евклидовом пространстве [1]. В классе выпуклых поверхностей с ограниченной удельной кривизной теорема 5 и теорема 4 для орисферных шапок были получены И. А. Данеличем [10]. Теорема 2 для регулярных поверхностей и для многогранников в любом пространстве с постоянной кривизной устанавливалась в [2]. Распространение этого результата на общие выпуклые поверхности, исключая случай гиперболического пространства, дано в [5].

Доказательство теоремы 2. Пусть F', F'' не конгруентны. Тогда существуют точки e' $e'' \in R$ — полюсы, из которых поверхности видны одинаковыми сторонами, и точки $x'_0 \in F'$, $x''_0 \in F''$ — точки вложения, которые соответствуют по изометрии $F' \leftrightarrow F''$, такие, что с точностью до нумерации поверхностей для точек x_0 и любых соответствующих по изометрии точек $x \in F$ выполняются соотношения $e'x'_0 = e''x''_0$; $\varepsilon e'_0 x' < \varepsilon e_0 x''$, $x = x_0$. Можно сказать, что поверхности F по отношению к точкам e в окрестностях точек x_0 строго вкладываются друг в друга.

Сформулированное утверждение, как промежуточный результат, для не обязательно строгого вложения доказывалось в [2]. Существование строгого вложения устанавливается просто. Множество полюсов F'' представляет собой поверхность, которой в каждой точке касается сфера с центром в соответствующей точке вложения. Это утверждение основывается на геометрическом методе построения полюсов, изложенном в [2]. С учетом результата Ю. Г. Решетняка [11], почти все точки такой поверхности являются гладкими. А точка вложения, отвечающая гладкому полюсу — единственная.

Можно принять, что $e'_0 \equiv e_0 \equiv e''_0$. Заменим в R в паре F', F'' поверхность F''ей симметричной $\bar{F}''$ по отношению к точке x''_0. Так же отразим точку e''_0 и обозначим через g ее образ. В малых окрестностях точки x_0 из точки e_0 поверхности F', $\bar{F}''$ видны разными сторонами. Применим к этим окрестностям, точнее к их объединениям соответственно с e_0 и g, преобразования (y). Обозначим Φ', $\Phi'' \subset E_0$ соответствующие образы окрестностей и $O = y'(e_0)$, $H = y''(g)$, $y_0' = y'(x_0) = y''(x_0) = y_0''$. Учитывая теорему 1, находим, что выпуклые изометричные поверхности Φ' и Φ'' по отношению к точкам O и H, из которых они видны одинаковыми сторонами, в окрестностях точек y_0' и y_0'' в рассмотренном ранее смысле строго вкладываются друг в друга. Но это противоречит принципу максимума А. В. Погорелова. Значит, F' и F'' конгруентны. Отметим, что для бесконечных выпуклых поверхностей в гиперболическом пространстве некоторые теоремы об однозначной определенности метрикой, также основывающиеся на теореме 1, получены в работе [12].

Список литературы: 1. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., Наука, 1969. 759 с. 2. *Александров А. Д., Сенькин Е. П.* О неизгибаемости выпуклых поверхностей.—Вестн. ЛГУ, 1955, № 8, с. 3—13; Дополнение.—Вестн. ЛГУ, 1956, № 1, с. 105—106. 3. *Гаюбов Г. Н.* Однозначная определенность поверхностей в пространстве Лобачевского.— Науч. труды Ташкентского ун-та, 1970, вып. 394, с. 52—62. 4. *Зубков А. Н.* Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей пространства Лобачевского/Ростов-н/Д ун-т, 1978 (Депон. ВИНИТИ, 1978, 14 июля, № 2392—78). 5. *Погорелов А. В.* Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве, Харьков, Изд-во Харк. ун-та, 1960. 92 с. 6. *Гаюбов Г. Н.* Изометрическое преобразование поверхностей в гиперболическом пространстве.— Науч. труды Ташкентского ун-та, 1963, вып. 228, с. 17—32. 7. *Зубков А. Н.* Об однозначной определенности общих бесконечных выпуклых поверхностей евклидова пространства.— Czechosl. Math. J., 1978, vol. 28 (103), p. 87-101. 8. *Carmo M. P.* do *Warner F. W.* Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres.— J. Dif. Geom., 1970, vol 4, p. 133-144. 9. *Горзий Т. А.* Однозначная определенность гладких выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства.— Укр. геометр. сборник. Харьков, 1974, вып. 15. с. 36—42. 10. *Данелич И. А.* Однозначная определенность некоторых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского.— ДАН СССР, 1957, т. 115, № 2. 11. *Решетняк Ю. Г.* Об одном обобщении выпуклых поверхностей.— Мат. сборник, 1956, т. 40 (82), вып. 3, с. 381—398. 12. *Гаюбов Г. Н.* Однозначная определенность бесконечных поверхностей в гиперболическом пространстве,— Науч. труды Ташкентского ун-та, 1963, вып. 228, с. 11—16.

Поступила 25 декабря 1978 г.

УДК 513

В. И. Мягков

H/K-РАССЛОЕНИЕ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ В НОРМАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ

Базисной поверхностью нормальной конгруэнции называется поверхность σ, нормали к которой составляют заданную конгруэнцию K_2. Так как для нормальной конгруэнции существует однопараметрическая совокупность параллельных поверхностей, ортогональных к лучам этой конгруэнции, то в качестве базисной поверхности мы будем выбирать ту поверхность этого семейства, которая обладает заранее предписанным свойством.

Всегда можно начать с построения поверхности σ, обладающей нужным свойством. Нормали к этой поверхности образуют конгруэнцию K_2, базисной поверхность которой и будет σ.

Будем искать в трехмерном евклидовом пространстве комплекс $\sum$, содержащий двупараметрическую совокупность нормальных конгруэнций

$$K_2 = K_2(c_1, c_2) \tag{0.1}$$

таких, что базисная поверхность

$$\sigma = \sigma(c_1, c_2) \tag{0.2}$$

каждой нормальной конгруэнции обладает таким свойством: отношение H/K средней кривизны поверхности к ее полной кривизне не определяется только параметрами луча комплекса, ортогонально пересекающего эту поверхность, и не зависит от постоянных c_1, c_2. Иными словами, если зафиксировать луч комплекса, то все те поверхности семейства $\sigma = \sigma(c_1, c_2)$, которые ортогонально пересекают этот луч, в точках пересечения с ним имеют одно и то же отношение средней кривизны к полной. Можно показать, что в общем случае фиксированный луч ортогонален однопараметрической совокупности поверхностей семейства (0.2).

Полагая в (0.1), (0.2) $c_2 = \psi(c_1)$, получим функциональное расслоение (ψ — произвольная функция) комплекса $\sum$ в однопараметрическую совокупность нормальных конгруэнций

$$K_2 = K_2(c_1, \psi(c_1)) \tag{0.3}$$

с базисными поверхностями

$$\sigma = \sigma(c_1, \psi(c_1)). \tag{0.4}$$

Отношение средней кривизны H к полной кривизне K поверхности (0.4) не зависит ни от выбора этого расслоения (т. е. от функции ψ), ни от параметра c_1, т. е.

$$H/K = H/K(u, v, \theta), \tag{0.5}$$

где u, v, θ — параметры луча комплекса, ортогонального к поверхности (0.4).

Такое функциональное (ψ — произвольная функция) расслоение комплекса в нормальные конгруэнции (0.3) с базисными поверхностями (0.4), подчиненными условию (0.5), называется H/K-расслоением.

В настоящей работе поставлена и полностью решена

Задача. Найти в E_3 все комплексы, допускающие H/K-расслоение, и расслоить их в нормальные конгруэнции.

§ 1. Дифференциальные уравнения комплекса, допускающего *H*/*K*-расслоение. Присоединим к каждой точке A евклидова пространства произвольные ортогональные тройки единичных векторов e_i. Деривационные уравнения Френе — Картана имеют вид

$$dA = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j. \tag{1.1}$$

дифференциальные формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют условию $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ и уравнениям структуры евклидова пространства $D\omega^i = [\omega^k\omega_k^i]$; $D\omega_i^j = [\omega_i^k\omega_k^j]$.

Уравнения комплекса прямых, отнесенного к нормальному сопровождающему трехграннику [1], имеют вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1;\ \omega_1^2 = p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2; \quad dk = \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2; \quad -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \tag{1.2}$$

Расслоение комплекса в нормальные конгруэнции задается системой

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2; \tag{1.3}$$

$$\omega^3 + dt = 0. \tag{1.4}$$

Если эта система вполне интегрируема, то точка $M = A + te_3$ описывает базисную поверхность σ нормальной расслаивающей конгруэнции, заданной уравнениями (1.3), (1.4). Средняя и полная кривизны поверхности σ определяются по формулам

$$H = -\frac{1}{2}\frac{2t + a}{t^2 + at - k^2};\ K = \frac{1}{t^2 + at - k^2}. \tag{1.5}$$

Формулы (1.2)—(1.5) взяты из монографии Н. И. Кованцова [1] и из статей [2; [3; 4].

Введем обозначение $W = H/K$. Из (1.5) найдем

$$W = -t - a/2. \tag{1.6}$$

Поскольку при H/K-расслоении W есть некоторая функция параметров, определяющих положение луча комплекса, то

$$dW = l\omega^1 + m\omega_3^1 + n\omega_3^2, \tag{1.7}$$

где l, m, n — некоторые функции указанных параметров.

Из (1.6) определим

$$a = -2W - 2t \tag{1.8}$$

и внесем его в (1.3).

Потребуем полной интегрируемости уравнений расслоения. Используя (1.2) и (1.7), результат внешнего дифференцирования системы (1.3), (1.4) можно представить в виде

$$[\omega_3^1\omega_3^2]\{t^2(4p) + t(8pW - 4\alpha) + (4pW^2 - 4\alpha W + k^2p + 2k\beta + r + q + 2kl + 2n)\} = 0. \tag{1.9}$$

Формы ω_3^1 и ω_3^2 линейно независимы. Поскольку выражение (1.9) должно быть тождественным нулем, то стоящий в фигурных скобках квадратный трехчлен должен быть равен нулю при всех значениях t. Отсюда следует

$$p = 0;\ \alpha = 0;\ n = -k\beta - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}q - kl. \tag{1.10}$$

Таким образом, задача о H/K-расслоении сводится к исследованию совместности системы уравнений

$$\omega^2 = k\omega^1_3;\ \omega^2_1 = \beta\omega^2_3;\ dk = q\omega^1_3 + \gamma\omega^2_3;$$

$$-\omega^3 + k\omega^2_1 = \beta\omega^1 + \gamma\omega^1_3 + r\omega^2_3; \tag{1.11}$$

$$dW = l\omega^1 + m\omega^1_3 + \left(-k\beta - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}q - kl\right)\omega^2_3. \tag{1.12}$$

Система четырех уравнений (1.11) служит для определения искомого комплекса, а уравнение (1.12) определяет вид H/K-расслоения комплекса (1.11). Продифференцируем внешним образом три последних уравнения (1.11) и раскроем результат по лемме Картана. Получим четыре новых формы

$$d\beta = (-1 - \beta^2)\,\omega^1_3 + y_1\omega^2_3;\ \ dq = y_2\omega^1_3 + (y_3 + \gamma\beta)\,\omega^2_3;\quad d\gamma = y_3\omega^1_3 +$$
$$+ y_4\omega^2_3;\ dr = y_1\omega^1 + (q\beta + 2k\beta^2 - 2\beta r + y_4)\,\omega^1_3 + y_5\omega^2_3 \tag{1.13}$$

и пять новых параметров продолжения y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Следуя известному методу [5], заключаем, что система (1.11), (1.13) в инволюции. Произвол существования решения — одна функция двух аргументов. Внешнее дифференцирование равенства (1.12) не дает никаких ограничений на параметры продолжения y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Равенством (1.12) функция W определяется с произволом в одну функцию двух аргументов.

Таким образом, комплексы, допускающие H/K-расслоение, существуют с произволом в одну функцию двух аргументов и определяются системой (1.11), (1.13).

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $D\omega^1_3 \equiv 0$, $D\left(\sqrt{1+\beta^2}\,\omega^2_3\right) \equiv 0$, т. е. две дифференциальные формы ω^1_3 и $\sqrt{1+\beta^2}\,\omega^2_3$ являются полными дифференциалами. Введем обозначения

$$\omega^1_3 = du;\ \sqrt{1+\beta^2}\,\omega^2_3 = d\theta. \tag{1.14}$$

При построении цепи интегральных элементов [6] на первом шаге считаем $\omega^1 = 0$, $\omega^1_3 \neq 0$, $\omega^2_3 = 0$.

