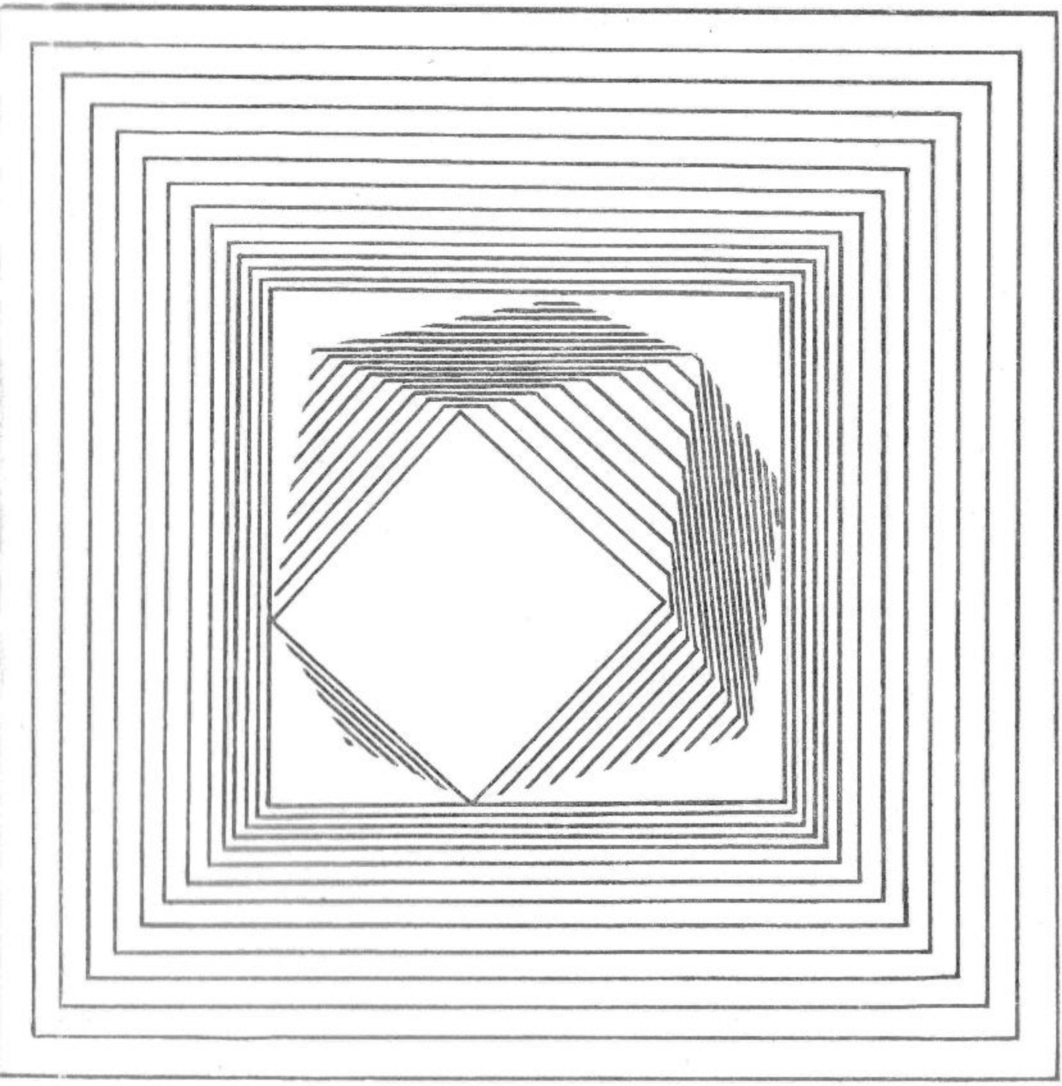
ISSN 0135-6992

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 22



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 22

Республиканский
межведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ „ВИЩА ШКОЛА"
1979

УДК 513

Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, 137+7 с.

Большая часть статей посвящена геометрии «в целом» (реализация n-мерной метрики в m-мерном пространстве, свойства седловых поверхностей, устойчивость в проблеме Минковского, изгибание поверхностей со связями, разбиение E^n на конгруэнтные невыпуклые тела). Остальные статьи относятся к различным вопросам: существование поверхности с заданными кривизной и ребром возврата, свойства замкнутых кривых в E^n, устойчивость областей минимальных подмногообразий, минимальные поверхности с цилиндро-конической сетью, подвижность пространств линейных элементов, симметрия поверхностей, геометрия неголономных многообразий, геометрия расслоений. Сборник предназначен для научных работников математических специальностей.

Списки лит. в конце статей.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-92, 40-17-24.

Редакция естественнонаучной литературы

У $\frac{20203-676}{М226(04)-79}$ 427—79 1 702 040 000

УДК 513

Ю. А. Аминов

Ю. А. Аминов

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ЯКОБИ И ЭННЕПЕРА О КРИВЫХ

В теории кривых в трехмерном евклидовом пространстве E^3 известна следующая теорема Якоби: сферическая индикатриса главных нормалей замкнутой кривой разбивает единичную сферу на две равновеликие области*.

Для того чтобы фигурирующие в формулировке теоремы понятия были однозначно определены, кривая должна удовлетворять условиям: кривизна ее $k \neq 0$ и индикатриса главных нормалей не имеет самопересечений.

Рассмотрим обобщение этой теоремы для замкнутых кривых в E^n. Пусть кривая Γ расположена в E^n, s — ее длина дуги и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — сопровождающий натуральный репер. Предполагая, что кривизны кривой $k_i \neq 0$, рассмотрим индикатрису нормалей $\xi_i(s)$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, т. е. кривую на единичной сфере S^{n-1}, полученную откладыванием вектора ξ_i от фиксированной точки в E^n. Индикатрису обозначим через γ_i. Для каждого i такого, что $2 \leqslant i \leqslant n-1$, определим плоскость T_i, проведенную через ξ_{i-1} и ξ_{i+1}. Кривая γ_i и плоскость T_i вдоль нее определяют полосу Φ_i.

Теорема 1. *Пусть F^2 — двумерная односвязная ориентируемая поверхность в сфере S^{n-1}, имеющая границей индикатрису γ_i и касающаяся полосы Φ_i. Тогда интегральная гауссова кривизна F^2,*

$$\int_{F^2} K dS = 2\pi.$$

Для доказательства этой теоремы используем формулу Гаусса—Бонне

$$\int_{F^2} K\, dS = -\int_{\gamma_i} \frac{dt}{\rho_g} + 2\pi,$$

где t — длина дуги γ_i, $1/\rho_g$ — ее геодезическая кривизна на поверхности F^2.

Найдем выражение контурного интеграла в правой части этой формулы. Геодезическая кривизна $1/\rho_g$ кривой γ_i на F^2 есть с

---

* *Jacobi C. G. J.* Über einige merkwürdige Curventheoreme.— «Astronomische Nachrichten», 1843, Bd 20, S. 115—120.

точностью до знака длина проекции вектора кривизны кривой γ_i на плоскость T_i. Запишем единичный касательный вектор ν_i к индикатрисе γ_i:

$$\nu_i = \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d\xi_i}{ds}\frac{ds}{dt} = -\frac{k_{i-1}}{\sqrt{k_{i-1}^2 + k_i^2}}\xi_{i-1} + \frac{k_i}{\sqrt{k_{i-1}^2 + k_i^2}}\xi_{i+1} = \\ = \cos\alpha\xi_{i-1} + \sin\alpha\xi_{i+1},$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{k_i}{k_{i-1}}$. Так как $|\nu_i| = 1$, то отсюда находим $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{k_{i-1}^2 + k_i^2}}$.

Запишем вектор главной кривизны кривой γ_i

$$\frac{d\nu_i}{dt} = \left(\cos\alpha\frac{d\xi_{i-1}}{ds} + \sin\alpha\frac{d\xi_{i+1}}{ds}\right)\frac{ds}{dt} + (-\sin\alpha\xi_{i-1} + \cos\alpha\xi_{i+1})\frac{d\alpha}{dt}.$$

При вычислении $\frac{d\nu_i}{dt}$ воспользуемся формулами Френе

$$\frac{d\xi_{i-1}}{ds} = -k_{i-2}\xi_{i-2} + k_{i-1}\xi_i, \quad \frac{d\xi_{i+1}}{ds} = -k_i\xi_i + k_{i+1}\xi_{i+2}.$$

Тогда получим

$$\frac{d\nu_i}{dt} = \frac{k_{i-2}k_{i-1}}{k_{i-1}^2 + k_i^2}\xi_{i-2} - \xi_i + \frac{k_{i+1}k_i}{k_{i-1}^2 + k_i^2}\xi_{i+2} + \\ + \left(-\sin\alpha\xi_{i-1} + \cos\alpha\xi_{i+1}\right)\frac{d\alpha}{dt}.$$

Последний член в этом выражении дает проекцию на плоскость T_i. Следовательно, искомая геодезическая кривизна $\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dt}$. Так как по условию $k_i \neq 0$, то угол α однозначно определен на кривой γ_i, и поэтому $\int\limits_{\gamma_i}\frac{dt}{\rho_g} = \int\limits_{\gamma_i}\frac{d\alpha}{dt}dt = 0$. Утверждение теоремы вытекает из формулы Гаусса—Бонне.

Заметим, что проекция вектора $\frac{d\nu_i}{dt}$ на пространство, определяемое векторами $\nu_i, \xi_1, \ldots, \xi_{i-3}, \xi_{i+3}, \ldots, \xi_n$, равна нулю. Поэтому геодезическая кривизна линии γ_i на поверхности, касающейся ν_i и вектора, являющегося линейной комбинацией векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{i-3}, \xi_{i+3}, \ldots, \xi_n$, равна нулю.

Далее рассмотрим обобщение теоремы Эннепера о кручении асимптотических линий на поверхности отрицательной кривизны. Пусть F^2 — двумерная поверхность в E^n, на которой имеется асимптотическая линия Г, т. е. линия, вектор главной нормали которой расположен в касательной плоскости. Гауссова кривизна

K поверхности неположительна, а эллипс нормальной кривизны в точках $x \in \Gamma$ проходит через точку x. Введем на поверхности координаты u, v такие, что кривая Γ является координатной линией $v = 0$ и параметр u на Γ является длиной дуги. Линии v проведем ортогонально к Γ. Тогда в точках Γ будет $ds^2 = du^2 + Gdv^2$.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — сопровождающий натуральный репер для асимптотической линии Γ, k_i — кривизны Γ. Так как ξ_1, ξ_2 лежат в касательной плоскости, то $\xi_3, \ldots, \xi_n$ лежат в нормальном пространстве. Возьмем их за базисные векторы нормального пространства и найдем соответствующие им коэффициенты вторых квадратичных форм L_{ij}^k. Имеем $L_{11}^k = (\boldsymbol{r}_{uv}\xi_k) = 0$, $k = 3, \ldots, n$; $L_{12}^3 = (\boldsymbol{r}_{uv}\xi_3) = -(\boldsymbol{r}_v\xi_{3u}) = k_2G$; $L_{12}^i = (\boldsymbol{r}_{uv}\xi_i) = -(\boldsymbol{r}_v, -k_{i-1}\xi_{i-1} + k_i\xi_{i+1}) = 0$, $i > 3$. Используя эти выражения, найдем гауссову кривизну

$$K = \frac{1}{G}\sum_{k=3}^{n}[L_{11}^kL_{22}^k - (L_{12}^k)^2] = -k_2^2.$$

Следовательно, имеет место обобщение теоремы Эннепера.

Теорема 2. *Кручение асимптотических линий (вторая кривизна) на двумерной поверхности в E^n, с гауссовой кривизной K равно $\pm\sqrt{-K}$. Для поверхности в E^4 с гауссовой кривизной $K \neq 0$ вектор ξ_3 касается эллипса нормальной кривизны в точке x.*

Действительно, пусть прямая, проведенная через точку x в направлении ξ_3, пересекает эллипс нормальной кривизны еще в некоторой точке y, $y \neq x$. Введем на F^2 координаты так, что линия v касается направления в точке x, для которого соответствующий вектор нормальной кривизны равен xy. Тогда $L_{22}^4 = (\boldsymbol{r}_{vv}\xi_4) = 0$. Ранее мы нашли, что $L_{11}^4 = L_{12}^4 = 0$. Поэтому вторая квадратичная форма для ξ_4 тождественно равна нулю, т. е. эллипс нормальной кривизны вырождается в отрезок прямой с направлением ξ_3.

Поступила 15 января 1978 г.

УДК 513

Н. Г. Ананов

ОЦЕНКИ ЭКВИВАРИАНТНОГО ДИАМЕТРА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА КРИВИЗНУ

1. Введение. Пусть M — связное топологическое многообразие с метрикой ρ. Ньюмен [1] доказал существование такого числа $D_0 = D_0(M, \rho) > 0$, что любая компактная группа изометрий, действующая эффективно на M, имеет хоть одну орбиту с диаметром, не меньшим, чем D_0. Для компактных римановых многообразий были получены в [2, 3] оценки D_0 снизу через параметры метрики ρ.

В предлагаемой статье эти результаты будут распространены на случай некомпактных M и некомпактных групп изометрий, а также будут ослаблены требования выпуклости, наложенные в [2]. Попутно будет устранена неточность, содержащаяся в [3].

1.1. Определение. *Пусть $I(M)$ — группа изометрий M, G — ее подгруппа. Эквивариантным диаметром многообразия M называют величину* $D(M, \rho) = \inf\limits_{\{e\} \neq G \subset I(M)} \sup\{\rho(m, g(m)) \mid g \in G, m \in M\}$ (в отличие от [1—3] здесь не будет требоваться компактность G).

2. Обозначения. Здесь M — всегда полное риманово многообразие размерности n; для краткости обозначим $D(M, \rho) = D(M)$; K_σ — кривизна по двумерному направлению σ (секционная кривизна). Неравенства, включающие K_σ, предполагаются выполненными при всех σ. Все геодезические считаем нормальными, все кратчайшие — нормальными геодезическими.

3. Многообразия с кривизной, ограниченной сверху.

3.1. **Теорема.** *Пусть M — полное риманово многообразие с $K_\sigma \leqslant 1$. Если его радиус инъективности $r_i \geqslant \pi$, то $D(M) \geqslant 2\pi/3$.*

Из этой теоремы и известной оценки радиуса инъективности (см., напр., [4, с. 98—100]) получаем

3.2. Следствие. *Если M — полное односвязное риманово многообразие с $0 < K_\sigma \leqslant 1$ в четномерном случае и с $\frac{1}{4} < K_\sigma \leqslant 1$ в нечетномерном случае, то $D(M) \geqslant \frac{2}{3}\pi$.*

Из 3.1 и теоремы Топоногова — Шарафутдинова [5] получаем

3.3. Следствие. *Если M — открытое риманово многообразие с $0 < K_\sigma \leqslant 1$, то $D(M) \geqslant \frac{2}{3}\pi$.*

Оценки в 3.1 — 3.3 точны; равенство достигается для действия Z_3 на стандартной сфере S^n.

Для компактных многообразий и групп теорема 3.1 фактически была доказана в [3, теорема 2]. Приведенная там формулировка в нечетномерном случае не верна, ибо автор воспользовался некорректной теоремой из [6].

3.4. Доказательство теоремы 3.1.

1°. Поскольку любая нетривиальная группа содержит циклическую подгруппу, достаточно рассмотреть лишь циклическую группу G.

2°. Пусть теорема неверна, тогда найдутся $g \in I(M)$ и $\lambda_0 > 0$ такие, что для любых $m \in M$ и k натурального выполняется $\rho(m, g^k(m)) \leqslant \frac{2}{3}\pi - \lambda_0 < \frac{2}{3}\pi$.

3°. Пусть $\delta_g(m) = \rho(m, g(m))$. Поскольку $r_i \geqslant \pi$, то существует единственная кратчайшая $\sigma_m: [0, \delta_g(m)] \to M$ такая, что $\sigma_m(0) = m$, $\sigma_m(\delta_g(m)) = g(m)$.

4°. Длины сторон треугольника $mg^k(m)\,g^{k+1}(m)$ ввиду 2° все меньше $2\pi/3-\lambda_0$, т. е. его периметр $<2\pi-3\lambda_0$. Поэтому любая точка $g^k(\sigma_m(t))$ на стороне $g^k(m)\,g^{k+1}(m)$ треугольника удалена от m не более чем на $\pi-3\lambda_0/2=:\pi-\lambda$.

5°. Ломаную $G(\sigma_m)$ обозначим L_m. Поскольку $G(L_m)\subset L_m$, то угол $\varphi(m)$ между $g^k(\sigma_m)$ и $g^{k+1}(\sigma_m)$ в точке $g^{k+1}(m)$ не зависит от k. Поэтому ломаная L_m имеет в каждой своей вершине поворот $\alpha(m):=\pi-\varphi(m)$.

6°. Покажем, что из 4° следует существование точек $m\in M$, для которых $\alpha(m)$ произвольно мал. Вычислим $\alpha(m)$, пользуясь формулой первой вариации длины геодезической. Пусть $V\in T_mM$, $\|V\|=1$. Тогда $\frac{d}{dV}[\delta_g(m)]=\langle g_*V,\ \sigma'_m(\delta_g(m))\rangle-\langle V,\ \sigma'_m(0)\rangle=$ $=\langle V,\ g_*^{-1}\sigma'_m(\delta_g(m))-\sigma'_m(0)\rangle$ **(1)**. Это означает, что

$$\|\nabla\delta_g\|(m)=\|g_*^{-1}\sigma'_m(\delta_g(m))-\sigma'_m(0)\|=\|\sigma'_m(\delta_g(m))-$$
$$-g_*\sigma'_m(0)\|=2\sin\frac{1}{2}\alpha(m).$$

Если для некоторой точки m_0 будет $\nabla\delta_g(m_0)=0$, то утверждение доказано. В противном случае обозначим через m_t линию градиента функции δ_g. Тогда $\delta_g(m_t)$ — гладкая монотонная ограниченная числом $2\pi/3$ функция от $t\in[0,+\infty)$. Значит, существует такая последовательность чисел $t_k>0$, что $\alpha(m_{t_k})\to 0$. Утверждение доказано.

Зафиксируем $\varepsilon>0$; его значение будет уточнено в 13°. Ниже, в 7°—12° точку m считаем выбранной так, что $\alpha(m)<\varepsilon$.

7°. Подразобьем ломаную L_m так, чтобы длины ее звеньев оказались меньше $\lambda/2$. Обозначим $m=p^0,\ p^1,\ \ldots$ вершины подразбитой L_m в порядке их следования на этой ломаной. Пусть L^N — участок L_m с началом в m, насчитывающий конечное число N звеньев и имеющий длину $>2\pi$. Ясно, что поворот $\tau_M(p^k)$ ломаной L^N в каждой ее вершине не превосходит ε.

8°. Соединив m с каждой из точек ломаной L^N кратчайшей (такая кратчайшая единственна), получим кусочно-гладкую поверхность Ω_0. По теореме Гаусса кривизна Ω_0 в любой ее гладкой точке не превосходит 1. Край Ω_0 состоит из L^N и кратчайшей l^N, соединяющей m с p^N.

9°. Обозначим через $\tau_0(p^k)$ поворот ломаной L^N на Ω_0. Покажем, что $|\tau_0(p^k)|\leqslant\tau_M(p^k)$. Обозначим углы треугольника mp^kp^{k+1} соответственно через $\gamma_k,\ \varphi_k,\ \theta_k$. Тогда по неравенству треугольника для углов имеем $\tau_M(p^k)\geqslant|\theta_k-(\pi-\varphi_k)|=|\pi-(\varphi_k+\theta_k)|=$ $=|\tau_0(p^k)|$.

10°. Согласно 4° и 7° периметр треугольника mp^kp^{k+1} не превосходит $2(\pi-\lambda)+\lambda/2<2\pi$. Следовательно, на сфере S^2 существует треугольник $m^0m^km^{k+1}$ со сторонами, по длине равными соответствующим сторонам треугольника mp^kp^{k+1}. Ясно, что эти треугольники можно расположить на S^2 так, чтобы $m^0m^km^{k+1}$ и $m^0 m^{k+1}m^{k+2}$ пересекались в точности по отрезку $m^\circ m^{k+1}$. Тогда треугольники $m^0m^km^{k+1}$ совместно образуют поверхность Ω, погруженную в S^2, быть может с точкой ветвления m^0. Край Ω состоит из ломаной L с вершинами m^k и кратчайшей l с концами m^0 и m^N.

По теореме Александрова о сравнении углов [7] углы треугольника $m^0m^km^{k+1}$ не меньше соответствующих углов треугольника mp^kp^{k+1}. Следовательно, $\tau^+(m^k) \leqslant \tau_0^+(p^k)$, где $\tau^+(m^k)$ и $\tau_0^+(p^k)$ — положительный со стороны Ω (соответственно Ω_0) поворот ломаной L (L_0) в вершине $m^k\,(p^k)$.

11°. Из 7°, 9° и 10° имеем

$$\tau^+(m^k) \leqslant \tau_0^+(p^k) \leqslant |\tau_0(p^k)| \leqslant \tau_M(p^k) < \varepsilon. \tag{2}$$

12°. Следующее утверждение относится к геометрии стандартной сферы. Покажем, что (2) влечет неравенство $\max\{\beta_k \mid 1 \leqslant k \leqslant N\} \leqslant C\varepsilon$, где β_k — угол при вершине m^{k+1} треугольника $m^0m^km^{k+1}$; C — константа, зависящая лишь от N и λ. Пусть S_k — площадь треугольника $m^0m^km^{k+1}$. Ясно, что

$$\beta_k \leqslant \beta_{k-1} + \tau^+(m^{k-1}) + S_k \leqslant \beta_{k-1} + \varepsilon + S_k. \tag{3}$$

Если в сферическом треугольнике с углом $\pi - \varphi$ сумма прилегающих к этому углу сторон не превосходит $\pi - \lambda/2 < \pi$, то, как нетрудно показать, площадь S этого треугольника допускает оценку

$$S \leqslant c_\lambda \varphi, \tag{4}$$

где c_λ — константа, зависящая лишь от λ. Учитывая 4° и 7°, из (4) для $\varphi = \beta_{k-1} + \varepsilon$ находим, что $\beta_k \leqslant (\beta_{k-1} + \varepsilon)(1 + c_\lambda)$. Отсюда по индукции следует

$$\beta_k \leqslant \varepsilon P_k(c_\lambda), \tag{5}$$

где P_k — некоторый многочлен степени k. Поэтому

$$\max\{\beta_k \mid 1 \leqslant k \leqslant N\} \leqslant \max\{P_k(c_\lambda)\,\varepsilon \mid 1 \leqslant k \leqslant N\} =: C\varepsilon.$$

13°. Полагая в 6° $\varepsilon := \pi/3C$, получим

$$\max\{\beta_k \mid 1 \leqslant k \leqslant N\} \leqslant \pi/3. \tag{6}$$

Учитывая произвол в разбиении L_m в 7°, из неравенства (6) заключаем, что точка, пробегающая с единичной скоростью ломаную L^N, удаляется от m со скоростью, не меньшей, чем $\cos\frac{\pi}{3} = 1/2$. Поскольку длина L^N больше 2π, для выбранной точки m ломаная $L^N \not\subset D(m, \pi - \lambda)$, что противоречит 4°.

4. Пространства знакопостоянной кривизны.

4.1. Определение. *Подмножество D пространства M называется соответственно (a) выпуклым, (b) строго выпуклым, (c) сильно выпуклым, если для любых двух точек этого подмно-*

жества (a) существует соединяющая их кратчайшая, лежащая в D, (b) существует соединяющая их кратчайшая, лежащая в $\operatorname{int} D$, *(c) любая соединяющая их кратчайшая лежит в* D.

4.2. *Замечание.* Открытое выпуклое множество сильно выпукло. Действительно, пусть D — открыто, γ и σ — кратчайшие, соединяющие x и y, причем $\gamma \not\subset D$, $\sigma \not\subset D$. Существует $t > 0$ такое, что сужение σ_t кратчайшей σ на $[0, t]$ лежит в D. Пусть γ_t — кратчайшая, соединяющая $\sigma(t)$ с y. Тогда длина $\sigma_t \cup \gamma_t$ равна $\rho(x, y)$, что невозможно ввиду негладкости $\sigma_t \cup \gamma_t$.

4.3. Обозначим через $r_c(m)$, $r_s(m)$ супремум тех $r > 0$, для которых все шары $D(m, x)$, $0 < x < r$, являются соответственно выпуклыми или сильно выпуклыми.

Следующее утверждение, по-видимому, известно. Для удобства читателя приводим его полностью.

4.4. Лемма. *Пусть m — точка риманова многообразия с $K_\sigma \leqslant 0$. Тогда $r_c(m) = r_s(m)$ и шар $D(m, r_c(m))$ не содержит двуугольников.*

Доказательство. 1°. Пусть $\gamma(t)$ — отрезок геодезической в $D(m, r_c(m))$. Поскольку шары $D(m, x)$ выпуклы при $x < r_c(m)$, то в $D(m, r_c(m))$ нет двуугольников с вершиной в m. Неотрицательность кривизны влечет отсутствие сопряженных точек. Последние два факта означают, что функция $\rho(m, \gamma(t)) \in C^\infty$, если γ не проходит через m. По формуле второй вариации длины геодезической имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}[\rho(m, \gamma(t))] \geqslant \| \nabla_T V \wedge T \|^2 \geqslant 0, \tag{7}$$

где T — радиальное поле, V — поле вариации отрезка, соединяющего m с $\gamma(t)$. Равенство $\frac{d^2}{dt^2}[\rho(m, \gamma(t))] = 0$ достигается только в случае, если V коллинеарно T.

2°. Из неравенства (7) следует *a*) $\max\limits_t \rho(m, \gamma(t))$ достигается только на концах отрезка, значит, $r_c(m) = r_s(m)$; *b*) в $D(m, r_s(m))$ нет бесконечных (в частности замкнутых) геодезических.

3°. Выведем из *b*) факт отсутствия двуугольников в $D(m, r_c(m))$. Предположим, что в $D(m, r_c(m))$ есть негладкий двуугольник. Пользуясь стандартным приемом, его можно сократить. Применимость этого приема обеспечивается выпуклостью касательного конуса множества $D(m, r_c(m))$. Значит, кратчайший из двуугольников есть замкнутая геодезическая.

4.5. Лемма. *Пусть группа G_0 действует на M изометриями без неподвижных точек. Пусть либо все $K_\sigma \geqslant 0$, либо все $K_\sigma \leqslant 0$. Тогда для любой $m \in M$ выполняется неравенство* $\operatorname{diam} G_0(m) \geqslant r_s(m)$.

Доказательство. 1°. Предположим, лемма неверна. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, $m \in M$ и циклическая группа $G \subset G_0$, $G \neq \{e\}$ такая, что орбита $G(m) \subset D(m, r_s(m) - 2\varepsilon)$. Обозначим $D_m := D(m,$

$r_s(m) - \varepsilon)$. Рассмотрим $D = \bigcap_{k \in Z} g^k D_m$, где g — образующая группы G. Ясно, что D — компактное, G-инвариантное множество; $D \supset D(m, \varepsilon)$.

Покажем, что D выпукло. Согласно замечанию 4.2 $\operatorname{int} g^k D_m$ сильно выпукла. Значит, $\bigcap_{k \in Z} \operatorname{int} g^k D_m$ тоже сильно выпукло. Следовательно, $D = \operatorname{cl} \bigcap_{k \in Z} \operatorname{int} g^k D_m$ выпукло.

2°. Ввиду компактности D найдется $m_* \in D$ такое, что $\delta_g(m_*) = \inf\{\delta_g(m_0) \mid m_0 \in D\}$, где $\delta_g(x) = \rho(x, g(x))$. Заметим, что $\delta_g(m_*) \neq 0$, так как G не имеет неподвижных точек.

3°. Введем вектор $V = \sigma'_{m_*}(0) - g_*^{-1}\sigma'_{m_*}(\delta_g(m_*)) \in T_m M$ (ср. 6° доказательства 3.4). $g(m_*) \in D$ ввиду ее G-инвариантности. Отрезок σ_{m_*} лежит в области D в силу ее выпуклости, $g^{-1}(\sigma_{m_*})$ лежит в D ввиду ее G-инвариантности. Вектор V принадлежит касательному конусу множества D в силу выпуклости этого конуса. Если $V \neq 0$, то по формуле (1) имеем $\left(\frac{d}{dV}\delta_g\right)(m_*) < 0$. Значит, $\delta_g(m_*)$ можно сократить, что противоречит 2°.

4°. Поскольку $V = 0$, то $G(m_*)$ лежит на геодезической, содержащейся в D, и, следовательно, в $D(m, r_s(m) - \varepsilon)$. Однако точка, пробегающая бесконечную геодезическую, непременно покинет любой элемент семейства строго выпуклых множеств $\{D(m, r)\}$, где $r \in [0, r_s(m))$ (в частности, геодезическая не может быть замкнутой). В пространстве с $K_\sigma \leqslant 0$ это произойдет в силу п. 2°$b)$ доказательства леммы 4.4, а в пространстве с $K_\sigma \geqslant 0$ — из-за строгой выпуклости функции $\rho(x, \partial D(m, r))$, $r < r_s(m)$ (см., например, 4, с. 143).

4.6. Замечание. Из доказательства видно, что в условиях леммы 4.5 достаточно требовать отсутствия неподвижных точек лишь в шаре $D(m, r)$, где $r \leqslant r_c(m)$ (соответственно $r \leqslant r_s(m)$). Тогда неравенство $\operatorname{diam} G_0(m) \geqslant r$ остается в силе.

4.7. **Теорема.** *Пусть M — полное риманово многообразие с $K_\sigma \leqslant 0$.* Тогда $D(M) \geqslant R_c\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^{-1} > 0{,}63R_c$, где $R_c := \sup\{r_c(m) \mid m \in M\}$.

Доказательство. 1°. Достаточно проверить, что для циклической группы $G \subset I(M)$ и произвольной точки $m \in M$ существует точка $m_* \in M$ такая, что $\operatorname{diam} G(m_*) \geqslant r_c(m)\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^{-1} =: \sqrt{3}r_0$.

2°. Если в шаре $D(m, \sqrt{3}r_0)$ нет точек, неподвижных относительно действия G, то утверждение 1° выполняется для $m_* = m$ в силу замечания 4.6.

3°. Пусть $D(m, \sqrt{3}r_0)$ есть неподвижная точка p. Рассмотрим $D(p, r_0) \subset D(m, r_c(m))$. Этот шар не содержит двуугольников согласно лемме 4.4. Отсюда, ввиду отсутствия сопряженных точек в M, следует, что сужение $\exp_p$ на шар $D(0, r_0) \subset T_pM$ есть диффеоморфизм. Теперь, учитывая утверждение $2^\circ a$ доказательства леммы 4.4 и выпуклость $D(m, r_c(m))$, видим, что $D(p, r_0)$ — выпуклый шар.

4°. Поскольку $K_\sigma \leqslant 0$, то, по следствию из теоремы Рауха (см., напр., [4, с. 30]), сужение $\exp_p$ на $D(p, r_0)$ есть несжимающий диффеоморфизм выпуклых шаров. Это значит, что $\operatorname{diam} G(\exp_p V) \geqslant \operatorname{diam} G_*(V)$ для любого $V \in D(0, r_0) \subset T_pM$. Здесь G_* — действие группы G в виде группы дифференциалов. В [3] для шаров в евклидовом пространстве показано, что существует $V_* \in D(0, r_0)$ такой, что $\operatorname{diam} G_*(V_*) \geqslant \sqrt{3} r_0$. Значит, для $m_* = \exp_p V_*$ выполняется неравенство $\operatorname{diam} G_*(V_*) \geqslant \sqrt{3} r_0$.

Обозначим $R_s := \sup \{r_s(m) \mid m \in M\}$.

4.8. Теорема. *Пусть M — полное риманово многообразие с $0 \leqslant K_\sigma \leqslant 1$. Тогда $D(M) \geqslant \sqrt{3} R_s (2+\sqrt{3})^{-1} \geqslant 0{,}46 R_s$, если $R_s \leqslant \pi(2+\sqrt{3})/2$, и $D(M) \geqslant 2\pi/3$, если $R_s \geqslant \pi(2+\sqrt{3})/2$.*

Доказательство. 1°. Пусть $r_0 := r_s(m)(2+\sqrt{3})^{-1}$. Достаточно доказать, что для циклической группы $G \subset I(M)$ и произвольной точки $m \in M$ существует точка $m_* \in M$ такая, что $\operatorname{diam} G(m_*) \geqslant \sqrt{3} r_0$, если $r_0 \leqslant \pi/2$, и $\operatorname{diam} G(m_*) \geqslant 2\pi/3$, если $r_0 \geqslant \pi/2$.

2°. Пусть в $D(m, \sqrt{3} r_0)$ нет точек, неподвижных относительно действия группы G. В этом случае справедливость утверждения 1° следует из замечания 4.5 и неравенства $\pi\sqrt{3}/2 > 2\pi/3$.

3°. Пусть в $D(m, \sqrt{3} r_0)$ есть неподвижная точка p. Положим $r = \min\{\pi/2, r_0\}$. Рассмотрим шар $D(p, 2r) \subset D(m, r_s(m))$. В 4°—5° будет показано, что сужение $\exp_p$ на $\operatorname{int} D(p, 2r)$ инъективно.

4°. Если $x, y \in M$ таковы, что $\rho(x, y) < \pi$, то, по теореме сравнения индексов, точки x и y не сопряжены.

5°. Пусть γ — двуугольник с вершиной p, лежащей в $\operatorname{int} D(p, 2r)$. Ввиду 4° и неравенства $2r < \pi$ можно воспользоваться упомянутым в доказательстве леммы 4.4 стандартным приемом сокращения двуугольников. Он позволит изотопно перевести γ в замкнутую геодезическую $\gamma_0 < \operatorname{int} D(m, r_s(m))$, что невозможно в силу п. 2° b доказательства леммы 4.4.

Из теоремы Уайтхеда и 3° следует выпуклость шара $D(p, r)$.

6°. Пусть $q \in S^n$. Введем линейную изометрию $I: T_qS^n \to T_pM$. Поскольку $K_\sigma \leqslant 1$, то по следствию из теоремы Рауха сужение $\varphi := \exp_p \circ I \circ \exp_q^{-1}$ на $D(q, r)$ — несжимающий диффеоморфизм выпуклых шаров. Это значит, что $\operatorname{diam} G(m_0) \geqslant \operatorname{diam} G_1(\varphi(m_0))$ для любой $m_0 \in D(q, r)$. Здесь $G_1 = \varphi^{-1} \circ G \circ \varphi$ — изометрия шара $D(q, r)$.

Несложное вычисление показывает, что в шаре $D(q, y) \subset S^n$ найдется точка $m_{**} = \varphi^{-1}(m_*)$ такая, что $\operatorname{diam} G_1(m_{**}) \geqslant$

$2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right) \geqslant \sqrt{3}\, y$ при $y \leqslant \pi/2$ и $\operatorname{diam} G_1(m_{**}) \geqslant 2\pi/3$ при $y \geqslant \pi/2$. Это значит, что если $r < \pi/2$, то $\operatorname{diam} G(m_*) \geqslant \sqrt{3}\, r$, а если $r \geqslant \pi/2$, то $\operatorname{diam} G(m_*) \geqslant 2\pi/3$.

Известно, что если $K_\sigma > 0$, то $\operatorname{diam} G(m_*) \geqslant 2\pi/3$ для любой $m \in M$. Отсюда по теореме 4.8 получаем

4.9. Следствие. *Пусть* $0 < K_\sigma \leqslant 1$. *Тогда* $D(M) \geqslant \sqrt{3}\, R_c \times (2+\sqrt{3})^{-1} \geqslant 0{,}46 R_c$, *если* $R_c \leqslant \pi(2+\sqrt{3})/2$, *и* $D(M) \geqslant 2\pi/3$, *если* $R_c \geqslant \pi(2+\sqrt{3})/2$.

Из 4.7 и теоремы Уайтхеда получаем

4.10. Следствие. *В условиях теоремы 4.7 имеем*

$$D(M) \geqslant \sqrt{3}\, R_i (4+2\sqrt{3})^{-1} \geqslant 0{,}31 \cdot R_i,$$

где $R_i := \sup\{r_i(m) \mid m \in M\}$.

Из 4.8 и теоремы Уайтхеда получаем

4.11. Следствие. *В условиях теоремы 4.8 будет*

$$D(M) \geqslant \min\{2\pi/3,\ \sqrt{3}\, R_i (4+2\sqrt{3})^{-1}\} \geqslant \min\{2\pi/3,\ 0{,}23 R_i\}.$$

Автор признателен Ю. Д. Бураго за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы: 1. *Newman M. H. A.* A theorem on periodic transformations of spaces.— «Quart. j. math.», 1931, vol. 2, p. 1-9. 2. *Mann L., Sicks J. L.* Newman's theorem in the Riemannian cathegory.— «Trans. Amer. math. soc.», Sept. 1975, vol. 210, p. 259-266. 3. *Mei-Chin Ku.* Newman's theorem for compact Riemannian manifolds.— «Proc. Amer. Math. Soc.», july, 1976, vol. 58, p. 343—346. 4. *Cheeger J., Ebin D.* Comparison theorems in Riemannian geometry. Amst.— Oxf.— N.-Y., 1975. 5. *Шарафутдинов В. А.* Выпуклые множества в римановых многообразиях.— «Сиб. мат. журн.», 1973, т. 14, № 5, с. 1153—1155. 6. *Топоногов В. А.* Оценка длины замкнутой геодезической в компактном римановом пространстве положительной кривизны.— ДАН СССР, 1964, т. 154, с. 1047—1049. 7. *Alexandrov A. D.* Über eine Verallgemainerung der Rirmannschen Geometrie.— «Schriftenreihe Inst. Math. der Deuts. Acad. Wiss. I», Berlin, 1957, S. 33—84.

Поступила 13 октября 1977 г.

УДК 513

А. В. Бритов

О СВОЙСТВАХ НОРМАЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ $N(X_2)$ в A_4

Изучая поверхности D_2 двойственной нормализации в евклидовом пространстве E_4, А. В. Чакмазян обнаружил ряд интересных геометрических свойств поверхности и ее нормального расслоения [1]. В частности, связность этого расслоения плоская, нормальные плоскости огибают поверхность — эволюту, сопряженная сеть этой поверхности — ортогональная. В последние годы довольно интенсивно изучаются нормальные расслоения оснащенных поверхностей в различных пространствах [2—5]: были обнаружены и другие свойства при изучении оснащенных поверхностей, нормальное расслоение которых имеет постоянные векторные поля. Оставалось неясным, являются ли некоторые свойства следствием ортогональности оснащения или менее сильных требований. Предлагаемая статья в теоремах 1—7 и их следствиях отвечает на поставленный вопрос.

Индексы принимают следующие значения: $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2$; $\lambda, \mu, \nu = 3, 4$.

1. Инварианты кривизн касательного и нормального расслоений. Пусть X_2 — двумерная гладкая поверхность в четырехмерном пространстве A_4 с общей аффинной фундаментальной группой или некоторой ее подгруппой. Окрестность каждой точки $M \in X_2$ может быть задана гладкими функциями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$. Векторы $\boldsymbol{r}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}$ линейно независимы и центроаффинная 2-плоскость с репером $\{M, \boldsymbol{r}_\alpha(M)\}$ является касательной плоскостью и обозначается $T(M)$. На $T(M)$ можно смотреть и как на векторное пространство, что порождает касательное расслоение $T(X_2)$. Поверхность X_2 в A_4 называется оснащенной (нормализованной [6]), если задано отображение $\varphi: M \to N(M)$, где $N(M)$ — 2-плоскость, имеющая с $T(M)$ только одну общую точку M. Плоскость $N(M)$ называется оснащающей или нормальной плоскостью. Смотря на $N(M)$ как на векторное пространство, приходим к другому векторному расслоению с базой X_2 — нормальному расслоению $N(X_2)$. Предполагается, что оснащение инвариантно, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{A} & X_2' \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi \\ \varphi(X_2) & \xrightarrow{A} & \varphi(X_2') \end{array}$$

коммутативна при любом преобразовании A фундаментальной группы пространства A_4.

К каждой точке M оснащенной поверхности $\varphi(X_2)$ присоединяется базис так, что

$$\boldsymbol{e}_\alpha(M) \in T(M); \ \boldsymbol{e}_\nu(M) \in N(M), \tag{1}$$

где функции $\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha(u^1, u^2)$, $\boldsymbol{e}_\nu = \boldsymbol{e}_\nu(u^1, u^2)$ предполагаются достаточно гладкими, что позволяет записать дифференциальные уравнения оснащенной поверхности $\varphi(X_2)$ в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} d\boldsymbol{r} = \omega^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha; \\ d\boldsymbol{e}_i = \omega_i^j \boldsymbol{e}_j, \ i, j = 1, \ldots, 4, \end{array} \right. \tag{2}$$

где

$$\omega_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \omega^\gamma, \ \omega_\alpha^\nu = h_{\alpha\beta}^\nu \omega^\beta; \ \omega_\nu^\alpha = A_{\nu\beta}^{\ \alpha} \omega^\beta, \ \omega_\nu^\mu = G_{\nu\alpha}^\mu \omega^\alpha.$$

Здесь, как известно [6], $h_{[\alpha\beta]}^{\ \nu} = 0$.

При замене базиса $\boldsymbol{e}_i(M)$ с сохранением условий (1), $h_{\alpha\beta}^{\ \nu}$ и $A_{\nu\beta}^{\ \alpha}$ объектов h и A преобразуются как координаты смешанных тензоров [6] составного расслоенного [7] многообразия $T \times N(X_2)$, а $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ и $G_{\nu\alpha}^{\mu}$ объектов Γ и G — как координаты аффинных связностей касательного и нормального расслоений соответственно. Эти связности позволяют ввести ковариантное дифференцирование ∇ и параллельное перенесение тензорных полей [6, 7] пространств $T(X_2)$, $N(X_2)$ и $T \times N(X_2)$ и записать вторую группу уравнений (2) в виде

$$\begin{cases} \nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = h_{\alpha\beta}^{\ \nu} \boldsymbol{e}_\nu, \\ \nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\nu = A_{\nu\alpha}^{\ \beta} \boldsymbol{e}_\beta. \end{cases}$$

Из условий интегрируемости этих уравнений следует выражение тензоров кривизн связностей Γ и G через объекты A и h:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \varepsilon} = 2h_{\gamma[\alpha}^{\ \ \nu} A_{\beta]\nu}^{\ \ \varepsilon}; \tag{3}$$

$$R_{\alpha\beta\nu}^{\ \ \ \mu} = -2h_{\varepsilon[\alpha}^{\mu} A_{\beta]\nu}^{\varepsilon}. \tag{4}$$

Из (3) находим тензор Риччи связности Γ:

$$R_{\beta\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha} = h_{\gamma\alpha}^{\nu} A_{\beta\nu}^{\alpha} - h_{\alpha\beta}^{\nu} A_{\nu\alpha}^{\alpha}. \tag{5}$$

На X_2 в A_4 возникает сопряженная сеть как сеть линий, касающихся сопряженных направлений. Касательное направление $\boldsymbol{a} = \underset{a}{\omega^\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha$ называется сопряженным направлению $\boldsymbol{b} = \underset{b}{\omega^\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha$, если при смещении в направлении $\boldsymbol{a}$ касательная плоскость $T(M')$ пересекает в пределе при $M' \to M$ плоскость $T(M)$ по прямой с направлением $\boldsymbol{b}$. К. Бурстин и В. Майер [8] нашли тензор

$$B_{\alpha\beta} = f \cdot h_{1\ (\alpha}^{[3} h_{\beta)\ 2}^{4]} \tag{6}$$

этой сети. Точка поверхности X_2 и сопряженная сеть ее называются эллиптическими, гиперболическими или параболическими в зависимости от того, будет ли $\Delta = \mathrm{Det}\,|B_{\alpha\beta}| > 0, < 0, = 0$ соответственно. Предполагая $\Delta \neq 0$, легко установить аполярность

$$B^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{\nu} = 0 \tag{7}$$

тензора $B_{\alpha\beta}$ аффинорам $h_{\alpha\beta}^{\nu}$. Нетрудно доказать также существование невырожденного симметрического тензора

$$B^{\nu\mu} = F \cdot h_{1[1}^{(\nu} h_{2]2}^{\mu)} \tag{8}$$

нормального расслоения и существование бивекторов $e_{\alpha\beta}$ и $e_{\nu\mu}$ с существенными координатами $e_t = e_{12}$, $e_n = e_{34}$.

Если пространство A_4 с более узкой, чем аффинная, фундаментальной группой, то для существования некоторых $e_{\alpha\beta}$ и $e_{\nu\mu}$ предположение $\Delta \neq 0$ может и не потребоваться.

Так как тензоры (3, 4) кривизн кососимметричны по первой паре индексов, то в двумерном пространстве $T(M)$

$$R^{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\beta}M^{\varepsilon}_{\gamma}, \; R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} = e_{\alpha\beta}M^{\mu}_{\nu}. \tag{9}$$

Эти соотношения дают возможность вместо тензоров кривизн рассматривать аффиноры M^{ε}_{γ} и M^{μ}_{ν} кривизн, которые выражаются через h и A:

$$M^{\varepsilon}_{\gamma} = 2e_t^{-1}h^{\nu}_{\gamma[1}A^{\varepsilon}_{2]\nu}; \tag{10}$$

$$M^{\mu}_{\nu} = -2e_t^{-1}h^{\mu}_{\varepsilon\,[1}A^{\varepsilon}_{2]\nu}. \tag{11}$$

Аффиноры кривизн имеют общий инвариант

$$M = M^{\alpha}_{\alpha} = -M^{\nu}_{\nu}. \tag{12}$$

Подставив (9) в (5), находим $R_{\beta\gamma} = e_{\alpha\beta}M^{\alpha}_{\gamma} = h^{\nu}_{\gamma\alpha}A^{\alpha}_{\beta\nu} - h^{\nu}_{\gamma\beta}A^{\alpha}_{\nu\alpha}$. В частности, $R_{12} = -e_tM^2_2$; $R_{21} = e_tM^1_1$. Таким образом, связность Γ будет эквиаффинной, т. е. $R_{[\alpha\beta]} = 0$, тогда и только тогда, когда $M = 0$. Аффиноры кривизн порождают еще два инварианта:

$$K_t = \mathrm{Det}\,|\,M^{\varepsilon}_{\gamma}\,|\,; \tag{13}$$

$$K_n = \mathrm{Det}\,|\,M^{\nu}_{\mu}\,|\,. \tag{14}$$

Чтобы выделить полную систему инвариантов аффиноров (10), (11), заметим, что $R_{\alpha\beta} = e_{\gamma\alpha}M^{\gamma}_{\beta} = R_{(\alpha\beta)} + R_{[\alpha\beta]}$; $R_{\nu\mu} = e_{\lambda\nu}M^{\lambda}_{\mu} = R_{(\nu\mu)} + R_{[\nu\mu]}$; $R_{[\alpha\beta]} = -\frac{1}{2}Me_{\alpha\beta}$; $R_{[\nu\mu]} = \frac{1}{2}Me_{\nu\mu}$.

Предположим, что в касательном и нормальном расслоениях зафиксированы некоторые симметрические невырожденные тензорные поля $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\nu\mu}$ (в аффинном пространстве это могут быть тензоры (6) и (8), но не обязательно они). Тогда симметрические тензоры $R_{(\alpha\beta)}$ и $R_{(\nu\mu)}$ имеют следующую полную систему инвариантов:

$$R_t = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)}\,g^{\alpha\beta};$$

$$m_t = \mathrm{Det}\,|\,R_{(\alpha\beta)}g^{\beta\gamma}\,| = \mathrm{Det}\,|\,R_{(\alpha\beta)}\,|/\mathrm{Det}\,|\,g_{\alpha\beta}\,|, \tag{15}$$

$$R_n = R_{\nu\mu}g^{\nu\mu} = R_{(\nu\mu)}g^{\nu\mu}; \quad m_n = \mathrm{Det}\,|\,R_{(\nu\mu)}g^{\mu\lambda}\,| = \mathrm{Det}\,|\,R_{(\nu\mu)}\,|/\mathrm{Det}\,|\,g_{\nu\mu}\,|. \tag{16}$$

Так как $K_t = \mathrm{Det}\,|\,e^{\gamma\alpha}R_{\gamma\beta}\,| = \mathrm{Det}\,|\,R_{\gamma\beta}\,|\,e_t^{-2}$; $K_n = \mathrm{Det}\,|\,e^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu}\,| = \mathrm{Det}\,|\,R_{\lambda\mu}\,|\,e_n^{-2}$; $\mathrm{Det}\,|\,R_{(\alpha\beta)}\,| = \mathrm{Det}\,|\,R_{\alpha\beta}\,| - (R_{[1,2]})^2 = \mathrm{Det}\,|\,R_{\alpha\beta}\,| - \frac{1}{4}M^2e_t^2$; $\mathrm{Det}\,|\,R_{(\nu\mu)}\,| = \mathrm{Det}\,|\,R_{\nu\mu}\,| - \frac{1}{4}M^2e_n^2$, инварианты (12)—(16) образуют полную систему инвариантов аффиноров (10), (11).

Замечание. Рассматривая ортогонально оснащенную X_2 в псевдоевклидовом $R_4^{(k)}$ и беря в качестве $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\nu\mu}$ метрические тензоры, порожденные метрикой пространства $R_4^{(k)}$, можно получить, полагая $e_t^2 = |\operatorname{Det} | g_{\alpha\beta} ||$, $e_n^2 = |\operatorname{Det} | g_{\nu\mu} ||$, следующие соотношения на полную систему инвариантов аффиноров кривизн:

$$M = 0,\ K_t = \frac{1}{4}(\operatorname{sign} \operatorname{Det} | g_{\alpha\beta} |) R_t^2,\ \ K = \frac{1}{4}(\operatorname{sign} \operatorname{Det} | g_{\nu\mu} |) R_n^2. \tag{17}$$

В этом случае обращение в нуль инварианта R_t характеризует поверхности с евклидовой внутренней геометрией, так как $R^{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Следовательно, изученные Л. Н. Кривоносовым [9] поверхности класса $R\,(R_t = R_n = 0)$ необходимо являются поверхностями с евклидовой внутренней геометрией.

В заключение этого пункта представим M_ν^μ в виде

$$M_\nu^\mu = 2a_\nu^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^\mu, \tag{18}$$

где

$$a_\nu^{\alpha\beta} = e^{\gamma(\alpha} A_{\nu\gamma}^{\beta)}. \tag{19}$$

2. Эвольвентные поверхности и оснащения. Оснащенная поверхность $\varphi(X_2)$ и оснащение φ называются эвольвентными, если семейство $N(X_2)$ оснащающих плоскостей имеет огибающую — эволюту оснащенной поверхности $\varphi(X_2)$.

Записывая уравнение эволюты $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} = b^\nu \boldsymbol{e}_\nu$, найдем условия эвольвентности как условие разрешимости алгебраической системы уравнений

$$\delta_\alpha^\beta + b^\nu A_{\nu\alpha}^\beta = 0. \tag{20}$$

Ранее [10] были получены условия эвольвентности в тензорной форме, но сейчас они будут представлены иначе.

Теорема 1. *Оснащенная поверхность, не являющаяся N-сферой* ($A_{\nu\alpha}^\beta = c_\nu \delta_\alpha^\beta$), *является эвольвентной тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

$$a_\nu^{\alpha\beta} b^\nu = 0, \quad (b^\nu) \neq 0. \tag{21}$$

Заметим, что собственные N-сферы, $(c_\nu) \neq 0$, геометрически характеризуются наличием у всех плоскостей $N(M)$ общей прямой с уравнением $1 + b^\nu c_\nu = 0$. У несобственных N-сфер $(c_\nu = 0)$ все оснащающие плоскости параллельны.

Из определения (19) следует, что $a_\nu^{1,1} = -e_t^{-1} A_{\nu 2}^1$, $a_\nu^{2,2} = e_t^{-1} A_{\nu 1}^2$, $a_\nu^{1,2} = \frac{1}{2} e_t^{-1} (A_{\nu 1}^1 - A_{\nu 2}^2)$ и если $(A_{\nu 1}^1) \neq 0$, то система (20) приводится к виду $1 + b^\nu A_{\nu 1}^1 = 0$, $b^\nu a_\nu^{\alpha\beta} = 0$. Таким образом, условия (21) необходимы для эвольвентности. Исключим очевидно эвольвентные собственные N-сферы и неэвольвентные несобственные N-

сферы ($A^{\beta}_{\nu\alpha} = 0$); тем самым будет исключен случай $a^{\alpha\beta}_{\nu} = 0$, и тогда условия (21) являются и достаточными для эвольвентности. Теорема доказана.

Следствие. *Для эвольвентного оснащения*

$$K_n = 0. \tag{22}$$

Это очевидно, если сопоставить (21) и (18), что приводит к равенству $M^{\mu}_{\nu} b^{\nu} = 0$, верному при ненулевых b^{ν} и по необходимости ведущему к обращению в нуль (14).

3. Постоянные векторные и ковекторные поля нормального расслоения. Векторное поле a^{ν} нормального расслоения $N(X_2)$ называется постоянным, если

$$\nabla_{\alpha} a^{\nu} = 0. \tag{23}$$

С точки зрения объемлющего пространства A_4 это условие равносильно тому, что $d\boldsymbol{a}(M) \in T(M)$, $\boldsymbol{a} = a^{\nu}\boldsymbol{e}_{\nu}$ при любом смещении.

Поле направлений нормального расслоения $N(X_2)$ называется с-постоянным (сильно постоянным), если существует вектор a^{ν} этого направления, являющийся постоянным. Таким образом, направление векторного поля f^{ν} будет с-постоянным тогда и только тогда, когда существуют t и a^{ν} такие, что $f^{\nu} = ta^{\nu}$; $\nabla_{\alpha} a^{\nu} = 0$. Эти условия равносильны соотношениям:

$$\nabla_{\alpha} f^{\nu} = (\nabla_{\alpha} f) f^{\nu}. \tag{24}$$

Отсюда, в частности, следует, что если a^{ν} — постоянное поле, то f^{ν} будет постоянным тогда и только тогда, когда $t = \text{const}$.

Геометрически постоянные и в том числе с-постоянные, направления нормального расслоения характеризуются условием

$$d\boldsymbol{f}(M) \in T_3(M), \quad \boldsymbol{f} = f^{\nu}\boldsymbol{e}_{\nu}, \tag{25}$$

где $T_3(M)$ — гиперплоскость, натянутая на $T(M)$ и вектор $\boldsymbol{f}(M)$.

Нетрудно видеть, что поверхность

$$\boldsymbol{R}(M) = \boldsymbol{r}(M) + \boldsymbol{a}(M), \quad \boldsymbol{a} = a^{\nu}\boldsymbol{e}_{\nu} \tag{26}$$

будет параллельна поверхности X_2 тогда и только тогда, когда выполнены условия (23), т. е. требования (24) существования *с*-постоянного поля направлений нормального расслоения равносильно требованию существования однопараметрического семейства нормально связанных (26) с X_2 параллельных поверхностей [5] или требованию (25) двойственной нормализации [1].

Теорема 2. *Для существования постоянного векторного поля нормального расслоения $N(X_2)$ в A_4 необходимо и достаточно, чтобы*

$$K_n = 0 \leftrightarrow M^{\mu}_{\nu} = Q_{\nu} M^{\mu}; \quad \nabla_{\alpha} Q_{\nu} = a_{\alpha} Q_{\nu}. \tag{27}$$

Эта теорема повышает порядок дифференцируемости оснащенной поверхности $\varphi(X_2)$, но в отличие от условий (23) не содержит неизвестного постоянного поля. Докажем ее.

При доказательстве потребуются тождества Риччи [6], которые в этом случае принимают вид

$$\nabla_{[1}\nabla_{2]}a^{\nu} = \frac{1}{2}\, e_t M^{\nu}_{\mu} a^{\mu}. \tag{28}$$

Пусть поле a^{ν} — постоянно. Тогда выполнены условия (23); применяя к ним тождество (28), получим условие

$$M^{\nu}_{\mu} a^{\mu} = 0. \tag{29}$$

Так как $(a^{\mu}) \neq 0$, приходим к необходимому условию $K_n = 0$, что в этом случае равносильно распадению M^{μ}_{ν}: $M^{\mu}_{\nu} = Q_{\nu} M^{\mu}$. Исключая случай $M^{\mu}_{\nu} = 0$, когда условия (27) выполнены, получим вместо (29) условие

$$Q_{\nu} a^{\nu} = 0. \tag{29'}$$

Дифференцируя (29′), получим

$$(\nabla_{\alpha} Q_{\nu})\, a^{\nu} = 0. \tag{30}$$

Сопоставляя (29′) и (30), в силу двумерности $N(M)$ заключаем, что $\nabla_{\alpha} Q_{\nu} = a_{\alpha} Q_{\nu}$. Применяя к этому равенству тождество Риччи, найдем, что

$$\nabla_{[1} a_{2]} = qM, \quad q \neq 0. \tag{30'}$$

Докажем обратную часть теоремы 2. Пусть выполнены условия (27). Если $Q_{\nu} = 0$, то постоянное векторное поле существует. Пусть $Q_{\nu} \neq 0$. Тогда из уравнения (29′) и второй группы условий (27) следует, что $\nabla_{\alpha} a^{\nu} = c_{\alpha} a^{\nu}$. Применяя к этому равенству тождество Риччи, находим, что $\nabla_{[1} c_{2]} = 0$, т. е. направление векторного поля a^{ν} с-постоянно, что и доказывает теорему.

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 3. *Для того чтобы существовало постоянное ковекторное поле нормального расслоения $N(X_2)$ в A_4, необходимы и достаточны условия:*

$$K_n = 0 \leftrightarrow M^{\mu}_{\nu} = Q_{\nu} M^{\mu}; \quad \nabla_{\alpha} M^{\mu} = b_{\alpha} M^{\mu}. \tag{27'}$$

Следствие 3.1. *Если для $\varphi(X_2)$ в A_4 связность Γ эквиаффинна, т. е. $M = 0$, то существование постоянного векторного поля в $N(X_2)$ влечет существование постоянного поля в $N(X_2)$, и наоборот. Эти поля тогда связаны равенством*

$$a^{\nu} b_{\nu} = c, \ c = \mathrm{const}. \tag{31}$$

Действительно, из замечания (30′) следует, что если $M = 0$, то направление Q_{ν} с-постоянно, а a^{ν} постоянно по условию. Обратное следует из (27′) и градиентности b_{α}. Условию же (31) подчиняются любые постоянные векторное и ковекторное поля.

Теорема 4. *Если нормальное расслоение $N(X_2)$ в A_4 содержит постоянное векторное (ковекторное) поле, то для того, чтобы нормальная связность была плоской, т. е.*

$$M^{\nu}_{\mu} = 0, \tag{32}$$

необходимо и достаточно существование постоянного невырожденного симметрического тензорного поля $g_{\nu\mu}$:

$$\nabla_{\alpha} g_{\nu\mu} = 0. \tag{33}$$

Необходимость очевидна, так как если выполнены условия (32), то существуют два независимых постоянных ковекторных поля b_{ν}, f_{μ} и тогда невырожденное симметрическое тензорное поле $g_{\nu\mu} = b_{(\nu} f_{\mu)}$ удовлетворяет условиям (33).

Покажем достаточность. Пусть a^{ν} и $g_{\nu\mu}$ — постоянные векторное и невырожденное симметрическое тензорное поля. Тогда $M = 0$ и существует постоянное ковекторное поле b_{ν}, удовлетворяющее соотношению (31). Если $b^{\mu} = g^{\mu\nu} b_{\nu}$, то $\nabla_{\alpha} b^{\mu} = 0$. Таким образом, существуют два векторных постоянных поля a^{ν} и b^{ν}, но они могут определять одно направление. Изучим возможные ситуации.

а) $c = 0, \quad a^{\nu} a_{\nu} \neq 0 \quad (a_{\nu} = a^{\mu} g_{\mu\nu})$.

В этом случае $b^{\nu} \neq a a^{\nu}$. так как $a_{\nu} b^{\nu} = 0$. Следовательно, утверждение теоремы верно.

б) $c = 0, \; a^{\nu} a_{\nu} = 0.$ (34)

В этом случае $b^{\nu} = a a^{\nu}$ определяет асимптотическое направление тензора $g_{\nu\mu}$. В силу невырожденности $g_{\nu\mu}$, существование одного асимптотического направления ведет к существованию другого. Обозначим вектор этого направления через m^{ν}. По условию $m^{\nu} \neq a a^{\nu}$ и $g_{\nu\mu} m^{\nu} m^{\mu} = 0$. Но тогда $g_{\nu\mu} = p a_{(\nu} m_{\mu)}$.

Пронормируем m^{ν} так, что $p = 1$ и $g_{\nu\mu} = a_{(\nu} m_{\mu)}$. Из того, что $\nabla_{\alpha} g_{\nu\mu} = 0$ и $\nabla_{\alpha} a_{\nu} = 0$, следует

$$a_{(\nu} \nabla_{|\alpha|} m_{\mu)} = 0. \tag{35}$$

Свертывая последнее равенство с a^{ν}, получим

$$(\nabla_{\alpha} m_{\nu})\, a^{\nu} = 0, \tag{36}$$

так как $a^{\nu} a_{\nu} = 0$, $(a_{\mu}) \neq 0$. Сопоставляя (34) и (36) и учитывая бинарность $N(M)$, получаем $\nabla_{\alpha} m_{\nu} = m_{\alpha} a_{\nu}$. Подставим это в (35) и замечая, что $(g_{\mu\nu}) \neq 0$, находим $m_{\alpha} = 0$. Таким образом, $\nabla_{\alpha} m_{\nu} = 0$, что и требовалось доказать.

в) $a^{\nu} b_{\nu} = c \neq 0, \; a^{\nu} a_{\nu} = 0.$

В этом случае постоянное поле b^{ν} очевидно независимо с a^{ν} и теорема верна.

г) $a^{\nu} b_{\nu} = c \neq 0, \quad a^{\nu} a_{\nu} = a \neq 0.$

Если a_{ν} и b_{ν} независимы, то теорема верна.

Предположим, что $b^\nu = ba^\nu$ ($b = \text{const}$). Рассмотрим поле c^ν, сопряженное с a^ν относительно $g_{\nu\mu}$:

$$c^\nu a_\nu = c_\nu a^\nu = 0. \tag{37}$$

Так как a_ν и a^ν — постоянные поля,

$$M^\nu_\mu a^\mu = 0; \tag{38}$$

$$M^\mu_\nu a_\mu = 0. \tag{39}$$

Сравнивая (37) и (38), с учетом бинарности $N(M)$ получим $M^\nu_\mu = f^\nu c_\mu$. Подставляя эти соотношения в (39), находим, что $f^\mu a_\mu = 0$, так как $(c_\nu) \neq 0$. Таким образом, $f^\mu = fc^\mu$; $M^\mu_\nu = fc^\mu c_\nu$. Свертывая M^μ_ν и учитывая $c = c^\nu c_\nu \neq 0$, находим $f = Mc^{-1}$. Окончательно $M^\mu_\nu = Mc^{-1}c^\mu c_\nu$. Следовательно, связности G и $N(X_2)$ будут плоскими тогда и только тогда, когда связность Γ — эквиаффинная ($M = 0$). В нашем случае это так, поскольку имеет место (33), применяя к которому тождество Риччи, получаем $M^\lambda_\mu g_{\lambda\nu} + M^\lambda_\nu g_{\lambda\mu} = 0$ и, свертывая последние равенства с $g^{\mu\nu}$, находим $M = 0$. Таким образом, теорема 4 доказана. Из нее, в частности, вытекает

Следствие. *При ортогональном оснащении X_2 в евклидовом пространстве E_4 требование двойственности нормализации* [1], *которое равносильно требованию существования одного постоянного векторного поля в $N(X_2)$, приводит к плоской нормальной связности* именно в силу того, что в нормальном расслоении существует постоянное метрическое поле $g_{\nu\mu}$. *Это верно и для X_2 в псевдоевклидовом $R^{(k)}_4$.*

Теорема 5. *Если связность нормального расслоения $N(X_2)$ в A_4 плоская, то сопряженная (гиперболическая) сеть поверхности X_2 ортогональна в метрике $g_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)}$, где $R_{(\alpha\beta)}$ — симметрическая часть тензора Риччи связности Γ.*

Для доказательства достаточно показать, что $R_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} = 0$ или

$$R_{(\alpha\beta)} = a_\nu h^\nu_{\alpha\beta}. \tag{40}$$

По условию теоремы $M^\mu_\nu = 0$ и из (18) и (7) следует, что $a^{\alpha\beta}_\nu = f_\nu B^{\alpha\beta}$. Если $f_\nu = 0$, то $A^\beta_{\nu\alpha} = c_\nu \delta^\beta_\alpha$ и $R_{\alpha\beta} = h^\nu_{\alpha\beta}c_\nu - h^\nu_{\alpha\beta}A^\gamma_{\nu\gamma}$, т. е. (40) имеет место.

Пусть $(f_\nu) \neq 0$ и сопряженная сеть — гиперболическая. Выбирая ее за координатную, получим

$$B^{1,2} = B_{1,2} = h^\nu_{1,2} = a^{1,2}_\nu = 0. \tag{41}$$

Это означает, что $A_{\alpha\beta} = h^\nu_{\alpha\gamma}A^\gamma_{\nu\beta}$ имеет координаты $A_{1,1} = h^\nu_{1,1}A^1_{\nu 1}$, $A_{2,2} = h^\nu_{2,2}A^2_{\nu 2}$ и, кроме того, $A^2_{\nu 2} = A^1_{\nu 1}$. Таким образом, $R_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} = (A_{\alpha\beta} + h^\nu_{\alpha\beta}A^\gamma_{\nu\gamma})B^{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} = A_{1,1}B^{1,1} + A_{2,2}B^{2,2} = A^1_{\nu 1}(h^\nu_{1,1}B^{1,1} + h^\nu_{2,2}B^{2,2}) = 0$ в силу (41) и (7), что и требовалось доказать.