Каждая из функций y_1, y_3, y_4, y_5 определяется с произволом в одну функцию одного аргумента, именно, аргумента θ. При $\theta =$ $=$ const из первого уравнения (1.13) получим

$$\beta = -\mathrm{tg}\,(u + c). \tag{1.15}$$

При каждом фиксированном θ величина c есть некоторая постоянная. Поэтому для всех лучей комплекса нужно считать c некоторой функцией одного аргумента θ, которую обозначим $f_1(\theta)$. (1.15) принимает вид

$$\beta = -\mathrm{tg}\,(u + f_1(\theta)) \tag{1.16}$$

$f_1(\theta)$ является произвольной функцией). Продифференцировав (1.16), получим

$$d\beta = -\frac{1}{\cos^2(u+f_1(\theta))}\,du - \frac{f_1'(\theta)}{\cos^2(u+f_1(\theta))}\,d\theta, \qquad (1.17)$$

Используя (1.16), запишем (1.14) в виде

$$\omega_3^1 = du;\ \omega_3^2 = -\cos(u+f_1(\theta))\,d\theta. \qquad (1.18)$$

Здесь и всюду в дальнейшем мы считаем, что $\cos(u+f_1(\theta)) < 0$). Сравнивая (1.17) с первым уравнением (1.13) и учитывая (1.18), получим

$$y_1 = \frac{f_1'(\theta)}{\cos^3(u+f_1(\theta))}\,.$$

Но y_1 определяется с произволом в одну функцию одного аргумента θ. Этой произвольной функцией и будет $f_1(\theta)$.

На втором шаге принимаем $\omega^1 = 0$; $du \neq 0$; $d\theta \neq 0$. Функция y_2 определяется с произволом в одну функцию двух аргументов. Аргументами являются u и θ. Но из второго уравнения (1.13) можно легко получить, что y_2 есть некоторая функция, зависящая только от u и от θ. Поэтому само $y_2 = \varphi(u, \theta)$ можно считать этой произвольной функцией. Исходя из второго уравнения (1.13), определим

$$q = \int \varphi(u, \theta)\,du + f_3(\theta). \qquad (1.19)$$

Здесь $f_3(\theta)$ — произвольная функция, которая входит в определение y_3. Из третьего уравнения (1.11) определим

$$k = \iint \varphi(u, \theta)\,du\,du + uf_3(\theta) + f_4(\theta), \qquad (1.20)$$

где $f_4(\theta)$ — произвольная функция, входящая в определение y_4.

Продифференцируем (1.20) по θ. Используя третье равенство (1.11) и соотношение (1.18), получим

$$\gamma = \frac{\iint \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,du\,du + uf_3' + f_4'}{-\cos(u+f_1)}\,. \qquad (1.21)$$

Если теперь, используя найденные значения β, q, k, γ, из второго равенства (1.13) определим y_3 и продифференцируем (1.21) по u, то получим $y_3 \equiv \gamma_u$. Используя (1.13), (1.21), определим

$$y_4 = \frac{1}{\cos^2(u+f_1)}\left(\iint \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\,du\,du + uf_3'' + f_4''\right) + \\ + \frac{\sin(u+f_1)}{\cos^3(u+f_1)}\left(\iint \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,du\,du + uf_3' + f_4'\right).$$

Для определения функции r необходимо выделить дифференциал третьего параметра луча комплекса (1.11). Его выделение только из уравнений комплекса (1.11), (1.13) представляется значительно более сложным, чем выделение дифференциалов du и $d\theta$ (1.14). Эти трудности можно обойти, рассматривая уравнения комплекса геометрически, т. е. дав безынтегральное представление искомого комплекса. Затем можно ввести параметр v и, используя свойства нормального сопровождающего трехгранника луча комплекса, определить функцию r. Поскольку при этом четвертое уравнение системы (1.13) не будет использовано, нужно проверить, удовлетворяет ли ему найденная функция r.

§ 2. Безынтегральное представление комплекса (1.11), (1.13). Введем в рассмотрение тройку векторов

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_1 \cos(u + f_1) + \boldsymbol{e}_3 \sin(u + f_1); \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1 \sin(u + f_1) - \boldsymbol{e}_3 \cos(u + f_1); \ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_2. \tag{2.1}$$

Из (2.1) вытекает, что $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ имеют одинаковую ориентацию. Решим (2.1) относительно $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{k} \cos(u + f_1) + \boldsymbol{i} \sin(u + f_1); \ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}; \ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k} \sin(u + f_1) - \boldsymbol{i} \cos(u + f_1). \tag{2.2}$$

Определим дифференциал вектора $\boldsymbol{k}$:

$$d\boldsymbol{k} = d\boldsymbol{e}_1 \cos(u + f_1) - \boldsymbol{e}_1 \sin(u + f_1)(du + f_1' d\theta) + d\boldsymbol{e}_3 \sin(u + f_1) + \boldsymbol{e}_3 \cos(u + f_1)(du + f_1' d\theta). \tag{2.3}$$

Воспользовавшись деривационными уравнениями (1.1), уравнениями (1.11) и (1.18), перепишем (2.3) в виде $d\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{e}_1 \sin(u + f_1) \times f_1' d\theta + \boldsymbol{e}_3 \cos(u + f_1) f_1' d\theta$. Заменяя векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$ по формулам (2.2), получим

$$d\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} f_1' d\theta. \tag{2.4}$$

Легко убедиться в том, что дифференциалы остальных двух векторов (2.1) можно представить в виде

$$d\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} f_1' d\theta + \boldsymbol{j} d\theta; \tag{2.5}$$

$$d\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} d\theta. \tag{2.6}$$

Формально присоединим к уравнениям (2.4)—(2.6) уравнение

$$d\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{k} d\theta. \tag{2.7}$$

Системой (2.7), (2.4)—(2.6) в пространстве задается некоторая кривая, которую мы обозначим L_1. Параметр θ является длиной дуги кривой L_1. Кривизна этой кривой равна $-f_1'$, а кручение тождественно равно единице. Векторы $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ образуют подвижный трехгранник Френе этой кривой.

Общее смещение центра $\boldsymbol{A}$ луча комплекса (1.11), (1.13) $d\boldsymbol{A} = \omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2 + \omega^3 \boldsymbol{e}_3$, используя равенства (1.11), (1.18) и (2.2), можно представить в виде $dA = \boldsymbol{i}\{\gamma\cos(u+f_1)\,du + (k\beta - r)\times$ $\times\cos^2(u+f_1)\,d\theta\} + \boldsymbol{j}\{kdu\} + \boldsymbol{k}\left\{\omega^1\frac{1}{\cos(u+f_1)} - \gamma\sin(u+f_1)\,du - \right.$ $\left.-(k\beta - r)\cos(u+f_1)\sin(u+f_1)\,d\theta\right\}$.

При

$$\omega^1 = 0,\ u = 0 \tag{2.8}$$

точка A описывает в пространстве однопараметрическую совокупность некоторых кривых. Рассмотрим одну из них (обозначим ее L_2). Бесконечно малое перемещение точки A по кривой L_2 представим в виде $dA = (k\beta - r)\cos f_1(\boldsymbol{i}\cos f_1 - \boldsymbol{k}\sin f_1)\,d\theta$. Так как вдоль кривой L_2 имеет место (2.8), то функции k, β и r на этой кривой будут зависеть только от одного аргумента θ. Характер этой зависимости пока не известен для функций k и β, но известно, что r определяется с произволом в одну функцию одного аргумента θ. Поэтому можем считать, что вдоль кривой L_2 $k\beta - r = -f_2(\theta)$, где $f_2(\theta)$ — произвольная функция. Интегрируя векторное уравнение

$$dM_2(\theta) = -f_2(\theta)\cos f_1[\boldsymbol{i}\cos f_1 - \boldsymbol{k}\sin f_1]\,d\theta, \tag{2.9}$$

получим уравнение кривой L_2: $\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_2(\theta)$. При $\theta = \mathrm{const}$ центр луча комплекса описывает некоторую поверхность, которую обозначим $\sigma_1(\theta)$. Общее смещение точки A по поверхности $\sigma_1(\theta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} dA = \boldsymbol{i}\{\gamma\cos(u+f_1)\,du\} + \boldsymbol{j}\{kdu\} + \\ + \boldsymbol{k}\left\{\omega^1\frac{1}{\cos(u+f_1)} - \gamma\sin(u+f_1)\,du\right\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

(векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ сейчас постоянны).

Если в (2.10) подставить $u = \mathrm{const}$, то получим, что поверхность $\sigma_1(\theta)$ является цилиндром с образующими, параллельными вектору $\boldsymbol{k}(\theta)$. Направляющей такого цилиндра служит кривая (обозначим $L_3(\theta)$), проходящая через точку $\boldsymbol{M}_2(\theta)$ кривой L_2. Определим теперь форму кривой L_3. Для этого на смещение (2.10) точки A по цилиндру $\sigma_1(\theta)$ надо наложить ограничение

$$\omega^1\frac{1}{\cos(u+f_1)} - \gamma\sin(u+f_1)\,du = 0,$$

означающее, что смещение в направлении вектора $\boldsymbol{k}$ равно нулю, и проинтегрировать уравнение

$$dA = \boldsymbol{i}\gamma\cos(u+f_1)\,du + \boldsymbol{j}kdu. \tag{2.11}$$

Заменяя γ и k их найденными значениями по формулам (1.20) и (1.21), а также учитывая, что сейчас $\theta = \mathrm{const}$, представим результат интегрирования (2.11) в виде двух скалярных равенств

$$x = -\int_0^u\left[\iint\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,du\,du + uf_3' + f_4'\right]du; \tag{2.12}$$

$$y = \int_0^u \left[\iint \varphi\, du du + uf_3 + f_4\right] du. \tag{2.13}$$

Вообще говоря, при интегрировании (2.11) возникает две постоянные интегрирования, но их выбор в (2.12), (2.13) однозначно определен условием пересечения кривой $L_3(\theta)$ с кривой L_2 в точке $M_2(\theta)$ и условием $u \equiv 0$ вдоль всей кривой L_2.

Теперь можно дать безынтегральное представление комплекса (1.11), (1.13). Чтобы построить комплекс (1.11), (1.13), возьмем в пространстве кривую L_1 (произвол — одна функция одного аргумента: $f_1(\theta)$). Кривизна кривой $k = -f_1'(\theta)$, кручение $\varkappa \equiv 1$, θ — длина дуги. Векторы $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ образуют ее сопровождающий трехгранник Френе. Построим кривую L_2 (см. (2.9), произвол — одна функция одного аргумента: $f_2(\theta)$). К каждой точке $M_2(\theta)$ кривой L_2 присоединим сопровождающий трехгранник $\boldsymbol{k}(\theta)$, $\boldsymbol{i}(\theta)$, $\boldsymbol{j}(\theta)$ кривой L_1. В плоскости $M_2(\theta)$, $\boldsymbol{i}(\theta)$, $\boldsymbol{j}(\theta)$ построим кривую $L_3(\theta)$, заданную параметрическими уравнениями (2.12), (2.13) (произвол — одна функция двух аргументов $\varphi(u, \theta)$ и две функции одного аргумента $f_3(\theta)$, $f_4(\theta)$). Строим цилиндр $\sigma_1(\theta)$, образующие которого параллельны вектору $\boldsymbol{k}(\theta)$, а направляющей служит кривая $L_3(\theta)$. Через каждую образующую цилиндра $\sigma_1(\theta)$ в направлении вектора $\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{i}\cos(u + f_1) + \boldsymbol{k}\sin(u + f_1)$ проводим пучок параллельных прямых. Совокупность всех таких пучков, построенных для каждой образующей каждого цилиндра $\sigma_1(\theta)$, и составляет комплекс (1.11), (1.13). Для удобства этот комплекс обозначим через Σ_1. Чтобы доказать правильность такого безынтегрального представления, необходимо, отправляясь от геометрического задания комплекса Σ_1, составить систему его дифференциальных уравнений и убедиться, что она совпадает с системой (1.11), (1.13).

Итак, пусть нам дан комплекс Σ_1. Каждую точку $\boldsymbol{A}$, лежащую на цилиндре $\sigma_1(\theta)$, мы можем определить тремя параметрами u, v, θ. Параметр θ определяет цилиндр $\sigma_1(\theta)$, u служит для определения образующей этого цилиндра. Пусть v является расстоянием от точки $\boldsymbol{A}$ до плоскости $M_2(\theta)$, $\boldsymbol{i}(\theta)$, $\boldsymbol{j}(\theta)$. Прямую комплекса Σ_1, проходящую через точку $\boldsymbol{A}(u, v, \theta)$, будем обозначать $\boldsymbol{l}(u, v, \theta)$. К каждой точке $\boldsymbol{A}(u, v, \theta)$ присоединим тройку векторов (2.2). Положение точки $\boldsymbol{A}$ определяется равенством

$$\boldsymbol{A}(u, v, \theta) = \boldsymbol{M}_2(\theta) + \boldsymbol{i}(\theta)\, x(u, \theta) + \boldsymbol{j}(\theta)\, y(u, \theta) + \boldsymbol{k}(\theta)\, v. \tag{2.14}$$

Функции $x(u, \theta)$ и $y(u, \theta)$ определяются равенствами (2.12), (2.13). Используя (2.4)—(2.6), (2.9), (2.12), (2.13), бесконечно малое смещение точки A можно представить в виде

$$d\boldsymbol{A} = \Omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \Omega^2 \boldsymbol{e}_2 + \Omega^3 \boldsymbol{e}_3, \tag{2.15}$$

где $\Omega^1 = \sin(u + f_1)(-f_2\cos^2 f_1 d\theta + dx + y d\theta - v f_1' d\theta) + \cos(u + f_1)(f_2 \sin f_1 \cos f_1\, d\theta + x f_1' d\theta + dv)$; $\Omega^2 = x d\theta + du$; $\Omega^3 = \cos(u +$