Следствие. *На поверхностях двойственной нормализации сопряженная сеть ортогональна* [1] *в наведенной евклидовым пространством* E_4 *метрике потому, что в этом случае* $R_{\alpha\beta} = Kg_{\alpha\beta}$, *а по отношению к* $R_{\alpha\beta}$ *эта сеть ортогональна по теореме 5.*

Рассматривая эвольвентные поверхности, мы обнаружили, что для них $K_n = 0$, т. е. выполнено одно из условий (27) существования постоянного векторного и ковекторного поля нормального расслоения. Можно проверить, что вторая группа условий (27) в общем случае не выполняется в отличие от псевдоевклидовых пространств, где в силу соотношений (17) условие эвольвентности приводит к плоской нормальной связности и, следовательно, к двойственной нормализации. Однако и в общем случае имеет место

Теорема 6. *Если оснащенная поверхность* $\varphi(X_2)$ *в* A_4 *не является несобственной N-сферой и нормальное расслоение* $N(X_2)$ *плоское, то* $\varphi(X_2)$ *эвольвентна.*

Действительно, пусть $M^{\mu}_{\nu} = 0$. Из формул (18) следует, что $a^{\alpha\beta}_{\nu} h^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$. Сравнивая это с (7), заключаем, что $a^{\alpha\beta}_{\nu} = a_{\nu} B^{\alpha\beta}$, следовательно, существуют такие b^{ν}, что выполнено условие (21) эвольвентности. Несобственные N-сферы ($A^{\beta}_{\nu\alpha} = 0$) исключены потому, что оснащающие плоскости параллельны и эволюты не существует.

Следствие. *Поверхности двойственной нормализации в* E_4 [1] *и в любом* $R^{(k)}_4$ *при ортогональном оснащении являются эвольвентными потому, что нормальная связность в силу* (17) *является плоской.*

Рассмотрим в заключение пример оснащенных поверхностей, нормальное расслоение которых имеет постоянное векторное поле. Назовем P-поверхностью такую оснащенную поверхность, все оснащающие плоскости которой имеют общую точку. Именно такое оснащение берется в центроаффинном пространстве.

Теорема 7. *Для того чтобы оснащенная поверхность была P-поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы она была эвольвентной и поле векторов* $\boldsymbol{b} = MM'$, *где* M' *— точка эволюты, соответствующая точке* M *поверхности* X_2, *было постоянным.*

Действительно, определение P-поверхности таково, что для нее необходимо и достаточно существование точки с $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r} + b^{\nu}\boldsymbol{e}_{\nu}$, $\boldsymbol{r}_0 = \mathrm{const}$. Из условия $d\boldsymbol{r}_0 = 0$ находим критерий P-поверхности в виде $\delta^{\beta}_{\alpha} + b^{\nu} A^{\beta}_{\nu\alpha} = 0$, $\nabla_{\alpha} b^{\nu} = 0$, что и доказывает теорему.

Список литературы: 1. *Чакмазян А. В.* Эволютные поверхности двойственно нормализованной D_2 в E_4. — ДАН СССР, 1962, т. 144, № 6, с. 1233—1236. **2.** *Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В.* Подмногообразия с параллельным векторным полем. — «Изв. вузов. Математика», 1974, № 5, с. 148—157. 3. *Чакмазян А. В.* Подмногообразие с параллельным p-мерным подрасслоением нормального расслоения. — «Изв. вузов. Математика», 1976, № 8, с. 107—110. **4.** *Акивис М. А., Чакмазян А. В.* Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле. — ДАН АрмССР, 1975, т. LX, № 3, с. 137—143. 5. *Акивис М. А.*, *Чакмазян А. В.* О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью. — ДАН АрмССР, 1976, т. LXII, № 2, с. 75—81. 6. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., «Наука», 1976. 432 с. 7. *Либер А. Е.* О геометрических объектах и ковариантном дифференцировании связующих аффиноров в составных многообразиях. — «Учен. зап. Саратов. ун-та», 1961, т. 70, с. 73—105. 8. *Burstin C.*, *Mayer W.* Über affine Geometrie, XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinnen R_4. — «Math. Zeitschr», 1927, Bd 26, S. 373—407. 9. *Кривоносов Л. Н.* Поверхности в E_4, порождающие эволютные последовательности поверхностей. — «Изв. вузов. Математика», 1966, № 6 (55), с. 74—84. 10. *Бритов А. В.* Двумерные эвольвентные поверхности X_2 в A_4. — В кн.: Вопросы совр. математики и ее преподавания в высшей школе. Вып. 108. Саранск, 1974, с. 125—133.

Поступила 12 июня 1977 г.

УДК 513

Т. И. Бычкова

ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ C^1-ГЛАДКОЙ СЕДЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ ПРОСТЫЕ ЧАШИ

1. Постановка задачи. Известно [1], что интегральная внешняя кривизна $\sigma(F)$ гладкой замкнутой поверхности F ограниченной внешней кривизны в смысле А. В. Погорелова определяется ее эйлеровой характеристикой $\chi(F)$ по формуле $\sigma(F)=2\pi\chi(F)$. В настоящей работе установлено, что C^1-гладкая конечносвязная полная седловая поверхность F_1, которая имеет своими трубками лишь рога или простые чаши (в смысле [2]), является поверхностью ограниченной внешней кривизны в смысле А. В. Погорелова, имеет предельный конус $A(F_1)$ и ее кривизна $\omega(F_1)$ удовлетворяет равенству $\omega(F_1)=2\pi\chi(F_1)+\omega(A(F_1))$, где $\omega(A(F_1))$ — кривизна предельного конуса. Последнее равенство является новым и для регулярных поверхностей. Кроме того, в работе установлено, что для поверхностей рассмотренного класса имеет место обобщенная теорема Гаусса о равенстве внешней и внутренней кривизны.

2. Основные понятия и обозначения. Пусть поверхность F задана как C^1-погружение f незамкнутого конечносвязного двумерного многообразия Φ в евклидово пространство $f:\Phi\to E^3$. Через μ обозначим сферическое отображение поверхности F в единичную сферу $\mu: F\to S$.

Если $\{u_n\}$ расходящаяся, т. е. не имеющая сходящихся подпоследовательностей, точечная последовательность на Φ, то множество всех предельных точек для всевозможных последовательностей $\{\mu(f(u_n))\}$ обозначим через ΓF. Назовем направление l в E^3 неособым, если $l\overline{\in}\Gamma F$. Можно считать, что l — числовая прямая. Обозначим через $P(h, l)$ плоскость, ортогональную l и пересекающую l в точке с координатой h. Определим на Φ функцию $z(u, l)$, равную координате проекции точки $f(u) \in F$ на ось l. Введем множества

$$\Lambda(h, l) = \{u \in \Phi, \ z(u, l) = h\}, \quad \Phi^+(h, l) = \{u \in \Phi, \ z(u, l) > h\},$$
$$\Phi^-(h, l) = \{u \in \Phi, \ z(u, l) < h\},$$
$$\Phi(h_1, h_2, l) = \{u \in \Phi, \ h_1 < z(u, l) < h_2\}.$$

Пусть $A(l)$ — множество точек $u \in \Phi$ таких, что касательная плоскость к F в точке $f(u)$ ортогональна l.

Простую неограниченную в метрике поверхности F кривую λ множества $\Lambda(h, l)$ назовем лучом, уходящим на бесконечность, если λ гомеоморфно замкнутому лучу в R^1. Два луча λ и λ' называются эквивалентными, если $\lambda \subset \lambda'$ или $\lambda' \subset \lambda$. Класс эквивалентных между собой лучей $\{\lambda\}$ назовем уходом на бесконечность множества $\Lambda(h, l)$. Остальные употребляемые здесь понятия можно найти, например, в [3].

Седловую чашу T назовем простой, если она отсекаема некоторой плоскостью, имеет взаимно однозначное сферическое отображение, содержащееся в полусфере, и полярная к T трубка внешне полна.

3. Внешняя полнота. Пусть C^1-гладкая седловая поверхность F имеет конечное число простых чаш и рогов. Простые чаши поверхности F внешне полны [2]. Если же поверхность F имеет ограниченные рога $T_1, T_2, \ldots, T_k$, то они будут острыми [4], а пояса на них сходятся соответственно к точкам $A_i \in E^3$. Пополним многообразие Φ бесконечно удаленными точками a_i, соответствующими точкам A_i, и положим $\overline{\Phi} = \Phi \cup (\bigcup_{i=1}^{k} a_i)$. Далее будем рассматривать поверхность $\overline{F} = F \cup (\bigcup_{i=1}^{k} A_i)$, для которой точки A_i будем считать особыми. Поверхность $\overline{F}$ почти всюду гладкая и седловая, так как точки A_i неотсекаемы [5].

Пусть $U \subset \overline{\Phi}$ определяет на $\overline{F}$ простую чашу T, а $g = \partial U$ — край чаши T. В [2] доказано, что простая чаша T имеет выпуклый предельный конус $A(T)$ и $\Gamma T = \Gamma(A(T))$. Обозначим через $2m(l)$ и $2m'(l)$ число уходов на бесконечность в неособом направлении l соответственно для чаши T и конуса $A(T)$.

Лемма 1. *Если T — простая седловая чаша и $l \in \Gamma T$, то $m(l) = m'(l)$.*

Доказательство. Можно считать, что в данном неособом направлении l нет критических точек на чаше T. Тогда все линии градиента на T полны, т. е. пересекают все множества уровня $\Lambda(h, l)$. Линии градиента устанавливают однозначное соответствие между уходами на бесконечность в различных множествах уровня, поэтому число уходов на бесконечность $m(l)$ постоянно, т. е. не зависит от h.

Если плоскость $P(h, l)$ опорна к конусу $A(T)$, то она является отсекающей для чаши T, и наоборот. Поэтому $m(l) = 0$ тогда и только тогда, когда $m'(l) = 0$.

Предположим, что множество $\Lambda(h_0, l)$ имеет более двух уходов на бесконечность. Поскольку $m'(l) \leqslant 1$, то несколько различных уходов на бесконечность на чаше T определяют один уход на конусе $A(T)$. Пусть уходы на бесконечность у $A(T)$ определяются точками u_1, u_2 на кривой $g = \partial U$ и $\Lambda(h_0, l) \cap g = u_1 \cup u_2$.

Если $\Phi^+(h_0, l) \cap g = u_1 \cup u_2$ или $\Phi^-(h_0, g) \cap g = u_1 \cup u_2$, то при $h > h_0$ или $h < h_0$ будет $\Lambda(h, l) \cap g = \varnothing$. Таким образом, множества $\Lambda(h_0, l)$ и $\Lambda(h, l)$ имеют различное число уходов на бесконечность, что невозможно.

Если множество $\Phi^+(h_0, l) \cap g$ есть дуга γ с концами в точках u_1 и u_2, то в этом случае только одна из компонент множества $\Phi^+(h_0, l)$ содержит γ, а остальные только точки u_1 и u_2. Поэтому при $h > h_0 \Lambda(h, l) \cap g = u_1' \cup u_2'$, причем точки u_i' могут принадлежать границе только одной из компонент множества $\Phi^+(h, l)$. Значит, множество $\Lambda(h, l)$ имеет только два ухода на бесконечность. Полученные противоречия доказывают, что $m(l) \leqslant \leqslant 1$. Лемма доказана.

Следствие. *Если $\overline{F}$ в неособом направлении l имеет уходы на бесконечность, то они полностью определяются чашами; их число постоянно в данном направлении и не больше удвоенного числа чаш.*

Лемма 2. *Пусть F — полная седловая C^1-гладкая поверхность, имеющая простые чаши, l — неособое направление, а $\varkappa$ — компонента множества $\Phi(t', t'', l)$. Для того, чтобы $\varkappa \cap A(l) = \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы граница состояла из двух гомотопных кривых γ_1 и γ_2.*

Доказательство. Пусть γ_1 и γ_2 гомотопные кривые и $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial\varkappa$, а $\varkappa \cap A(l) = \varnothing$. Тогда найдется $h \in]t', t''[$ такое, что плоскость $P(h, l)$ будет касательной к $f(\varkappa)$ в точке $f(u) \in F$. Число компонент множества $M = [f(\varkappa) \cap P(h, l)] \setminus f(u)$ не меньше четырех [1].

Эйлерова характеристика $\chi(\varkappa)$ множества $\varkappa$ равна 1 или 0, и так как среди компонент множества M не может быть ограниченных, то множество $\Lambda(h, l)$ имеет на $\varkappa$ больше двух уходов на бесконечность. С другой стороны, каждая из кривых γ_i определяет разве лишь два ухода на бесконечность. Полученное противоречит следствию из леммы 1, и поэтому $\varkappa \cap A(l) = \varnothing$. Обратное утверждение доказано в [3]. Лемма доказана.

Значение h назовем критическим, если $\Lambda(h, l) \cap A(l) \neq \varnothing$ или $\Lambda(h, l) \ni a_i$.

Лемма 3. *Если $\overline{F}$ — построенная выше седловая поверхность, имеющая простые чаши, то для любого $l \in \Gamma\overline{F}$ множество $\eta(l)$ критических значений h конечно.*

Доказательство. Если $l \in \Gamma\bar{F}$, то всегда можно указать такое h_0, что либо плоскость $P(h_0, l)$ отсекает от поверхности $\bar{F}$ трубку T, либо множество $P(h_0, l) \cap \bar{F}$ имеет уходы на бесконечность. В первом случае трубка T не будет иметь касательных плоскостей, параллельных $P(h_0, l)$, а во втором уходы на бесконечность принадлежат чашам, а поскольку они простые, то число касательных плоскостей в этом направлении разве лишь конечно. Следовательно, множество $\eta(l)$ ограничено.

Пусть $h' < \inf \eta(l)$, а $h'' > \sup \eta(l)$. Рассмотрим множество $\Phi(h', h'', l)$; будем считать, что оно имеет m уходов на бесконечность. Пусть γ_1 и γ_2 линии градиента, принадлежащие одной чаше, а их концы лежат на лучах, определяющих различные уходы на бесконечность у множества $\Lambda(h', l)$. Произведем разрез $\Phi(h', h'', l)$ по кривым γ_1 и γ_2, а затем склеим их, отождествив точки, принадлежащие одному множеству уровня. Если мы таким способом разрежем и склеим все пары линий градиента, то получим множество $\Psi(h', h'', l)$, которое уже не содержит уходов на бесконечность. Заметим, что $\chi(\bar{F}) = \chi[\Phi(h', h'', l)] = \chi[\Psi(h', h'', l)] + m$.

Введем целочисленную функцию $\varphi(h)$ на множестве $R \setminus \eta(l)$, положив $\varphi(h) = \chi[\Phi^-(h, l)]$. Если $h \geqslant h''$, то $\varphi(h) = \varphi(h'') = \chi(\bar{F})$. Если $h \leqslant h'$, то $\varphi(h) = \varphi(h') \leqslant m$. Если $h_1 < h_2$, то $\varphi(h_1) \geqslant \varphi(h_2)$. Докажем это. Имеем

$$\varphi(h_i) = \chi[\Phi^-(h_i, l)] = \chi[\Psi(h_i, h', l)] + m. \qquad (1)$$

На множестве $\Psi(h_1, h_2, l)$ эйлерова характеристика является аддитивной функцией, поэтому

$$\chi[\Psi(h_2, h', l)] = \chi[\Psi(h_1, h_2, l)] + \chi[\Psi(h_1, h', l)]. \qquad (2)$$

Так как $\Psi(h_1, h_2, l)$ не имеет уходов на бесконечность, то $\chi[\Psi(h_1, h_2, l)] \leqslant 0$ и из (1) — (2) следует, что $\varphi(h_1) \geqslant \varphi(h_2)$.

Значения h_1 и h_2 принадлежат одной компоненте множества $R \setminus \eta(l)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$. Пусть в интервале $]h_1, h_2[$ нет критических значений h. Тогда по лемме 2 границы компонент множества $\Phi(h_1, h_2, l)$ будут гомотопными кривыми, следовательно, множества $\Phi^-(h, l)$ и $\Phi^-(h_2, l)$ гомеоморфны, т. е. $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$. Если же $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$, то из (2) следует, что $\chi[\Psi(h_1, h_2, l)] = 0$, т. е. все компоненты множества $\Psi(h_1, h_2, l)$ — кольца. Следовательно, границы компонент множеств $\Psi(h_1, h_2, l)$ и $\Phi(h_1, h_2, l)$ есть простые гомотопные между собой кривые. Тогда по лемме 2 $\Phi(h_1, h_2, l) \cap A(l) = \varnothing$, т. е. h_1 и h_2 принадлежат одной компоненте множества $R \setminus \eta(l)$.

Пусть $h \in \eta(l)$, тогда $\Lambda(h, l)$ либо содержит континуум, вдоль которого $P(h, l)$ касается поверхности $\bar{F}$, либо $\Lambda(h, l)$ разбивает $\Phi(h_1, h_2, l)$ по крайней мере на четыре области [1]. Множество значений h, для которых имеет место хотя бы одна из указанных возможностей, имеет меру нуль [6]. Если невозрастающая ограниченная целочисленная функция $\varphi(h)$ изменяется на множестве $\eta(l)$ меры нуль, то множество $\eta(l)$ состоит из конечного числа точек. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $l \bar{\in} \Gamma F$, то множество $\Lambda(h, l) \cap A(l)$ состоит из конечного числа компонент.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения в работе А. Л. Вернера [7].

Из лемм 3 и 4 следует

Теорема 1. *Построенная выше седловая поверхность $\bar{F}$, имеющая простые чаши в любом неособом направлении, имеет конечнократное сферическое отображение.*

Следствие. *Каждая компонента касания поверхности $\bar{F}$ имеет каноническую окрестность.*

Каноническую окрестность компоненты касания назовем правильной, если ее граница состоит из чередующихся между собой линий градиента и линий уровня. Построить правильную каноническую окрестность для компоненты касания можно способом, описанным в [7].

Пусть δ — компонента касания поверхности $\bar{F}$ плоскостью $P(h, l)$, а $U(\delta)$ — ее правильная каноническая окрестность. Из способа построения $U(\delta)$ следует, что множество $\partial U(\delta) \cap \Lambda(h, l)$ состоит из конечного четного числа точек $2\mu(\delta)$. Число $\mu(\delta)$ назовем порядком седлообразности компоненты δ, а величину $j(\delta) = 1 - \mu(\delta)$ — индексом.

Поскольку поверхность $\bar{F}$ имеет конечнократное сферическое отображение, то, повторяя рассуждения, проведенные в работе [5], можно доказать, что все рога на $\bar{F}$ неограниченны, т. е. верна

Теорема 2. *C^1-гладкая седловая поверхность F, имеющая простые чаши, внешне полна, и ее предельный конус состоит из конечного числа лучей и выпуклых конусов.*

Рассмотрим предельный конус $A(F)$ C^1-гладкой седловой поверхности F, имеющей простые чаши. Назовем плоскость $P(h, l)$ псевдоопорной к множеству $A(F)$, если множество $P(h, l) \cap A(l)$ содержит уходы на бесконечность.

Из свойств простой чаши следует, что $\Gamma F = \Gamma A(F)$ [2]. Поэтому лемма 1 будет верна не только для чаши, но и для всей поверхности F.

Лемма 5. *Если $l \bar{\in} \Gamma F$, то число уходов на бесконечность у поверхности F такое же, как у ее предельного конуса $A(F)$, т. е. $m(l) = m'(l)$.*

Как и для седловых многогранных углов, для множества $A(F)$ определим кривизну формулой

$$\sigma(A(F)) = -\iint\limits_{S+} m'(l)\, dv, \tag{3}$$

где $d\nu$ — элемент площади полусферы S^+, а l определяется точкой на S^+.

Замечание. Если $A(F)$ содержит только один невырожденный выпуклый конус V, то $|\sigma(A(F))| = |\delta(V)|$ есть площадь сферического образа множества всех псевдоопорных плоскостей к V. Обычно же кривизна $\omega(V)$ выпуклого конуса V определяется как площадь сферического образа множества всех опорных плоскостей. Связь между этими определениями выражена следующим соотношением

$$\sigma(V) = \omega(V) - 2\pi. \tag{4}$$

4. Внешняя кривизна поверхности F. Лемма 6. *Площадь сферического образа множества локально опорных плоскостей к поверхности F равна нулю.*

Лемма доказана в [8].

Лемма 7. *Множество компонент касания поверхности F, у которых $j(\delta) < -1$ не более, чем счетно.*

Эта лемма доказывается аналогично соответствующей лемме в [1].

Из результатов работы [9] вытекает

Лемма 8. *Если компонента касания δ — континуум и $j(\delta) < -1$, то δ — отрезок, вдоль которого касательная плоскость — локально опорная к поверхности F.*

Компоненту касания δ назовем особой, если она содержит континуум или ее индекс $j(\delta) < -1$.

Из сформулированных лемм следует

Теорема 3. *Сферический образ множества особых компонент касания на C^1-гладкой полной седловой поверхности с простыми чашами имеет меру нуль.*

Теорема 4. *C^1-гладкая полная седловая поверхность F, имеющая простые чаши, имеет ограниченную внешнюю кривизну в смысле А. В. Погорелова.*

Доказательство. Пусть Ω — сферический образ множества особых компонент касания, а G — область на поверхности F. Определим почти всюду на сфере S функцию кратности $q_G(\nu)$ относительно области G, полагая ее равной числу компонент полного прообраза точки $\nu \in S \setminus (\Omega \cup \Gamma F)$. Если $G \subset H \subset F$, то $q_G(\nu) \leqslant q_H(\nu)$. Из этого утверждения и теоремы 1 следует, что функция $q_G(\nu)$ ограничена на любом борелевском множестве. Поскольку функция $q_G(\nu)$ измерима [1], то на любом борелевском множестве $G \subset F$ можно определить функцию

$$\sigma(G) = -\iint\limits_S q_G(\nu)\, d\nu, \tag{5}$$

где $d\nu$ — элемент площади сферы S.

Формула (5) определяет на множестве борелевских подмножеств поверхности ограниченную внешнюю кривизну в смысле А. В. Погорелова. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для полной седловой C^1-гладкой поверхности F с простыми чашами имеет место соотношение*

$$\sigma(F) = 2\pi\chi(F) + \sigma(A(F)). \tag{6}$$

Доказательство. Для полной седловой C^1-гладкой поверхности F и направления $l \bar{\in} \Gamma F \cup \Omega$ имеет место обобщенная формула Кронекера — Морса

$$m(l) - q(l) = \chi(F), \tag{7}$$

где $m(l)$ — число уходов на бесконечность, $q(l)$ — число компонент касания в направлении l. Доказательство (7) аналогично доказательству этой же формулы для другого класса поверхностей, проведенного в [3].

Заметим, что направление l определяется точкой ν на полусфере S^+, поэтому

$$\iint\limits_{S} q_G(\nu)\, d\nu = \iint\limits_{S^+} q_G(l)\, d\nu. \tag{8}$$

Проинтегрировав (7) по полусфере S^+, получим $\iint\limits_{S} m(l)\, d\nu - \iint\limits_{S^+} q_F(l)\, d\nu = 2\pi\chi(F)$. Учитывая лемму 5 и формулы (3) и (8), получим (6). Теорема доказана.

5. Теорема Гаусса. В работе А. В. Погорелова [1] показано, что поверхность F ограниченной внешней кривизны является многообразием ограниченной внутренней кривизны. Там же доказана

Лемма 9. *Пусть G, G' — борелевские множества поверхности F, причем $G' \subset G$. Тогда если $\omega(G) = \sigma(G)$, то $\omega(G') = \sigma(G')$.*

Теорема 6. *Для любого борелевского множества G на полной седловой C^1-гладкой поверхности, имеющей простые чаши, $\omega(G) = \sigma(G)$.*

Доказательство. Пусть T — простая чаша поверхности F, а $\{L_n\}$ — последовательность расходящихся на ней поясов. Обозначим через $\tau(L)$ геодезический поворот пояса L. В работе [2] показано, что на простой чаше для любой последовательности поясов $\{L_n\}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\tau(L_n)$ и

$$\tau = \lim_{n\to\infty}\tau(L_n) = 2\pi - \omega(A(T)), \tag{9}$$

где $\omega(A(T))$ — кривизна предельного конуса чаши T.

Для C^1-гладкой поверхности ограниченной внутренней кривизны, имеющей n трубок, имеет место обобщенная формула Кон-Фоссена — Хубера [11].

$$\omega(F) = 2\pi\chi(F) - \sum_{i=1}^{n}\tau_i. \tag{10}$$

Учитывая формулы (4) и (9), получим

$$\omega(F) = 2\pi\chi(F) + \sigma(A(F)) \tag{11}$$

Сравнивая (11) и (6), получим, что $\omega(F) = \sigma(F)$. Но тогда из леммы 8 следует, что для любого борелевского множества $G \subset F$ $\omega(G) = \sigma(G)$. Теорема доказана.

Список литературы: **1.** *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 760 с. **2.** *Бычкова Т. И., Вернер А. Л.* Предельный конус простой седловой C^1-гладкой чаши. — В сб.: Геометрия. Вып. 6. Л., 1977, с. 15—21. **3.** *Вернер А. Л.* О внешней геометрии простейших полных поверхностей неположительной кривизны. — «Мат. сб.», 1967, № 74 (116):2, с. 218—240; 1968, 75 (117):1, с. 112—139. **4.** *Бураго Ю. Д.* Неравенства изометрического типа в теории поверхностей ограниченной внешней кривизны. — «Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН», 1968, т. 10, 204 с. **5.** *Вернер А. Л.* Неограниченность седлового рога в евклидовом пространстве. — «Сиб. мат. журн.», 1970, т. XI:I, с. 21—30. **6.** *Кронрод А. С.* О функциях двух переменных. — «Усп. мат. наук», 1950, № 5:1 (35), с. 24—134. **7.** *Вернер А. Л.* Плоские сечения сужающихся поверхностей. — «Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена», 1970, т. 395, с. 160—183. **8.** *Бураго Ю. Д.* О поверхности ограниченной внешней кривизны. — В кн.: «Укр. геометр. сб.». Вып. 5—6. Харьков, 1968, с. 29—43. **9.** *Бычкова Т. И.* Плоские сечения и внешняя кривизна седловых поверхностей конечного порядка. — «Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена», 1972, т. 541, с. 24—35. **10.** *Франгулов С. А.* Обобщение теоремы Кон-Фоссена — Хубера об интегральной кривизне двумерного многообразия ограниченной кривизны. — «Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена», 1970, т. 395, с. 295—307.

Поступила 23 июня 1977 г.

УДК 513

А. Л. Вернер

ЗАВИСИМОСТЬ СВОЙСТВ ВЗАИМНО ПОЛЯРНЫХ СЕДЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Введение. В исследованиях по геометрии «в целом» часто используются свойства взаимно полярных поверхностей. Хорошо известны зависимости локальных свойств для пар таких регулярных поверхностей [1, 2, 3], а также связи глобальных свойств для взаимно полярных выпуклых поверхностей [4, 5]. В настоящей работе получен ряд глобальных свойств для взаимно полярных седловых поверхностей. Ограничимся преобразованием Лежандра (поляритетом относительно эллиптического параболоида); для полярных преобразований относительно других квадрик можно получить аналогичные утверждения.

2. Поляритет и преобразование Лежандра. В трехмерном евклидовом пространстве E^3 рассмотрим полярное преобразование Λ относительно параболоида P: $2z = x^2 + y^2$ (декартову систему координат x, y, z везде далее полагаем фиксированной). Полярой

$\Lambda(M)$ точки $M(X, Y, Z) \in E^3$ является плоскость, заданная уравнением

$$Xx + Yy = Z + z, \tag{1}$$

а полюсом плоскости T, заданной уравнением $z = ax + by + c$, является точка $\Lambda(T)$ с координатами $(a, b, -c)$. Преобразование Λ, как и все поляритеты, сохраняет инцидентность точек, прямых, плоскостей. В частности, прямая l, проходящая через точки M и $N \in E^3$, преобразованием Λ переводится в прямую $\Lambda(l) = \Lambda(M) \cap \Lambda(N)$.

Пусть C^1-гладкая поверхность F в E^3 задана уравнением

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

где $(x, y) \subset G$ — области на плоскости Π: $z = 0$. Преобразование Лежандра L [1, § 63; 3, п. 212] ставит в соответствие каждой точке $M(x, y, f(x, y)) \in F$ полюс касательной плоскости $T_M F$ поверхности F в этой точке относительно поляритета Λ, т. е. точку $M^* = L(M)$ с координатами

$$X = p(x, y), \quad Y = q(x, y), \quad Z = px + qy - f(x, y), \tag{3}$$

где, как обычно, $p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Далее будем считать, что F имеет инъективное сферическое отображение или, что в данном случае равносильно, инъективное нормальное отображение

$$\nu_F : G \to \Pi, \tag{4}$$

которое каждой точке $(x, y) \in G$ ставит в соответствие точку $(X, Y) = \nu_F(x, y)$ по формулам (3). В этих условиях, согласно результатам работы [6], поверхность F можно рассматривать и как график функции f: $\Pi \to R$, и как огибающую семейства касательных плоскостей к F, однозначно определенную этим семейством.

Преобразование Лежандра L в рассматриваемом случае переведет поверхность F в поверхность F^*, точками которой являются точки $M^*(X, Y, Z) = L(M)$, где $M \in F$. Равенства (3) являются параметрическими уравнениями поверхности F^*. Поскольку ν_F — инъекция (4), то F^* допускает непараметрическое задание

$$Z = f^*(X, Y), \tag{5}$$

где (X, Y) — точка области $G^* = \nu_F(G)$. Как доказано в [7], F^* есть C^1-гладкая поверхность и ее касательной плоскостью в точке $M^* = L(M)$ является поляра точки M. Таким образом, пара $(M, T_M F)$, состоящая из точки $M \in F$ и касательной плоскости $T_M F$ поляритетом Λ переводится в пару $(T_{M^*} F^*, M^*)$, где $M^* = L(M) \in F^*$. Поэтому $L(M^*) = M$, т. е. $L(F^*) = F$. Поверхность

F^*, как и F, обладает инъективным нормальным отображением $\nu_{F^*}: G^* \to G$, причем $G = \nu_{F^*}(G^*)$.

В дальнейшем поверхности F и F^* называются взаимно L-полярными. Удобно рассматривать два экземпляра пространства E^3, считая, что F лежит в том из них, где введены декартовы координаты x, y, z, а F^* — в том, где введены аналогичные координаты X, Y, Z.

Пусть $\gamma \subset G$ — простая замкнутая ориентированная кривая, стягиваемая в G в точку, и кривая $\gamma^* = \nu_F(\gamma)$ с ориентацией, индуцированной ориентацией кривой γ. Возможны два случая: либо ориентации γ и γ^* одинаковы для любого $\gamma \subset G$, либо они всегда противоположны. В первом случае, как доказано в [8, гл. IX, § 5], поверхности F и F^* будут локально выпуклыми. Во втором случае, что также следует из результатов [8, гл. IX], они являются седловыми. Ниже рассматриваются лишь седловые поверхности F и F^*.

3. Плоские сечения и огибающие конусы. В этом и следующем пунктах будет рассмотрена зависимость между плоскими сечениями C^1-гладкой седловой поверхности F и их образами при преобразовании Лежандра. Ограничимся лишь тем случаем, когда плоское сечение γ поверхности F плоскостью Q распадается на конечное число выпуклых дуг; более общие случаи малообозримы.

Пусть γ_1 и γ_2 — две соседние выпуклые дуги кривой γ, обращенные выпуклостью в разные стороны и имеющие общую граничную точку A, а t — касательная прямая к γ в точке A. Множество $\tau = t \cap (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ назовем компонентой перегиба между дугами γ_1 и γ_2; очевидно, τ может быть точкой A или отрезком прямой. Если $\tau = A$, то A — точка перегиба.

Теорема 1. *Пусть F и F^* — взаимно L-полярные C^1-гладкие поверхности (2), (5) с инъективным сферическим отображением, и невертикальная плоскость Q пересекает F (не касаясь) по кривой γ. Тогда кривая $\gamma^* = L(\gamma) \subset F^*$ является направляющей конуса $C(\gamma^*)$ с вершиной в точке $Q^\Lambda = \Lambda(Q)$, образующие которого касаются F^* в точках кривой γ^*. Если кривая γ выпукла, то конус $C(\gamma^*)$ выпуклый; он является огибающей однопараметрического семейства плоскостей, состоящего из поляр точек кривой γ.*

Если $F \in C^2$ и в каждой точке $M \in F$ гауссова кривизна $K(M) < 0$, то гладкость конуса $C(\gamma^*)$ нарушается лишь вдоль образующих, соответствующих тем точкам кривой γ, в которых γ идет по асимптотическим направлениям.

Если γ имеет компоненту перегиба τ между выпуклыми дугами γ_1 и γ_2, то выпуклые части $C(\gamma_1^*)$ и $C(\gamma_2^*)$ конуса $C(\gamma^*)$ обращены друг к другу выпуклостью; в частности, если τ — точка перегиба, то общая образующая частей $C(\gamma_1^*)$ и $C(\gamma_2^*)$ — ребро возврата на $C(\gamma)$.

Доказательство. Так как по условию плоскость Q не параллельна оси z и не касается F, то каждая компонента множества $Q \cap F$ является C^1-гладкой кривой. Пусть γ — такая компонента, точка $M \in \gamma$ и прямая l_M касается γ в точке M. Как уже отмечалось, кривая $\gamma^* = L(\gamma) \subset F^*$ состоит из точек $M^* = \Lambda(T_M F)$ — полюсов плоскостей $T_M F$, а касательные плоскости $T_{M^*}F^*$ являются полярами точек M. Пусть точка $Q^\Lambda = \Lambda(Q)$. Так как $\gamma \subset Q$, то все плоскости $T_{M^*}F^*$ проходят через точку Q^Λ. Если взять последовательность точек $M_n \in \gamma$, сходящуюся к $M \in \gamma$, то последовательность секущих прямых $(M_n M)$ сходится к касательной l_M. Поэтому соответствующая последовательность прямых $q_n = T_{M_n^*}F^* \cap T_{M^*}F^*$ — образов прямых $(M_n M)$ при поляритете Λ — сходится к прямой $l^\Lambda_{M^*} = \Lambda(l_M)$, которая проходит через точку Q^Λ, лежит в плоскости $T_{M^*}F^*$ и касается поверхности F^* в точке $M^* = L(M)$. Таким образом, прямая $l^\Lambda_{M^*}$ является характеристикой однопараметрического семейства плоскостей $T_{M^*}F^*$ (см., например, [9]), а множество всех таких прямых образует огибающую этого семейства (может быть, негладкую). В то же время это множество является конусом $C(\gamma^*)$ с вершиной в точке Q^Λ, касающимся поверхности F^* по кривой γ^*. Поэтому кривая γ^* образует так называемую «границу тени» на F^*, соответствующей «источнику света» в точке Q^Λ (см., например, [10, § 75]).

Если кривая γ выпукла, то каждая прямая l_M — опорная к γ, а потому каждая плоскость $\Lambda(M)$ является опорной к конусу $C(\gamma^*)$, т. е. конус $C(\gamma^*)$ выпуклый.

Если τ — компонента перегиба между выпуклыми дугами γ_1 и γ_2 кривой γ и точка $A \in \tau$, то γ_1 и γ_2 лежат по разные стороны от прямой l_A. Поэтому соответствующие им части $C(\gamma_1^*)$ и $C(\gamma_2^*)$ конуса $C(\gamma^*)$ лежат по разные стороны от плоскости $\Lambda(A)$. Каждая из частей $C(\gamma_1^*)$ и $C(\gamma_2^*)$ является выпуклым конусом, обращенным выпуклостью к $\Lambda(A)$. Следовательно, прямая $\Lambda(l_A)$ является ребром на конусе $C(\gamma^*)$. Если $l_A \cap \tau = A$, то $C(\gamma_1^*)$ и $C(\gamma_2^*)$ касаются $\Lambda(A)$ с разных сторон, т. е. в этом случае прямая $\Lambda(l_A)$ является ребром возврата. Если же τ — отрезок, то угол между касательными полуплоскостями к $C(\gamma_1^*)$ и $C(\gamma_2^*)$ вдоль прямой $\Lambda(l_A)$ отличен от нуля.

Допустим теперь, что $F \in C^2$. Тогда $\gamma \in C^2$. Если дополнительно предположить, что гауссова кривизна $K(M) < 0$ в каждой точке $M \in F$, то кривая $\gamma^* = L(\gamma)$ будет C^1-гладкой. В точке $M \in \gamma$ кривизна кривой γ равна нулю (в частности, M является точкой перегиба) лишь тогда, когда γ в точке M идет по асимптотическому направлению $(dx,\ dy)$. Как известно, оно определяется уравнением $dx\,dp + dy\,dq = 0$. Поэтому кривая γ^* в соответствующей точке $M^* = L(M)$ также идет в асимптотическом направлении

(dp, dq). Следовательно, образующие конуса $C(\gamma^*)$, на которых нарушается его гладкость (в частности, рёбра возврата), в точке касания с F^* идут по асимптотическим направлениям и одновременно касаются кривой γ^*.

4. Плоские сечения и огибающие цилиндры. Аналогично результатам п. 3 можно рассмотреть сечение поверхности F вертикальной плоскостью. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть F и F^* — поверхности, рассмотренные в теореме 1, и кривая γ — компонента сечения F вертикальной плоскостью Q. Тогда кривая $\gamma^* = L(\gamma) \subset F^*$ является направляющей цилиндра $C(\gamma^*)$, образующие которого ортогональны плоскости Q и касаются F^* в точках кривой γ^*. Если γ — выпуклая кривая, то $C(\gamma^*)$ — выпуклый цилиндр. Цилиндр $C(\gamma^*)$ является огибающей однопараметрического семейства плоскостей, состоящего из поляр точек кривой γ.*

Доказательство. Так как Q не касается F, то γ — C^1-гладкая кривая. Можно считать, что Q задается уравнением $x = 0$; тогда из (1) следует, что плоскость $T_{M^*}F^*$ — поляра $M \in \gamma$ — задается уравнением вида $Z = BY + C$, т. е. все плоскости $T_{M^*}F^*$ параллельны оси X. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, получаем, что все $l^{\wedge}_{M^*}$ параллельны оси X и касаются поверхности F^* в точках кривой $\gamma^* = L(\gamma)$. Совокупность прямых $l^{\wedge}_{M^*}$ образует цилиндр $C(\gamma^*)$, который является огибающей однопараметрического семейства плоскостей $T_{M^*}F^*$, где $M^* \in \gamma^*$. Выпуклость $C(\gamma^*)$ из выпуклости γ вытекает так же, как в п. 3. Теорема доказана.

Замечание 1. Цилиндр $C(\gamma^*)$ в теореме 2 можно рассматривать как конус с бесконечно удаленной вершиной. Кривая γ^* является компонентой границы тени на F^* при освещении пучком прямых, перпендикулярных плоскости Q.

Замечание 2. Поскольку нормали к цилиндру $C(\gamma^*)$ в точках его гладкости являются нормалями к F^*, а сферическое отображение F^* инъективно, то из гладкости $C(\gamma^*)$ следует его выпуклость. О нарушениях гладкости цилиндра $C(\gamma^*)$ можно сказать то же самое, что и о нарушениях гладкости аналогичного конуса в теореме 1.

5. Полные взаимно полярные поверхности, имеющие рог. Дадим одно применение результатов п. 3 и 4 к случаю, когда F и F^* — полные седловые двусвязные поверхности с инъективным сферическим отображением. Как известно, в этом случае F и F^* — поверхности, имеющие рог и чашу, причем чаши F и F^* «сильно изогнуты» [4]. Проекцией $F(F^*)$ на плоскость Π: $z = 0$ $(\Pi^*: Z = 0)$ в этом случае является область $G = \Pi \setminus N$ $(G^* = \Pi^* \setminus N^*)$, где N (N^*) — ограниченное замкнутое выпуклое множество. Можно считать, что точка $O = (0, 0, 0) \in N$ и направлением рога поверхности F является луч $z > 0$ оси z. Поскольку для любой последовательности точек $(x_n, y_n, f(x_n, y_n)) \in F$, уходящей на бесконечность о рогу, выражение $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Big|_{(x_n,\, y_n)} \to$ $\to +\infty$, то при преобразовании Лежандра рог поверхности F переходит в чашу поверхности F^*, а потому чаша поверхности F переходит в рог поверхности F^*. Так как рог поверхности F имеет направление $z > 0$, то из (3) следует, что рог поверхности F^* имеет направление луча $Z < 0$ оси Z.

Как доказано в [4], чаши поверхностей F и F^* имеют предельные выпуклые конусы, сферические образы которых являются, соответственно, дополнениями сферических образов поверхностей F и F^* до верхней полусферы.

Теперь, используя результаты п. 3 и 4, сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть F и F^* — взаимно L-полярные полные двусвязные седловые поверхности с инъективным сферическим отображением. Если в пучке $\Phi = \{P(h)\}$ плоскостей $P(h): z = ax + by + h$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $h \in (-\infty, +\infty)$, нет касательных плоскостей к F, то следующие четыре утверждения равносильны:* а) *множество $\gamma(h) = P(h) \cap F$ является замкнутой выпуклой кривой при всех $h \in (-\infty, +\infty)$;* б) *конусы $C(h)$ с вершинами в точках $X = a$, $Y = b$, $Z = -h$, имеющие образующими лучи, касательные к F^*, выпуклы и замкнуты (т. е. их направляющая замкнута);* в) *для любого направления ν, параллельного плоскостям пучка Φ, множество $V(\nu)$, содержащее все прямые, параллельные ν и касающиеся поверхности F, состоит из двух незамкнутых выпуклых цилиндров, касающихся F^*;* г) *сечения поверхности F^* полуплоскостями, имеющими границей прямую l: $X = a$, $Y = b$, являются бесконечными выпуклыми кривыми.*

Доказательство. Поскольку все свойства, рассматриваемые в теореме 3, аффинные, то аффинным преобразованием $x' = x$, $y' = y$, $z' = z - ax - by$ можно свести рассматриваемый пучок Φ к пучку плоскостей вида $z' = h$. Тогда равносильность условий а) и б) доказана в п. 3, а равносильность в) и г) установлена в п. 4. Проверим, что а) и в) равносильны. Для этого ортогонально спроектируем F на плоскость $W(\nu)$, ортогональную направлению ν. Проекцией F на $W(\nu)$ является область $F(\nu)$, ограниченная двумя бесконечными выпуклыми кривыми L'_ν и L''_ν, обращенными выпуклостями внутрь F_ν. В противном случае нарушилась бы седлообразность F. Пара опорных прямых к выпуклой кривой $\gamma(h)$, параллельных направлению ν, пересекает L'_ν и L''_ν и касается F. Поэтому L'_ν и L''_ν являются направляющими цилиндров, о которых идет речь в утверждении в). Следовательно, эти цилиндры выпуклы. Равносильность всех утверждений а) — г) установлена. Теорема доказана.

Замечание. Легко усмотреть, что из теоремы 3 вытекает существование и выпуклость предельных конусов у F и F^*, а также выпуклость границ их сферических образов.

Список литературы: 1. *Гурса Э.* Курс математического анализа, т. II, ч. 1. М.—Л., Гостехтеориздат, 1933. 368 с. 2. *Кон-Фоссен С. Э.* Параболическая кривая.— В кн.: Некоторые вопросы дифференциальной геометрии, М., Физматгиз, 1959, с. 127—173. 3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1951. 696 с. 4. *Вернер А. Л.* О внешней геометрии простейших полных поверхностей неположительной кривизны. II.— «Мат. сб.», 1968, т. 75, № 1, с. 112—139. 5. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der covexen Körper. Berlin, 1934. 164 S. 6. *Дуткевич Ю. Г.* О задании поверхности опорной функцией.— «Вестн. Ленингр. ун-та», 1963, № 1, с. 53—58. 7. *Вернер А. Л.* Гладкость поверхности, полярной к гладкой.— «Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1967, т. 302, с. 193—198. 8. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 759 с. 9. *Залгаллер В. А.* Теория огибающих. М., «Наука», 1975. 104 с. 10. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1956. 420 с. 11. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.—Л., Гостехиздат, 1950. 428 с.

Поступила 9 сентября 1977 г.

УДК 513

Н. И. Глова

ИНВАРИАНТНАЯ СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПОВЕРХНОСТЬ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА P_4

Соприкасающиеся поверхности неголономных многообразий рассматривались различными авторами в работах [1—4]. Г. Роджерс [1] изучал поверхность, построенную из геодезических «прямейших» системы интегральных кривых уравнения Пфаффа, проходящих через точку пространства E_3. В. В. Вагнер [2] рассмотрел аналогичные поверхности в многомерном римановом пространстве. Э. Бомпиани [3] показал, что в окрестности второго порядка множество всех интегральных кривых неголономного многообразия V_3^2 в пространстве P_3, проходящих через данную точку, расположено на одной поверхности.

Для распределения $n-1$ измерения в пространстве P_n инвариантная поверхность, содержащая окрестности второго порядка всех интегральных кривых распределения, проходящих через одну точку, построена и подробно изучена М. Р. Роговым в работе [4].

В предлагаемой заметке теорема Э. Бомпиани обобщается на случай двумерного неголономного многообразия в пространстве P_4, строится проективно инвариантная двумерная соприкасающаяся поверхность для таких многообразий, изучаются некоторые проективные свойства соприкасающейся поверхности.

§ 1. Основные сведения

Рассмотрим в четырехмерном проективном пространстве подвижный репер R. Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$dA_J = \omega_J^K A_K, \tag{1.1}$$

где линейные дифференциальные формы Пфаффа ω_J^K удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K. \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $J, K, L, \ldots = 0, 1, 2, 3, 4$; $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, 4$; $A, B, C, \ldots = 0, 1, 2$; $a, b, c, \ldots = 1, 2$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 3, 4$. По одинаковым индексам разных уровней проводится суммирование в соответствующих пределах.

Можно считать, что имеет место

$$\omega_J^J = 0. \tag{1.3}$$

В каждой точке A_0 пространства P_4 зададим 2-плоскость, проходящую через взятую точку. Будем считать, что точки A_1 и A_2 репера R лежат в указанной 2-плоскости. Тем самым в окрестности точки A_0 задается некоторое двумерное распределение Δ. Кривые линии, которые в каждой своей точке касаются 2-плоскости, образующей с этой точкой элемент распределения, называются допустимыми или интегральными кривыми и образуют пфаффово или неголономное многообразие распределения Δ.

Очевидно, когда линейные дифференциальные формы Пфаффа ω_0^i, ω_a^α деривационных формул (1.1) репера R обращаются в нуль, элемент распределения остается неподвижным. Следовательно, эти формы зависят от дифференциалов только главных параметров. Выбирая формы ω_0^i в качестве базисных, формы ω_a^α можно линейно выразить через них

$$\omega_a^\alpha = \Gamma_{ai}^\alpha \omega_0^i. \tag{1.4}$$

Для смещения точки A_0 в 2-плоскости (A_0, A_1, A_2), которую мы в дальнейшем будем называть касательной 2-плоскостью распределения Δ в точке A_0 и обозначать $T(A_0)$, выполняются условия

$$\omega_0^\alpha = 0. \tag{1.5}$$

Система дифференциальных уравнений (1.5) называется системой, ассоциированной с распределением Δ и определяет совокупность всех интегральных кривых распределения, т. е. определяет пфаффово многообразие.

Для того чтобы система дифференциальных уравнений (1.5) была вполне интегрируема, необходимо и достаточно выполнения условий $D\omega_0^\alpha = \omega_0^L \wedge \omega_L^\alpha = 0$, откуда, используя уравнения структуры проективного пространства и равенства (1.4) и (1.5), получим

$$\Gamma_{12}^\alpha = \Gamma_{21}^\alpha. \tag{1.6}$$

В этом случае множество интегральных кривых распределения Δ, соответствующих выбранной точке A_0 пространства P_4, расположено на двумерной поверхности этого пространства. Проективное пространство P_4 расслаивается на двупараметрическое семейство двумерных поверхностей так, что в каждой точке пространства 2-плоскость, составляющая с этой точкой элемент распределения Δ, касается в этой точке соответствующей двумерной поверхности. Такое распределение называется голономным.

§ 2. Канонизация репера R, присоединенного к распределению

В работе [5] автором рассматривались куспидальные направления распределения Δ, т. е. направления, вдоль которых бесконечно близкие касательные 2-плоскости распределения пересекаются не в точке, а по прямой.

Куспидальные направления удовлетворяют равенству

$$\det(A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_1 + dA_1,\ A_2 + dA_2) = 0 \tag{2.1}$$

или

$$\omega_1^3\omega_2^4 - \omega_2^3\omega_1^4 = 0.$$

Воспользовавшись условиями (1.4), получим

$$\Gamma_{1a}^{[3}\Gamma_{2b}^{4]}\omega_0^a\omega_0^b = 0. \tag{2.2}$$

Чтобы найти направления, сопряженные указанным, т. е. направления, по которым пересекаются бесконечно близкие в куспидальном направлении касательные 2-плоскости, надо потребовать, чтобы бесконечно малые перемещения δA_0 в сопряженном направлении лежали в 2-плоскости $T(A_0)$ и $T(A_0 + dA_0)$, т. е. чтобы было выполнено условие $\delta A_0 = A_0 + dA_0 + a(A_1 + dA_1) + b(A_2 + dA_2)$. Обозначив через $\tilde{\omega}_0^a$ дифференциальные формы Пфаффа с дифференцированием вдоль сопряженного направления, получим

$$\frac{\tilde{\omega}_0^1}{\tilde{\omega}_0^2} = -\frac{\omega_2^3}{\omega_1^3} = -\frac{\omega_2^4}{\omega_1^4}. \tag{2.3}$$

Из разложения (1.4)

$$\frac{\tilde{\omega}_0^1}{\tilde{\omega}_0^2} = -\frac{\Gamma_{2a}^\alpha\omega_0^a}{\Gamma_{1a}^\alpha\omega_0^a}. \tag{2.4}$$

Сопряженные направления удовлетворяют уравнению

$$\Gamma^{[3}_{a1}\Gamma^{4]}_{b2}\tilde{\omega}_0^a\tilde{\omega}_0^b = 0. \tag{2.5}$$

При перемещении точки A_0 вдоль линии куспидального направления касательные к линиям с соответствующим сопряженным направлением в двух бесконечно близких точках лежат в одной 2-плоскости и, следовательно, пересекаются в точке. Таким образом, на каждом сопряженном направлении выделяется проективно инвариантная точка. Поместим вершины A_1 и A_2 подвижного репера R в указанные точки.

Вдоль первой координатной линии выполняются условия $\tilde{\omega}_0^1 \neq 0$, $\tilde{\omega}_0^2 \equiv 0$, $d_1A_1 = d_1\rho_1A_1$. Отсюда, используя формулы (1.1) и уравнение (2.5), получим $\Gamma^{[3}_{21}\Gamma^{4]}_{22} = 0$ или

$$\frac{\Gamma^\alpha_{22}}{\Gamma^\alpha_{21}} = \beta, \quad \left(\frac{\omega_0^1}{\omega_0^2}\right)_1 = -\frac{\Gamma^\alpha_{12}}{\Gamma^\alpha_{11}}. \tag{2.6}$$

Аналогично из условий $\tilde{\omega}_0^1 \equiv 0$, $\tilde{\omega}_0^2 \neq 0$, $d_2A_2 = d_2\rho_2A_2$, получим соотношения

$$\frac{\Gamma^\alpha_{11}}{\Gamma^\alpha_{12}} = \alpha, \quad \left(\frac{\omega_0^1}{\omega_0^2}\right)_2 = -\frac{\Gamma^\alpha_{22}}{\Gamma^\alpha_{21}}, \tag{2.7}$$

где α и β постоянные величины.

Чтобы при выполнении условий (2.6) и (2.7) имело место уравнение (2.5), надо потребовать

$$\Gamma^{[3}_{12}\Gamma^{4]}_{21} \neq 0; \quad \alpha\beta - 1 \neq 0. \tag{2.8}$$

Так как в случае выполнения условий интегрируемости куспидальные и сопряженные направления сливаются в одну пару взаимно сопряженных направлений, то в выбранном репере условия интегрируемости принимают вид

$$\Gamma^\alpha_{12} = \Gamma^\alpha_{21} = 0. \tag{2.9}$$

Построение фокусной кривой дополняющей 2-плоскости [5] позволяет проективно инвариантным образом выбрать точки A_3 и A_4 репера R. Например, точки A_3 и A_4 можно поместить в точки касания фокусной кривой с касательными, проведенными из начала координат. В настоящей работе мы не будем использовать специального выбора координатных точек A_3 и A_4.

Так как все точки репера $R(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ закреплены с распределением Δ, то все формы Пфаффа ω_J^K становятся главными и, следовательно, линейно выражаются через главные базисные формы

$$\omega_J^K = \Gamma^K_{Ji}\omega_0^i. \tag{2.10}$$

Следует отметить, что имеют место соотношения

$$\Gamma^a_{0a} = 1, \quad \Gamma^i_{0a} = 0 \quad (i \neq a). \tag{2.11}$$

Все дальнейшие рассмотрения будут проводиться в построенном репере R.

§ 3. Теорема Бомпиани

В окрестности второго порядка точки A_0 пространства P_4 множество интегральных кривых, проходящих через A_0, расположено на двумерной поверхности.

Действительно, окрестность второго порядка точки A_0 определяется дифференциалами dA_0, d^2A_0.

Продифференцировав равенства (1.2) и воспользовавшись (2.10), получим

$$dA_0 = \omega_0^A A_A; \tag{3.1}$$

$$d^2A_0 = (d\omega_0^A + \Gamma^A_{ab}\omega_0^a\omega_0^b)\, A_A + \Gamma^\alpha_{ab}\omega_0^a\omega_a^b A_\alpha.$$

Пусть ρ — параметр, определяющий положение точки A на произвольной интегральной кривой распределения Δ. В бесконечно малой окрестности точки A_0 имеет место следующее разложение $A = A_0 + \frac{dA_0}{d\rho}\rho + \frac{1}{2}\frac{d^2A_0}{d\rho^2}\rho^2 + \ldots$

Положим $\omega_0^A = \lambda^A\rho$, $d\omega_0^A = \mu^A\rho^2$, где λ^A и μ^A постоянные величины. Согласно равенствам (3.1), последнее разложение может быть представлено в виде $A = A_0 + \lambda^a A_a + \frac{1}{2}(\mu^A + \Gamma^A_{ab}\lambda^a\lambda^b)\rho^2 A_A + {}$ $+ \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{ab}\lambda^a\lambda^b\rho^2 A_\alpha + \cdots$

Если X^0, X^1, X^2, X^3, X^4 однородные проективные координаты точки A относительно репера R, $A = X^J A_J$, получим параметрическое уравнение рассматриваемой кривой распределения Δ в виде $X^0 = 1 + \lambda^0\rho + \frac{1}{2}(\mu^0 + \Gamma^0_{ab}\lambda^a\lambda^b)\,\rho^2 + \ldots;$ $X^a = \lambda^a\rho + \frac{1}{2}(\mu^a + {}$ $+ \Gamma^a_{bc}\lambda^b\lambda^c)\,\rho^2 + \ldots;$ $X^\alpha = \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{ab}\lambda^a\lambda^b\rho^2 + \ldots$

Можно убедиться в том, что эта кривая с точностью до бесконечно малых второго порядка включительно расположена на поверхности

$$X^0X^\alpha = \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{ab}X^aX^b. \tag{3.2}$$

Теорема доказана.

§ 4. Инвариантная соприкасающаяся поверхность распределения Δ

Чтобы построить поверхность, проективно инвариантным образом связанную с распределением Δ и содержащую окрестности второго порядка всех интегральных кривых этого распределения, проходящих через точку, рассмотрим проективно-геодезически[е] линии Δ, введенные в работе [5].

Проективно-геодезическими линиями распределения Δ называются интегральные кривые этого распределения, обладающи[е] тем свойством, что в каждой точке кривой соприкасающаяся 2-плоскость пересекается с дополняющей 2-плоскостью по прямой.

Так как соприкасающаяся 2-плоскость интегральной линии $\omega_0^1 : \omega_0^2$ определяется точками A_0, $A_0 + dA_0$, $A_0 + dA_0 + \frac{1}{2} d^2 A_0$, то уравнение проективно-геодезических линий распределения получается из условия, что соприкасающаяся 2-плоскость этой кривой лежит в одной гиперплоскости с 2-плоскостью (A_0, A_3, A_4)

$$\det (A_0, A_3, A_4, A_0 + dA_0, A_0 + dA_0 + 1/2 d^2 A_0) = 0.$$

Воспользовавшись разложением (3.1) и (2.10), мы приходим к уравнению

$$\omega_0^1 (d\omega_0^2 + \Gamma^2_{ab} \omega_0^a \omega_0^b) - \omega_0^2 (d\omega_0^1 + \Gamma^1_{ab} \omega_0^a \omega_0^b) = 0. \qquad (4.1)$$

Через точку A_0 пространства P_4 в заданном направлении, определяемом отношением $\omega_0^1 : \omega_0^2$, проходит единственная проективно-геодезическая линия. Совокупность всех проективно-геодезических линий, проходящих через A_0, расположена в окрестности этой точки на двумерной поверхности. Эту поверхность, проективно инвариантным образом связанную с распределением Δ, будем называть инвариантной соприкасающейся поверхностью и обозначать S_2.

Составим уравнение этой поверхности.

Рассмотрим произвольную проективно-геодезическую линию распределения Δ. Обозначим $\omega_0^a = \lambda^{(a)} d\tau$, где $d\tau$ — дифференциальная форма.

Из равенств (1.1) и (3.1), используя (2.10), получим $dA_0 = \Gamma^0_{0a} \lambda^{(a)} d\tau A_0 + \lambda^{(a)} d\tau A_a$; $d^2 A_0 = O(d\tau^2) A_0 + [d(\lambda^{(a)} d\tau) + \Gamma^A_{0b} \Gamma^a_{Ac} \times \lambda^{(b)} \lambda^{(c)} d\tau^2] A_a + \Gamma^\alpha_{ab} \lambda^{(a)} \lambda^{(b)} d\tau^2 A_\alpha$.

Продифференцируем равенства (3.1) и воспользуемся (2.10).

$$d^3 A_0 = d^2 \omega_0^J A_J + 2 d\omega_0^K \omega_K^J A_J + \omega_0^K d\omega_K^J A_J + \omega_0^K \omega_K^L \omega_L^J A_J =$$
$$= O(d\tau^3) A_0 + O^a (d\tau^3) A_a + \left[(2\Gamma^\alpha_{Aa} \Gamma^A_{0b} + \Gamma^A_{0a} \Gamma^\alpha_{Ab}) \lambda^{(a)} \frac{d(\lambda^{(b)} d\tau)}{d\tau^2} + \right.$$
$$\left. + \Gamma^A_{0a} \Gamma^L_{Ab} \Gamma^\alpha_{Lc} \lambda^{(a)} \lambda^{(b)} \lambda^{(c)} \right] d\tau^3 A_\alpha.$$

Для любой точки A из окрестности точки A_0 имеет место разложение

$$A = A_0 + dA_0 + \frac{1}{2} d^2 A_0 + \frac{1}{6} d^3 A_0 + \cdots \qquad (4.2)$$

Обозначая через X^k координаты точки A относительно репера R, получим

$$A = A_0 + X^k A_k. \tag{4.3}$$

Подставляя выражения для дифференциалов dA_0, d^2A_0, d^3A_0 в уравнение (4.2) и сравнивая с уравнением (4.3), получаем

$$X^a = \lambda^{(a)}\,d\tau + \frac{1}{2}\left[\frac{d\,(\lambda^{(a)}\,d\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^A_{0b}\Gamma^a_{Ac}\lambda^{(b)}\lambda^{(c)}\right] d\tau^2 + O\,(d\tau^3), \tag{4.4}$$

$$X^\alpha = \frac{1}{2}\,\Gamma^\alpha_{ab}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)}\,d\tau^2 + \frac{1}{6}\left[2\Gamma^\alpha_{Aa}\Gamma^A_{0b}\lambda^{(a)}\frac{d\,(\lambda^{(b)}d\tau)}{d\tau^2} + \right.$$

$$\left. + \Gamma^A_{0a}\Gamma^\alpha_{Ab}\lambda^{(a)}\frac{d\,(\lambda^{(b)}\,d\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^A_{0a}\Gamma^L_{Ab}\Gamma^\alpha_{Lc}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)}\lambda^{(c)}\right] d\tau^3 + O\,(d\tau^4). \tag{4.5}$$

Двумерная поверхность пространства P_4 в окрестности точки A_0 может быть представлена в виде

$$X^\alpha = \frac{1}{2}\,a^\alpha_{ab}X^aX^b + \frac{1}{6}\,a^\alpha_{abc}X^aX^bX^c + \cdots, \tag{4.6}$$

где коэффициенты a^α_{ab}, a_{abc} симметричны по нижним индексам.

Подставим в последнее разложение X^a из (4.4)

$$X^\alpha = \frac{1}{2}\,a^\alpha_{ab}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)}\,d\tau^2 + \left\{\frac{1}{2}\,a^\alpha_{ab}\lambda^{(a)}\left[\frac{d\,(\lambda^{(b)}\,d\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^A_{0d}\Gamma^b_{Ac}\lambda^{(d)}\lambda^{(c)}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\,a^\alpha_{abc}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)}\lambda^{(c)}\right\} d\tau^3 + \cdots \tag{4.7}$$

Из уравнения (4.1) проективно-геодезических линий можно написать $\lambda^1\,[d\,(\lambda^{(2)}\,d\tau) + \Gamma^2_{ab}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)}\,d\tau^2] - \lambda^{(2)}\,[d\,(\lambda^{(1)}\,d\tau) + \Gamma^1_{ab}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)} \times$ $\times\, d\tau^2] = 0$ или $\dfrac{d\left(\dfrac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(2)}}\right)}{d\tau} = \dfrac{(\lambda^{(2)}\Gamma^1_{ab}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)} - \lambda^{(1)}\Gamma^2_{ab}\lambda^{(a)}\lambda^{(b)})}{d\tau^2}$.

Принимая $\lambda^{(1)} \equiv \lambda$, $\lambda^{(2)} \equiv 1$, получим

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\Gamma^2_{11}\lambda^3 + \lambda^2\,(\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{21}) + \lambda\,(\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{22}) + \Gamma^1_{22}. \tag{4.8}$$

Так как $\dfrac{d\,(\omega^a_0)}{d\tau^2} = \dfrac{d\,(\lambda^{(a)}\,d\tau)}{d\tau^2} = \dfrac{d\lambda^{(a)}}{d\tau}$, получаем

$$\frac{d\,(\lambda^{(1)}\,d\tau)}{d\tau^2} = \frac{d\lambda}{d\tau}, \quad \frac{d\,(\lambda^{(2)}\,d\tau)}{d\tau^2} = 0. \tag{4.9}$$

Подставляя (4.8) и (4.9) в равенства (4.5) и (4.7), сравнивая в полученных выражениях коэффициенты при одинаковых степенях $d\tau$, а затем при одинаковых степенях λ с учетом равенств (2.11) получим

$$a^{\alpha}_{ab} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\alpha}_{ab} + \Gamma^{\alpha}_{ba});$$
$$a^{\alpha}_{abc} = \frac{1}{6}\Gamma^{\alpha}_{\beta(a}\Gamma^{\beta}_{bc)} - \frac{1}{3}\Gamma^{0}_{0(a}\Gamma^{\alpha}_{bc)} - \frac{1}{3}\Gamma^{d}_{(ab}\Gamma^{\alpha}_{c)d}, \tag{4.10}$$

где индексный символ (a, b, c) указывает на то, что берется сумма по всем перестановкам индексов a, b, c.

§ 5. Деривационные формулы для репера R при перемещении по инвариантной соприкасающейся поверхности S_2

Компоненты бесконечно малого перемещения канонического репера R по инвариантной поверхности S_2 обозначим Ω^K_J, тогда

$$\delta A_J = \Omega^K_J A_K. \tag{5.1}$$

Дифференциальные формы Пфаффа Ω^K_J удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $D\Omega^K_J = \Omega^L_J \wedge \Omega^K_L$.

Так как касательная 2-плоскость распределения Δ совпадает с касательной 2-плоскостью поверхности S_2, то можно считать

$$\Omega^a_0 = \omega^a_0. \tag{5.2}$$

Полная система дифференциальных уравнений, определяющая инвариантную поверхность S_2, запишется так:

$$\Omega^{\alpha}_0 = 0. \tag{5.3}$$

Условия интегрируемости этой системы уравнений $D\Omega^{\alpha}_0 = \omega^a_0 \wedge \wedge \Omega^{\alpha}_a = 0$.

Так как дифференциальные формы Ω^i_0, Ω^{α}_a зависят от дифференциалов только главных параметров, то, считая формы Ω^i_0 базисными, можно дифференциальные формы Ω^{α}_a линейно выразить через них:

$$\Omega^{\alpha}_a = \Lambda^{\alpha}_{ab}\omega^b_0. \tag{5.4}$$

Условия интегрируемости примут вид

$$\Lambda^{\alpha}_{ab} = \Lambda^{\alpha}_{ba}. \tag{5.5}$$

Воспользовавшись разложением (4.6), определим формы Ω^i_a через коэффициенты a^{α}_{ab} и a^{α}_{abc} этого разложения.

Рассмотрим произвольную точку

$$A = A_0 + X^i A_i. \tag{5.6}$$

Условие неподвижности точки A при перемещении репера R по поверхности S_2 выражается условием $\delta A = \delta\rho \cdot A$.

Из равенств (5.1), (5.6) и последнего равенства получим $\Omega_0^0 + X^k\Omega_k^0 = \delta\rho$; $\Omega_0^i + \delta X^i + X^k\Omega_k^i = \delta\rho X^i$.

Исключив из последней системы уравнений $\delta\rho$, получим условия стационарности точки

$$\delta X^i = X^i\,(\Omega_0^0 + X^k\Omega_k^0) - \Omega_0^i - X^k\Omega_k^i. \tag{5.7}$$

Для инвариантной поверхности S_2 можно записать $\delta X^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial X^a}\,\delta X^a$.