$+ f_1)((f_2 - \cos f_1)d\theta - dx + yd\theta + vf_1 d\theta) + \sin(u + f_1)((f_2 - \sin f_1 \cos f_1)d\theta + xf_1' d\theta + dv)$. Используя (2.12), (2.13), для формы Ω^2 получим следующее выражение:

$$\Omega^2 = \left[\iint \varphi\, du du + uf_3 + f_4\right] du. \tag{2.16}$$

Определим дифференциалы векторов e_2 и e_3. Используя равенства (2.2), (2.4)—(2.6) и (2.1), получим $de_2 = -e_1 \sin(u + f_1)\, d\theta - e_3 \times \cos(u + f_1)\, d\theta$; $de_3 = e_1 du - e_2 \cos(u + f_1)\, d\theta$. Дифференциалы этих же самых векторов можно записать так: $de_2 = \Omega_2^1 e_1 + \Omega_2^3 e_3$; $de_3 = \Omega_3^1 e_1 + \Omega_3^2 e_2$. Сравнивая между собой последние две пары равенств, получим

$$\Omega_3^1 = du; \tag{2.17}$$

$$\Omega_1^2 = \sin(u + f_1)\, d\theta;\ \Omega_3^2 = -\cos(u + f_1)\, d\theta. \tag{2.18}$$

Формы (2.16) и (2.17) для всех лучей комплекса Σ_1 пропорциональны, так как они выражаются через один дифференциал du. Обозначим коэффициент этой пропорциональности через k^*

$$\Omega^2 = k^* \Omega_3^1. \tag{2.19}$$

Но равенство (2.19) означает [1], что точка A является центром луча комплекса Σ_1, а векторы e_1, e_2, e_3 образуют нормальный трехгранник этого луча. Из равенств (2.18) аналогично предыдущему получим

$$\Omega_1^2 = \beta^* \Omega_3^2. \tag{2.20}$$

Используя уравнения структуры евклидова пространства, продифференцируем внешним образом (2.19) и раскроем результат по лемме Картана. Учитывая соотношение (2.20), получим

$$\Omega_1^2 = \beta^* \Omega_3^2;\ dk^* = q^* \Omega_3^1 + \gamma^* \Omega_3^2;\ -\Omega^3 + k^* \Omega_1^2 = \beta^* \Omega^1 + \gamma^* + r^* \Omega_3^2. \tag{2.21}$$

Система (2.19), (2.21) только обозначениями отличается от системы (1.11). Таким образом, комплекс Σ_1 описывается системой (1.11), (1.13), т. е. он является искомым комплексом Σ, и индекс 1 можно в дальнейшем опускать.

§ 3. ***H/K*-расслоение комплекса** Σ_1. Из равенства (2.15) можно выразить две дифференциальные формы ω^1 и ω^3 через du, dv и $d\theta$:

$$\omega^1 = \sin(u + f_1)(-f_2 \cos^2 f_1 d\theta + dx - yd\theta - vf_1' d\theta) + \cos(u + f_1)(f_2 \sin f_1 \cos f_1 d\theta + xf_1' d\theta + dv); \tag{3.1}$$

$$\omega^3 = \sin(u + f_1)(f_2 \sin f_1 \cos f_2 d\theta + xf_1' d\theta + dv) + \cos(u + f_1)(f_2 \cos^2 f_1 d\theta - dx + yd\theta + vf_1' d\theta). \tag{3.2}$$

8*

Для дальнейших выкладок удобно ввести сокращенное обозначение $\iint \varphi du du + uf_3 + f_4 \overset{\text{def}}{=} \Phi(u, \theta)$.

Формулы (1.19), (1.21), (1.20), (2.12) и (2.13) принимают более компактный вид:

$$k = \Phi;\ \gamma = -\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\cos^{-1}(u + f_1);\ q = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta};\ x = -\int_0^u \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}du;$$

$$y = \int_0^u \Phi du. \tag{3.3}$$

Дифференциалы функций x и y имеют вид

$$dx = -\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}du - \left[\int_0^u \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}du\right]d\theta;\quad dy = \Phi du + \left[\int_0^u \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}du\right]d\theta. \tag{3.4}$$

Соотнощениями (3.3), (3.4) будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

Внесем в четвертое уравнение (1.11) вместо форм ω^1 и ω^3 их найденные значения (3.1), (3.2). Перенося все члены в левую часть и пользуясь (1.18), получаем

$$\begin{gathered} -\sin(u + f_1)[f_2\sin f_1\cos f_1 d\theta + xf_1' d\theta + dv] - \cos(u + \\ + f_1)[f_2\cos^2 f_1 d\theta - dx - yd\theta + vf_1' d\theta] - k\beta\cos(u + f_1)d\theta - \\ - \gamma du + r\cos(u + f_1)d\theta + \operatorname{tg}(u + f_1)\{\sin(u + f_1)(-f_2\cos^2 f_1 d\theta + \\ + dx - yd\theta - vf_1' d\theta) + \cos(u + f_1)(f_2\sin f_1 d\theta + xf_1' d\theta + dv)\} = 0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Заменим k, β, γ по формулам (1.16), (3.3) и воспользуемся соотношениями (3.4). После приведения подобных членов уравнение (3.5) принимает вид

$$\left(\frac{-1}{\cos(u + f_1)}\int_0^u \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}du - f_2\frac{\cos^2 f_1}{\cos(u + f_1)} - vf_1'\frac{1}{\cos(u + f_1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\cos(u + f_1)}\int_0^u \Phi du + \Phi\sin(u + f_1) + r\cos(u + f_1)\right)d\theta = 0. \tag{3.6}$$

Решим (3.6) относительно r:

$$r = -\Phi\operatorname{tg}(u + f_1) - \frac{1}{\cos^2(u + f_1)}\left[\int_0^u \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}du + f_2\cos^2 f_1 + \int_0^u \Phi du\right]. \tag{3.7}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что найденная таким образом функция r действительно удовлетворяет четвертому уравнению (1.13).

Уравнения, определяющие расслоение комплекса в нормальные конгруэнции, имеют вид (1.3), (1.4). Внесем в них вместо форм ω^1, ω^3 их выражения (3.1), (3.2) и учтем соотношение (1.8). Уравнения (1.3), (1.4) принимают вид $\cos(u+f_1)\,dv = \left[\sin(u+f_1)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - 2W - 2t\right]du + \left\{-\cos(u+f_1)\Phi + \sin(u+f_1)\left[f_2\cos^2 f_1 + y + vf_1' + \int\limits_0^u \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}du\right] - \cos(u+f_1)\left[f_2\sin f_1\cos f_1 + xf_1'\right]\right\}d\theta$; $dt - [2(W+t)\times \operatorname{tg}(u+f_1)+\gamma]\,du + [-\sin(u+f_1)\Phi - \cos(u+f_1)(k\beta - r)]\,d\theta = 0$. Учитывая (3.3) и (3.7), уравнения расслоения запишем так:

$$dv = \left\{\operatorname{tg}(u+f_1)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{2}{\cos(u+f_1)}(W+t)\right\}du +$$
$$+\left\{\operatorname{tg}(u+f_1)\left[f_2\cos^2 f_1 + \int\limits_0^u \Phi\,du + vf_1' + \int\limits_0^u \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}du\right] -\right.$$
$$\left. - \Phi - f_2\sin f_1\cos f_1 + f_1'\int\limits_0^u \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}du\right\}d\theta; \tag{3.8}$$

$$dt = \left\{2(W+t)\operatorname{tg}(u+f_1) - \frac{1}{\cos(u+f_1)}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right\}du +$$
$$+\left\{\sin(u+f_1)\Phi - \frac{1}{\cos(u+f_1)}\left[\int\limits_0^u \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}du + f_2\cos^2 f_1 + vf_1' +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_0^u \Phi\,du\right]\right\}d\theta. \tag{3.9}$$

Мы требовали, чтобы система (1.3), (1.4), или эквивалентная ей система (3.8), (3.9), была вполне интегрируемой. Функция $W(u, v, \theta)$, входящая в правые части уравнений системы (3.8), (3.9), не может быть произвольной функцией трех аргументов. Эта функция подчинена условию (1.12), которое можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{\partial W}{\partial\theta} = -\frac{3}{2}\Phi\sin(u+f_1) + \frac{1}{2}\cos(u+f_1)\frac{\partial\Phi}{\partial u} +$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos(u+f_1)}\left[\int\limits_0^u \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}du + f_2\cos^2 f_1 + vf_1' + \int\limits_0^u \Phi\,du\right] +$$

$$+\frac{\partial W}{\partial v}\Big\{\Phi+\operatorname{tg}(u+f_1)\Big[-f_2\cos^2 f_1-\int_0^u\Phi\,du+vf_1'\Big]+$$

$$+f_2\sin f_1\cos f_1-f_1'\int_0^u\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,du-\operatorname{tg}(u+f_1)\int_0^u\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\,du\Big\}. \quad (3.10)$$

Это условие является необходимым и достаточным для интегрируемости уравнений расслоения (3.8), (3.9).

Итак, пусть функция $W(u, v, \theta)$ удовлетворяет условию (3.10). (Как известно [7], функция W определяется с произволом в одну функцию двух аргументов.) Пусть также

$$v=v(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2); \quad (3.11)$$

$$t=t(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2) \quad (3.12)$$

является решением системы (3.8), (3.9), соответствующим определенному выбору функции W.

Подставляя (3.11) в (2.14), получим векторные уравнения опорных поверхностей σ^* расслаивающих нормальных конгруэнций $\boldsymbol{A}(u,\ \theta,\ v(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2))=\boldsymbol{M}_2(\theta)+\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}v(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2)$. Если теперь от каждой точки, лежащей на поверхности σ^*, в направлении вектора $\boldsymbol{e}_3$ отложить отрезок, длина которого определяется равенством (3.12), то концы таких отрезков опишут базисную поверхность σ этой же нормальной конгруэнции

$$\boldsymbol{R}(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2)=\boldsymbol{M}_2(\theta)+\boldsymbol{i}\,[x-\cos(u+f_1)\,t(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2)]+$$
$$+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}\,[v(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2)+\sin(u+f_1)\,t(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2)]. \quad (3.13)$$

Равенство (3.13) определяет двупараметрическую совокупность базисных поверхностей (параметры c_1 и c_2). Каждый выбор параметров c_1^0, c_2^0 выделяет вполне конкретную поверхность из семейства базисных поверхностей (3.13).

Покажем, что при любом выборе параметров c_1 и c_2 соответствующая базисная поверхность является ортогональной лучам соответствующей нормальной конгруэнции комплекса Σ_1. Для этого найдем производную

$$\boldsymbol{R}_u=\boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial u}+\boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial u}+\boldsymbol{k}\frac{\partial v}{\partial u}+\boldsymbol{i}\left[t\sin(u+f_1)-\cos(u+f_1)\frac{\partial t}{\partial u}\right]+$$
$$+\boldsymbol{k}\left[t\cos(u+f_1)+\sin(u+f_1)\frac{\partial t}{\partial u}\right]$$

и вычислим скалярное произведение $(\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{e}_3)$ (вектор $\boldsymbol{e}_3$ определяется третьим соотношением (2.2)):

$$(\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{e}_3)=-\cos(u+f_1)\frac{\partial x}{\partial u}+\sin(u+f_1)\frac{\partial v}{\partial u}+\frac{\partial t}{\partial u}.$$

После замены частных производных (см. формулы (3.4), (3.8), (3.9)), получим $(\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{e}_3) \equiv 0$. Дифференцируя равенство (3.13) по θ и проводя аналогичные выкладки, получим $(\boldsymbol{R}_\theta\boldsymbol{e}_3) \equiv 0$. Таким образом, каждая поверхность семейства (3.13) действительно ортогональна соответствующей конгруэнции прямых комплекса Σ_1.

Покажем теперь, что отношение средней кривизны поверхности σ к ее полной кривизне, вычисленное в точке $\boldsymbol{M}$ поверхности σ, определяется только лучом, ортогонально пересекающим σ в точке $\boldsymbol{M}$, и не зависит от параметров c_1 и c_2.

Отношение кривизн

$$H/K = \frac{1}{2}\,\frac{LG - 2MF + NE}{LN - M^2} \tag{3.14}$$

выражается через E, F, G и L, M, N — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности σ.

Эти шесть коэффициентов известным образом выражаются через $\boldsymbol{R}_u$, $\boldsymbol{R}_\theta$, $(\boldsymbol{e}_3)_u$, $(\boldsymbol{e}_3)_\theta$. Опуская громоздкие, но несложные выкладки, укажем следующий промежуточный результат. Числитель выражения (3.14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} LG - 2MF + NE = \Big[A_1\cos(u+f_1) - B_2\sin(u+f_1)\Big]\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2\end{vmatrix} + \\ + [A_2\cos(u+f_1) - C_2\sin(u+f_1)]\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2\end{vmatrix} + \\ + [(B_2 - C_1)\cos(u+f_1)]\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2\end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$\begin{gathered} A_1 = (-t - 2W)\sin(u+f_1); \quad A_2 = -\Phi\sin(u+f_1)\cos(u+f_1); \\ B_1 = \Phi; \quad B_2 = -t\cos(u+f_1); \quad C_1 = (-t-2W)\cos(u+f_1); \\ C_2 = -\Phi\cos^2(u+f_1). \end{gathered} \tag{3.16}$$

После некоторых преобразований с учетом (3.16) равенство (3.15) примет вид

$$LG - 2MF + NE = -2W(\Phi^2 + 2Wt + t^2)\cos^2(u+f_1). \tag{3.17}$$

Вычисление знаменателя (3.14) даст

$$LN - M^2 = -(\Phi^2 + 2Wt + t^2)\cos^2(u+f_1). \tag{3.18}$$

Внесем (3.17) и (3.18) в (3.14). После сокращения на $(\Phi^2 + 2Wt + t^2)\cos^2(u+f_1)$ получим $H/K = W(u,\ \theta,\ v(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2))$. Но функция $v = v(u,\ \theta,\ c_1,\ c_2)$ сейчас как раз выделяет только те лучи комплекса, которые ортогональны к поверхности $\sigma(c_1, c_2)$. Таким образом, если взять произвольный луч $l(u_0,\ \theta_0,\ v_0)$ комплекса Σ_1, то для однопараметрической совокупности поверхностей σ, пересекающих ортогонально именно этот луч, отношение H/K будет равно $W(u_0,\ \theta_0,\ v_0)$.