Подставим в это равенство выражения для δX^a из (5.7), значения частных производных из разложения (4.6), затем приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях полученного равенства, придем к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} &\Omega_b^\alpha = a_{ab}^\alpha\omega_0^a;\\ &a_{ab}^\alpha\Omega_c^b = \frac{1}{2}\,a_{ac}^\alpha\Omega_0^0 - \frac{1}{2}\,a_{abc}^\alpha\omega_0^b + \frac{1}{2}\,a_{ab}^\beta\Omega_\beta^\alpha. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Коэффициенты a_{ab}^α, a_{abc}^α определяются равенствами (4.10).

§ 6. Сопряженная сеть соприкасающейся поверхности S_2

1. Сопряженными направлениями двумерной поверхности четырехмерного проективного пространства называют направления, вдоль которых бесконечно близкие касательные 2-плоскости поверхности пересекаются не в точке, а по прямой. Так как точки A_0, A_1, A_2 репера R расположены в касательной 2-плоскости поверхности S_2, то сопряженные направления поверхности S_2 определяются равенством $\det(A_0, A_1, A_2, A_1 + \delta A_1, A_2 + \delta A_2) = 0$ или

$$\Omega_1^3\Omega_2^4 - \Omega_1^4\Omega_2^3 = 0. \tag{6.1}$$

Воспользовавшись представлением (5.4) и условиями (5.5), получим

$$\Lambda_{1a}^{[3}\Lambda_{b2}^{4]}\Omega_0^a\Omega_0^b = 0. \tag{6.2}$$

Сопряженность, определяемая уравнением (6.2), взаимная. Из равенств (5.8) и (4.10) можно получить

$$\Lambda_{ab}^\alpha = a_{ab}^\alpha = \frac{1}{2}\,(\Gamma_{ab}^\alpha + \Gamma_{ba}^\alpha). \tag{6.3}$$

Уравнение (6.2) преобразуется

$$(\Gamma_{a1}^{[3}\Gamma_{b2}^{4]} + \Gamma_{1a}^{[3}\Gamma_{2b)}^{4]})\,\Omega_0^a\Omega_0^b = 0. \tag{6.4}$$

Учитывая выбор канонического репера R, в частности, равенства (2.6) — (2.8), последнее уравнение перепишется в виде

$$\alpha (\Omega_0^1)^2 + 2\alpha\beta\Omega_0^1\Omega_0^2 + \beta (\Omega_0^2)^2 = 0. \qquad (6.5)$$

2. Сопряженные направления инвариантной соприкасающейся поверхности распределения Δ обладают следующим свойством: эта пара гармонически разделяет пару направлений, одно из которых является куспидальным направлением распределения Δ, второе — сопряженным, несоответствующим выбранному куспидальному.

Действительно, $\mu_1 = \dfrac{\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_1 - \left(\dfrac{\omega_0^1}{\omega_0^2}\right)_1}{\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_1 - \left(\dfrac{\tilde\omega_0^1}{\tilde\omega_0^2}\right)_2} : \dfrac{\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_2 - \left(\dfrac{\omega_0^1}{\omega_0^2}\right)_1}{\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_2 - \left(\dfrac{\tilde\omega_0^1}{\tilde\omega_0^2}\right)_2}$. Учитывая, что $\left(\dfrac{\tilde\omega_0^1}{\tilde\omega_0^2}\right)_1 = -\dfrac{1}{\alpha}$, $\left(\dfrac{\tilde\omega_0^1}{\tilde\omega_0^2}\right)_2 = 0$, $\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_{1,\,2} = \dfrac{-\alpha\beta \pm \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}{\alpha}$, получим $\mu_1 = -1$.

Аналогично проверяется, что $\mu_2 = \dfrac{\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_1 - \left(\dfrac{\omega_0^1}{\omega_0^2}\right)_2}{\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_1 - \left(\dfrac{\tilde\omega_0^1}{\tilde\omega_0^2}\right)_1} : \dfrac{\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_2 - \left(\dfrac{\omega_0^1}{\omega_0^2}\right)_2}{\left(\dfrac{\Omega_0^1}{\Omega_0^2}\right)_2 - \left(\dfrac{\tilde\omega_0^1}{\tilde\omega_0^2}\right)_1} = -1$, так как $\left(\dfrac{\tilde\omega_0^1}{\tilde\omega_0^2}\right)_1 = \infty$, $\left(\dfrac{\omega_0^1}{\omega_0^2}\right)_2 = -\beta$.

3. Найдем пару направлений касательной 2-плоскости, которая гармонически разделяет пару куспидальных направлений распределения Δ и пару взаимно сопряженных направлений инвариантной соприкасающейся поверхности S_2.

Для этого перепишем уравнение (2.2), определяющее куспидальные направления, с учетом условий (2.6), (2.7) и (2.8):

$$\alpha (\omega_0^1)^2 + (\alpha\beta + 1)\, \omega_0^1\omega_0^2 + \beta (\omega_0^2)^2 = 0. \qquad (6.6)$$

Пара направлений, гармонически разделяющая направления (6.5) и (6.6) определяется уравнением $\left[\frac{1}{2}\alpha(\alpha\beta+1) - \alpha^2\beta\right](\tilde\Omega_0^1)^2 + \left[\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\beta(\alpha\beta+1)\right](\tilde\Omega_0^2)^2 = 0$. С учетом (2.8) получим

$$\alpha (\tilde\Omega_0^1)^2 - \beta (\tilde\Omega_0^2)^2 = 0. \qquad (6.7)$$

Можно убедиться в том, что эта пара направлений гармонически разделяет пару куспидальных и пару сопряженных направлений распределения Δ. К такому же уравнению приводит вычисление пары направлений, гармонически разделяющей сопряженные направления распределения Δ и сопряженные направления соприкасающейся поверхности S_2.

Имеет место утверждение: любые две из трех пар проективно инвариантных направлений (куспидальных, сопряженных направлений распределения Δ и сопряженных направлений поверхности S_2) гармонически разделяются одной парой направлений, определенной равенством (6.7).

4. Рассмотрим случай, когда сопряженная сеть поверхности S_2 неопределена, т. е. любое направление касательной 2-плоскости имеет сопряженное. При этом выполнены условия

$$\alpha = 0,\ \beta = 0. \tag{6.8}$$

В таком случае [5] поверхность S_2 лежит в трехмерном проективном пространстве P_3.

Как следует из уравнения (6.6), при выполнении условий (6.8) пара куспидальных направлений распределения Δ совпадает с парой сопряженных направлений этого распределения.

Верно и обратное: если куспидальные и сопряженные направления распределения Δ сливаются в одну пару направлений и условия интегрируемости не выполнены, то любое направление соприкасающейся инвариантной поверхности имеет сопряженное направление. Имеет место

Теорема. *Для того чтобы инвариантная соприкасающаяся поверхность S_2 неголономного распределения Δ лежала в трехмерном проективном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы куспидальные и сопряженные направления этого распределения сливались в одну пару направлений.*

Список литературы: 1. *Rogers G.* Some differential properties of the orthogonal trajectories of a congruence of curves etc.— „Proc. Irish. Academy", 1912, vol. 29, sect. A, No 6. 2. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий.— В кн.: VIII Междунар. конкурс на соискание премии имени Н. И. Лобачевского. Казань, 1937, с. 197—262. 3. *Bompiani E.* Sulle varieta' anolonome.— "Rend dei Lincei", 1938, vol. XXVII, f. 6, p. 37—52. 4. *Роговой М. Р.* О соприкасающихся гиперповерхностях неголономных многообразий V_n^{n-1} в P_n.— В кн.: Укр. геом. сб. Вып. 18. Харьков, 1975, с. 116—126. 5. *Глова Н. И.* К проективной дифференциальной геометрии двумерного распределения четырехмерного пространства.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 21. Харьков, 1977, с. 21—31.

Поступила 10 декабря 1977 г.

УДК 513

В. И. Дискант

К ВОПРОСУ О ПОРЯДКЕ ФУНКЦИИ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОБЛЕМЕ МИНКОВСКОГО

Пусть A — ограниченное замкнутое выпуклое тело в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Предположим, что A регулярно, т. е. имеет в каждой точке своей границы не равные нулю главные радиусы кривизны $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$, которые являются непрерывными функциями единичной нормали $\boldsymbol{u}$ к поверхности тела. Обозначим через $D_{n-1}(A, \boldsymbol{u})$ $(n-1)$-ю функцию кривизны тела A, т. е. положим $D_{n-1}(A, \boldsymbol{u}) = R_1 R_2 \ldots R_{n-1}$. Предположим, что тело B удовлетворяет тем же условиям, что и тело A.

Минковский доказал теорему: если два выпуклых тела имеют одинаковые функции кривизны, то эти тела равны с точностью до параллельного переноса [1]. В настоящей заметке будет доказана

Теорема. *Если для любого* $\boldsymbol{u} \in \Omega$ *выполняется неравенство* $|D_{n-1}(A, \boldsymbol{u}) - D_{n-1}(B, \boldsymbol{u})| < \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *то* $\delta(A, B) < C\varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$.

Здесь Ω — единичная сфера в E^n с центром в начале координат; $\delta(A, B)$ — отклонение тел A и B; величины C и ε_0, как и C_1, C_2, в дальнейшем зависят от n и от отношения R/r, где r — радиус наибольшего шара, который можно вписать в тела A и B; R — радиус наименьшего шара, который можно описать около тел A и B.

Как показано в [2], радиус r допускает оценку снизу, а R допускает оценку сверху, если заданы $D_{n-1}(A, \boldsymbol{u})$ и $D_{n-1}(B, \boldsymbol{u})$.

Теорема этой работы является теоремой устойчивости, соответствующей сформулированной выше теореме Минковского об однозначной определенности выпуклого тела своей $(n-1)$-й функцией кривизны. При этом из утверждения теоремы видно, что порядок функции устойчивости равен $1/(n-1)$. Известны теоремы устойчивости [2, 3] для более общей теоремы Минковского об однозначной определенности при условии, что тела A и B не являются регулярными. В [2] показано, что порядок функции устойчивости равен $1/(n+2)$, а согласно [3] он равен $1/n$. Таким образом, в настоящей заметке улучшен порядок функции устойчивости для случая регулярных тел A и B. Является ли порядок $1/(n-1)$ точным, автору не известно.

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Пусть $H(\theta)$ — смешение по Минковскому тел A и B, т. е. $H(\theta) = (1 - \theta) A + \theta B$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Спроектируем тела $H(\theta)$ на произвольную $(n-1)$-мерную плоскость пространства E^n. Оказывается, что объемы проекций тел $H(\theta)$ при различных θ отличаются на величину, не превосходящую $C_1\varepsilon$. Это дает возможность утверждать, пользуясь результатом работы [3], что отклонение проекций тел A и B не превосходит величины $C_2\varepsilon^{1/(n-1)}$. Если отклонение проекций тел A и B на любую $(n-1)$-мерную плоскость E^n не превосходит $C_2\varepsilon^{1/(n-1)}$, то и отклонение самих тел A и B не превосходит $C\varepsilon^{1/(n-1)}$. Таким образом, теорема может быть получена из следующих трех лемм.

Лемма 1. *Если для любого* $\boldsymbol{u} \in \Omega$ *выполнено неравенство* $|D_{n-1}(A, \boldsymbol{u}) - D_{n-1}(B, \boldsymbol{u})| < \varepsilon$, *то для любого* $\boldsymbol{v} \in \Omega$ *будет* $|V(H_v(\theta)) - V(A_v)| < C_1\varepsilon$.

Здесь через $H_v(\theta)$, A_v обозначены проекции тел $H(\theta)$ и A на некоторую гиперплоскость, ортогональную к $\boldsymbol{v}$, а через $V(H_v(\theta))$, $V(A_v)$ — объемы этих проекций.

Доказательство леммы 1 можно провести аналогично доказательству леммы 3 работы [4]. В этой лемме аналогичное утверждение доказывается для случая $(n-2)$-й функции кривизны.

Лемма 2. *Если* $V(A_v) = V(B_v)$ и $|V(H_v(\theta)) - V(A_v)| < C_1\varepsilon$, *то* $\delta(A_v, B_v) < C\varepsilon^{1/(n-1)}$.

Эта лемма является простым следствием теоремы, доказанной в [3].

Лемма 3. *Если для любого* $\boldsymbol{v} \in \Omega$ *будет* $\delta(A_v, B_v) < C_2\varepsilon^{1/(n-1)}$, *то и* $\delta(A, B) < C\varepsilon^{1/(n-1)}$.

Лемма 3 — следствие леммы 6 работы [4].

Список литературы: 1. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche.— "Ges. Abh.", Bd 2. Leipzig u. Berlin, 1911, S. 230—276. 2. *Волков Ю. А.* Устойчивость решения проблемы Минковского.— «Вестн. Ленингр. политехн. ин-та», 1963, № 1, с. 33—34. 3. *Дискант В. И.* Устойчивость решения уравнения Минковского.— «Сиб. мат. журн.», 1973, т. XIV, № 3, с. 669—673. 4. *Дискант В. И.* Устойчивость выпуклого тела при изменении $(n-2)$-й функции кривизны.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 19. Харьков, 1976, с. 22—33.

Поступила 23 ноября 1977 г.

УДК 513

А. И. Егоров

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ. I

В предлагаемой статье рассматривается два круга вопросов. Во-первых, определяются максимальные порядки групп движений G_r в пространствах линейных элементов аффинной связности; во-вторых, устанавливаются алгебраические структуры тензоров, определяющих такое пространство при условии, что порядок группы движений достаточно высок.

Приведем прежде всего некоторые необходимые определения и понятия. Пространством линейных элементов общей аффинной связности называется многообразие $X_{2n-1}(x, \dot{x})$, в котором задано поле фундаментального геометрического объекта с компонентами $\{\Lambda^i_{jk}(x, \dot{x}), C^i_{jk}(x, \dot{x})\}$, преобразующимися при переходе к новой системе координат по закону [1] $\Lambda^{i'}_{jk} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \times \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, $C^{i'}_{jk} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} C^\alpha_{\beta\gamma}$, где $\dot{x}^k$ — псевдовектор; C^i_{jk} и Λ^i_{jk} — тензор и объект соответственно минус первой и нулевой степени однородности относительно координат $\dot{x}^k$, причем выполняется свертка $C^i_{jk}\dot{x}^k = 0$. Тензор связности C^i_{jk} и объект связности Λ^i_{jk} в общем случае несимметричны относительно индексов j, k. Эти пространства линейных элементов общей аффинной связности будем обозначать символом $N_{n,\dot{x}}$. Как показал Б. Л. Лаптев, к свертке $C^i_{jk}\dot{x}^k = 0$, ограничивая произвол связности, можно присоединить еще свертку $C^i_{jk}\dot{x}^j = 0$, упрощающую расчеты и приводящую в метрическом случае к более простому введению евклидовой связности. Класс пространств $N_{n,\dot{x}}$, в которых выполняются обе нулевые свертки, будем обозначать символом $M_{n,\dot{x}}$. Ясно, что в этих пространствах аффинная связность может быть задана также набором упорядоченных четверок объектов

$$\{\Gamma^i_{jk},\ \Omega^i_{jk},\ \hat{C}^i_{jk},\ \hat{\Omega}^i_{jk}\}, \tag{1}$$

где $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\Lambda^i_{(jk)}$, $\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}\Lambda^i_{[jk]}$, $\hat{C}^i_{jk} = \frac{1}{2}C^i_{(jk)}$, $\hat{\Omega}^i_{jk} = \frac{1}{2}C^i_{[jk]}$; $\hat{C}^i_{jk}\dot{x}^k = 0$, $\hat{\Omega}^i_{jk}\dot{x}^k = 0$.

Движениями в пространствах $M_{n,\dot{x}}$ называются такие точечные преобразования, которые сохраняют аффинную связность (1). Они образуют группу. Чтобы компоненты вектора $v^i(x)$ инфинитезимального преобразования $\tilde{x}^i = x^i + v^i(x)\,t$ определяли движение, необходимы и достаточны условия

$$D\Gamma^i_{jk} = 0,\quad D\Omega^i_{jk} = 0,\quad D\hat{C}^i_{jk} = 0,\quad D\hat{\Omega}^i_{jk} = 0, \tag{2}$$

где D — знак лиевого дифференцирования вдоль линий тока векторного поля $v^i(x)$ [1]. Введем в рассмотрение дополнительно к $v^i(x)$ новые функции $u^i_j = v^i_{,j}$, где запятая перед индексом j означает ковариантное дифференцирование в смысле связности Γ^i_{jk}. Условия интегрируемости этих вспомогательных уравнений $u^i_j = v^i_{,j}$ и уравнений (2) приводятся к виду: а) $DK^i_{jkl} = 0$, б) $D\left(\frac{\partial^\beta}{\partial(\dot{x}^r)^\beta}\Gamma^i_{jk}\right) = 0$, в) $D\left(\frac{\partial^\lambda}{\partial(\dot{x}^r)^\lambda}\hat{C}^i_{jk}\right) = 0$, г) $D\left(\frac{\partial^\delta}{\partial(\dot{x}^r)^\delta}\hat{\Omega}^i_{jk}\right) = 0$, д) $D\Omega^i_{jk} = 0$, е) $D\frac{\partial^\nu}{\partial(\dot{x}^r)^\nu}\Omega^i_{jk} = 0$ и все, получаемые из них в каждом случае последовательным дифференцированием по x^p под знаком D до порядка соответственно α, γ, μ, τ, ε, ε_1. Здесь $\frac{1}{2}K^i_{jkl} = \partial_{[l}\Gamma^i_{|j|k]} + \Gamma^i_{p[l}\Gamma^p_{|j|k]} + \Gamma^i_{j[l\cdot|p}\Gamma^p_{\sigma|k]}\dot{x}^\sigma$.

В дальнейшем частное дифференцирование по $\dot{x}^r$ будем записывать так: $\frac{\partial H_i}{\partial\dot{x}^r} = H_{i\cdot r}$; $\frac{\partial^2 H}{\partial(\dot{x}^r)^2} = H_{\cdot r\cdot r}$; $\frac{\partial^2 H}{\partial\dot{x}^r\partial\dot{x}^s} = H_{\cdot r\cdot s}$ и т. д.

Если при увеличении каждого из чисел α, β, γ, λ, μ, δ, τ, ε, ε_1, ν на единицу число ρ связей не изменяется, то пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r = n^2 + n - \rho$ [2].

Класс пространств $M_{n,\dot{x}}$, у которых объект $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} H^{\alpha}_{\cdot\beta\cdot\gamma}\ (= H^{\alpha}_{\beta\ \gamma})$, обозначим символом $X_{n,\dot{x}}\ (Y_{n,\dot{x}})$. Составляющие H^{α}, H^{α}_{β} однородны соответственно второй и первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^{\alpha}$. Будем предполагать, что в пространствах $X_{n,\dot{x}}$, $Y_{n,\dot{x}}$ тензор $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\cdot\delta} \neq 0$.

§ 1. Структура тензоров $\hat{C}^{i}_{jk}$, $\hat{\Omega}^{i}_{jk}$, Ω^{i}_{jk} в пространстве $M_{n,\dot{x}}$, допускающем группу движений достаточно высокого порядка

Для выяснения указанной в заголовке структуры подробнее исследуем условия инвариантности тензоров $\hat{C}^{i}_{jk}$, $\hat{C}^{i}_{jk\cdot l}$, $\hat{\Omega}^{i}_{jk}$, $\hat{\Omega}^{i}_{jk\cdot l}$, Ω^{i}_{jk}, $\Omega^{i}_{jk\cdot l}$ при движениях. Исследования будем проводить в специальной системе координат, в которой

$$\dot{x}^{i} = \delta^{i}_{1}; \tag{3}$$

в произвольной точке $(x,\ \dot{x})$ пространства $M_{n,\dot{x}}$. Заметим, что в этой системе координат индекс 1 будет занимать особое положение.

1. Выясним сначала структуру тензора $\hat{C}^{i}_{jk}$ в предположении, что пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$. Принимая во внимание выполнение свертки $\hat{C}^{i}_{jp}\dot{x}^{p} = 0$, найдем, что $\hat{C}^{i}_{j1} = 0$ в рассматриваемой точке. Построим матрицу

$$T_1 = \| T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jk},\quad T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jkl} \|, \tag{4}$$

элементами которой являются коэффициенты

$$\begin{gathered} T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jk} = \delta^{\alpha}_{j}\hat{C}^{i}_{\beta k} + \delta^{\alpha}_{k}\hat{C}^{i}_{j\beta} + \delta^{\alpha}_{1}\hat{C}^{i}_{jk\cdot\beta} - \delta^{i}_{\beta}\hat{C}^{\alpha}_{jk}; \\ T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jkl} = \delta^{\alpha}_{j}\hat{C}^{i}_{\beta k\cdot l} + \delta^{\alpha}_{k}\hat{C}^{i}_{j\beta\cdot l} + \delta^{\alpha}_{l}\hat{C}^{i}_{jk\cdot\beta} - \delta^{i}_{\beta}\hat{C}^{\alpha}_{jk\cdot l} + \delta^{\alpha}_{1}\hat{C}^{i}_{jk\cdot l\cdot\beta} \end{gathered} \tag{5}$$

при функциях u^{α}_{β} в уравнениях $D\hat{C}^{i}_{jk} = 0$, $D\hat{C}^{i}_{jk\cdot l} = 0$. Эту матрицу будем обозначать символом $T_1(5)$: матрица T_1 с элементами (5).

Лемма 1. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$ или если порядок $r > n^2 - 3n + 8$ и все составляющие $\hat{C}^{i}_{jk}$ вида $\hat{C}^{2}_{33}$ равны нулю в системе координат (3), то в рассматриваемой точке*

$$\hat{C}^{i}_{jk} = 0 \quad (i \neq 1;\ i \neq j,\ k). \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем индексы 2, 3, 4 могут быть заменены любыми различными числами из ряда 2, 3, ..., n.

Доказательство. В первом случае, когда $r > n^2 - 2n + 5$, рассмотрим минор порядка $3n - 5$ матрицы T_1 (5), составленный из коэффициентов при функциях u_2^j, u_k^3, u_l^1 в уравнениях с индексами $\binom{j}{33}$, $\binom{2}{3k}$, $\binom{2}{33l}$; $j, l = 2, 3, \ldots, n$; $k = 4, 5, \ldots, n$. Этот минор с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\hat{C}_{33}^2$. Во втором случае, когда все составляющие вида $\hat{C}_{33}^2 = 0$ и $r > n^2 - 3n + 8$, рассматриваем минор порядка $4n - 8$ той же матрицы, составленный из коэффициентов при функциях u_2^j, u_k^3, u_m^1, u_3^4, u_l^4 в уравнениях $\binom{j}{34}$, $\binom{2}{4k}$, $\binom{2}{34m}$, $\binom{2}{33}$, $\binom{2}{3l}$; $j, m = 2, 3, \ldots, n$; $k = 4, 5, \ldots, n$; $l = 5, 6, \ldots, n$; этот минор с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\hat{C}_{34}^2$. В обоих случаях сумма порядка группы и порядка минора больше $n^2 + n$, откуда и следует утверждение леммы.

Полученные условия (6) позволяют заключить, что тензор $\hat{C}_{jk}^i$ для любой координатной системы в произвольной точке $(x, \dot{x})$ пространства $M_{n, \dot{x}}$ имеет вид

$$\hat{C}_{jk}^i = \delta_j^i A_k + \delta_k^i A_j + \dot{x}^i B_{jk}, \tag{7}$$

где $A_p \dot{x}^p = 0$, $B_{jk} = B_{kj}$, $B_{jp}\dot{x}^p = A_j$. Здесь тензоры A_i и B_{jk} соответственно минус первой и минус второй степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$. Из соотношений (7) и вытекающих из них дифференциальных следствий находим $B_{ij} = \frac{1}{n(n-2)} \times (n\hat{C}_{ij} - \hat{D}_{ji} - \hat{D}_{ij})$, где $\hat{C}_{ij} = \hat{C}_{ij \cdot \sigma}^\sigma$, $\hat{D}_{ij} = \hat{C}_{\sigma i \cdot j}^\sigma$. Легко убедиться также, что $B_{p\sigma}\dot{x}^p \dot{x}^\sigma = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если пространство $M_{n, \dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то тензор $\hat{C}_{jk}^i$ необходимо имеет строение (7).*

Класс пространств $M_{n, \dot{x}}$, у которых все составляющие вида $\hat{C}_{33}^2 = 0$, но по крайней мере одна составляющая вида $\hat{C}_{34}^2 \neq 0$ в специальной системе координат (3), будем обозначать символом $Z_{n, \dot{x}}$; класс пространств, $M_{n, \dot{x}}$, у которых тензор $\hat{C}_{jk}^i$ не равен нулю и имеет структуру, отличную от (7), — символом $T_{n, \dot{x}}$. Ясно, что пространства $Z_{n, \dot{x}} \subset T_{n, \dot{x}}$ и что не существует пространств $T_{n, \dot{x}}$ $(Z_{n, \dot{x}})$, допускающих группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$ $(> n^2 - 3n + 8)$, так что наибольший возможный порядок группы $r \leqslant n^2 - 2n + 5$ $(\leqslant n^2 - 3n + 8)$. Точность указанных здесь границ следует из того, что существуют пространства $T_{n, \dot{x}}$, $Z_{n, \dot{x}}$, допускающие полные группы движений, порядки которых определяются равенствами. В самом деле, пространство $T_{n, \dot{x}}$ со связностью $\Gamma_{jk}^i = 0$, $\Omega_{jk}^i = 0$, $\hat{C}_{33}^2 = 1/\dot{x}^1$, $\hat{C}_{13}^2 = -\dot{x}^3/(\dot{x}^1)^2$,

$\hat{C}^{\,l}_{11} = (\dot{x}^3)^2/(\dot{x}^1)^3$, остальные $\hat{C}^{\,i}_{jk} = 0$, $\hat{\Omega}^{i}_{jk} = 0$ допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - 2n + 5$. Операторы группы: p_i, $2x^1p_1 + x^3p_3$, x^1p_3, x^3p_2, $x^1p_1 - x^2p_2$, $x^\alpha p_\beta$, $x^\alpha p_2$, x^1p_2, x^1p_β, x^3p_β $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 4, 5, \ldots, n)$. Пространство $Z_{n,\dot{x}}$ со связностью $\hat{C}^{\,2}_{34} = 1/\dot{x}^1$, $\hat{C}^{\,2}_{13} = -\dot{x}^4/(\dot{x}^1)^2$, $\hat{C}^{\,2}_{11} = 2\dot{x}^3\dot{x}^4/(\dot{x}^1)^3$, $\hat{C}^{\,2}_{14} = -\dot{x}^3/(\dot{x}^1)^2$, остальные $\hat{C}^{\,i}_{jk} = 0$, $\Gamma^{i}_{jk} = \Omega^{i}_{jk} = \hat{\Omega}^{i}_{jk} = 0$ допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - 3n + 8$. Операторы ее: p_i, $x^1p_1 - x^2p_2$, x^1p_2, x^4p_2, x^1p_3, x^3p_2, $x^1p_1 + x^4p_4$, x^1p_4, $x^3p_3 - x^4p_4$, $x^\alpha p_\beta$, $x^\alpha p_2$, x^1p_β, x^3p_α, x^4p_β $(\alpha, \beta = 5, 6, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда следует

Теорема 2. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $T_{n,\dot{x}}$ и $Z_{n,\dot{x}}$ равен соответственно $n^2 - 2n + 5$ и $n^2 - 3n + 8$.*

2. Выясним структуру тензора $\hat{\Omega}^{i}_{jk}$, предполагая, что пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 3n + 10$. Пусть в матрице (4) элементами являются

$$T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jk} = \delta^{\alpha}_{j}\hat{\Omega}^{i}_{\beta k} + \delta^{\alpha}_{k}\hat{\Omega}^{i}_{j\beta} - \delta^{i}_{\beta}\hat{\Omega}^{\alpha}_{jk} + \delta^{\alpha}_{1}\hat{\Omega}^{i}_{jk\cdot\beta},$$

$$T^{\alpha}_{\beta}\binom{i}{jkl} = \delta^{\alpha}_{j}\hat{\Omega}^{i}_{\beta k\cdot l} + \delta^{\alpha}_{k}\hat{\Omega}^{i}_{j\beta\cdot l} + \delta^{\alpha}_{l}\hat{\Omega}^{i}_{jk\cdot\beta} - \delta^{i}_{\beta}\hat{\Omega}^{\alpha}_{jk\cdot l} + \delta^{\alpha}_{1}\hat{\Omega}^{i}_{jk\cdot l\cdot\beta} \tag{8}$$

— коэффициенты при функциях u^{α}_{β} в уравнениях $D\hat{\Omega}^{i}_{jk} = 0$, $D\hat{\Omega}^{i}_{jk\cdot l} = 0$ в специальной системе координат (3). Эту матрицу обозначим символом T_1 (8). Минор порядка $4n - 10$ этой матрицы, составленный из коэффициентов при функциях u^{i}_{2}, u^{3}_{k}, u^{4}_{j}, u^{1}_{l} в уравнениях $\binom{i}{34}$, $\binom{2}{k4}$, $\binom{2}{j3}$, $\binom{2}{34l}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j, k = 5, 6, \ldots, n$; $l = 3, 4, \ldots, n$, с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\hat{\Omega}^{2}_{34}$. Отсюда следует

Лемма 2. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 3n + 10$, то в рассматриваемой точке*

$$\hat{\Omega}^{i}_{jk} = 0 \quad (i \neq 1,\ i \neq j,\ k). \tag{9}$$

Эти соотношения позволяют заключить, что тензор $\hat{\Omega}^{i}_{jk}$ для любой координатной системы и для любой точки $(x, \dot{x})$ пространства $M_{n,\dot{x}}$ имеет следующее строение:

$$\hat{\Omega}^{i}_{jk} = \delta^{i}_{j}\hat{\Omega}_{k} - \delta^{i}_{k}\hat{\Omega}_{j} + M_{ik}\dot{x}^{i}, \tag{10}$$

где $\hat{\Omega}_{k}$, M_{ik} — тензоры соответственно минус первой и минус второй степени относительно координат $\dot{x}^{\alpha}$, причем $\hat{\Omega}_{p}\dot{x}^{p} = 0$, $M_{jp} \times \dot{x}^{p} = \hat{\Omega}_{j}$, $M_{jk} = -M_{kj}$. Отсюда вытекают две теоремы:

Теорема 3. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 3n + 10$, то тензор $\hat{\Omega}^{i}_{jk}$ необходимо имеет структуру (10).*

Теорема 4. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то тензор связности C^i_{jk} необходимо имеет следующее строение:*

$$C^i_{jk} = \delta^i_j (\hat{\Omega}_k + A_k) + \delta^i_k (A_j - \hat{\Omega}_j) + \dot{x}^i (B_{jk} + M_{jk}), \tag{11}$$

где тензоры $\hat{\Omega}_k$, A_k, B_k, M_{jk} определяются формулами (10) и (7).

Класс пространств $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\hat{\Omega}^i_{jk} \neq 0$ и имеет строение, отличное от (10), будем обозначать символом $\Pi_{n,\dot{x}}$. Из теоремы 3 следует, что возможный порядок групп движений G_r в пространствах $\Pi_{n,\dot{x}}$ удовлетворяет неравенству $r \leqslant n^2 - 3n + 10$. Точность указанной здесь границы следует из того, что пространство $\Pi_{n,\dot{x}}$ со связностью $\Gamma^i_{jk} = 0$, $\Omega^i_{jk} = 0$, $\hat{C}^i_{jk} = 0$, $\hat{\Omega}^2_{13} = \dot{x}^4 (\dot{x}^1)^{-2}$, $\hat{\Omega}^2_{14} = -\dot{x}^3 (\dot{x}^1)^{-2}$, $\hat{\Omega}^2_{34} = (\dot{x}^1)^{-1}$, остальные $\hat{\Omega}^i_{jk} = 0$ допускает полную группу движений порядка $r = n^2 - 3n + 10$. Операторы группы: p_i, $x^1 p_2$, $x^3 p_2$, $x^4 p_2$, $x^1 p_1 + x^3 p_3$, $x^3 p_3 - x^4 p_4$, $x^2 p_2 + x^3 p_3$, $x^1 p_3$, $x^4 p_3$, $x^1 p_4$, $x^3 p_4$, $x^\alpha p_\beta$, $x^\alpha p_2$, $x^3 p_\alpha$, $x^1 p_\beta$, $x^4 p_\beta$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 5, 6, \ldots, n$). Этим доказана

Теорема 5. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $\Pi_{n,\dot{x}}$ равен $n^2 - 3n + 10$.*

Уточним теперь структуру тензора $\hat{\Omega}^i_{jk}$ пространства $M_{n,\dot{x}}$, допускающего группу движений порядка $> n^2 - n + 2$.