Полагая в (3.13) $c_2 = \psi(c_1)$, где ψ — произвольная функция, получаем функциональное расслоение комплекса Σ_1 в однопараметрическую совокупность нормальных конгруэнций.

Список литературы: 1. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. Киев, Изд-во Киевского ун-та, 1963. 292 с. 2. *Кованцов Н. И.* Поверхности, ортогональные к конгруэнциям линейного комплекса.— Укр. геометр. сборник. Харьков, 1974, вып. 17, с. 82—92. 3. *Кованцов Н. И., Носаль Т. В.* Расслоение комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве в нормальные конгруэнции.— Укр. геометр. сборник. Харьков, 1973, вып. 14, с. 28—44. 4. *Кованцов Н. И., Носаль Т. В.* Расслоение линейного комплекса в конгруэнции, нормальные к поверхностям постоянной кривизны.— Укр. геометр. сборник. Харьков, 1974, вып. 16, с. 31—35. 5. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картрана в дифференциальной геометрии М.— Л., ОГИЗ — ГИТТЛ, 1948. 432 с. 6. *Щербаков Р. Н.* Основы метода внешних форм и линейчатая дифференциальная геометрия. Томск, Изд-во Томского ун-та, 1973. 235 с. 7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964. 830 с.

Поступила 26 апреля 1978 г.

УДК 513

М. О. Рахула

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЛИ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Дифференцирование Ли, возникшее в дифференциальной геометрии в начале 30-х годов (см. обзор Б. Л. Лаптева [1]), в настоящее время становится важной операцией при изучении дифференцируемых многообразий. В этой статье еще раз приводится определение дифференцирования Ли. Исходя из весьма общего функтора $\boldsymbol{T}$, удается выявить функториальную природу этой операции и получить естественно и быстро все основные правила. Далее развивается аналитический аппарат, предусматривающий проведение вычислений в неголономном базисе. Идея неголономного базиса, возникшая в 20-х годах [2, с. 70, 95; 3, с. 46], существенно проявляет себя в теории связностей, а также в изучении групп Ли и их представлений [4—10]. Развиваемый в статье аппарат применяется к изучению некоторых свойств групп Ли и однородных пространств.

§ 1. Функторы $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{T}$. Все многообразия, тензорные поля на них (в том числе функции, векторные поля, формы) и отображения будем предполагать дифференцируемыми класса C^p. При этом число p предполагается настолько большим, чтобы все дифференцирования были осуществимы.

Рассмотрим следующие функторы:

1) Функтор $\boldsymbol{G}$, сопоставляющий каждому многообразию V группу его диффеоморфизмов $\boldsymbol{G}(V)$ и каждому отображению

$$f: V' \to V \tag{1}$$

— бинарное отношение $G(f) \subset G(V') \times G(V)$, состоящее из пар $(a', a) \in G(V') \times G(V)$, таких, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f} & V \\ a' \downarrow & & \downarrow a \\ V' & \xrightarrow{f} & V \end{array} \qquad (2)$$

2) Функтор T, сопоставляющий каждому многообразию V алгебру $T(V)$ заданных на V тензорных полей (с обычными операциями — тензорным умножением, сложением, свертыванием, симметрированием и альтернированием) и каждому отображению (1) — бинарное отношение $T(f) \subset T(V') \times T(V)$, состоящее из пар (S', S), где S' и S — f-связанные тензорные поля.

По вопросам, относящимся к тензорам и тензорным алгебрам, можно рекомендовать литературу [11, гл. XVI; 12, гл. X; 13, гл. I]. Понятие же f-связанных или f-согласованных полей, хотя оно в литературе и вст ечается [13, с. 106; 4, с. 127; 5, с. 14], необходимо уточнить.

Определение 1. Назовем f-связанными при отображении (1)

— функции φ' и φ, если они заданы на V' и V соответственно и если

$$\varphi' = \varphi \circ f; \qquad (3)$$

— векторные поля Y' и Y, если они заданы на V' и V соответственно и если для любых f-связанных функций φ' и φ будут f-связаны производные

$$Y'\varphi' = (Y\varphi) \circ f; \qquad (4)$$

— 1-формы Φ' и Φ, если они заданы на V' и V соответственно и если для любых f-связанных векторных полей Y' и Y будут f-связаны функции

$$\Phi'(Y') = (\Phi(Y)) \circ f; \qquad (5)$$

— тензорные поля S' и S типа (p, q), если они заданы на V' V соответственно и если для любых соответственно f-связанных векторных полей $Y'_1, \ldots, Y'_q$ и $Y_1, \ldots, Y_q$ и 1-форм $\Phi'^1, \ldots, \Phi'^p$ и $\Phi^1, \ldots, \Phi^p$ будут f-связаны функции

$$S'(\Phi'^1, \ldots, \Phi'^p; Y'_1, \ldots, Y'_q) = (S(\Phi^1, \ldots, \Phi^p; Y_1 \ldots, Y_q)) \circ f. \qquad (6)$$

Примечание. Существует связь f-связанных векторных полей и 1-форм с касательным отображением Tf:

1) если векторные поля Y' и Y являются f-связанными, то касательное отображение Tf преобразует векторы поля Y' в векторы поля Y, т. е. $TfY'_u = Y_{f(u)}$, $\forall u \in V'$;

2) если 1-формы Φ' и Φ f-связаны, то, как скалярные функции на TV' и TV, они Tf-связаны, т. е. $\Phi' = \Phi \circ Tf$.

Основное свойство функторов G и T — «цепное правило»:

Предложение 1. *Для любых двух отображений* $g: V'' \to V'$ *и* $f: V' \to V$ имеют место равенства

$$G(fg) = G(f) \circ G(g), \quad T(fg) = T(f) \circ T(g), \tag{7}$$

где fg — *композиция отображений* g *и* f, *а* $G(f) \circ G(g)$ *и* $T(f) \circ T(g)$ — *композиции соответствующих бинарных отношений.*

Особое значение имеет бинарное отношение $T(f)$.

Предложение 2. $T(f)$ *является подалгеброй алгебры* $T(V') \times \times T(V)$: *любые два тензорных поля, полученные в* $T(V')$ *и* $T(V)$ *в результате одинаковых тензорных операций над соответственно* f*-связанными тензорными полями,* f*-связаны. Кроме того,* $T(f)$ *замкнуто относительно дифференцирований Ли, в частности, относительно скобочной операции векторных полей и внешнего дифференцирования форм.*

[См.: 4, с. 128, 221; 5, с. 16, 24; 13, с. 106; 6, с. 37].

Предложение 3. *Для любого диффеоморфизма* $a \in G(V)$ *бинарное отношение* $T(a)$ *является автоморфизмом алгебры* $T(V)$; *при этом мы отождествляем* $T(a)$ *с графиком автоморфизма. Отображение* $a \to T(a)$ *определяет представление группы* $G(V)$ *в алгебре* $T(V)$.

Предложение 4. *Для любой пары* $(a', a) \in G(f)$ *пара* $(T(a'), T(a))$ *является автоморфизмом подалгебры* $T(f)$. *Отображение* $(a', a) \to (T(a'), T(a))$ *определяет представление* $G(f)$ *как подгруппы группы* $G(V') \times G(V)$ *в* $T(f)$.

Предложение 5. *Для любого диффеоморфизма* $a \in G(V)$ *бинарное отношение* $G(a)$ *является графиком внутреннего автоморфизма группы* $G(V)$. *Отображение* $a \to G(a)$ *определяет присоединенное представление группы* $G(V)$.

Все эти предложения проверяются непосредственно.

Дифференцирование Ли получает следующее обоснование. Пусть $a \in G(V)$ и $\overset{*}{a} = T(a^{-1})$. Обозначим через $\overset{*}{a}S$ тензорное поле, a-связанное с тензорным полем S на V. В равной степени это относится к обозначениям $\overset{*}{a}\varphi$, $\overset{*}{a}Y$ и $\overset{*}{a}\Phi$ для функции φ, векторного поля Y и 1-формы Φ; при этом $\overset{*}{a}Y = Ta^{-1}Y$ и $\overset{*}{a}\Phi = \Phi \circ Ta$. Формулы (3)—(6) для $f = a$ запишутся в виде

$$\overset{*}{a}\varphi = \varphi \circ a, \ (\overset{*}{a}Y)(\overset{*}{a}\varphi) = \overset{*}{a}(Y\varphi), \ (\overset{*}{a}\Phi)(\overset{*}{a}Y) = \overset{*}{a}(\Phi(Y)); \tag{8}$$

$$(\overset{*}{a}S)(\overset{*}{a}\Phi^1, \ldots, \overset{*}{a}\Phi^p; \overset{*}{a}Y_1, \ldots, \overset{*}{a}Y_q) = \\ = \overset{*}{a}(S(\Phi^1, \ldots, \Phi^p; Y_1, \ldots, Y_q)). \tag{9}$$

Для линейных комбинаций векторных полей (Y_i) и 1-форм (Φ^i), $1 \leqslant i \leqslant n$, заданных на V, имеют место равенства

$$\overset{*}{a}(Y_i y^i) = (\overset{*}{a}Y_i)(\overset{*}{a}y^i); \tag{10}$$

$$\overset{*}{a}(\varphi_i \Phi^i) = (\overset{*}{a}\varphi_i)(\overset{*}{a}\Phi^i). \tag{11}$$

В записи вида $Y_i y^i$ имеется в виду правило «суммирование исключает дифференцирование» [9, с. 167]. Ясно, что равенства (10), (11) являются частным случаем более общего утверждения о линейной комбинации тензорных полей (см. предложение 2).

Пусть a_t — однопараметрическая подгруппа группы $\boldsymbol{G}(V)$, индуцирующая на V векторное поле X, $a_t = \exp tX$. Это значит, что для любой функции φ, заданной на V, имеет место равенство $X\varphi = (\varphi \circ a_t)'_{t=0}$.

Определение 2. Производной Ли тензорного поля S, заданного на V, в направлении векторного поля X называется тензорное поле $\boldsymbol{L}_X S = (\overset{*}{a}_t S)'_{t=0}$, где выражение справа понимается как $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(\overset{*}{a}_t S - S)$.

Из равенств (8) — (11) следуют основные формулы для производных Ли. Заменяя в них a на a_t и дифференцируя по t, при $t = 0$, получаем

$$\boldsymbol{L}_X\varphi = X\varphi;\ \ \boldsymbol{L}_X Y = XY - YX = [XY]; \tag{12}$$

$$\boldsymbol{L}_X \Phi(Y) + \Phi(\boldsymbol{L}_X Y) = X(\Phi(Y)); \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_X S(\Phi^1, \ldots, \Phi^p; Y_1, \ldots, Y_q) &= X(S(\Phi^1, \ldots, \Phi^p; Y_1, \ldots, Y_q)) - \\ &- \sum_{i=1}^{p} S(\Phi^1, \ldots, \boldsymbol{L}_X\Phi^i, \ldots, \Phi^p;\ Y_1, \ldots, Y_q) - \\ &- \sum_{i=1}^{q} S(\Phi^1, \ldots, \Phi^p;\ Y_1, \ldots, \boldsymbol{L}_X Y_i, \ldots, Y_q); \end{aligned} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{L}_X(Y_i y^i) = (\boldsymbol{L}_X Y_i)\, y^i + Y_i(X y^i); \tag{15}$$

$$\boldsymbol{L}_X(\varphi_i \Phi^i) = (X\varphi_i)\,\Phi^i + \varphi_i \boldsymbol{L}_X \Phi^i. \tag{16}$$

Из формулы (13), которая является частным случаем формулы (14), следует формула для производной Ли дифференциала функции φ

$$\boldsymbol{L}_X\, d\varphi = d(X\varphi). \tag{17}$$

Формулы (15) и (16) естественно обобщаются на случай линейной комбинации общих тензорных полей типа (p, q).

При известных условиях тензорное поле $\overset{*}{a}_t S$ разлагается в ряд Тейлора

$$\overset{*}{a}_t S = S + t\boldsymbol{L}_X S + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{L}_X^2 S + \cdots + \frac{t^p}{p!}\boldsymbol{L}_X^p S + \cdots. \tag{18}$$

Теперь, говоря о гомоморфизме некоторой группы Ли G в группу $\boldsymbol{G}(f)$, мы автоматически будем подразумевать, что многообразия V' и V — пространства представлений группы G и отображение f — охват представлений или G-морфизм [14, с. 49]. Кстати, напомним, что в категории представлений группы G и их охватов начальным объектом является точное представление.