Теорема 6. *Антисимметрический тензор M_{jk} равен нулю в случае, если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$.*

Доказательство. В предположении, что тензор $M_{jk} \neq 0$, достаточно рассмотреть в специальной системе координат (3) два случая: 1) $M_{12} \neq 0$; 2) $M_{23} \neq 0$, а все остальные составляющие вида $M_{12} = 0$. Построим матрицу

$$T_2 = \| T^\alpha_\beta (ij), \quad T^\alpha_\beta (ijk) \|, \tag{12}$$

элементами которой являются коэффициенты

$$T^\alpha_\beta (ij) = \delta^\alpha_i M_{\beta j} + \delta^\alpha_j M_{i\beta} + \delta^\alpha_1 M_{ij\cdot\beta},$$
$$T^\alpha_\beta (ijk) = \delta^\alpha_i M_{\beta j\cdot k} + \delta^\alpha_j M_{i\beta\cdot k} + \delta^\alpha_k M_{ij\cdot\beta} + \delta^\alpha_1 M_{ij\cdot k\cdot\beta} \tag{13}$$

при функциях u^α_β в уравнениях $DM_{ij} = 0$, $DM_{ij\cdot k} = 0$ в специальной системе координат (3). В первом случае минор порядка $2n - 2$ матрицы T_2 (13), составленный из коэффициентов при функциях u^2_j, u^1_k, u^1_2 в уравнениях $(1j)$, $(2k)$, (122), с точностью до знака равен степени составляющей M_{12} ($j = 2, 3, \ldots, n$; $k = 3, 4, \ldots, n$). Во втором случае минор порядка $3n - 8$ матрицы T_2 (13), построенный из коэффициентов при функциях u^2_j, u^1_k, u^3_l в уравнениях $(3j)$, $(23k)$, $(2l)$, где $j = 2, 4, \ldots, n$; $k, l =$

$= 4, 5, \ldots, n$, равен с точностью до знака степени компоненты M_{23}. Так как по условию теоремы пространство допускает группу движений порядка $r > n^2 - n + 2$, оба случая невозможны; следовательно, $M_{jk} = 0$. Теорема доказана. Заметим, что эта теорема справедлива также для любого антисимметрического тензора P_{jk}, степень однородности которого относительно координат $\dot{x}^\alpha$ равна k $(k \neq 0)$ и который инвариантен при движениях.

Итак, мы убедились, что справедлива

Теорема 7. *Если пространство $M_{n, \dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$, то тензор $\hat{\Omega}^i_{jk}$ необходимо имеет следующее строение:*

$$\hat{\Omega}^i_{jk} = \delta^i_j \hat{\Omega}_k - \delta^i_k \hat{\Omega}_j; \quad \hat{\Omega}_{i \cdot j} = \hat{\Omega}_{j \cdot i}, \quad \hat{\Omega}_{i, j} = \hat{\Omega}_{j, i}. \tag{14}$$

3. Исследуем структуру тензора кручения $\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj})$ при условии, что пространство $M_{n, \dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 6$. Для этого построим матрицу T_1 вида (4), элементами которой являются коэффициенты

$$T^\alpha_\beta \binom{i}{jk} = \delta^\alpha_j \Omega^i_{\beta k} + \delta^\alpha_k \Omega^i_{j\beta} - \delta^i_\beta \Omega^\alpha_{jk} + \delta^\alpha_1 \Omega^i_{jk \cdot \beta},$$

$$T^\alpha_\beta \binom{i}{jkl} = \delta^\alpha_j \Omega^i_{\beta k \cdot l} + \delta^\alpha_k \Omega^i_{j\beta \cdot l} + \delta^\alpha_l \Omega^i_{jk \cdot \beta} - \delta^i_\beta \Omega^\alpha_{jk \cdot l} + \delta^\alpha_1 \Omega^i_{jk \cdot l \cdot \beta} \tag{15}$$

при функциях u^α_β в уравнениях $D\Omega^i_{jk} = 0$, $D\Omega^i_{jk \cdot l} = 0$ в специальной системе координат (3).

Лемма 3. *Если пространство $M_{n, \dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 6$, то в рассматриваемой точке*

$$\Omega^i_{jk} = 0 \quad (i \neq 1, \; i \neq j, k). \tag{16}$$

Доказательство. Прежде всего убедимся, что $\Omega^2_{13 \cdot 3} = 0$ и $\Omega^2_{13 \cdot 4} = 0$. Первое следует из того, что минор порядка $3n - 6$ матрицы T_1 (15), составленный из коэффициентов при функциях u^1_3, u^3_k, u^l_2, u^1_2, u^3_2, u^1_j $(j, k, l = 4, 5, \ldots, n)$ в уравнениях $\binom{2}{133}$, $\binom{2}{1k3}$, $\binom{l}{133}$, $\binom{2}{233}$, $\binom{2}{123}$, $\binom{2}{j33}$ с точностью до постоянного множителя равен степени компоненты $\Omega^2_{13 \cdot 3}$. Второе аналогично доказывается с помощью минора порядка $4n - 12$ матрицы T_1 (15), составленного из коэффициентов при функциях u^3_3, u^3_k, u^1_2, u^1_i, u^4_1, u^3_2, u^m_2 в уравнениях $\binom{2}{131}$, $\binom{2}{1k4}$, $\binom{2}{234}$, $\binom{2}{i34}$, $\binom{2}{13l}$, $\binom{3}{134}$, $\binom{m}{134}$ $(i = 4, 5, \ldots, n; \; k, l, m = 5, 6, \ldots, n)$, который с точностью до знака равен степени компоненты $\Omega^2_{13 \cdot 4}$.

Теперь чтобы доказать соотношения (16), достаточно рассмотреть составляющие Ω^2_{13} и Ω^2_{34}. Минор порядка $3n - 6$ матрицы T_1 (15), составленный из коэффициентов при u^i_2, u^1_k, u^3_l в уравнениях $\binom{i}{13}$, $\binom{2}{k3}$, $\binom{2}{l1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n; \; k, l = 4, 5, \ldots, n)$

с точностью до знака равен степени составляющей Ω^2_{13}, поэтому $\Omega^2_{13}=0$. Затем, принимая во внимание, что все составляющие вида $\Omega^2_{13}=0$, $\Omega^2_{13\cdot 3}=0$, $\Omega^2_{13\cdot 4}=0$, выделим минор порядка $3n-6$ матрицы T_1 (15), составленный из коэффициентов при функциях u^i_2, u^3_l, u^4_k, u^3_1, u^4_1 в уравнениях $\binom{i}{34}$, $\binom{2}{l4}$, $\binom{2}{k3}$, $\binom{2}{14}$, $\binom{2}{31}$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ k, l=5, 6, \ldots, n)$. Он с точностью до знака равен степени составляющей Ω^2_{34}, и поэтому она равна нулю. Лемма доказана полностью.

Из соотношений (16) получаем для тензора Ω^i_{jk} в произвольной системе координат в любой точке $(x, \dot{x})$ пространства $M_{n,\dot{x}}$ такую структуру:

$$\Omega^i_{jk}=\delta^i_j\Omega_k-\delta^i_k\Omega_j+\dot{x}^i\Omega_{jk};\quad \Omega_{jk}=-\Omega_{kj}, \tag{17}$$

где Ω_k, Ω_{ij} — тензоры соответственно нулевой и минус первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^a$.

Дифференцируя (17) по $\dot{x}^l$, получаем

$$\Omega^i_{jk\cdot l}=\delta^i_j\Omega_{k\cdot l}-\delta^i_k\Omega_{j\cdot l}+\delta^i_l\Omega_{jk}+\dot{x}^i\Omega_{jk\cdot l}. \tag{18}$$

Теорема 8. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r>n^2-2n+6$, то тензоры Ω^i_{jk}, $\Omega^i_{jk\cdot l}$ необходимо имеют алгебраическую структуру соответственно (17), (18).*

Класс пространств $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор кручения Ω^i_{jk} не равен нулю и имеет структуру, отличную от (17), будем обозначать символом $\Gamma_{n,\dot{x}}$. Из теоремы 8 вытекает, что не существует пространств $\Gamma_{n,\dot{x}}$, допускающих группы движений G_r порядка $r>n^2-2n+6$. Рассмотрим пространство $\Gamma_{n,\dot{x}}$ со связностью: $\Gamma^i_{jk}=0$, $\hat{C}^i_{jk}=0$, $\hat{\Omega}^i_{jk}=0$, $\Omega^1_{23}=a$, остальные $\Omega^i_{jk}=0$; a — отличная от нуля постоянная. Это пространство [3, с. 81] допускает полную группу движений G_r порядка $r=n^2-2n+6$.

Теорема 9. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $\Gamma_{n,\dot{x}}$ равен n^2-2n+6.*

Применяя теорему 6 к тензору Ω_{jk}, получим, что $\Omega_{jk}=0$, если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений порядка $r>n^2-n+2$. Поэтому справедлива

Теорема 10. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r>n^2-n+2$, то тензоры Ω^i_{jk}, $\Omega^i_{jk\cdot l}$ необходимо имеют такое строение:*

$$\Omega^i_{jk}=\delta^i_j\Omega_k-\delta^i_k\Omega_j;\quad \Omega^i_{jk\cdot l}=\delta^i_j\Omega_{k\cdot l}-\delta^i_k\Omega_{j\cdot l};\quad \Omega_{k\cdot l}=\Omega_{l\cdot k}. \tag{19}$$

Будем обозначать символом $F_{n,\dot{x}}$ класс пространств $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Omega^i_{jk}\neq 0$ и имеет структуру, отличную от (19).

Из теоремы 10 следует, что пространство $F_{n,\dot{x}}$ допускает группы движений G_r порядка не выше n^2-n+2. С другой стороны, существует пространство $F_{n,\dot{x}}$ со связностью

$$\Gamma^l_{jk}=0,\quad \Omega^l_{jk}=\dot{x}^l(A_{j\cdot k}-A_{k\cdot j}),\quad \hat{\Omega}^l_{jk}=0,\quad \hat{C}^l_{jk}=0, \tag{20}$$

где $A_1=\dot{x}^2(\dot{x}^1)^{-1}$, $A_2=-1$, остальные $A_l=0$, допускающее полную группу движений G_r порядка $r=n^2-n+2$. Операторы группы: p_i, $x^i p_j$, $x^1 p_1$, $x^1 p_2$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=3, 4, \ldots, n$). Поэтому имеет место

Теорема 11. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $F_{n,\dot{x}}$ равен n^2-n+2.*

Заметим, что класс пространств $\Gamma_{n,\dot{x}}$ является подклассом пространств $F_{n,\dot{x}}$, т. е. $\Gamma_{n,\dot{x}}\subset F_{n,\dot{x}}$.

Теорема 12. *Тензор $\Omega_{k\cdot l}$ равен нулю в случае, если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r>n^2-n+2$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что тензор $\Omega_{k\cdot l}$ ($\Omega_{k\cdot l}=\Omega_{l\cdot k}$) образует нулевую свертку $\Omega_{k\cdot l}\dot{x}^l=0$. Предполагая, что он отличен от нуля, приходим к следующим возможным случаям: 1) $\Omega_{2\cdot 2}\neq 0$, 2) $\Omega_{2\cdot 3}\neq 0$, а все составляющие вида $\Omega_{2\cdot 2}=0$ в специальной системе координат (3).

Для доказательства теоремы построим матрицу T_2 вида (12) с элементами

$$T^\alpha_\beta(ij)=\delta^\alpha_i\Omega_{\beta\cdot j}+\delta^\alpha_j\Omega_{i\cdot\beta}+\delta^\alpha_1\Omega_{i\cdot j\cdot\beta};\quad T^\alpha_\beta(ijk)=\delta^\alpha_i\Omega_{\beta\cdot j\cdot k}+$$
$$+\delta^\alpha_j\Omega_{i\cdot\beta\cdot k}+\delta^\alpha_k\Omega_{i\cdot j\cdot\beta}+\delta^\alpha_1\Omega_{i\cdot j\cdot k\cdot\beta}, \tag{21}$$

которые являются коэффициентами при функциях u^α_β в уравнениях $D\Omega_{i\cdot j}=0$, $D\Omega_{i\cdot j\cdot k}=0$.

В случае 1 минор порядка $2n-2$ матрицы T_2 (21) из коэффициентов при функциях u^2_i, u^1_j в уравнениях ($2i$), ($22j$) ($i, j=2, 3, \ldots, n$) равен с точностью до постоянного множителя степени составляющей $\Omega_{2\cdot 2}$. В случае 2 таким же свойством относительно составляющей $\Omega_{2\cdot 3}$ обладает минор порядка $3n-4$ матрицы T_2 (21), составленный из коэффициентов при функциях u^2_j, u^1_k, u^3_l в уравнениях ($3j$), ($23k$), ($2l$), j, $k=2, 3, \ldots, n$; $l=2, 4, \ldots, n$. В обоих случаях составляющие равны нулю, и теорема доказана. Принимая во внимание этот результат, из структуры (19) тензора $\Omega^i_{jk\cdot l}$ получаем:

Теорема 13. *Если пространство $M_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r>n^2-n+2$, то тензор $\Omega^i_{jk\cdot l}$ тождественно обращается в нуль.*

Отсюда следует, что возможный порядок групп движений в пространствах $M_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Omega^i_{jk\cdot l}\neq 0$, удовлетворяет неравенству $r \leqslant n^2 - n + 2$. Точность указанной здесь границы следует из того, что рассмотренное выше пространство со связностью (20) допускает полную группу движений порядка $r = n^2 - n + 2$ и тензор $\Omega^i_{jk \cdot l}$ этого пространства отличен от нуля.

Теорема 14. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $M_{n, \dot{x}}$, у которых тензор $\Omega^i_{jk \cdot l} \neq 0$, равен $n^2 - n + 2$.*

Легко убедиться, что пространство $M_{n, \dot{x}}$ со связностью $\Gamma^i_{jk} = \sigma_3 (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j) + \sigma_4 \dot{x}^i (A_{j \cdot k} + A_{k \cdot j})$, $\Omega^i_{jk} = \sigma_1 (\delta^i_j A_k - \delta^i_k \times A_j) + \sigma_2 \dot{x}^i (A_{j \cdot k} - A_{k \cdot j})$; $\hat{C}^i_{jk} = 0$, $\hat{\Omega}^i_{jk} = 0$, где $A_1 = \dot{x}^2 (\dot{x}^1)^{-1}$, $A_2 = -1$, остальные $A_i = 0$; σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 — постоянные, причем $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0$, допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - n + 2$. В этом примере объект связности Λ^i_{jk} имеет структуру: $\Lambda^i_{jk} = (\sigma_1 + \sigma_3) \delta^i_j A_k + (\sigma_3 - \sigma_1) \delta^i_k A_j + \dot{x}^i [(\sigma_4 + \sigma_2) A_{j \cdot k} + (\sigma_4 - \sigma_2) A_{k \cdot j}]$, где $A_p \dot{x}^p = 0$, $A_{p \cdot j} \dot{x}^p = -A_j$.

§ 2. Струнтура тензора $\Lambda^i_{jk \cdot l}$ пространств $Y_{n, \dot{x}}$ и $X_{n, \dot{x}}$, допускающих группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$. Максимальный порядок групп движений в пространствах $Y_{n, \dot{x}}$

Теорема 15. *Если пространство $Y_{n, \dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то тензор $\Lambda^i_{jk \cdot l} = H^i_{j \cdot k \cdot l}$ необходимо имеет алгебраическую структуру*

$$\Lambda^i_{jk \cdot l} = \delta^i_j D_{kl} + \delta^i_k K_{jl} + \delta^i_l K_{jk} + \dot{x}^i K_{jk \cdot l}. \tag{22}$$

Здесь тензоры D_{kl} и K_{jl} минус первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$, причем $D_{kp} \dot{x}^p = 0$, $D_{kl} = D_{lk}$, $K_{jp} \dot{x}^p = 0$, $K_{jk \cdot l} = K_{jl \cdot k}$, $D_{kl \cdot j} = D_{kj \cdot l}$.

Для доказательства построим матрицу

$$T_3 = \| T^\alpha_\beta \binom{i}{jkl}, \quad T^\alpha_\beta \binom{i}{jkls} \|, \tag{23}$$

элементами которой служат коэффициенты

$$\begin{gathered} T^\alpha_\beta \binom{i}{jkl} = \delta^\alpha_j \Lambda^i_{\beta k \cdot l} + \delta^\alpha_k \Lambda^i_{j\beta \cdot l} + \delta^\alpha_l \Lambda^i_{jk \cdot \beta} - \delta^i_\beta \Lambda^\alpha_{jk \cdot l} + \delta^\alpha_1 \Lambda^i_{jk \cdot l \cdot \beta}, \\ T^\alpha_\beta \binom{i}{jkls} = \delta^\alpha_j \Lambda^i_{\beta k \cdot l \cdot s} + \delta^\alpha_k \Lambda^i_{j\beta \cdot l \cdot s} + \delta^\alpha_l \Lambda^i_{jk \cdot \beta \cdot s} + \delta^\alpha_s \Lambda^i_{jk \cdot l \cdot \beta} - \\ - \delta^i_\beta \Lambda^\alpha_{jk \cdot l \cdot s} + \delta^\alpha_1 \Lambda^i_{jk \cdot l \cdot s \cdot \beta} \end{gathered} \tag{24}$$

при функциях u^α_β в уравнениях $D\Lambda^i_{jk \cdot l} = 0$, $D\Lambda^i_{jk \cdot l \cdot s} = 0$ в специальной системе координат (3). Предполагая, что тензор $\Lambda^i_{jk \cdot l} \neq 0$ ($i \neq 1$; $i \neq j$, k, l), приходим к таким возможным случаям значений составляющих: 1) $\Lambda^2_{13\cdot 3} \neq 0$; 2) $\Lambda^2_{13\cdot 4} \neq 0$, а все составляющие вида $\Lambda^2_{13\cdot 3} = 0$; 3) $\Lambda^2_{33\cdot 3} \neq 0$, все вида $\Lambda^2_{13\cdot 3} = \Lambda^2_{13\cdot 4} = 0$; 4) $\Lambda^2_{33\cdot 4} \neq 0$, все вида $\Lambda^2_{13\cdot 3} = \Lambda^2_{13\cdot 4} = \Lambda^2_{33\cdot 3} = 0$; 5) $\Lambda^2_{34\cdot 4} \neq 0$, все вида $\Lambda^2_{13\cdot 3} = \Lambda^2_{13\cdot 4} = \Lambda^2_{33\cdot 3} = \Lambda^2_{33\cdot 4} = 0$; 6) $\Lambda^2_{34\cdot 5} \neq 0$, все вида $\Lambda^2_{13\cdot 3} = \Lambda^2_{13\cdot 4} = \Lambda^2_{33\cdot 3} = \Lambda^2_{33\cdot 4} = \Lambda^2_{34\cdot 4} = 0$.

Заметим, что в пространствах $Y_{n,\dot{x}}$ в общем случае тензор $\Lambda^l_{jk\cdot t}$ не симметричен по индексам j, k, но $\Lambda^l_{j[k\cdot t]} = 0$.

В случае 1 минор порядка $3n-5$ матрицы $T_3(24)$, составленный из коэффициентов при функциях u^i_2, u^1_j, u^3_k в уравнениях $\binom{i}{133}$, $\binom{2}{j33}$, $\binom{2}{13k}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 3, 4, \ldots, n;\ k = 4, 5, \ldots, n)$ с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Lambda^2_{13\cdot 3}$. В случае 2 минор порядка $4n-13$ матрицы T_3 (24), составленный из коэффициентов при функциях u^i_2, u^3_j, u^4_k, u^1_l в уравнениях $\binom{i}{134}$, $\binom{2}{1j4}$, $\binom{2}{13k}$, $\binom{2}{134l}$ $(i,\ j,\ l = 4, 5, \ldots, n;\ k = 5, 6, \ldots, n)$ с той же точностью равен степени составляющей $\Lambda^2_{13\cdot 4}$. В случае 3 минор порядка $3n-4$ матрицы $T_3(24)$, состоящий из коэффициентов при функциях u^i_2, u^3_k, u^1_l, u^1_3, u^3_1 в уравнениях $\binom{i}{333}$, $\binom{2}{33k}$, $\binom{2}{333l}$, $\binom{2}{3333}$, $\binom{2}{133}$, $(i = 1, 2, \ldots, n;\ l,\ k = 4, 5, \ldots, n)$ с точностью до постоянного множителя равен $(\Lambda^2_{33\cdot 3})^{3n-6} \cdot (3\Lambda^2_{33\cdot 3} - \Lambda^3_{13\cdot 3\cdot 3})(\Lambda^2_{33\cdot 3} + \Lambda^2_{13\cdot 3\cdot 3})$. Ясно, что последние два множителя одновременно не могут обратиться в нуль. Отсюда следует, что искомый минор по крайней мере порядка $3n-5$.

В случае 4 минор порядка $4n-14$ той же матрицы, составленный из коэффициентов при функциях u^i_2, u^3_k, u^1_l, u^4_j в уравнениях $\binom{i}{334}$, $\binom{2}{3k4}$, $\binom{2}{334l}$, $\binom{2}{33j}$, $(i,\ l = 4, 5, \ldots, n;\ j,\ k = 5, 6, \ldots, n)$ с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Lambda^2_{33\cdot 4}$. То же можно сказать в случае 5 по отношению к составляющей $\Lambda^2_{34\cdot 4}$ о миноре матрицы T_3 (24), имеющем порядок $4n-15$ и составленном из коэффициентов при функциях u^k_2, u^3_l, u^4_s, u^1_j в уравнениях $\binom{k}{344}$, $\binom{2}{l44}$, $\binom{2}{34s}$, $\binom{2}{344j}$ $(l,\ j,\ s = 5, 6, \ldots, n;\ k = 4, 5, \ldots, n)$, и, наконец, в случае 6 — по отношению с составляющей $\Lambda^2_{34\cdot 5}$ о миноре порядка $5n-23$ той же матрицы, составленном из коэффициентов при функциях u^j_2, u^3_k, u^1_l, u^4_s, u^5_m в уравнениях $\binom{l}{345}$, $\binom{2}{k45}$, $\binom{2}{345l}$, $\binom{2}{3s5}$, $\binom{2}{34m}$ $(j,\ l = 5, 6, \ldots, n;\ k,\ s,\ m = 6, 7, \ldots, n)$.

Из всего сказанного следует, что в случае, когда пространство $Y_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений порядка $r > n^2 - 2n + 5$, все составляющие $\Lambda^i_{jk\cdot l} = 0$ $(i \neq 1,\ i \neq j,\ k,\ l)$, откуда и заключаем, что тензор $\Lambda^i_{jk\cdot l}$ имеет строение (22). Теорема доказана.

Для пространств $X_{n,\dot{x}}$, являющихся подклассом пространств $Y_{n,\dot{x}}$, имеет место следующий вывод:

Теорема 16. *Если пространство $X_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то тензор $\Lambda^i_{jk\cdot l} = \frac{1}{2} H^i_{\cdot j\cdot k\cdot l}$ необходимо имеет строение*

$$\Lambda^i_{jk\cdot l} = \delta^i_j K_{kl} + \delta^i_k K_{jl} + \delta^i_l K_{jk} + \dot{x}^i K_{jk\cdot l}, \tag{25}$$

где $K_{jk} = \frac{1}{n+1} \Lambda^\sigma_{jk\cdot\sigma}$.

Пространства $Y_{n,\dot{x}}$ и $X_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Lambda^i_{jk\cdot l}$ имеет строение, отличное от (22) и (25) соответственно, будем обозначать символом $\tilde{Y}_{n,\dot{x}}$, $\tilde{X}_{n,\dot{x}}$. Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $\tilde{X}_{n,\dot{x}}$ равен $r = n^2 - 2n + 5$ [4].

Из теоремы 15 следует, что пространство $Y_{n,\dot{x}}$ не может допускать группу движений порядка $r > n^2 - 2n + 5$. С другой стороны, существует пространство $\tilde{Y}_{n,\dot{x}}$ со связностью

$$\Lambda^\alpha_{\beta\gamma} = H^\alpha_{\beta\cdot\gamma}, \quad \hat{C}^i_{jk} = 0, \quad \hat{\Omega}^i_{jk} = 0,$$

где $H^2_1 = \frac{3}{2} \frac{(\dot{x}^1 - \dot{x}^3)^2}{\dot{x}^3}$; $H^2_3 = -\frac{1}{2} \frac{(\dot{x}^1 - \dot{x}^3)^2 (\dot{x}^1 + 2\dot{x}^3)}{(\dot{x}^3)^2}$, остальные $H^i_j = 0$, допускающее полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - 2n + 5$. Ее операторы: p_i, $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $(x^1 - x^3) p_1 + 3x^2 p_2$, $x^1 p_1 + 2x^2 p_2 + x^3 p_3$, $2x^3 p_1 - 3(x^1 - x^3)^2 p_2$, $x^j p_k$, $x^3 p_k$, $x^1 p_j$, $x^j p_2$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j, k = 4, 5, \ldots, n)$. Таким образом, верна

Теорема 17. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $\tilde{Y}_{n,\dot{x}}$ равен $n^2 - 2n + 5$.*

Перейдем теперь к определению максимального порядка групп движений в пространствах $Y_{n,\dot{x}}$. Из теоремы 6 следует, что $K_{jk} = K_{kj}$, если пространство $Y_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений порядка $r > n^2 - n + 2$.

Теорема 18. *Если пространство $Y_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$, то симметрические тензоры D_{jk} и K_{jk} равны нулю.*

Доказательство проведем для тензора D_{jk}, для K_{jk} оно аналогично. Ясно, что тензоры D_{jk}, $D_{jk\cdot l}$ инвариантны при движениях, т. е. $DD_{jk} = 0$, $DD_{jk\cdot l} = 0$. Матрица, составленная из коэффициентов при u^α_β в этих уравнениях в системе координат (3) будет вида (12), т. е. T_2; ее элементы:

$$T^\alpha_\beta(ij) = \delta^\alpha_i D_{\beta j} + \delta^\alpha_j D_{i\beta} + \delta^\alpha_1 D_{ij\cdot\beta},$$

$$T^\alpha_\beta(ijk) = \delta^\alpha_i D_{\beta j\cdot k} + \delta^\alpha_j D_{i\beta\cdot k} + \delta^\alpha_k D_{ij\cdot\beta} + \delta^\alpha_1 D_{ij\cdot k\cdot\beta}. \tag{27}$$

Предположим, что тензор $D_{jk} \neq 0$. Достаточно рассмотреть два случая возможных: 1) $D_{22} \neq 0$; 2) $D_{23} \neq 0$, а все составляющие вида $D_{22} = 0$. В случае 1 минор порядка $2n-2$ матрицы T_8 (27), составленный из коэффициентов при функциях u_i^2, u_j^1 в уравнениях $(2i)$, $(22j)$ $(i, j = 2, 3, \ldots, n)$ с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей D_{22}. Во втором случае минор порядка $3n-9$ матрицы T_2 (27), составленный из коэффициентов при u_i^2, u_j^3, u_k^1 в уравнениях $(i3)$, $(2j)$, $(23k)$ $(i, j, k = 4, 5, \ldots, n)$ с такой же точностью равен степени составляющей D_{23}. Теорема доказана.

Если в (22) принять во внимание, что тензоры D_{jk}, K_{jk} равны нулю, получим, что пространств $Y_{n, \dot{x}}$, допускающих группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$, не существует.

Теорема 19. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $Y_{n, \dot{x}}$ равен $n^2 - n + 2$.*

Для доказательства достаточно рассмотреть пространство $Y_{n, \dot{x}}$ со связностью: $\Lambda^i_{jk} = H^i_{j \cdot k}$, $\hat{C}^i_{jk} = 0$, $\hat{\Omega}^i_{jk} = 0$, где $H^i_j = \dot{x}^i A_j$, $A_1 = \dot{x}^2/\dot{x}^1$, $A_2 = -1$, остальные $A_i = 0$. Оно допускает полную группу G_r порядка $r = n^2 - n + 2$. Операторы ее: p_i, $x^1 p_2$, $x^1 p_1$, $x^i p_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 3, 4, \ldots, n)$. Заметим, что в этом примере пространства $Y_{n, \dot{x}}$ тензор $\Lambda^i_{jk \cdot l}$ и объект Λ^i_{jk} имеют такую структуру:

$$\Lambda^i_{jk} = \delta^i_k A_j + \dot{x}^i A_{j \cdot k}; \quad \Lambda^i_{jk \cdot l} = \delta^i_k A_{j \cdot l} + \delta^i_l A_{j \cdot k} + \dot{x}^i A_{j \cdot k \cdot l}.$$

Максимальный порядок групп движений в пространствах $X_{n, \dot{x}}$ определен в [2], он равен $n^2 - n + 1$.

Структура тензора связности C_{ik} пространств $N_{n, \dot{x}}$ и тензоров $\Gamma^i_{jk \cdot l}$, K^i_{jkl} пространства $M_{n, \dot{x}}$, а также соответствующие порядки групп движений будут выяснены в следующей статье.

Список литературы: 1. *Лаптев Б. Л.* Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления.— «Изв. физ.-мат. о-ва». Казань, 1938, т. 10, № 3, с. 3—38. 2. *Урбонас А. П.* Автоморфизмы пространств тензорных опорных элементов.— Тезисы докл. III Прибалтийская геометр. конф. Паланга, 1968, с. 161—162. 3. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности.— «Учен. зап. Пенз. пед. ин-та». Казань, 1965. 4. *Егоров А. И.* О движениях в общих пространствах путей.— «Учен. зап. Рязан. пед. ин-та», 1974, с. 32—37. 5. *Okube T.* On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of path, I, II, III.— «Tensor», 1956, vol. 6, No 3, p. 141—158; 1957, vol. 7, No 1, p. 1—17, 18—33.

Поступила 11 июня 1977 г.

УДК 513

В. Ф. Игнатенко

УСЛОВИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ КУБИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ПРАВИЛЬНОГО ТЕТРАЭДРА

Пусть вещественная кубическая поверхность F_3 в трехмерном евклидовом пространстве E^3 с заданной прямоугольной системой координат $Ox_1x_2x_3$ определяется уравнением

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) + \chi(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\deg \chi(\boldsymbol{x}) \leqslant 2$, $\psi(\boldsymbol{x}) = ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 + dx_1^2x_2 + ex_1^2x_3 + fx_2^2x_3 + gx_1x_2^2 + hx_1x_3^2 + kx_2x_3^2 + lx_1x_2x_3$.

Известен ряд работ, в которых изучаются группы автоморфизмов (в частности, группы ортогональных симметрий) кубических поверхностей (см., например, [1—5]). В настоящей заметке указаны необходимые и достаточные условия инвариантности поверхности F_3 относительно группы G ортогональных симметрий правильного тетраэдра и приведен способ нахождения уравнений соответствующих плоскостей симметрии.

1°. Пусть поверхность F_3 инвариантна относительно группы G. Тогда ее асимптотический конус

$$\psi(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2}$$

распадается на три попарно ортогональные плоскости; биссекторные плоскости двугранных углов, которые они образуют, являются плоскостями симметрии F_3. Если G определяется плоскостями $x_i \pm x_j = 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i < j)$, то $\psi(\boldsymbol{x}) = x_1x_2x_3$, $\chi(\boldsymbol{x}) = m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + n$ [6]. Следовательно, гессиан $H(\psi) = \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}\right|$ $(i, j = 1, 2, 3)$ формы ψ делится на эту форму (необходимое и достаточное условие распадения формы ψ на линейные множители в поле комплексных чисел [7]). Значит, соответствующие коэффициенты форм ψ и $H(\psi)$ пропорциональны:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \cdots = \frac{l}{l'}. \tag{3}$$

Здесь $a', b', \ldots, l'$ равны половинам соответствующих коэффициентов $H(\psi)$: $a' = 12agh + 4del - 4e^2g - 4d^2h - 3al^2$; $b' = 12bdk + 4fgl - 4df^2 - 4g^2k - 3bl^2$; $c' = 12cef + 4hkl - 4fh^2 - 4k^2e - 3cl^2$; $d' = 36abh + 12agk + 8def + dl^2 - 12afl - 12be^2 - 4dgh - 4d^2k$; $e' = 36acg + 12afh + 8dek + el^2 - 12akl - 12cd^2 - 4egh - 4e^2f$; $f' = 36bcd + 12bek + 8fgh + l^2f - 12bhl - 12cg^2 - 4dfk - 4f^2e$; $g' = 36abk + 12bdh + 8efg + gl^2 - 12bel - 12af^2 -$

$=4dkg-4g^2h$; $h'=36acf+12ceg+8dhk+hl^2-12cdl-12ak^2-$ $-4efh-4gh^2$; $k'=36bce+12cdf+8ghk+kl^2-12cgl-12bh^2-$ $-4efk-4dk^2$; $l'=108abc+12dfh+12egk+l^3-12beh-$ $-12cdg-12afk-4efl-4dkl-4ghl$.

Будем считать $a\neq 0$ (этого всегда можно добиться ортогональным преобразованием). Зафиксируем $x_2=\zeta_2$, $x_3=\zeta_3$ так, чтобы кубический многочлен $\psi(x_1, \zeta_2, \zeta_3)$ имел различные корни ξ_i $(i=1, 2, 3)$. Тогда конус (2) распадается [7] на три плоскости $\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\right]_{x=(\xi_i, \zeta_2, \zeta_3)} x_j=0$ $(i=1, 2, 3)$, или в другом виде

$$\boldsymbol{p}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\,\boldsymbol{x}=0. \tag{4}$$

Поскольку плоскости (4) по условию вещественны и попарно ортогональны, то $\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j=0$, $i<j$.