Однопараметрическая подгруппа группы $\boldsymbol{G}(f)$ определяется как гомоморфизм аддитивной группы $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{G}(f)$. Это — пара подгрупп $(a_t', a_t) \subset \boldsymbol{G}(V') \times \boldsymbol{G}(V)$, индуцирующих на V' и V f-связанные векторные поля X' и X [13, с. 107]. Отсюда, в частности, следует: если $a_t = \exp tX$, то $ba_tb^{-1} = \exp t \cdot TbX$, $\forall b \in \boldsymbol{G}(V)$ [5, с. 19].

Говоря, что $\boldsymbol{T}(f)$ замкнуто относительно дифференцирований Ли, будем подразумевать, что для любых f-связанных векторных полей X' и X и f-связанных тензорных полей S' и S будут f-связаны производные Ли $\boldsymbol{L}_{X'}S'$ и $\boldsymbol{L}_XS$. Это утверждение является следствием предложения 4.

Предложение 4 говорит о том, что как только $(a', a) \in \boldsymbol{G}(f)$, то $(S', S) \in \boldsymbol{T}(f) \Rightarrow (\overset{*}{a}{}'S', \overset{*}{a}S) \in \boldsymbol{T}(f)$. Значит, для однопараметрической подгруппы $(a_t', a_t) \subset \boldsymbol{G}(f)$, где $a_t' = \exp tX'$ и $a_t = \exp tX$, вместе с f-связанными тензорными полями S' и S будут f-связаны тензорные поля $\overset{*}{a}{}_t' S'$ и $\overset{*}{a}_t S$, а также $\frac{1}{t}(\overset{*}{a}{}_t' S' - S')$ и $\frac{1}{t}(\overset{*}{a}_t S - S)$. При предельном переходе $t \to 0$ это свойство сохраняется, что приводит к f-связанности $\boldsymbol{L}_{X'}S'$ и $\boldsymbol{L}_XS$. К этому же выводу можно прийти с помощью формулы (14), предварительно убедившись в его справедливости для векторных полей и 1-форм. Отсюда вытекает важное следствие, именно,

Предложение 6. *Для любого векторного поля Y, заданного на V, и любого диффеоморфизма $a \in \boldsymbol{G}(V)$* имеет место равенство $\boldsymbol{L}_{\overset{*}{a}Y} = \overset{*}{a}\boldsymbol{L}_Y\overset{*}{a}{}^{-1}$.

Заменив здесь a на $a_t = \exp tX$ и осуществив дифференцирование по t при $t = 0$, получим равенство $\boldsymbol{L}_{[XY]} = \boldsymbol{L}_X\boldsymbol{L}_Y - \boldsymbol{L}_Y\boldsymbol{L}_X = [\boldsymbol{L}_X\boldsymbol{L}_Y]$ [1, с. 440].

Важно отметить также свойство внешнего дифференцирования $\overset{*}{a}D = D\overset{*}{a}$, $\forall a \in \boldsymbol{G}(V)$. Из него вытекает, что внешнее дифференцирование коммутирует с дифференцированием Ли:

$$\boldsymbol{L}_XD = D\boldsymbol{L}_X. \tag{19}$$

Одним из следствий равенства (19) является

Предложение 7. *Если система Пфаффа $\vartheta^i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, на многообразии V вполне интегрируема, то, каково бы ни было векторное поле X на V, вполне интегрируема также система Пфаффа $\vartheta^i = 0$, $\boldsymbol{L}_X\vartheta^i = 0$.*

Действительно, если $D\vartheta^i = \vartheta^i_j \wedge \vartheta^j$, где (ϑ^i_j) — некоторые 1-формы, то $D\boldsymbol{L}_X\vartheta^i = \boldsymbol{L}_XD\vartheta^i = \boldsymbol{L}_X\vartheta^i_j \wedge \vartheta^j + \vartheta^i_j \wedge \boldsymbol{L}_X\vartheta^j$.

С помощью производных Ли легко обобщается известное свойство интегрирующих множителей [15, с. 110]:

Предложение 8. *Если система Пфаффа $\vartheta^i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, на многообразии V вполне интегрируема, и $A = (A^i_j)$, $B = (B^i_j)$ — такие обратимые матрицы, что формы $(A^i_j\vartheta^j)$ и $(B^i_j\vartheta^j)$ замкнуты, то матрица AB^{-1} состоит из первых интегралов данной системы. Формы (ϑ^i) предполагаются линейно независимыми.*

Действительно, если формы $(A^i_j\vartheta^j)$ замкнуты, то они локально точны, т. е. существуют функции (φ^i), такие, что на соответствующей окрестности $d\varphi^i = A^i_j\vartheta^j$. На интегральных поверхностях функции (φ^i) постоянны. Для произвольного векторного поля X, касательного к интегральным поверхностям, будет $X\varphi^i = 0$, $\boldsymbol{L}_X(A^i_j\vartheta^j) = (XA^i_j)\,\vartheta^j + A^i_j\boldsymbol{L}_X\vartheta^j = \boldsymbol{L}_X(d\varphi^i) = d(X\varphi^i) = 0$. Отсюда находим (в матричной записи): $\boldsymbol{L}_X\vartheta = -(A^{-1}X\ A)\,\vartheta$. Точно так же $\boldsymbol{L}_X\vartheta = -(B^{-1}XB)\,\vartheta$. Следовательно, $A^{-1}\,XA = B^{-1}\,X\,B$ и $X(AB^{-1}) = 0$.

§ 2. Дифференцирование Ли в неголономном базисе. Пусть V есть n-мерное вполне параллелизуемое многообразие (рассмотрение можно вести и на вполне параллелизуемой области многообразия V). Зададим на V неголономный базис $(R_i,\ \theta^j)$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, т. е. n векторных полей и n 1-форм, определяющих на V поле реперов и дуальных к ним кореперов. С базисом $(R_i,\ \theta^j)$ ассоциируется объект неголономности [2, с. 71] — система величин (c^k_{ij}), смысл которых ясен из формул $[R_iR_j] = R_kc^k_{ij}$; $D\theta^k = -\frac{1}{2}c^k_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$. При переходе к другому неголономному базису $(\tilde{R}_i,\ \tilde{\theta}^j)$ согласно формулам

$$\tilde{R}_i = R_j\overline{A}^j_i;\ \tilde{\theta}^i = A^i_j\theta^j, \tag{20}$$

где (A^i_j) и $(\overline{A}^j_i)$ — взаимно обратные матрицы, объект неголономности преобразуется по закону $\tilde{c}^k_{ij} = A^k_s(c^s_{pq} - 2\overline{A}^s_lR_{[p}A^l_{q]})\,\overline{A}^p_i\overline{A}^q_j$ [см. 3, с. 52; 9, с. 167]. Если $\tilde{c}^k_{ij} = 0$, то $c^k_{ij} = 2\overline{A}^k_lR_{[i}A^l_{j]}$. Такой вид имеет объект неголономности в голономном базисе — например, на локальной карте.

Предложение 9. *Равенство* $R_{[i}A^k_{j]} = 0$ *или, что равносильно,* $dA^i_j\wedge\theta^j = 0$ *определяет между неголономными базисами на* V *отношение эквивалентности. При этом, если базисы* $(R_i,\ \theta^j)$ *и* $(\tilde{R}_i,\ \tilde{\theta}^j)$ *эквивалентны, то эквивалентны также базисы* $(\overset{*}{a}R_i,\ \overset{*}{a}\theta^j)$ *и* $(\overset{*}{a}\tilde{R}_i,\ \overset{*}{a}\tilde{\theta}^j)$.

Доказательство. Действительно, определяемое отношение рефлексивно: $dE\wedge\theta = 0$ (E — единичная матрица), симметрично: $dA\wedge\theta = 0 \leftrightarrow dA^{-1}\wedge\tilde{\theta} = 0$, и транзитивно: если $\tilde{\theta} = A\theta$, $\theta = B\theta_0$, $dA\wedge\theta = 0 = dB\wedge\theta_0$, то $d(AB)\wedge\theta_0 = 0$. Кроме того, из $dA\wedge\theta = 0$ следует $\overset{*}{a}(dA\wedge\theta) = \overset{*}{a}(dA)\wedge\overset{*}{a}\theta = d(\overset{*}{a}A)\wedge\overset{*}{a}\theta = 0$. Здесь везде применена матричная запись.

Таким образом, классы эквивалентности при автоморфизмах $\overset{*}{a}$ переходят друг в друга. При этом один из них — класс голономных базисов — остается неизменным.

Тензорное поле S типа (p, q) на V в базисе $(R_i,\ \theta^j)$ можно представить формулой

$$S = R_{i_1}\otimes\cdots\otimes R_{i_p}S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\theta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{j_q}, \tag{21}$$

где

$$S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = S(\theta^{i_1}, \ \dots, \ \theta^{i_p}; \ R_{j_1}, \ \dots, \ R_{j_q}). \tag{22}$$

Предложение 10. *При переходе к базису* $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$ *согласно формулам* (20) *компоненты* (22) *преобразуются по закону*

$$\tilde{S}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \bar{A}^{i_1}_{k_1} \dots \bar{A}^{i_p}_{k_p} S^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} A^{l_1}_{j_1} \dots A^{l_q}_{j_q}.$$

В частности, базис $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$ может быть получен из базиса (R_i, θ^j) в результате автоморфизма $\overset{*}{a} : \tilde{R}_i = \overset{*}{a} R_i, \ \tilde{\theta}^j = \overset{*}{a} \theta^j$. Тогда матрица $A = (A^i_j)$ в (20) выполняет как бы роль якобиевой матрицы диффеоморфизма a. Будем говорить, что диффеоморфизм a представлен в базисе (R_i, θ^j) матрицей A.

Предложение 11. *Если диффеоморфизм* $a \in G(V)$ *представлен в базисе* (R_i, θ^j) *матрицей* A, *то тензорное поле* $\overset{*}{a} S$, *получающееся из тензорного поля* (21) *в результате автоморфизма* $\overset{*}{a}$, *имеет в базисе* (R_i, θ^j) *компоненты*

$$\bar{A}^{i_1}_{k_1} \dots \bar{A}^{i_p}_{k_p} (S^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} \circ a) A^{l_1}_{j_1} \dots A^{l_q}_{j_q}. \tag{23}$$

Доказательство. По аналогии с формулами (10) и (11), из (21) следует $\overset{*}{a} S = \overset{*}{a} R_{i_1} \otimes \dots \otimes \overset{*}{a} R_{i_p} (S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \circ a) \overset{*}{a} \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \overset{*}{a} \theta^{j_q}$, откуда, с учетом (20), выявляем компоненты (23).

Естественное обобщение получает известное свойство якобиевых матриц.

Предложение 12. *Если два диффеоморфизма* $a, \ b \in G(V)$ *представлены в базисе* (R_i, θ^j) *матрицами* A *и* B (см. (20)), *то их композиция* ab *представится в этом базисе матрицей* $(A \circ b) B$.

Доказательство. Из $\overset{*}{a} \theta = A \theta$ и $\overset{*}{b} \theta = B \theta$ (в матричной записи) следует: $(\overset{*}{ab}) \theta = \overset{*}{b} (\overset{*}{a} \theta) = \overset{*}{b} (A \theta) = (A \circ b) \overset{*}{b} \theta = (A \circ b) B \theta$.

Для элементов подгруппы $a_t = \exp tX \subset G(V)$ матрица A зависит от параметра t, обозначим ее через A_t. Тогда, как следует из предложения 12, равенству $a_{t+s} = a_t \circ a_s$ соответствует равенство

$$A_{t+s} = (A_t \circ a_s) A_s. \tag{24}$$

Введем матрицу $C = (A_t)'_{t=0}$, определяющую инфинитезимальный поворот базиса (R_i, θ^j) при смещении вдоль траекторий векторного поля X:

$$\boldsymbol{L}_X R_i = - R_j C^j_i; \ \boldsymbol{L}_X \theta^j = C^j_i \theta^i. \tag{25}$$

Эти формулы получаются из (20) в результате дифференцирования по t при $t = 0$.

Предложение 13. *Производная Ли* $\mathbf{L}_X S$ *тензорного поля* (21) *имеет в базисе* (R_i, θ^j) *компоненты*

$$XS^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \sum_{\lambda=1}^{p} C^{i_\lambda}_k S^{i_1\ldots k\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{q} C^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots k\ldots j_q} C^k_{i_\lambda}. \tag{26}$$

Доказательство. Заменяем в (23) a на a_t, A на A_t и дифференцируем по t при $t=0$.

Предложение 14. *Матрица* C *выражается через объект неголономности* (c^k_{ij}) *и компоненты* (x^i) *векторного поля* X *в базисе* (R_i) *формулой* $C^i_j = R_j x^i + c^i_{jk} x^k$.

Доказательство. Распишем равенство $[XR_i] = R_j C^j_i$, где $X = R_j x^j$.

Примечание. В голономном базисе, когда $c^i_{jk} = 0$ и $R_i = \partial_i$, матрица C принимает вид $(\partial_j x^i)$ и компоненты (26) приводятся к виду (2.11) [1, с. 438].

Предложение 15. *Если для матрицы* A_t *имеет место разложение Тейлора (по степеням* t*), то коэффициенты разложения выразятся через матрицу* C:

$$(A_t)'_{t=0} = C;\ (A_t)''_{t=0} = XC + C^2;\ (A_t)'''_{t=0} = X(XC + C^2) + \\ + (XC + C^2)C, \ \ldots \tag{27}$$

В частности, когда $XC = 0$, то

$$A_t = \exp tC. \tag{28}$$

Доказательство. Второй коэффициент (27) получается из (24) дифференцированием сначала по s при $s=0$, затем по t при $t=0$. Третий коэффициент получается аналогично из равенства $A_{t_1+t_2+t_3} = (A_{t_1} \circ a_{t_2+t_3})(A_{t_2} \circ a_{t_3}) A_{t_3}$ и т. д. Равенство (28) при $XC = 0$ становится очевидным.

Предложение 16. *При переходе к базису* $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$ *согласно формулам* (20) *матрица* C *преобразуется по закону (в матричной записи)*

$$\tilde{C} = A(CA^{-1} - XA^{-1}). \tag{29}$$

Доказательство. $[X\tilde{R}] = [XR]A^{-1} + R(XA^{-1}) = -\tilde{R}A(CA^{-1} - XA^{-1})$.

Предложение 17. *Если* C_X — *матрица* C, *соответствующая векторному полю* X *и* C_Y — *матрица* C, *соответствующая векторному полю* Y *(в одном и том же базисе), то скобке* $[XY]$ *соответствует матрица* $C_{[XY]} = XC_Y - YC_X + C_X C_Y - C_Y C_X$.

Доказательство. $[[XY]R] = [X[YR]] - [Y[XR]] = -[X, RC_Y] + [Y, RC_X] = -R(XC_Y - YC_X + C_X C_Y - C_Y C_X)$.

§ 3. Дифференцирование Ли на группе Ли. Пусть G — группа Ли. В группе $\boldsymbol{G}(G)$ выделяются важные диффеоморфизмы. Во-первых, это — обращение $\rho : a \to a^{-1}$, $\forall a \in G$, затем, каждому элементу

$a \in G$ сопоставляются правый сдвиг $\Pi_a: b \to ba$, левый сдвиг $\Lambda_a: b \to ab$ и внутренний автоморфизм $A_a: b \to aba^{-1}$, $\forall b \in G$. Отображения $a \to \Pi_a$, $a \to \Lambda_a$, $a \to A_a$, как известно, определяют три представления группы G на себе; первые два точны, а третье (присоединенное представление) имеет ядро неэффективности — центр $Z \subset G$.

Предложение 18. *Каждой однопараметрической подгруппе a_t группы G сопоставляются три однопараметрических подгруппы группы $\mathbf{G}(G)$: Π_{a_t}, Λ_{a_t}, и A_{a_t}. При этом, если $\Pi_{a_t} = \exp t\tilde{X}$ и $\Lambda_{a_t} = \exp tX$, то $A_{a_t} = \exp t(\tilde{X} - X)$. Кроме того, векторное поле X левоинвариантно, векторное поле $\tilde{X}$ правоинвариантно и $\tilde{X} = -\overset{*}{\rho} X$, т. е. векторные поля $\tilde{X}$ и $-X$ ρ-связаны.*

Доказательство. Левоинвариантность X и правоинвариантность $\tilde{X}$ следуют из того факта, что правые и левые сдвиги коммутируют друг с другом. Например, равенство $T\Lambda_b X = X$, $\forall b \in G$, следует из равенства $\Lambda_b \Pi_{a_t} \Lambda_b^{-1} = \Pi_{a_t}$. То, что A_{a_t} индуцирует $\tilde{X} - X$, следует из равенства $A_{a_t} = \Lambda_{a_t} \circ \Pi_{a_t}^{-1}$. Заметим, что $\exp t(\tilde{X} - X) = (\exp t\tilde{X}) \circ (\exp tX)^{-1}$. Наконец, из равенства $\rho \Pi_{a_t} \rho^{-1} = \Lambda_{a_t}^{-1}$ следует ρ-связность $\tilde{X}$ и $-X$.

Заметим, что векторные поля X и $\tilde{X}$ на центре Z совпадают. В частности, в единице $e \in G$ они имеют общий вектор X_e, касательный к кривой a_t. Вектор X_e определяет векторные поля X и $\tilde{X}$ на G однозначно: $X_a = T\Lambda_a X_e$, $\tilde{X}_a = T\Pi_a X_e$, $\forall a \in G$.

Примечание. Из того, что левые и правые сдвиги коммутируют между собой, следует еще одно утверждение: если X и Y — векторные поля на G, причем X левоинвариантно и Y правоинвариантно, то $[XY] = 0$.

Левоинвариантность (правоинвариантность) тензорного поля S на G естественно понимается в смысле равенства $\overset{*}{\Lambda}_a S = S$, $\forall a \in G$, (соотв. $\overset{*}{\Pi}_a S = S$).

Предложение 19. *Тензорное поле S типа (p, q) на G является левоинвариантным (правоинвариантным) тогда и только тогда, когда для любых левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей $Y_1, \ldots, Y_q$ и 1-форм $\Phi^1, \ldots, \Phi^p$ функция $S(\Phi^1, \ldots \Phi^p; Y_1, \ldots, Y_q)$ постоянна на G.*

Доказательство. Функция φ на G может быть Λ_a-связана (Π_a-связана) сама с собой тогда и только тогда, когда она — константа. Остальное следует из равенства (6).

Следствие (о структурных константах). *Объект неголономности левоинвариантного базиса (R_i, θ^j), $1 \leqslant i$, $j \leqslant r = \dim G$, постоянен на G.*

Действительно, скобки $[R_i R_j]$ левоинвариантны, а это значит, что $\theta^k([R_i R_j]) = c_{ij}^k$ — константы. То же самое можно сказать об объекте неголономности правоинвариантного базиса $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$ на G.

Предложение 20. *Если левоинвариантный базис (R_i, θ^j) и правоинвариантный базис $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$ на G таковы, что $\tilde{R}_i = -\overset{*}{\rho} R_i$, $\tilde{\theta}^j = -\overset{*}{\rho}\theta^j$, то их объекты неголономности отличаются знаком: $\tilde{c}^k_{ij} = -c^k_{ij}$.*

Доказательство. Применим к обеим частям равенства $[R_i R_j] = R_k c^k_{ij}$ оператор $\overset{*}{\rho}$.

Примечание. Это не учитывается формулами (12, 13, 18) в работе [16, с. 281, 282].

Предложение 21. *Если A — матрица, связывающая базисы (R_i, θ^j) и $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$ из предложения 20, см. (20), то*

$$dA^i_j = -c^i_{kl} A^k_j \theta^l = -A^i_l c^l_{jk} \theta^k, \tag{30}$$

$$A^i_s c^s_{jk} = c^i_{pq} A^p_j A^q_k. \tag{31}$$

Доказательство. Соотношения (30) выводятся из равенства $[\tilde{R}_i R_j] = 0$. Соотношения же (31) являются следствием (30) [см. также 16, с. 282, 283].

Предложение 22. *Пусть (R_i, θ^j) и $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$ — базисы из предложения 20 и A — матрица из предложения 21. Числовая матрица $A(a)$, определяемая матрицей A в точке $a \in G$, представляет правый сдвиг $\Pi_{a^{-1}}$ (в смысле предложения 12) в базисе (R_i, θ^j), левый сдвиг Λ_a в базисе $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$ и внутренний автоморфизм A_a как в базисе (R_i, θ^j), так и в базисе $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$.*

Доказательство. Из $\tilde{\theta} = A\theta$ (в матричной записи) следует, что $\tilde{\theta} = \overset{*}{\Pi}_{a^{-1}}\tilde{\theta} = (A \circ \Pi_{a^{-1}})(\overset{*}{\Pi}_{a^{-1}}\theta)$ и $\overset{*}{\Pi}_{a^{-1}}\theta = (A^{-1} \circ \Pi_{a^{-1}}) A\theta$. Так как формы θ и $\overset{*}{\Pi}_{a^{-1}}\theta$ левоинвариантны, то матрица $(A^{-1} \circ \Pi_{a^{-1}}) A$ постоянна на G. В точке $a \in G$ она равна $A(a)$. Следовательно, $\overset{*}{\Pi}_{a^{-1}}\theta = A(a)\theta$. Отсюда, применяя оператор $\overset{*}{\rho}$ и зная при этом, что $\rho\Pi_{a^{-1}} = \Lambda_a\rho$, получаем $\overset{*}{\Lambda}_a\tilde{\theta} = A(a)\tilde{\theta}$. Из $A_a = \Lambda_a \circ \Pi_{a^{-1}}$ следует, что $\overset{*}{A}_a\theta = A(a)\theta$ и $\overset{*}{A}_a\tilde{\theta} = A(a)\tilde{\theta}$.

Предложение 23. *Пусть a_t — однопараметрическая подгруппа группы G, X и $\tilde{X}$ — векторные поля из предложения 18 и (x^i) — компоненты поля X в базисе (R_i), впрочем, равные компонентам поля $\tilde{X}$ в базисе $(\tilde{R}_i)$. Тогда матрица $A(a_t^{-1})$ (см. предложение 22) имеет вид*

$$A(a_t^{-1}) = \exp tC, \tag{32}$$

где $C = (c^i_{jk} x^k)$.

Доказательство. Матрица $(A(a_t^{-1}))'_{t=0}$ является матрицей C для векторного поля X в базисе (R_i, θ^j) или же для векторного поля $-\tilde{X}$ в базисе $(\tilde{R}_i, \tilde{\theta}^j)$. Поэтому (32) следует из (28).

Пусть $\boldsymbol{g}$ — алгебра Ли группы G, $\boldsymbol{Z}$ — ее центр и $\varkappa$ — производная алгебра [4, с. 183, 184]. По определению, $\boldsymbol{g}$ есть множество левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей на G и может отождествляться с касательным пространством в единице T_eG. Отображение $a \to A(a)$ определяет представление G в $\boldsymbol{g}$, изоморфное присоединенному представлению группы G. В дальнейшем имеется в виду, что в $\boldsymbol{g}$ осуществляются только преобразования $A(a)$.

Для любого $X \in \boldsymbol{g}$ матрица $C = (c^i_{jk}x^k)$ определяет в $\boldsymbol{g}$ аффинор. Это видно из формулы (29), так как $XA^{-1} = 0$. Обозначим этот аффинор через C_X и представим в виде

$$C_X = R_i C^i_j \theta^j. \qquad (33)$$

Нетрудно видеть, что $\boldsymbol{Z} = \bigcap\limits_{X \in \boldsymbol{g}} \operatorname{Ker} C_X$ и $\varkappa = \bigcup\limits_{X \in \boldsymbol{g}} \operatorname{Im} C_X$ (знак $\bigcup$ означает линейную оболочку). Возьмем ν векторов $X_\lambda = R_i x^i_\lambda$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu$, и сопоставим каждому из них аффинор (33). Получим ν аффиноров $C_{X_1}, \ldots, C_{X_\nu}$, произведение которых снова есть аффинор:

$$C_{X_1} C_{X_2} \ldots C_{X_\nu} = R_i c^i_{s_1 j_1} c^{s_1}_{s_2 j_2} \ldots c^{s_{\nu-1}}_{k j_\nu} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_\nu^{j_\nu} \theta^k. \qquad (34)$$

Каковы бы ни были векторы $X_1, \ldots, X_\nu$ (ν фиксировано), образ аффинора (34), очевидно, принадлежит линейной оболочке векторов

$$R_{j_1 \ldots j_\nu k} = R_i c^i_{s_1 j_1} c^{s_1}_{s_2 j_2} \ldots c^{s_{\nu-1}}_{k j_\nu}, \qquad (35)$$

а ядро содержит аннулятор форм

$$\theta^i_{j_1 \ldots j_\nu} = c^i_{s_1 j_1} c^{s_1}_{s_2 j_2} \ldots c^{s_{\nu-1}}_{k j_\nu} \theta^k. \qquad (36)$$

Рассмотрим последовательность групп $G \xrightarrow{\tau} G_1 \xrightarrow{\tau_1} G_2 \xrightarrow{\tau_2} \ldots \xrightarrow{\tau_{\nu-1}} G_\nu$, где каждая последующая группа является группой внутренних автоморфизмов предыдущей группы и каждой стрелкой определено соответствующее присоединенное представление. Обозначим через $Z_{\lambda-1}$ ядро сквозного гомоморфизма $\tau_{\lambda-1} \ldots \tau_2 \tau_1 \tau$ в G и через $\boldsymbol{Z}_{\lambda-1}$ его алгебру Ли в $\boldsymbol{g}$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu$, $\tau_0 = \tau$, $Z_0 = Z$, $\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{Z}$.

Предложение 24. *Идеал* $\boldsymbol{Z}_{\nu-1}$ *является аннулятором форм* (36) *в* $\boldsymbol{g}$.