Отметим, что необходимые и достаточные условия распадения формы ψ на различные линейные множители (в вещественной и комплексной областях) указаны в [8] на языке инвариантов пространственных матриц, определяемых формой ψ. Эти условия являются достаточно сложными, для нахождения компонент ψ требуются дополнительные вычисления.

2°. Уравнения биссекторных плоскостей двугранных углов, которые образуют плоскости (4), запишем так:

$$\boldsymbol{q}_s\boldsymbol{x}=0,\quad s=1, \ldots, 6, \tag{5}$$

где векторы $\boldsymbol{q}_s$ имеют координаты $\alpha_i+\varepsilon\alpha_j|\boldsymbol{p}_i|/|\boldsymbol{p}_j|$; $\beta_i+\varepsilon\beta_j|\boldsymbol{p}_i|/|\boldsymbol{p}_j|$; $\gamma_i+\varepsilon\gamma_j|\boldsymbol{p}_i|/|\boldsymbol{p}_j|$; $\varepsilon=\pm 1$, $i, j=1, 2, 3$ $(i<j)$. Плоскости (5) определяют группу симметрий $G'\approx G$ правильного тетраэдра. Выберем среди них три плоскости $\boldsymbol{q}_i(\alpha_i', \beta_i', \gamma_i')\,\boldsymbol{x}=0$, образующие трехгранный угол с внутренними двугранными углами $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/3$; они задают фундаментальную область группы G' [9]. Если $x'=(x_1':x_2':x_3':x_4')$ — точка (x_1, x_2, x_3) в однородных координатах, то бесконечно удаленные точки $a_i(\alpha_i':\beta_i':\gamma_i':0)$ поверхности F_3 принадлежат ее поверхности Гессе [1], т. е.

$$H[\varphi(\alpha_i', \beta_i', \gamma_i', 0)]=\left|\frac{\partial\varphi(x')}{\partial x_\lambda'\partial x_\mu'}\right|_{x'=a_i}=0 \tag{6}$$

$$(\lambda, \mu=1, 2, 3, 4).$$

Плоскости симметрии

$$\boldsymbol{q}_s\boldsymbol{x}+\delta_s=0 \tag{7}$$

поверхности F_3 являются компонентами ее полярных квадрик, сопряженных векторам $\boldsymbol{q}_s$; другие составляющие указанных квадрик (плоскости) проходят через бесконечно удаленные прямые F_3 [1] и, следовательно, параллельны плоскостям (4).

Таким образом, *для того чтобы кубическая поверхност заданная уравнением* (1), *была инвариантна относительі группы симметрий правильного тетраэдра, необходимо и дост точно, чтобы 1) выполнялись соотношения* (3), *2) плоскости* (*были вещественны и попарно ортогональны, 3) имели мест равенства* (6); *при этом плоскости симметрии поверхност задаются уравнениями* (7).

Замечание. Пусть $\boldsymbol{r}$ — вектор общей точки плоскостей (7 Если соответствующие коэффициенты уравнения (1) и произв дения уравнений

$$\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r})=0 \qquad (\text{(}$$

пропорциональны, то поверхность F_3 состоит из плоскостей (и инвариантна относительно группы симметрий куба, грани кот рого параллельны компонентам F_3.

3°. Рассмотрим, например, кубическую поверхность

$$x_1^3-x_2^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3-x_2^2x_3-x_1x_2^2-2x_1x_3^2+2x_2x_3^2+x_1^2+$$
$$+2x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3-2x_3^2-1=0. \qquad (\text{(}$$

Условие (3) для нее выполняется: $H(\psi)=72\psi$. Значит, асим тотический конус (2) поверхности (9) распадается на плоскост в поле комплексных чисел. При $\zeta_2=0$, $\zeta_3=1$ многочле $\psi(x_1,\ 0,\ 1)=x_1^3+x_1^2-2x_1$ имеет корни -2, 0, 1, которые опр деляют вещественные компоненты этого конуса $x_1-x_2=0$

$$x_1+x_2-x_3=0; \qquad (1($$

$$x_1+x_2+2x_3=0. \qquad (1\text{I}$$

Уравнения (5) принимают вид

$$x_1+x_2+(3\sqrt{2}-4)\,x_3=0; \qquad (12$$

$$(1+\sqrt{3})\,x_1+(1-\sqrt{3})\,x_2+2x_3=0; \quad (1-\sqrt{3})\,x_1+$$
$$+(1+\sqrt{3})\,x_2+2x_3=0; \qquad (13$$

$$x_1+x_2-(3\sqrt{2}+4)\,x_3=0; \quad (2+\sqrt{6})\,x_1+(2-\sqrt{6})\,x_2-$$
$$-2x_3=0; \quad (2-\sqrt{6})\,x_1+(2+\sqrt{6})\,x_2-2x_3=0. \qquad (14$$

Плоскости (12) и (13) ограничивают фундаментальную област группы G'. Так как $H[\varphi(1,\ 1,\ 3\sqrt{2}-4,\ 0)]=H[\varphi(1+\sqrt{3}$ $1-\sqrt{3},\ 2,\ 0)]=H[\varphi(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3},\ 2,\ 0)]=0$, то поверх ность (9) инвариантна относительно G.

Запишем уравнения полярных квадрик бесконечно удаленны точек $[1:1:(3\sqrt{2}-4):0]$, $[(1+\sqrt{3}):(1-\sqrt{3}):2:0]$, $[(1-$ $-\sqrt{3}):(1+\sqrt{3}):2:0]$:

$$\sqrt{2}\,x_1^2-\sqrt{2}\,x_2^2+2(3-2\sqrt{2})\,x_1x_3-2(3-2\sqrt{2})\,x_2x_3+$$
$$+\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}x_2+2(3-2\sqrt{2})\,x_3=0; \qquad (15)$$
$$(\sqrt{3}+3)\,x_1^2+(\sqrt{3}-3)\,x_2^2-2\sqrt{3}\,x_3^2+2\sqrt{3}\,x_1x_2+$$
$$+(\sqrt{3}-3)\,x_1x_3+(\sqrt{3}+3)\,x_2x_3+3(x_1+x_2-x_3)=0; \qquad (16)$$
$$(3-\sqrt{3})\,x_1^2-(\sqrt{3}+3)\,x_2^2+2\sqrt{3}\,x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2-$$
$$-(\sqrt{3}+3)\,x_1x_3+(\sqrt{3}+3)\,x_2x_3+3(x_1+x_2-x_3)=0. \qquad (17)$$

Квадрика (15) состоит из плоскости (12), которая, следовательно, является плоскостью симметрии поверхности (9), и плоскости

$$x_1-x_2+1=0. \qquad (18)$$

Квадрика (16) распадается на плоскость (10) и плоскость симметрии

$$(1+\sqrt{3})\,x_1+1-\sqrt{3})\,x_2+2x_3+\sqrt{3}=0. \qquad (19)$$

Наконец, компонентами квадрики (17) являются плоскость (10) и плоскость симметрии

$$(1-\sqrt{3})\,x_1+(1+\sqrt{3})\,x_2+2x_3-\sqrt{3}=0. \qquad (20)$$

Плоскости (12), (19), (20) задают фундаментальную область группы G; $Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ — их общая точка. Так как другие плоскости симметрии поверхности (9) проходят через Q и параллельны соответствующим плоскостям из (14), то их уравнения находятся прибавлением к левым частям уравнений (14) чисел 0, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$ соответственно. Поскольку плоскости (10), (11), (18) также содержат точку Q, то уравнения (9) можно переписать так: $(x_1+x_2-x_3)(x_1+x_2+2x_3)(x_1-x_2+1)=1$ или в новой прямоугольной системе координат $x_1x_2x_3=1$. Эта поверхность является огибающей семейства плоскостей, отсекающих от координатного угла $x_1, x_2, x_3>0$ тетраэдр постоянного объема [10, с. 106]; она несет три конические сети [11] и имеет бесконечное множество плоскостей косой симметрии [12].

Список литературы: 1. *Pascal E.* Repertorium der höheren Mathematik. II. Leipzig und Berlin, 1922. 649 S. 2. *Манин Ю. И.* Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. М., «Наука», 1972. 303 с. 3. *Coxeter H. S. M.* The equianharmonic surface and the hessian polyhedron.— «Ann. mat. pura ed appl.», 1974, p. 77—92. 4. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Алгебраические поверхности с симметрией правильного m-мерного симплекса.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 16. Харьков, 1974, с. 3—8. 5. *Ермаков В. В.* О группе преобразований, связанной с поверхностью Маркова.— «Мат. заметки», 1976, т. 19, № 3, с. 419—428. 6. *Lecornu L.* Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers.— «Acta math.», 1887, vol. 10, p. 201—280. 7. *Hodevar F.* Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren.— «Wien. Sitzungsb.», 1904, Bd 113, S. 407—428. 8. *Соколов Н. П.* Пространственные матрицы и их приложения. М., Физматгиз, 1960.

300 с. 9. *Coxeter H. S. M.* Discrete groups generated by reflections.— «Ann. math.», 1934, vol. 35, p. 588—621. 10. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М., «Наука», 1969. 176 с. 11. *Бланк Я. П.* Об одном обобщении проблемы С. Ли о поверхностях переноса.— «Тр. геометр. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР», 1971, с. 5—26. 12. *Игнатенко В. Ф.* О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^m.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 20. Харьков, 1977, с. 35—46.

Поступила 25 декабря 1977 г.

УДК 513.81

С. Б. Климентов

ГЛОБАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ n-МЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В m-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Введение

1. Необходимые обозначения. Рассмотрим вещественную регулярную n-мерную поверхность S_n (вообще говоря со знаконеопределенной метрической формой), расположенную в m-мерном односвязном* полном псевдоримановом (римановом) пространстве V_m постоянной кривизны $K_0 \neq 0$ $(m > n)$. Пространство V_m будем считать отнесенным к координатам Вейерштрасса (z^α), $\alpha = 1, \ldots, m+1$ [1, § 62]. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{m+1} c_\alpha (dz^\alpha)^2, \; c_\alpha = \pm 1, \tag{1.1}$$

— метрическая форма пространства V_m, записанная в координатах Вейерштрасса;

$$\psi = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

— метрическая форма поверхности S_n, где (x^i) — локальная параметризация поверхности, $g_{ij} = g_{ji}$, $\det(g_{ij}) \neq 0$;

$$z^\alpha = z^\alpha (x^1, \ldots, x^n), \; \alpha = 1, \ldots, m+1, \tag{1.3}$$

— параметрическое представление поверхности S_n;

$$(\eta^\alpha_{\sigma|}), \; \sigma = n+1, \ldots, m; \; \alpha = 1, \ldots, m+1, \tag{1.4}$$

— ортонормированный регулярный набор нормалей поверхности S_n, т. е. $\sum\limits_\alpha c_\alpha (\eta^\alpha_{\sigma|})^2 = e_\sigma = \pm 1$, $\sum\limits_\alpha c_\alpha \eta^\alpha_{\sigma|} \eta^\alpha_{\tau|} = 0$, $\sigma \neq \tau$; $\Omega_{\sigma|ij}, \mu_{\tau\sigma|i}$ — тензоры, характеризующие изменение вдоль S_n нормального репера

* Здесь и далее под односвязным многообразием (областью) понимается связное и односвязное многообразие (область).

(1.4) [1, § 47]; R_{ijks} — тензор Римана, составленный с использованием тензора g_{ij}; $z^{\alpha}_{,i}$, $z^{\alpha}_{,ij}$, $\eta^{\alpha}_{\sigma|,i}$ и т. д. — ковариантные производные соответствующих величин относительно тензора g^{ij}.

Для поднятия и опускания индексов будем использовать тензор g_{ij} и соответствующий ему контравариантный тензор g_{ij}.

Для классов регулярности используются следующие обозначения: $f \in W^{l}_{p}$ — функция f имеет обобщенные по С. Л. Соболеву производные l-го порядка, суммируемые со степенью p; $f \in C^{l,w}$ — функция f имеет непрерывные частные производные порядка l, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем ω (при $\omega = 0$ — просто непрерывные). Как обычно, под производной нулевого порядка понимается сама функция: $W^{0}_{p} = L_{p}$.

Поскольку мы считаем S_n вещественной поверхностью в V_m, положительный и отрицательный индексы квадратичной формы (1.2) не превосходят положительного и отрицательного индексов формы (1.1). При рассмотрении тензора g_{ij} всегда считаем это условие выполненным.

2. Формулировка результата. Функции (1.3) и (1.4) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$z^{\alpha}_{,ij} = \sum_{\sigma} e_{\sigma} \Omega_{\sigma|ij} \eta^{\alpha}_{\sigma|} - K_0 g_{ij} z^{\alpha}; \tag{1.5}$$

$$\eta^{\alpha}_{\sigma|,j} = -\Omega_{\sigma|sj} g^{sh} z^{\alpha}_{,h} + \sum_{\tau} e_{\tau} \mu_{\tau\sigma|j} \eta^{\alpha}_{\tau|}, \tag{1.6}$$

условия интегрируемости которых записываются в виде [1, § 64]:

$$R_{ijks} = \sum_{\sigma} e_{\sigma} (\Omega_{\sigma|ik}\Omega_{\sigma|js} - \Omega_{\sigma|is}\Omega_{\sigma|jk}) + K_0 (g_{ik}g_{js} - g_{is}g_{jk}); \tag{1.7}$$

$$\Omega_{\sigma|ij,k} - \Omega_{\sigma|ik,j} = \sum_{\tau} e_{\tau} (\mu_{\tau\sigma|k}\Omega_{\tau|ij} - \mu_{\tau\sigma|j}\Omega_{\tau|ik}); \tag{1.8}$$

$$\mu_{\tau\sigma|j,k} - \mu_{\tau\sigma|k,j} + \sum_{\rho} e_{\rho} (\mu_{\rho\tau|j}\mu_{\rho\sigma|k} - \mu_{\rho\tau|k}\mu_{\rho\sigma|j}) + g^{sh} (\Omega_{\tau|sj}\Omega_{\sigma|hk} - \Omega_{\tau|sk}\Omega_{\sigma|hj}) = 0, \tag{1.9}$$

$i, j, k, h, s = 1, \ldots, n$; $\alpha = 1, \ldots, m+1$; $\tau, \sigma, \rho = n+1, \ldots, m$.

Обратное утверждение известно как основная теорема теории n-мерных поверхностей в m-мерном пространстве постоянной кривизны [1, § 64]:

Теорема 1. *Если симметрический тензор* g_{ij}, $(m-n)(m-n-1)/2$ *тензоров* $\mu_{\tau\sigma|i} = -\mu_{\sigma\tau|i}$ *и* $m-n$ *симметрических тензоров* $\Omega_{\sigma|ij}$ *удовлетворяют равенствам* (1.7) — (1.9), *то в* V_m *существует* n*-мерная поверхность* S_n *с метрическим тензором* g_{ij}, *которая тензорами* g_{ij}, $\mu_{\tau\sigma|i}$, $\Omega_{\sigma|ij}$ *определяется с точностью до движения в* V_m.

В этом утверждении не задается область определения тензоров g_{ij}, $\mu_{\tau\sigma|i}$, $\Omega_{\sigma|ij}$ и поверхности S_n, т. е. теорема 1 трактуется как теорема «в малом». При изучении различных вопросов теории поверхностей полезно иметь глобальный вариант теоремы 1, к торый и составляет основной результат настоящей работы. Имен справедлива

Теорема 2. *Предположим, что на n-мерном дифференциру мом многообразии D класса* W^l_p, $l \geqslant 3$, $p > n$*, *заданы непреры ные тензоры* $g_{ij} = g_{ji} \in W^{l-1}_p$, $\Omega_{\sigma|ij} = \Omega_{\sigma|ji} \in W^{l-2}_p$, $\mu_{\tau\sigma|i} = -\mu_{\sigma\tau|i}$ $\in W^{l-2}_p$, *удовлетворяющие на D равенствам* (1.7) — (1.9) *(пр этом ковариантные производные понимаются в обобщенном смы ле и при* $l=3$ (1.8), (1.9) *понимаются как равенства почти всюду*

Тогда в пространстве V_m *существует n-мерная поверхнос* S_n, *являющаяся* W^l_p*-погружением некоторого накрывающего многообразия, такая, что в любой точке* $\hat{N} \in S_n$, *лежащей на* $N \in D$, *метрический тензор поверхности* S_n *есть* g_{ij}. *Кром того, в окрестности точки* $\hat{N}$ *существует нормальный репе* $\eta^\alpha_{\sigma|}$ *класса* W^{l-1}_p *такой, что в этой окрестности тензоры, харак теризующие изменение* $\eta^\alpha_{\sigma|}$ *вдоль* S_n, *совпадают с тензорами* $\Omega_{\sigma|ij}$ $\mu_{\tau\sigma|i}$. *Поверхность* S_n *тензорами* g_{ij}, $\mu_{\tau\sigma|i}$, $\Omega_{\sigma|ij}$ *определяет с точностью до движения в* V_m.

Если D односвязно, то S_n есть W^l_p-погружение D в V_m

Замечания. А. Пространство V_m можно считать и псевдоевк лидовым (евклидовым), т. е. допустим случай $K_0 = 0$. В это случае все рассуждения соответствующим образом упрощаются

Б. В теореме 2 можно наложить следующие требования н регулярность: $D \in C^{l,\omega}$, $l = 3, \ldots, \infty$, $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ (аналитично $g_{ij} \in C^{l-1,\omega}$, $\Omega_{\sigma|ij}$, $\mu_{\tau\sigma|i} \in C^{l-2,\omega}$ (g_{ij}, $\Omega_{\sigma|ij}$, $\mu_{\tau\sigma|i}$ аналитичны). В это случае S_n будет $C^{l,\omega}$ (аналитическим) погружением некоторог накрытия многообразия D в V_m. Доказательство теоремы 2 пр этом очевидным образом упрощается.

Потребность в условиях лишь обобщенной дифференциру мости рассматриваемых объектов возникает, например, при ис пользовании в геометрии теории обобщенных аналитически функций.

В. Глобальная формулировка основной теоремы теории поверх ностей в предположении непрерывной дифференцируемости рассмат риваемых объектов доказывалась в работах С. Сасаки [2,3] дл гиперповерхностей пространства постоянной кривизны, а такж в монографии [4] для односвязных гиперповерхностей евклидов пространства.

Следуя С. Сасаки, теорему 2 мы получаем как следстви теоремы Фробениуса теории распределений на дифференцируемы многообразиях. Работа состоит из четырех параграфов. Во вто ром параграфе обосновывается понятие обобщенно дифференци руемой структуры на многообразии и доказывается необходимый

---

* Об определении дифференцируемой структуры класса W^l_p см. § 2.

в дальнейшем изложении частный случай теоремы Фробениуса. При этом многообразие и рассматриваемое на нем распределение предполагаются обобщенно дифференцируемыми. § 3 содержит в себе доказательство теоремы 2 в предположении, что D — односвязная область n-мерного координатного пространства, § 4 — доказательство теоремы 2 в общем случае.

§ 2. Теорема Фробениуса для обобщенно дифференцируемых распределений

В этом параграфе доказывается теорема о существовании интегрального многообразия обобщенно дифференцируемого распределения специального вида. Предварительно сформулируем два предложения, касающихся свойств обобщенно дифференцируемых функций.

Лемма 1. *Пусть G и G_* — области n-мерных арифметических пространств R^n и R^n_* соответственно, $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(x^1_*, \ldots, x^n_*)$ — координаты в этих пространствах. Пусть задано непрерывное отображение G_* на G: $x^i = x^i(x^1_*, \ldots, x^n_*)$, $i = 1, \ldots, n$, такое, что функции $x^i(x^1_*, \ldots, x^n_*) \in W^l_p(G_*)$, $l \geqslant 1$, $p > n$. Если на G задана функция $f = f(x^1, \ldots, x^n) \in W^k_p$, $1 \leqslant k \leqslant l$, то функция $F(x^1_*, \ldots, x^n_*) = f(x^1(x^1_*, \ldots, x^n_*), \ldots, x^n(x^1_*, \ldots, x^n_*))$ принадлежит классу $W^k_p(G_*)$, причем для вычисления обобщенных производных функции F применима обычная формула дифференцирования суперпозиции (с участием обобщенных производных функций x^i).*

Доказательство. Рассмотрим ε- и δ-усреднения по С. Л. Соболеву функции f и x^i: $f_\varepsilon(x^1, \ldots, x^n)$ и $x^i_\delta(x^1_*, \ldots, x^n_*)$ и обозначим $F_{\varepsilon\delta}(x^1_*, \ldots, x^n_*) = f_\varepsilon(x^1_\delta(x^1_*, \ldots, x^n_*), \ldots, x^n_\delta(x^1_*, \ldots, x^n_*))$. Так как $F_{\varepsilon\delta}$, f, $x^i_\delta \in C^\infty$ [5, § 2], то

$$\frac{\partial^\alpha F_{\varepsilon\delta}}{(\partial x^1_*)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n_*)^{\alpha_n}} = \sum_{0 < \lambda \leqslant \alpha} a_{\lambda\delta}(x^1_*, \ldots, x^n_*) f^{(\lambda)}_\varepsilon (x^1_\delta(x^1_*, \ldots, x^n_*), \ldots, x^n_\delta(x^1_*, \ldots, x^n_*)), \tag{2.1}$$

где λ, α_i — целые неотрицательные числа, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \alpha \leqslant k$, функции $a_{\lambda\delta} \in C^\infty(G_*)$ и не зависят от f_ε. Переходя в (2.1) к пределу сначала при $\delta \to 0$ в метрике $L_p(G_*)$, а потом при $\varepsilon \to 0$ в метрике $L_p(G)$, из свойств средних функций [5, § 5] получим утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

Замечание. По определению обобщенной в смысле С. Л. Соболева производной, функция класса W^l_p определена лишь почти всюду (она есть класс эквивалентности) [5, § 5]. По теореме вложения С. Л. Соболева [5, § 8], при $p > n$, $l \geqslant 1$ функция n переменных класса W^l_p посредством ее переопределения на множестве меры нуль может быть сделана непрерывной (в соответствующем классе эквивалентности найдется непрерывный представитель). При этом непрерывная функция n переменных класса W_p^l, $p > n$, принадлежит классу C^{l-1}[5, § 10]. При доказательстве теоремы 2 все рассматриваемые объекты класса W_p^l в силу цитированной теоремы вложения можно считать непрерывными и принадлежащими классу C^{l-1}. В связи с этим далее в § 2 мы не будем особо оговаривать значения p, считая, что все функции класса W_p^l непрерывны и принадлежат классу C^{l-1}.

Лемма 2. *Пусть $f^1, \ldots, f^k$ — непрерывные функции класса W_p^l, $l \geqslant 2$, от $n+k$ переменных $y^1, \ldots, y^k, x^1, \ldots, x^n$, определенные в некоторой окрестности начала координат в $R^k \times R^n$. Пусть $f^i(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Предположим далее, что*

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\right)(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) \neq 0, \ i, j = 1, \ldots, k. \quad (2.2)$$

Тогда уравнения $f^i(\varphi^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \varphi^k(x^1, \ldots, x^n); x^1, \ldots, x^n) = 0$, $\varphi^i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, однозначно определяют в некоторой окрестности начала координат в R^n функции $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$, принадлежащие классу W_p^l.

Доказательство. В силу предыдущего замечания и предположения $l \geqslant 2$ требует доказательства лишь утверждение о регулярности функций $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$. В области существования функций φ^i имеем:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^r} + \frac{\partial f^i}{\partial x^r} = 0, \ i = 1, \ldots, k; \ r = 1, \ldots, n. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) получим, что частные производные функций $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ принадлежат классу W_p^{l-1}, откуда вытекает утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 1 с учетом следующего после нее замечания показывает, что можно говорить об (обобщенно) дифференцируемом многообразии класса W_p^l, $l \geqslant 1$ (о дифференцируемой структуре класса W_p^l).

Итак, пусть M есть m-мерное дифференцируемое многообразие класса $W_p^{l(l-1)}$, $l \geqslant 3$, и пусть на M заданы n $(n < m)$ линейно независимых в каждой точке векторных полей x_i, $i = 1, \ldots, n$, класса W_p^{l-2}. Распределение, порожденное векторными полями X_i, $i = 1, \ldots, n$, обозначим R. Будем говорить, что R инволютивно, если через каждую точку многообразия M проходит единственное n-мерное интегральное многообразие распределения R. Прежде чем сформулировать условие инволютивности R, проведем некоторые вспомогательные построения. Рассуждения будем вести в окрестности U некоторой точки $x \in M$. Будем считать, что U попадает в область определения какой-либо карты многообразия M. Координаты этой карты обозначим $(x^1, \dots, x^m)$.

Обозначим через $\frac{\partial}{\partial x^j}$, $j = 1, \dots, m$, базисные векторные поля касательного расслоения многообразия M, соответствующие локальным координатам $(x^1, \dots, x^m)$. Выберем эти координаты так, чтобы векторные поля X_i, $i = 1, \dots, n$, имели вид $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}$, $i = 1, \dots, n$; $\gamma = (n+1), \dots, m$ (по γ суммирование). Такие локальные координаты можно получить из любых имеющихся в U линейным преобразованием. Будем считать, что a_i^γ имеют следующий специальный вид:

$$a_i^\gamma (x^1, \dots, x^m) = c_{in}^\gamma (x^1, \dots, x^n) + c_{i\beta}^\gamma (x^1, \dots, x^n)\, x^\beta, \tag{2.4}$$

$i = 1, \dots, n$; $\gamma, \beta = n+1, \dots, m$. Индекс n у первого слагаемого в правой части (2.4) добавлен для однообразия обозначений. Так как $X_i \in W_p^{l-2}$, то $c_{i\beta}^\gamma \in W_p^{l-2}$, $i = 1, \dots, n$; $\gamma = n+1, \dots, m$, $\beta = n, \dots, m$.

Пусть $X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y = \eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ $(j, k = 1, \dots, m)$ — векторные поля класса W_p^r на M, $r \geqslant 1$. Скобкой Ли (коммутатором) векторных полей X и Y будем называть следующее выражение:

$$[XY] = \left(\xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{2.5}$$

где производные понимаются в смысле С. Л. Соболева. $[XY]$ — векторное поле класса W_p^{r-1} на M. В случае $r = 1$ $[XY]$ определено лишь почти всюду на M.

Теорема 3 *(теорема Фробениуса). Распределение R инволютивно тогда и только тогда, когда*

$$[X_i X_k] = 0, \ i, \ k = 1, \dots, n. \tag{2.6}$$

В случае $l = 3$ (2.6) понимается как равенство почти всюду.

Доказательство. Перепишем (2.6) в координатной форме:

$$\frac{\partial c_{kn}^\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{in}^\beta}{\partial x^k} + c_{in}^\alpha c_{k\alpha}^\beta - c_{kn}^\alpha c_{i\alpha}^\beta + x^\gamma \left(\frac{\partial c_{k\gamma}^\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{i\gamma}^\beta}{\partial x^k} + c_{i\gamma}^\alpha c_{k\alpha}^\beta - c_{k\gamma}^\alpha c_{i\alpha}^\beta\right) = 0,$$

$i, k = 1, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = n+1, \dots, m$.

Так как x^γ — координаты произвольной точки из U, то

$$\frac{\partial c_{k\gamma}^\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{i\gamma}^\beta}{\partial x^k} = c_{k\gamma}^\alpha c_{i\alpha}^\beta - c_{i\gamma}^\alpha c_{k\alpha}^\beta, \tag{2.7}$$

$\gamma = n, \dots, m$; $\alpha, \beta = n+1, \dots, m$; $i, k = 1, \dots, n$.

Итак, условия (2.6) эквивалентны условиям (2.7).

Вопрос об инволютивности распределения R эквивалентен вопросу о полной интегрируемости пфаффовой системы [6, гл. 3, § 5]:

$$dx^\beta - a_i^\beta dx^i = 0, \ \beta = n+1, \ \ldots, \ m; \ i = 1, \ \ldots, \ n, \tag{2.8}$$

где $x^\beta = x^\beta(x^1, \ \ldots, \ x^n)$ — неизвестные функции, $x^1, \ \ldots, \ x^n$ изменяются на координатной плоскости $U_n : x^{n+1} = \text{const}, \ \ldots, \ x^m = \text{const}$. Таким образом, для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что система (2.8) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.7). Необходимость условий (2.7) доказывается стандартными рассуждениями (см., например, [7, гл. 6, § 1]). Покажем достаточность условий (2.7).

Так как a_i^β непрерывны, система (2.8) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда для $1 \leqslant i < k \leqslant n$; $\gamma = n, \ \ldots, \ m$, имеют место равенства

$$\int_J c_{i\gamma}^\beta dx^i + c_{k\gamma}^\beta dx^k = \iint_S (c_{i\alpha}^\beta c_{k\gamma}^\alpha - c_{k\alpha}^\beta c_{i\gamma}^\alpha) \, dx^i dx^k \tag{2.9}$$

для каждого прямоугольника S с границей J $(S \cup J \subset U_n)$ на двумерных координатных плоскостях $x^h = \text{const}$, $h \neq i, \ k$, множества U_n (в формуле (2.9) по i и k нет суммирования). В этом случае решение системы (2.8), проходящее через точку x, принадлежит классу C^1 [7, гл. 6, § 6]. Легко видеть, что решение системы (2.8), если оно существует, будет принадлежать также классу W_p^{l-1}.

Покажем, что из (2.7) следует (2.9). Рассмотрим ε-усреднение по С. Л. Соболеву правой и левой частей равенства (2.7):

$$\frac{\partial (c_{k\gamma}^\beta)_\varepsilon}{\partial x^i} - \frac{\partial (c_{i\gamma}^\beta)_\varepsilon}{\partial x^k} = (c_{k\gamma}^\alpha c_{i\alpha}^\beta - c_{i\gamma}^\alpha c_{k\alpha}^\beta)_\varepsilon, \ \ \gamma = n, \ \ldots, \ m. \tag{2.10}$$

Из (2.10) имеем

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial (c_{k\gamma}^\beta)_\varepsilon}{\partial x^i} - \frac{\partial (c_{i\gamma}^\beta)_\varepsilon}{\partial x^k} \right\} dx^i dx^k = \iint_S (c_{k\gamma}^\alpha c_{i\alpha}^\beta - c_{i\gamma}^\alpha c_{k\alpha}^\beta)_\varepsilon \, dx^i dx^k \tag{2.11}$$

(по i, k нет суммирования). Преобразуя левую часть (2.11) по формуле Грина, получаем

$$\int_J (c_{i\gamma}^\beta)_\varepsilon dx^i + (c_{k\gamma}^\beta)_\varepsilon dx^k = \iint_S (c_{k\gamma}^\alpha c_{i\alpha}^\beta - c_{i\gamma}^\alpha c_{k\alpha}^\beta)_\varepsilon \, dx^i dx^k \tag{2.12}$$

(по i, k нет суммирования). Перейдем в (2.12) к пределу в метрике W_p^{l-2} при $\varepsilon \to 0$. Учитывая, что ε-усреднение непрерывной функции класса W_p^{l-2} при таком предельном переходе стремится к исходной функции равномерно [5, § 8, 10], получим (2.9). Теорема 3 доказана.

В дальнейшем будет использован следующий глобальный вариант теоремы Фробениуса.

Теорема 4. *Пусть R — инволютивное n-мерное распределение класса W_p^{l-2} на многообразии $M \in W_p^{l(l-1)}$, $l \geqslant 3$. Тогда через каждую точку $x \in M$ проходит одно и только одно n-мерное максимальное интегральное многообразие распределения R. Это интегральное многообразие принадлежит классу W_p^{l-1}.*

Доказательство теоремы 4 дословно повторяет соответствующие рассуждения из § 5, гл. 2 книги [8]. Нужно только учесть, что в силу наших предположений интегральные многообразия распределения R принадлежат классу C^{l-2}, а теорему о неявной функции, используемую в приведенных выше рассуждениях, нужно применять в виде, сформулированном в лемме 2.

§ 3. Доказательство теоремы 2 в случае, когда D — односвязная область n-мерного пространства

Встречающиеся далее индексы везде принимают следующие значения: $i, j, h, k, s, r, q = 1, \ldots, n$; $\sigma, \tau, \varkappa, \nu, \rho = n+1, \ldots, m$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m$. Значения не перечисленных здесь индексов оговариваются в тексте.

1. Построение инволютивного распределения. Пусть $R^{(m+1)^2}$ есть $(m+1)^2$-мерное арифметическое пространство с координатами $(z^\alpha, z^\alpha_{,1}, \ldots, z^\alpha_{,n}, \eta^\alpha_{n+1|}, \ldots, \eta^\alpha_{m|})$*. Рассмотрим в $R^{(m+1)^2}$ подмногообразие F, определяемое условием $\operatorname{rang}(z^\alpha_{,i}) = n$; F — аналитическое многообразие [6, гл. 2, § 1]. Образуем декартово произведение $D \times F$ с обычной дифференцируемой структурой произведения; $D \times F$ есть $[(m+1)^2 + n]$-мерное аналитическое многообразие. Через π обозначим естественную проекцию $D \times F \to D$.