Доказательство. Ядро Z_λ характеризуется условием: элемент $a \in G$ принадлежит Z_λ тогда и только тогда, когда для любого $b \in G$ коммутатор $aba^{-1}b^{-1}$ принадлежит $Z_{\lambda-1}$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu - 1$. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно спроектировать элементы a и b с помощью $\tau_{\lambda-1} \ldots \tau_1 \tau$ на группу G_λ и свести сказанное к следующему: проекция a принадлежит центру группы G_λ тогда и только тогда, когда проекция коммутатора $aba^{-1}b^{-1}$ есть единица группы G_λ. В алгебре Ли $\boldsymbol{g}$ получаем соответствующее утверждение: вектор $Y \in \boldsymbol{g}$ принадлежит идеалу $\boldsymbol{Z}_\lambda$ тогда и только тогда, когда для любого $X \in \boldsymbol{g}$ скобка $[YX]$ принадлежит идеалу $\boldsymbol{Z}_{\lambda-1}$. Иначе говоря, вектор $Y \in \boldsymbol{g}$ принадлежит идеалу $\boldsymbol{Z}_\lambda$ тогда и только тогда, когда для любых $X_1, \ldots, X_{\lambda+1} \in \boldsymbol{g}$ имеет место равенство $[\ldots[[YX_{\lambda+1}]X_\lambda] \ldots X_1] = 0$, но это равносильно равенству $\theta^i_{j_1 \ldots j_{\lambda+1}}(Y) = 0$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu - 1$.

Нетрудно видеть, что идеал $\boldsymbol{Z}_{\nu-1}$ является пересечением ядер всех аффиноров вида (34), где $X_1, \ldots, X_\nu$ пробегают всю алгебру $\boldsymbol{g}$.

Предложение 25. *Внешние дифференциалы форм* (36) *имеют вид*

$$D\theta^i_{j_1 \ldots j_\nu} = -\theta^i_{j_1 \ldots j_{\nu-1}k} \wedge \theta^k_{j_\nu}. \tag{37}$$

Доказательство (по индукции). При $\nu = 1$ имеем

$$D\theta^i_j = -\frac{1}{2} c^i_{kj} c^k_{pq} \theta^p \wedge \theta^q = \frac{1}{2}(c^i_{kp} c^k_{qj} + c^i_{kq} c^k_{jp})\, \theta^p \wedge \theta^q = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j.$$

Предположим, что формула (37) верна для форм $(\theta^i_{j_1 \ldots j_{\nu-1}})$. Тогда $D\theta^i_{j_1 \ldots j_\nu} = D(c^i_{s_1 j_1} \theta^{s_1}_{j_2 \ldots j_\nu}) = -c^i_{s_1 j_1} \theta^{s_1}_{j_2 \ldots j_{\nu-1}k} \wedge \theta^k_{j_\nu} = -\theta^i_{j_1 \ldots j_{\nu-1}k} \wedge \theta^k_{j_\nu}$. Из формул (18) и (32) выводятся следующие разложения. Если $\Pi_{a_t} = \exp tX$, где $X = R_i x^i$, то $\overset{*}{\prod}_{a_t} R_i = R_i - tR_{ji} x^j + \frac{t^2}{2} R_{j_1 j_2 i} x^{j_1} x^{j_2} + \ldots$;

$\overset{*}{\prod}_{a_t} \theta^i = \theta^i + t\theta^i_j x^j + \frac{t^2}{2} \theta^i_{j_1 j_2} x^{j_1} x^{j_2} + \ldots$.

Интересно проследить за концом неподвижного вектора $Y \in T_e G$ относительно подвижного базиса $(\overset{*}{\Pi}_{a_t} R_i, \overset{*}{\Pi}_{a_t} \theta^j)$. Если $Y = R_i y^i$, то параметрическими уравнениями траектории его конца будут $\overset{*}{\Pi}_{a_t} \theta^i(Y) = y^i + t\theta^i_j(Y)\, x^j + \frac{t^2}{2} \theta^i_{j_1 j_2}(Y)\, x^{j_1} x^{j_2} + \ldots$. При $y \in \boldsymbol{Z}_\lambda \setminus \boldsymbol{Z}_{\lambda-1}$ эта траектория является алгебраической кривой порядка λ. В частности, при $\lambda = 0$ вектор Y неподвижен, при $\lambda = 1$ его конец движется по прямой, параллельной центру $\boldsymbol{Z}$, при $\lambda = 2$ — по параболе с касательной, параллельной $\boldsymbol{Z}_1$, и осью, параллельной $\boldsymbol{Z}$.

§ 4. Дифференцирование Ли и однородные пространства. Пусть G — группа Ли и V — однородное пространство, где G действует транзитивно и эффективно [7, с. 45; 8, с. 4]. Образ точки $u \in V$ при действии элемента $a \in G$ обозначим через $u \cdot a$. Действие предполагается правосторонним: $u \cdot ab = (u \cdot a) \cdot b$, $\forall u \in V$, $\forall a, b \in G$.

Универсальной проблемой в категории однородных представлений группы G и соответствующих охватов является, как известно, построение репера группы G. Пусть $\boldsymbol{R}_\nu = \{u_0, u_1, \ldots, u_\nu\}$ — конечное упорядоченное подмножество V и H_ν — его стационарная подгруппа в G. Придадим ν последовательные значения 0, 1, 2... и построим последовательность подмножеств $\boldsymbol{R}_0 \subset \boldsymbol{R}_1 \subset \boldsymbol{R}_2 \subset \ldots$, в которой каждое последующее подмножество отличается от предыдущего только последним элементом. Одновременно в группе

G образуется башня подгрупп $H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots$, где H_ν является пересечением $H_{\nu-1}$ и стационарной подгруппы точки u_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Определение 3. Назовем $\boldsymbol{R}_\nu$ репером группы G порядка ν, если в G существует упорядоченное подмножество элементов $\mathfrak{N}_\nu = \{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}$, таких, что: 1) $a_\lambda \in H_{\lambda-2} \setminus H_{\lambda-1}$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu$, $H_{-1} = G$; 2) $u_\lambda = u_{\lambda-1} \cdot a_\lambda$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu$.

Легко устанавливается

Предложение 26. *Стационарная подгруппа репера порядка* ν *имеет вид* $H_\nu \bigcap\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant \nu} b_\lambda H_0 b_\lambda^{-1}$, *где* $b_\lambda = a_\lambda b_{\lambda-1} a_\lambda^{-1}$, $b_0 = e$, $b_1 = a_1$.

Обозначим через V_λ множество всех реперов порядка λ. Далее, введем в V_λ обычную структуру расслоения с базой $V_{\lambda-1}$ и проекцией $\pi_{\lambda-1}: V_\lambda \to V_{\lambda-1}$, отображающей репер $\boldsymbol{R}_\lambda$ в репер $\boldsymbol{R}_{\lambda-1}$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu$, $V_0 = V$, $\pi_0 = \pi$. В каждом расслоении V_λ определено правостороннее, эффективное и транзитивное действие группы G: $\boldsymbol{R}_\lambda = \{u_0, u_1, \ldots, u_\lambda\} \to \boldsymbol{R}_\lambda \cdot a = \{u_0 \cdot a, u_1 \cdot a, \ldots, u_\lambda \cdot a\}$, $\forall a \in G$. Проекция $\pi_{\lambda-1}$ определяет соответствующий охват.

Предложение 27. *Если в* V_ν *осуществляется точное представление группы* G, *то для каждого значения* λ *расслоение* $\pi_\lambda \ldots \pi_{\nu-1}: V_\nu \to V_\lambda$ *является главным расслоением со структурной группой* H_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \nu - 1$.

Доказательство. Представление группы G в V изоморфно представлению G в расслоении G/H_0 [8, с. 4]. Изоморфны также представления группы G в V_λ и G/H_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \nu$. Поэтому, если $H_\nu = \{e\}$, то в слое расслоения $\pi_\lambda \ldots \pi_{\nu-1}: V_\nu \to V_\lambda$ подгруппа H_λ действует точно. Следовательно, построение репера группы G сводится к построению башни подгруппы $H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset \{e\}$ или соответствующей башни подалгебр в $\boldsymbol{g}$. Можно считать, что при построении репера $\boldsymbol{R}_\nu$ точки $(u_1, \ldots, u_\nu)$ выбраны настолько близко к точке u_0, чтобы все элементы $\mathfrak{N}_\nu$ легли в окрестность единицы $e \in G$. Тогда каждый элемент a_λ можно соединить однопараметрической подгруппой — кривой с касательным вектором $X_\lambda \in T_e G$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu$ [см. 4, с. 169].

Обозначим через $\boldsymbol{h}_\lambda$ алгебру Ли подгруппы H_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \nu$. Вектор X_λ, очевидно, принадлежит подалгебре $\boldsymbol{h}_{\lambda-2}$, но не принадлежит подалгебре $\boldsymbol{h}_{\lambda-1}$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu$, $\boldsymbol{h}_{-1} = \boldsymbol{g}$. Переходим к соответствующим левоинвариантным векторным полям на G.

Предложение 28. *Пусть в* V_ν *осуществляется точное представление группы* G *и пусть* ω — *произвольная левоинвариантная 1-форма на* G, *аннулируемая подалгеброй* $\boldsymbol{h}_0$. *Тогда подалгебра* $\boldsymbol{h}_\lambda$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \nu - 1$, *определяется как аннулятор всех форм вида* ω, $\boldsymbol{L}_{X_1}\omega$, $\boldsymbol{L}_{X_2}\boldsymbol{L}_{X_1}\omega, \ldots, \boldsymbol{L}_{X_\lambda} \ldots \boldsymbol{L}_{X_1}\omega$.

Доказательство. По условию $Y \in \boldsymbol{h}_0 \leftrightarrow \omega(Y) = 0$. Из предложения 26 следует, что Y принадлежит $\boldsymbol{h}_1$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{h}_0$ содержит вместе с Y все производные $\boldsymbol{L}_{X_1} Y$, т. е. $\omega(Y) = 0$, $\omega(\boldsymbol{L}_{X_1} Y) = 0$. Последнее равенство равносильно равенству $\boldsymbol{L}_{X_1}\omega(Y) =$

$=0$, см (13). Далее, Y принадлежит $\boldsymbol{h}_2$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{h}_1$ содержит вместе с Y все производные $\boldsymbol{L}_{X_1}Y$, $\boldsymbol{L}_{X_2}\boldsymbol{L}_{X_1}Y$, т. е. $\omega(Y)=\boldsymbol{L}_{X_1}\omega(Y)=\boldsymbol{L}_{X_2}\boldsymbol{L}_{X_1}\omega(Y)=0$ и т. д.

Предложение 28 позволяет определить башню подалгебр $\boldsymbol{h}_0\supset\boldsymbol{h}_1\supset\boldsymbol{h}_2\supset\ldots$. Пусть $du^p=\xi_i^p\theta^i$ $(1\leqslant p\leqslant n=\dim V;\ 1\leqslant i\leqslant\leqslant r=\dim G)$ дифференциальные уравнения инвариантности пространства [16, с. 287]. Рассмотрим на G систему левоинвариантных форм $\vartheta^p=\xi_i^p\theta^i$, где величины (ξ_i^p) вычислены в точке u_0.

Предложение 29. *Подалгебра* $\boldsymbol{h}_\lambda$ *является аннулятором системы форм*

$$\vartheta^p,\ \boldsymbol{L}_{X_1}\vartheta^p,\ \ldots,\ \boldsymbol{L}_{X_\lambda}\ldots\boldsymbol{L}_{X_1}\vartheta^p. \tag{38}$$

Доказательство. $H(0)$ определяется вполне интегрируемой системой Пфаффа $\vartheta^p=0$. Система Пфаффа, определяемая формами (38), также вполне интегрируема (см. предложение 7). Из предложения 28 следует, что этой системой и определяется H_λ.

Если необходимо, формы (38) можно выразить через формы (36): полагая $X_\lambda=R_ix_\lambda^i$, получаем $\boldsymbol{L}_{X_\lambda}\ldots\boldsymbol{L}_{X_1}\vartheta^p=\xi_i^p\theta^i_{j_1\ldots j_\lambda}x_1^{j_1}\ldots x_\lambda^{j_\lambda}$.

Примечание. При образовании форм (38) можно снять требование $X_\lambda\in\boldsymbol{h}_{\lambda-2}\setminus\boldsymbol{h}_{\lambda-1}$. Тогда речь пойдет просто о многократном дифференцировании Ли форм (ϑ^i). Формы (38), где векторы $X_1,\ldots,\ldots,X_\lambda$ пробегает всю алгебру $\boldsymbol{g}$, или, что то же, формы $\xi_i^p\theta^i$, $\xi_i^p\theta^i_j,\ \ldots,\ \xi_i^p\theta^i_{j_1\ldots j_\lambda}$ определяют в G нормальный делитель $N_\lambda=\bigcap\limits_{a\in G}aH_\lambda a^{-1}$. Нормальная башня $N_0\supset N_1\supset N_2\supset\ldots$ определяет изотропию однородного пространства: если формы (θ^i) разбить на группы (θ^ρ,θ^a), $1\leqslant\rho,\ \sigma\leqslant m;\ m+1\leqslant a,\ b\leqslant r$ так, чтобы подалгебра $\boldsymbol{h}_0$ была аннулятором форм (θ^a), то $\xi_\rho^p=0$, $c^a_{\rho\delta}=0$ и N_λ определится формами θ^a, $c^a_{b\rho}\theta^\rho,\ \ldots,\ c^a_{b_1\rho_1}c^{\rho_1}_{b_2\rho_2}\ldots c^{\rho_{\lambda-1}}_{b_\lambda\rho_\lambda}\theta^{\rho_\lambda}$ [см. 8, с. 35].

Пример 1. Аффинная группа в $\boldsymbol{R}^n:\tilde{u}^i=a^i_ju^j+a^i$. Уравнения инвариантности пространства имеют вид $du^i=\theta^i_ju^j+\theta^i$, где $\theta^i_j=-\bar{a}^i_k\,da^k_j$, $\theta^i=-\bar{a}^i_k\,da^k$ — левоинвариантные формы группы, удовлетворяющие структурным уравнениям $D\theta^i_j=\theta^i_k\wedge\theta^k_j$, $D\theta^i=\theta^i_k\wedge\theta^k$. Подгруппа H_0 определяется системой Пфаффа $\vartheta^i=0$, где $\vartheta^i=\theta^i_ju_0^j+\theta^i$. Пусть $X\in\boldsymbol{g}\setminus\boldsymbol{h}_0$, $x^i_j=\theta^i_j(X)$, $x^i=\theta^i(X)$, $X^i=\vartheta^i(X)$. При $X^i=0$ вектор X принадлежал бы $\boldsymbol{h}_0$. Из $D\vartheta^i=\theta^i_k\wedge\vartheta^k$, согласно правилу $\boldsymbol{L}_X\vartheta^i(\cdot)=D\vartheta^i(X,\ \cdot)$, находим формы $\boldsymbol{L}_X\vartheta^i=x^i_j\vartheta^j-\theta^i_jX^j$. Подгруппа H_1 определяется системой Пфаффа $\vartheta^i=0$, $\theta^i_jX^j=0$. Отсюда, впрочем, видим, что $N_1=\{e\}$ (порядок изотропии равен 1). Для определения подгруппы H_2 фиксируем вектор $Y\in\boldsymbol{h}_1\setminus\boldsymbol{h}_2$, применяем оператор $\boldsymbol{L}_X$ к $D\vartheta^i=\theta^i_j\wedge\vartheta^j$: $D\boldsymbol{L}_X\vartheta^i=\boldsymbol{L}_X\theta^i_j\wedge\vartheta^j+\theta^i_j\wedge\boldsymbol{L}_X\vartheta^j$ и находим $\boldsymbol{L}_Y\boldsymbol{L}_X\vartheta^i=\boldsymbol{L}_X\theta^i_j(Y)\,\vartheta^j-$

$-L_X\theta^i_jY^j+y^i_jL_X\vartheta^j-\theta^i_jL_X\vartheta^j(Y)$. Здесь $Y^j=\vartheta^j(Y)=0$, $y^i_j=\theta^i_j(Y)$ и $L_X\vartheta^j(Y)=-y^i_kX^k$. Поэтому H_2 определяется системой Пфаффа $\vartheta^i=0$, $\theta^i_jX^j=0$, $\theta^i_ky^k_jX^j=0$. Аналогично определяются подгруппы $H_3\supset H_4\supset\cdots$.

Пример 2. Проективная группа в $\boldsymbol{R}^n$ [16, с. 356]: $du^i=\theta^i_ju^j-\theta_ju^iu^j+\theta^i$. Структурные уравнения [8, с. 57]: $D\theta^i=\theta^i_j\wedge\theta^j$, $D\theta^i_j=\theta^i_k\wedge\theta^k_j-(\delta^i_k\theta_j+\delta^i_j\theta_k)\wedge\theta^k$, $D\theta_j=\theta_k\wedge\theta^k_j$. Подгруппа H_0 определяется системой Пфаффа $\vartheta^i=0$, где $\vartheta^i=\theta^i_ju^j_0-\theta_ju^i_0u^j_0+\theta^i$. Пусть $X\in g\setminus \boldsymbol{h}_0$. Из $D\vartheta^i=\vartheta^i_j\wedge\vartheta^j$, $\vartheta^i_j=\theta^i_j-(\delta^i_j\theta_k+\delta^i_k\theta_j)\,u^k_0$ находим $L_X\vartheta^i=X^i_j\vartheta^j-\vartheta^i_jX^j$, где $X^i_j=\vartheta^i_j(X)$, $X^j=\vartheta^j(X)$. Подгруппа H_1 определяется системой $\vartheta^i=0$, $\vartheta^i_jX^j=0$. Пусть $Y\in\boldsymbol{h}_0\setminus\boldsymbol{h}_1$. Из $DL_X\vartheta^i=L_X\vartheta^i_j\wedge\vartheta^j+\vartheta^i_j\wedge L_X\vartheta^j$ находим $L_YL_X\vartheta^i=L_X\vartheta^i_j(Y)\,\vartheta^j-L_X\vartheta^i_jY^j+Y^i_jL_X\vartheta^j-\vartheta^i_jL_X\vartheta^j(Y)$, где $Y^j=\vartheta^j(Y)=0$, $Y^i_j=\vartheta^i_j(Y)$, $L_X\vartheta^j(Y)=-Y^i_jX^j$. Подгруппа H_2 определяется системой Пфаффа $\vartheta^i=0$, $\vartheta^i_jX^j=0$, $\vartheta^i_jY^j_kX^k=0$. Аналогично определяются подгруппы $H_3\supset H_4\supset\ldots$. Что касается групп изотропии, то, очевидно, $N_1\neq\neq\{e\}$. Для определения N_2 положим $Y^i\neq0$; тогда к условиям $\vartheta^i=\vartheta^i_j=0$ добавится еще условие $L_X\vartheta^i_j=0$, $\forall X\in\boldsymbol{g}$, что приводит к $N_2\{e\}$ (порядок изотропии равен 2).

Список литературы: 1. *Лаптев Б. Л.* Дифференцирование Ли.— Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия, 1965 / ВИНИТИ АН СССР. М., 1967, с. 429—465. 2. *Схоутен И. А., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1, М.—Л., ГОНТИ, 1939. 182 с. 3. *Vranceanu G.* Leçons de Géométrie Différentielle, vol. 1. Bucuresti, 1957. 344 p. 4. *Шевалле К.* Теория групп Ли, т. 1. М., ИЛ, 1948. 315 с. 5. *Номидзу К.* Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., ИЛ, 1960. 128 с. 6. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. М., ИЛ. 1960. 216 с. 7. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., Мир, 1975. 350 с. 8. *Лумисте Ю. Г.* Связности в расслоенных пространствах с однородными слоями. Тарту, 1977. 63 с. 9. *Рахула М. О.* Инфинитезимальная связность в расслоении.— Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. М., 1977, т. 8, с. 163—182. 10. *Рахула М. О.* Дифференцирование Ли в теории связностей.— Труды геометр. семинаров. Казань, 1975, т. 8, с. 85—88. 11. *Ленг С.* Алгебра. М., Мир, 1968. 564 с. 12. *Auslander L., Mackenzie R.* Introduction to differentiable manifolds. N. Y.— London, 1963. 13. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М., Мир, 1970. 412 с. 14. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., Мир, 1970. 442 с. 15. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. М., ИЛ, 1947. 360 с. 16. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.— Тр. Моск. Мат. о-ва, 1953, т. 2, с. 276—382.

Поступила 30 октября 1978 г.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном эвклидовом пространстве. Аминов Ю. А.— Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 3—16.

Находится выражение метрики грассманова образа поверхности через ее локальные инварианты, а также отношение элементов площадей грассманова образа и поверхности. Для кривизны $\overline{K}$ грассманова многообразия $G_{2,4}$ для площадки, касательной к грассманову образу поверхности F^2 из E^4 получено выражение $\overline{K} = (K^2 + 4a^2b^2)/[K^2 + 4(\alpha^2b^2 + \beta^2a^2)]$, где K — гауссова кривизна F^2; a и b — полуоси эллипса нормальной кривизны; α и β — координаты его центра в нормальной плоскости. Рассматривается задача определения поверхности F^2 по заданному грассманову образу.

Рассмотрены проекции поверхности F^2 на трехмерные пространства. Список лит.: 3 назв.

УДК 513

О поверхностях эллиптического пространства, несущих бесконечное множество сетей переноса. Бланк Я. П., Королев Е. А.— Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 16—24.

Доказывается, что единственными поверхностями эллиптического пространства, несущими бесконечное множество сетей переноса, служат линейчатые поверхности с образующими — параллелями Клифорда. Список лит.: 6 назв.

УДК 513

О характеристических классах Понтрягина компактной поверхности в сферическом пространстве. Борисенко А. А.— Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 24—30.

Показано, что внутренняя s-мерная кривизна k-седловой поверхности в евклидовом пространстве удовлетворяет следующему условию: $(-1)^{k-1}\gamma_{2(k-1)} \geqslant 0$, $\gamma_{2k} = 0$. Если ранг второй квадратичной формы компактной поверхности F^l в сферическом пространстве $S^{l+p} \leqslant r_0$, то характеристические классы Понтрягина $p_k(F^l) = 0$ при $k > r_0$. Список лит.: 7 назв.

УДК 513

О поверхностях отрицательной внешней кривизны с полем главных направлений. Борисенко А. А. — Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 30—32.

Рассматриваются компактные поверхности F^l в сферическом пространстве S^n, на которых существует поле главных направлений. Список лит.: 6 назв.

УДК 513

О строении общей выпуклой гиперповерхности гильбертова пространства. Горзий Т. А., Гулида Л. Л. — Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 32—34.

Рассматривается связь между строением полных общих выпуклых гиперповерхностей вещественного сепарабельного гильбертова пространства и строением их сферического изображения. Список лит.: 6 назв.

УДК 513

О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами. Гурин А. М.— Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник, Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 34—40.

Рассматриваются в евклидовом трехмерном пространстве выпуклые многогранники, у которых каждая вершина составлена из равных плоских углов. Ил. 5. Список лит.: 3 назв.

УДК 513

Максимально подвижные пространства линейных элементов аффинной связности. II. Егоров А. И.— Украинский геометрический сборник. Респ. межвед. наук. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 41—50.

Устанавливается связь между алгебраической структурой фундаментального объекта, задающего аффинную связность в пространстве линейных элементов, и максимальным порядком групп движений, допускаемых этим пространством. Список лит.: 3 назв.

УДК 513

Алгебраические поверхности с группой симметрий многогранника 3_{21}. Игнатенко В. Ф.— Украинский геомерический сборник, вып. 3. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 50—56.

В пространстве E^7 найдены образующие алгебры полиномов, инвариантных относительно группы симметрий многогранника 3_{21}. Как следствие, в пространстве E^4 получены образующие алгебры полиномов, инвариантных относительно групп симметрий правильного 24-гранника. Список лит.: 20 назв.

УДК 513

К вопросу о расслоении комплекса прямых в нормальные конгруэнции. Кованцов Н. И., Раднаа Ч.— Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 56—65.

Доказывается, что если коэффициент a в уравнении $\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega$ расслоения комплекса есть произвольная дифференцируемая функция, зависящая как от кривизны комплекса, так и от абсциссы точки луча, то комплекс, допускающий функциональное расслоение, есть линейный. В случае, когда этот коэффициент есть дробно-рациональная функция от абсциссы t точки луча, уравнение расслоения будет интегрируемо, если t удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению. Список лит.: 8 назв.

УДК 513

Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в E^{n+1} по второй элементарной симметрической функции ее условных радиусов кривизны. Кокарев В. Н.— Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 65—74.

В случае, когда «условная сфера» E в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве достаточно мало отличается от сферы, получена оценка сверху для главных радиусов нормальной кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в зависимости от второй элементарной симметрической функции ее условных радиусов кривизны и параметров E. Список лит.: 4 назв.

УДК 513

О поверхностях с полем главных направлений в пространствах постоянной кривизны. Лисица В. Т. — Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник, Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 74—84.

В работе доказывается теорема:

Пусть поверхность M^n отрицательной внешней кривизны в пространстве R^m постоянной кривизны в каждой точке $x \in M^n$ имеет n главных направлений $X_1, \dots, X_n$. Если внешние секционные кривизны поверхности M^n обладают следующими свойствами: 1) $K_{ir} = K_{is}$ и $\frac{\partial K_{ir}}{\partial x_t} = 0$; 2) $K_{ir} \neq K_{st}$ ($i = 1, \dots, p$; $r, s, t = p + 1, \dots, n$), то интегральные подмногообразия F^p распределения главных направлений $X_1, \dots, X_p$ являются вполне геодезическими в M^n и принадлежат $(m - n + p)$-мерным вполне геодезическим подпространствам R^m. Список лит.: 7 назв.

УДК 513

Разбиение E^n на пространственные кресты. Медяник А. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 84—90.

Доказано, что существует столько существенно различных решетчатых разбиений E^n на конгруэнтные пространственные кресты, сколько имеется различных разложений числа $2n+1$ на отличные от 1 множители $m_1, m_2, \dots, m_s$, каждый из которых, начиная со второго, является делителем предыдущего. Список лит.: 4 назв.

УДК 513

О голоморфно-проективных отображениях келеровых пространств. Микеш Й. — Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник, Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 90—98.

В работе продолжается исследование голоморфно-проективных отображений келеровых пространств, сохраняющих почти комплексную структуру (ГПО). Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Однозначная определенность общих замкнутых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского. Милка А. Д. — Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 99—107.

Доказываются теоремы об однозначной определенности метрикой ограниченных, в частности — замкнутых, общих выпуклых поверхностей в трехмерном пространстве Лобачевского. Список лит.: 11 назв.

УДК 513

H/K-расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции. Мягков В. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980, с. 107—120.

Рассматривается случай функционального расслоения комплекса в нормальные конгруэнции. Список лит.: 7 назв.

УДК 513

Дифференцирование Ли на многообразиях. Рахула М. О. — Украинский геометрический сборник, вып. 23. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1980 с. 120—134.

Изучается функториальная природа дифференцирования Ли и разрабатывается соответствующий аппарат в общем неголономном базисе. Список лит.: 16 назв.