В каждой точке $(x^i, z^\alpha, z^\alpha_{,j}, \eta^\alpha_{\sigma|})$ из $D \times F$ (x^i — координаты в D) зададим n векторов со следующими компонентами:

$$\xi_j = (\delta^i_j,\ z^\alpha_{,j},\ \Gamma^s_{ij} z^\alpha_{,s} + \sum_\tau e_\tau \Omega_{\tau|ij} \eta^\alpha_{\tau|} - K_0 g_{ij} z^\alpha,$$
$$-\Omega_{\sigma|sj} g^{sh} z^\alpha_{,h} + \sum_\tau e_\tau \mu_{\tau\sigma|j} \eta^\alpha_{\tau|}), \tag{3.1}$$

где Γ^s_{ij} — символы Кристофелля второго рода для тензора g_{ij}, δ^i_j — символ Кронекера. Векторы ξ_j, $j = 1, \ldots, n$, на $D \times F$ порождают n векторных полей класса W_p^{l-2}. Из (3.1) видно, что эти поля (при $p > n$) непрерывны и принадлежат классу C^{l-3}. Так как ξ_j, $j = 1, \ldots, n$, линейно независимы в каждой точке $D \times F$, они определяют на нем n-мерное непрерывное распределение класса W_p^{l-2}, которое обозначим R.

Лемма 3. *Распределение R инволютивно на $D \times F$.*

Доказательство. В силу теоремы 3 для доказательства леммы 3 достаточно показать, что скобка Ли $[\xi_k \xi_j]$ векторных

* Здесь $z^\alpha_{,i}$ — не ковариантная производная, а обозначение координаты. Смысл такого обозначения будет ясен из дальнейшего изложения.

полей ξ_k, ξ_j, k, $j=1, \ldots, n$, равна нулю. Обозначим компоненты векторов ξ_k и $[\xi_k\xi_j]$ в касательном пространстве к $D\times$ через $(\xi_k^i, \xi_k^\alpha, \xi_{1k}^\alpha, \ldots, \xi_{nk}^\alpha, \xi_{n+1|k}^\alpha, \ldots, \xi_{m|k}^\alpha)$ и соответственно $([\xi_k\xi_j]^i, [\xi_k\xi_j]^\alpha, [\xi_k\xi_j]_1^\alpha, \ldots, [\xi_k\xi_j]_n^\alpha, [\xi_k\xi_j]_{n+1|}^\alpha, \ldots, [\xi_k\xi_j]_{m|}^\alpha$

Во-первых, очевидно, что

$$[\xi_k\xi_j]^i = 0, \qquad (3.2)$$

так как ξ_k^i, ξ_j^i — постоянные. Заметим, что

$$[\xi_k\xi_j]^\alpha = \xi_k^i\frac{\partial\xi_j^\alpha}{\partial x^i} + \xi_k^\alpha\frac{\partial\xi_j^\alpha}{\partial z^\alpha} + \xi_{1k}^\alpha\frac{\partial\xi_j^\alpha}{\partial z_{,1}^\alpha} + \ldots + \xi_{nk}^\alpha\frac{\partial\xi_j^\alpha}{\partial z_{,n}^\alpha} +$$
$$+ \xi_{n+1|k}^\alpha\frac{\partial\xi_j^\alpha}{\partial\eta_{n+1|}^\alpha} + \ldots + \xi_{m|k}^\alpha\frac{\partial\xi_j^\alpha}{\partial\eta_{m|}^\alpha} - \xi_j^i\frac{\partial\xi_k^\alpha}{\partial x^i} - \xi_j^\alpha\frac{\partial\xi_k^\alpha}{\partial z^\alpha} - \xi_{1j}^\alpha\frac{\partial\xi_k^\alpha}{\partial z_{,1}^\alpha} -$$
$$\ldots - \xi_{nj}^\alpha\frac{\partial\xi_k^\alpha}{\partial z_{,n}^\alpha} - \xi_{n+1|j}^\alpha\frac{\partial\xi_k^\alpha}{\partial\eta_{n+1|}^\alpha} - \ldots - \xi_{m|j}^\alpha\frac{\partial\xi_k^\alpha}{\partial\eta_{m|}^\alpha}. \qquad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.3) получим

$$[\xi_k\xi_j]^\alpha = \xi_{jk}^\alpha - \xi_{kj}^\alpha = \Gamma_{jk}^s z_{,s}^\alpha + \sum_\tau e_\tau\Omega_{\tau|jk}\eta_{\tau|}^\alpha - K_0 g_{jk} z^\alpha - \Gamma_{kj}^s z_{,s}^\alpha -$$
$$- \sum_\tau e_\tau\Omega_{\tau|kj}\eta_{\tau|}^\alpha + K_0 g_{kj} z^\alpha = 0. \qquad (3.4)$$

Заменяя в (3.3) индекс α на $\overset{\alpha}{s}$, получаем

$$[\xi_k\xi_j]_s^\alpha = \xi_k^\alpha(-K_0 g_{sj}) + \xi_{rk}^\alpha\Gamma_{sj}^r + \sum_\sigma\xi_{\sigma k}^\alpha e_\sigma\Omega_{\sigma|sj} - \xi_j^\alpha(-K_0 g_{sk}) -$$
$$- \xi_{rj}^\alpha\Gamma_{sk}^r - \sum_\sigma e_\sigma\xi_{\sigma j}^\alpha\Omega_{\sigma|sk} + \xi_k^i\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{sj}^q z_{,q}^\alpha + \sum_\tau e_\tau\frac{\partial\Omega_{\tau|sj}}{\partial x^i}\eta_{\tau|}^\alpha -\right.$$
$$\left.- K_0\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i}z^\alpha\right\} - \xi_j^i\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{sk}^q z_{,q}^\alpha + \sum_\tau e_\tau\frac{\partial\Omega_{\tau|sk}}{\partial x^i}\eta_{\tau|}^\alpha - K_0\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i}z^\alpha\right\}. \qquad (3.5)$$

Подставляя компоненты (3.1) в правую часть равенства (3.5), преобразуем его к следующему виду: $[\xi_k\xi_j]_s^\alpha = \{R_{hskj} + \sum_\sigma e_\sigma \times$ $\times (\Omega_{\sigma|sk}\Omega_{\sigma|hj} - \Omega_{\sigma|sj}\Omega_{\sigma|hk}) + K_0(g_{sk}g_{hj} - g_{sj}g_{hk})\}g^{hr}z_{,r}^\alpha + \sum_\tau e_\tau\eta_{\tau|}^\alpha\{\Omega_{\tau|sj,k} -$ $- \Omega_{\tau|sk,j} + \sum_\sigma e_\sigma(\mu_{\tau\sigma|k}\Omega_{\sigma|sj} - \mu_{\tau\sigma|j}\Omega_{\sigma|sk})\} + K_0 z^\alpha\left(g_{rj}\Gamma_{sk}^r - g_{rk}\Gamma_{sj}^r + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} -\right.$ $\left.- \frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k}\right)$.

В последнем равенстве множители при $z_{,r}^\alpha$ и $\eta_{\tau|}^\alpha$ равны нулю в силу (1.7) и (1.8). Равенство нулю множителя при z^α легко устанавливается прямым вычислением. Таким образом,

$$[\xi_k\xi_j]_s^\alpha = 0,\ \alpha = 1, \ldots, m+1;\ \ s = 1, \ldots, n. \qquad (3.6)$$

Заменив теперь в (3.3) индекс α на ${}^{\alpha}_{\sigma|}$, $\sigma = n+1, \ldots, m$, получим $[\xi_k \xi_j]^{\alpha}_{\alpha|} = -\Omega_{\sigma|rj} g^{rh} \xi^{\alpha}_{hk} + \sum\limits_{\tau} e_{\tau} \mu_{\tau\sigma|j} \xi^{\alpha}_{\tau|k} + \Omega_{\sigma|rk} g^{rh} \xi^{\alpha}_{hj} -$

$$-\sum_{\tau} e_{\tau} \mu_{\tau\sigma|k} \xi^{\alpha}_{\tau|j} + \xi^{i}_{k} \Big(-\frac{\partial \Omega_{\sigma|rj}}{\partial x^i} g^{rh} z^{\alpha}_{,h} - \Omega_{\sigma|rj} \frac{\partial g^{rh}}{\partial x^i} z^{\alpha}_{,h} + \sum_{\tau} e_{\tau} \frac{\partial \mu_{\tau\sigma|j}}{\partial x^i} \eta^{\alpha}_{\tau|} \Big) -$$

$$- \xi^{i}_{j} \Big(-\frac{\partial \Omega_{\sigma|rk}}{\partial x^i} g^{rh} z^{\alpha}_{,h} - \Omega_{\sigma|rk} \frac{\partial g^{rh}}{\partial x^i} z^{\alpha}_{,h} + \sum_{\tau} e_{\tau} \frac{\partial \mu_{\tau\sigma|k}}{\partial x^i} \eta^{\alpha}_{\tau|} \Big).$$

Подставляя в это равенство компоненты (3.1), после преобразований получим $[\xi_k \xi_j]^{\alpha}_{s} = z^{\alpha}_{,h} g^{hr} \{ \Omega_{\sigma|rk,j} - \Omega_{\sigma|rj,k} - \sum\limits_{\tau} e_{\tau} (\mu_{\tau\sigma|j} \Omega_{\tau|rk} -$

$$- \mu_{\tau\sigma|k} \Omega_{\tau|rj}) \} + \sum_{\varkappa} e_{\varkappa} \eta^{\alpha}_{\varkappa|} \{ \mu_{\varkappa\sigma|j,k} - \mu_{\varkappa\sigma|k,j} + \sum_{\tau} e_{\tau} (\mu_{\tau\varkappa|j} \mu_{\tau\sigma|k} - \mu_{\tau\varkappa|k} \mu_{\tau\sigma|j}) +$$

$$+ g^{rh} (\Omega_{\varkappa|hj} \Omega_{\sigma|rk} - \Omega_{\varkappa|hk} \Omega_{\sigma|rj}) \} + K_0 z^{\alpha} (\Omega_{\sigma|kj} - \Omega_{\sigma|jk}).$$

Учитывая (1.8) и (1.9), отсюда получаем

$$[\xi_k \xi_j]^{\alpha}_{\sigma|} = 0, \ \alpha = 1, \ldots, m+1; \ \sigma = n+1, \ldots, m. \qquad (3.7)$$

Объединяя (3.2), (3.4), (3.6) и (3.7), окончательно получим $[\xi_k \xi_j] = 0$, $j, k = 1, \ldots, n$. Лемма 3 доказана.

2. Гомеоморфизм области D и максимального интегрального многообразия D^*. Так как распределение R инволютивно, через каждую точку $D \times F$ проходит его максимальное интегральное многообразие класса W^{l-1}_{p} (теорема 4). Выберем в $D \times F$ точку $N^*(x^i_0, z^{\alpha}_0, z^{\alpha}_{,j0}, \eta^{\alpha}_{\sigma|0})$ $(N(x^i_0) \in D)$ такую, что

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha} c_{\alpha} z^{\alpha}_{,i0} z^{\alpha}_{,j0} = g_{ij}(x^1_0, \ldots, x^n_0); \\ &\sum_{\alpha} c_{\alpha} \eta^{\alpha}_{\sigma|0} \eta^{\alpha}_{\tau|0} = e_{\sigma\tau}; \ e_{\sigma\sigma} = e_{\sigma}, \ e_{\sigma\tau} = 0, \ \sigma \neq \tau; \\ &\sum_{\alpha} c_{\alpha} \eta^{\alpha}_{\sigma|0} z^{\alpha}_{,i0} = 0; \ \sum_{\alpha} c_{\alpha} \eta^{\alpha}_{\sigma|0} z^{\alpha}_{0} = 0; \\ &\sum_{\alpha} c_{\alpha} z^{\alpha}_{0} z^{\alpha}_{,i0} = 0; \ \sum_{\alpha} c_{\alpha} (z^{\alpha}_{0})^2 = 1/K_0. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Возможность выбора такой точки в $D \times F$ обеспечивается предположением (§ 1, п. 1) о том, что положительный и отрицательный индексы квадратичной формы (1.2) не больше соответственно положительного и отрицательного индексов квадратичной формы (1.1) [1, с. 230]. Максимальное интегральное многообразие распределения R, проходящее через точку N^*, обозначим D^*.

Лемма 4. *D^* гомеоморфно D при проектировании* $\pi \colon D \times F \to D$.

Доказательство. Сначала установим, что $\pi \colon D^* \to D$ есть сюръекция. Для этого возьмем в D дифференцируемую кривую Γ, исходящую из точки $N(x^i_0)$:

$$x^i = x^i(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \ x^i_0 = x^i(0), \qquad (3.9)$$

и рассмотрим решение обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dz^\alpha}{dt} = z^\alpha_{,i}\dot{x}^i \quad \left(\text{где } \dot{x}^i = \dfrac{dx^i(t)}{dt}\right); \\ \dfrac{dz^\alpha_{,i}}{dt} = (\Gamma^s_{ij}z^\alpha_{,s} + \sum\limits_\tau e_\tau\Omega_{\tau|ij}\eta^\alpha_{\tau|} - K_0 g_{ij}z^\alpha)\,\dot{x}^j; \\ \dfrac{d\eta^\alpha_{\sigma|}}{dt} = \left(-\Omega_{\sigma|sj}g^{sh}z^\alpha_{,h} + \sum\limits_\tau e_\tau\mu_{\tau\sigma|j}\eta^\alpha_{\tau|}\right)\dot{x}^j \end{cases} \tag{3.10}$$

с начальными условиями $z^\alpha(0) = z^\alpha_{,0}$, $z^\alpha_{,i}(0) = z^\alpha_{,i0}$, $\eta^\alpha_{\sigma|}(0) = \eta^\alpha_{\sigma|0}$.

Теперь проведем рассуждение относительно решений системы (3.10), которое не только поможет доказать лемму 4, но также будет использовано в дальнейшем.

Система (3.10) линейна и ее коэффициенты непрерывны, следовательно, при данных начальных условиях она имеет единственное решение [7, гл. 3, § 5]:

$$z^\alpha(t),\ z^\alpha_{,i}(t),\ \eta^\alpha_{\sigma|}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{3.11}$$

которое определяет кривую $\Gamma^*: (x^i(t),\ z^\alpha(t),\ z^\alpha_{,j}(t),\ \eta^\alpha_{\sigma|}(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в $D \times R^{(m+1)^2}$. Докажем, что кривая Γ^* лежит в $D \times F$. На $[0, 1]$ введем в рассмотрение функции, определяемые при помощи решения системы (3.11):

$$\begin{gathered} A_{ij}(t) = A_{ji}(t) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha_{,i}(t)\, z^\alpha_{,j}(t); \\ B_{\tau\sigma}(t) = B_{\sigma\tau}(t) = \sum_\alpha c_\alpha \eta^\alpha_{\sigma|}(t)\, \eta^\alpha_{\tau|}(t); \\ C_{\sigma i}(t) = \sum_\alpha c_\alpha \eta^\alpha_{\sigma|}(t)\, z^\alpha_{,i}(t); \\ P_\sigma(t) = \sum_\alpha c_\alpha \eta^\alpha_{\sigma|}(t)\, z^\alpha(t); \\ Q_i(t) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha(t)\, z^\alpha_{,i}(t);\ F(t) = \sum_\alpha c_\alpha (z^\alpha(t))^2. \end{gathered} \tag{3.12}$$

В силу (3.10) величины (3.12) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{ij}}{dt} = \Big\{ & \Gamma^s_{ik}A_{sj} + \sum_\tau e_\tau\Omega_{\tau|ik}C_{\tau j} - K_0 g_{ik}Q_j + \\ & + \Gamma^s_{jk}A_{si} + \sum_\tau e_\tau\Omega_{\tau|jk}C_{\tau i} - K_0 g_{jk}Q_i \Big\}\, \dot{x}^k, \\ \frac{dB_{\sigma\tau}}{dt} = \Big\{ & -\Omega_{\sigma|sj}g^{sh}C_{\tau h} + \sum_\varkappa e_\varkappa\mu_{\varkappa\sigma|j}B_{\varkappa\tau} - \\ & -\Omega_{\tau|sj}g^{sh}C_{\sigma h} + \sum_\varkappa e_\varkappa\mu_{\varkappa\tau|j}B_{\varkappa\sigma} \Big\}\, \dot{x}^j, \end{aligned}$$

$$\frac{dC_{\tau i}}{dt}=\Big\{-\Omega_{\sigma|sj}g^{sh}A_{hi}+\sum_{\tau}e_{\tau}\mu_{\tau\sigma|j}C_{\tau i}+ \tag{3.13}$$

$$+\Gamma^{s}_{ij}C_{\sigma s}+\sum_{\tau}e_{\tau}\Omega_{\tau|ij}B_{\sigma\tau}\Big\}\dot{x}^{j},$$

$$\frac{dP_{\sigma}}{dt}=-\Big\{-\Omega_{\sigma|sj}g^{sh}Q_{h}+\sum_{\tau}e_{\tau}\mu_{\tau\sigma|j}P_{\tau}+C_{\sigma j}\Big\}\dot{x}^{j},$$

$$\frac{dQ_{i}}{dt}=\Big\{A_{ij}+\Gamma^{s}_{ij}Q_{s}+\sum_{\tau}e_{\tau}\Omega_{\tau|ij}P_{\tau}-K_{0}g_{ij}F\Big\}\dot{x}^{j},$$

$$\frac{dF}{dt}=2Q_{j}\dot{x}^{j}.$$

С другой стороны, если подставить в (3.13) $A_{ij}=g_{ij}(x^{1}(t),\ldots,x^{n}(t))$, $B_{\sigma\tau}=\epsilon_{\sigma\tau}(e_{\sigma\sigma}=e_{\sigma},\ \ e_{\sigma\tau}=0,\ \ \sigma\neq\tau)$, $c_{\sigma i}=0$, $P_{\sigma}=0$, $Q_{i}=0$, $F=1/K_{0}$, то (3.13) удовлетворяется тождественно. Отсюда, в силу теоремы единственности решения системы (3.13) [7, гл. 3, § 5] и с учетом (3.8), получаем, что для $\forall t\in[0,\ 1]$ выполняются равенства:

$$\begin{cases}\sum\limits_{\alpha}c_{\alpha}z^{\alpha}_{,i}(t)\,z^{\alpha}_{,j}(t)=g_{ij}(x^{1}(t),\ \ldots,\ x^{n}(t)),\\ \sum\limits_{\alpha}c_{\alpha}\eta^{\alpha}_{\sigma|}(t)\,\eta^{\alpha}_{\tau|}(t)=e_{\sigma\tau}(e_{\sigma\sigma}=e_{\sigma},\ e_{\sigma\tau}=0,\ \sigma\neq\tau),\\ \sum\limits_{\alpha}c_{\alpha}\eta^{\alpha}_{\sigma|}(t)\,z^{\alpha}_{,i}(t)=0,\ \sum\limits_{\alpha}c_{\alpha}\eta^{\alpha}_{\sigma|}(t)\,z^{\alpha}(t)=0,\\ \sum\limits_{\alpha}c_{\alpha}z^{\alpha}(t)\,z^{\alpha}_{,i}(t)=0,\ \sum\limits_{\alpha}c_{\alpha}(z^{\alpha}(t))^{2}=1/K_{0}.\end{cases} \tag{3.14}$$

Так как $\det(g_{ij})\neq 0$, то из первого равенства (3.14) вытекает, что на Γ^{*} $\operatorname{rang}(z^{\alpha}_{,i})=n$ (это следует из того, что матрица (g_{ij}) есть произведение матрицы $(c_{\alpha}z^{\alpha}_{,i})$ и транспонированной матрицы $(z^{\alpha}_{,i})$. Следовательно, Γ^{*} лежит в $D\times F$.

Легко видеть, что каждый касательный к Γ^{*} вектор имеет вид $\dot{x}^{j}\xi_{j}$ (по j суммирование), следовательно, кривая Γ^{*} лежит на D^{*}. Это означает, что при отображении π каждая точка кривой Γ есть образ точки кривой Γ^{*}, лежащей на D^{*}. Так как каждую точку из D можно соединить с точкой N дифференцируемой кривой, то $\pi\colon D^{*}\to D$ — сюръекция. Будем говорить, что кривая Γ^{*} есть лифт кривой Γ. Обратно, каждая точка из D^{*} есть конечная точка лифта кривой в D, исходящей из точки N. Действительно, пусть точка $O^{*}\in D^{*}$. Обозначим через N^{*} точку из D^{*} такую, что $\pi(N^{*})=N$. Так как D^{*} — связное дифференцируемое многообразие класса W^{l-1}_{p}, точки N^{*} и O^{*} можно соединить дифференцируемой кривой Γ^{*}, лежащей на D^{*}. Обозначим $\Gamma=\pi(\Gamma^{*})$. Тогда Γ^{*} — лифт Γ и проходит через точку N.

Покажем теперь, что $\pi\colon D^{*}\to D$ есть биекция.

Лемма 5. *Пусть* Γ_1 *и* Γ_2 — *две дифференцируемые кривые в* D, *имеющие одинаковые концы* N *и* O. *Тогда лифты* Γ_1^* *и* Γ_2^* *кривых* Γ_1 *и* Γ_2, *проходящие через одну и ту же точку над* N, *имеют одну и ту же конечную точку* O^*.

Доказательство. Обозначим базисные векторные поля касательного расслоения D через $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, а через $d\pi$ обозначим дифференциал отображения π. Тогда ясно, что $d\pi(\xi_j) = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $j = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $\pi\colon D^* \to D$ есть локальный гомеоморфизм.

Предположим теперь, что кривые Γ_1^* и Γ_2^*, проходящие через одну и ту же точку N^*, имеют различные конечные точки O_1^* и O_2^*. Деформируем непрерывно кривую Γ_2 в Γ_1. Так как π — локальный гомеоморфизм, Γ_2^* при непрерывной деформации кривой также будет деформироваться непрерывно и при этом точка O_2^* останется неподвижной. Так как $O_1^* \neq O_2^*$, получим, что лифт кривой Γ_1 неоднозначен, что противоречит его определению. Лемма 5 доказана.

По лемме 5 отображение $\pi^{-1}\colon D \to D^*$ однозначно, следовательно, $\pi\colon D^* \to D$ — биекция (и, как мы видели, локальный гомеоморфизм). Отсюда получаем, что $\pi\colon D^* \to D$ гомеоморфно. Лемма 4 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. В силу леммы 4 мы можем принять (x^i) в качестве параметризации на D^*. При таком выборе многообразие D^* может быть задано функциями

$$z^\alpha(x^i);\ z^\alpha_{,j}(x^i);\ \eta^\alpha_{\sigma|}(x^i), \tag{3.15}$$

определенными на D. Касательные векторы координатных x^j-кривых: $x^i = \text{const}$, $i \neq j$, на D^* при этом имеют вид $(\delta^i_j, \ldots)$ (координаты векторов берутся в касательном к $D \times F$ пространстве). Отсюда видно, что ξ_j, $j = 1, \ldots, n$, есть касательные векторы x^j-кривых на D^*, следовательно, функции в (3.15) есть решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} = z^\alpha_{,j}; \\[2ex] \dfrac{\partial z^\alpha_{,i}}{\partial x^j} = \Gamma^s_{ij} z^\alpha_{,s} + \sum\limits_\tau e_\tau \Omega_{\tau|ij} \eta^\alpha_{\tau|} - K_0 g_{ij} z^\alpha; \\[2ex] \dfrac{\partial \eta^\alpha_{\sigma|}}{\partial x^i} = -\Omega_{\sigma|sj} g^{sh} z^\alpha_{,h} + \sum\limits_\tau e_\tau \mu_{\tau\sigma|j} \eta^\alpha_{\tau|}. \end{cases} \tag{3.16}$$

В предыдущем пункте было показано, что равенства (3.14) выполняются вдоль любой дифференцируемой кривой в D^*, следовательно, эти же равенства выполняются тождественно на D^*

и $\operatorname{rang}\| z^{\alpha}_{,j} \| = n$ всюду на D^*. Рассмотрим отображение $D^* \to V_m$, определяемое формулами

$$(x^i,\ z^{\alpha},\ z^{\alpha}_{,j},\ \eta^{\alpha}_{\sigma|}) \to z^{\alpha}. \tag{3.17}$$

Из (3.16) видно, что $z^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n) \in W^l_p(D)$, $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^j}\right) = n$ на D. Следовательно, отображение $f: D^* \to V_m$, определяемое формулами (3.17), есть W^l_p-погружение области (многообразия) D^* (а также и D) в V_m. Образ D^* при этом отображении обозначим S_n. Из (3.16) и (3.14) видно также, что g_{ij} — метрический тензор поверхности S_n, $\eta^{\alpha}_{\sigma|}$ — ее нормальный репер класса W^{l-1}_p; $\Omega_{\sigma|ij}$, $\mu_{\tau\sigma|i}$ — тензоры, характеризующие изменение $\eta^{\alpha}_{\sigma|}$ вдоль S_n.

Докажем, что поверхность S_n тензорами g_{ij}, $\mu_{\tau\sigma|i}$, $\Omega_{\sigma|ij}$ определяется с точностью до движения в V_m. Пусть S_n и $\bar{S}_n$ — n-мерные поверхности, являющиеся W^l_p-погружениями D^* в V_m; g_{ij} — их общий метрический тензор; $\eta^{\alpha}_{\sigma|}$, $\bar{\eta}^{\alpha}_{\sigma|}$ —нормальные реперы S_n и $\bar{S}_n$; $\Omega_{\sigma|ij}$, $\mu_{\tau\sigma|i}$ — тензоры, характеризующие изменение реперов $\eta^{\alpha}_{\sigma|}$, $\bar{\eta}^{\alpha}_{\sigma|}$ вдоль S_n и $\bar{S}_n$. Пусть точки $x \in S_n$ и $\bar{x} \in \bar{S}_n$ соответствуют одним и тем же значениям параметров (x^i). Движением поверхности $\bar{S}_n$ в V_m совместим точку $\bar{x}$ с точкой x так, чтобы при этом совпали соответствующие направления поверхностей S_n и $\bar{S}_n$ (последнее возможно в силу изометричности S_n и $\bar{S}_n$). За передвинутой поверхностью $\bar{S}_n$ сохраним ее обозначение. Движением пространства V_m, оставляющим неизменными координаты всех точек n-мерной плоскости, касательной к S_n в точке x и, возможно, изменяющим ориентацию V_m, совместим репер $\bar{\eta}^{\alpha}_{\sigma|}$ с $\eta^{\alpha}_{\sigma|}$.

Если $z^{\alpha} = z^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n)$, $\bar{z}^{\alpha} = \bar{z}^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n)$ — параметрические задания поверхностей S_n и $\bar{S}_n$, то в силу (1.5), (1.6) функции $\left(z^{\alpha}, \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^j}, \eta^{\alpha}_{\sigma|}\right)$ и $\left(\bar{z}^{\alpha}, \frac{\partial \bar{z}^{\alpha}}{\partial x^j}, \bar{\eta}^{\alpha}_{\sigma|}\right)$ задают в $D \times F$ интегральные многообразия распределения R, проходящие через одну и ту же точку. В силу теоремы 4 $z^{\alpha} \equiv \bar{z}^{\alpha}$ и $S_n \equiv \bar{S}_n$. Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2 в случае, когда D — дифференцируемое многообразие класса W^l_p

1. Построение дифференцируемого расслоения над D. Пусть $\{U_{\lambda}\}_{\lambda \in I}$ — покрытие D односвязными координатными окрестностями U_{λ} (I — множество индексов). Для каждого U_{λ} построим произведение $U_{\lambda} \times F$, определенное в § 3. В этом пункте мы

сконструируем из произведений $U_\lambda \times F$ дифференцируемое расслоение над D, которое будет играть ту же роль, что и произведение $D \times F$ в § 3. Для этого рассмотрим преобразование F на себя, задаваемое формулами:

$$\bar{z}^\alpha = z^\alpha,\ \bar{z}^\alpha_{,i} = a^j_i z^\alpha_{,j},\ \bar{\eta}^\alpha_{\sigma|} = \eta^\alpha_{\sigma|}. \tag{4.1}$$

Ясно, что все преобразования этого типа образуют группу Ли преобразований F, которую мы обозначим G. Предположим, что $U_\lambda \cap U_\theta \neq \varnothing$. Обозначим координаты в U_λ и U_θ соответственно x^i и $\bar{x}^i$. Тогда преобразования координат в $U_\lambda \cap U_\theta$ задаются формулами

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j) \in W^l_p$$

или

$$x^i = x^i(\bar{x}^j) \in W^l_p. \tag{4.2}$$

Положим

$$\bar{z}^\alpha = z^\alpha,\ \bar{z}^\alpha_{,i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} z^\alpha_{,j},\ \bar{\eta}^\alpha_{\sigma|} = \eta^\alpha_{\sigma|} \tag{4.3}$$

и отождествим точки $(x^i, z^\alpha, z^\alpha_{,j}, \eta^\alpha_{\sigma|})$ $(x^i \in U_\lambda \cap U_\theta)$ из $U_\lambda \times F$ с точками $(\bar{x}^i, \bar{z}^\alpha, \bar{z}^\alpha_{,j}, \bar{\eta}^\alpha_{\sigma|})$ из $U_\theta \times F$, причем остаются в силе соотношения (4.2) и (4.3). Преобразование (4.3) обозначим через $f_{\lambda\theta}(x^i)$. Легко видеть, что для любых трех окрестностей U_λ, U_θ, U_ω таких, что $U_\lambda \cap U_\theta \cap U_\omega \neq \varnothing$, $f_{\lambda\theta} \circ f_{\theta\omega} = f_{\lambda\omega}$. Получившееся после всевозможных таких отождествлений множество обозначим E. Определим отображение $\pi : E \to D$ формулой $\pi : (x^i, z^\alpha, z^\alpha_{,j}, \eta^\alpha_{\sigma|}) \in E \to (x^i) \in D$.

Если на E координатами $(x^i, z^\alpha, z^\alpha_{,j}, \eta^\alpha_{\sigma|})$ определить W^{l-1}_p-дифференцируемую структуру, то E будет дифференцируемым расслоением класса W^{l-1}_p с базой D, типичным слоем F, структурной группой G и функциями перехода $f_{\lambda\theta}$ [8, гл. 2, § 1].

2. Объединение распределений, определенных на $U_\lambda \times F$. Пусть тензоры g_{ij}, $\Omega_{\sigma|ij}$, $\mu_{\tau\sigma|i}$ определены на многообразии D и удовлетворяют на нем уравнениям (1.7)—(1.9). Построим на каждом произведении $U_\lambda \times F$ непрерывное класса W^{l-2}_p распределение R_λ, определенное в § 3. Справедлива

Лемма 6. *Все распределения R_λ $(\lambda \in I)$ объединяются в n-мерное непрерывное распределение R класса W^{l-2}_p в E, которое в каждом $U_\lambda \times F$ совпадает с R_λ.*

Доказательство. Компоненты вектора ξ_j (3.1) в $U_\lambda \times F$ (в $\pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\theta)$) по отношению к карте $(x^i, z^\alpha, z^\alpha_{,k}, \eta^\alpha_{\sigma|})$ обозначим ξ^ε_j $(\varepsilon, \delta = i, \alpha, {}^\alpha_{,k}, {}^\alpha_{\sigma|})$, а по отношению к карте $(\bar{x}^i, \bar{z}^\alpha, \bar{z}^\alpha_{,k}, \bar{\eta}^\alpha_{\sigma|})$ — $\bar{\xi}^\varepsilon_j$. Обозначим компоненты вектора $\bar{\xi}_j$ в $U_\theta \times F$ (в $\pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\theta)$)

по отношению к карте $(\bar{x}^i, \bar{z}^\alpha, \bar{z}^\alpha_{,k}, \bar{\eta}^\alpha_{\sigma|})$ через $\xi^{\bar{\varepsilon}}_j$; они имеют вид

$$(\delta^i_k,\ \bar{z}^\alpha_{,k},\ \bar{\Gamma}^s_{ij}\bar{z}^\alpha_{,s} + \sum_\tau e_\tau \bar{\Omega}_{\tau|ij}\bar{\eta}^\alpha_{\tau|} - K_0 \bar{g}_{ij}\bar{z}^\alpha,$$
$$-\bar{\Omega}_{\sigma|sj}\,\bar{g}^{sh}\bar{z}^\alpha_{,h} + \sum_\tau e_\tau \bar{\mu}_{\tau\sigma|j}\bar{\eta}^\alpha_{\tau|}). \tag{4.4}$$

Положим для краткости $x^i = z^i$, $\eta^\alpha_{\sigma|} = z^\alpha_{\sigma|}$. Тогда преобразования (4.2), (4.3) можно записать так: $\bar{z}^\varepsilon = \bar{z}^\varepsilon(z^\delta)$. Во введенной системе обозначений (значения δ такие же, как и ε)

$$\xi^{\bar{\varepsilon}}_j = \frac{\partial \bar{z}^\varepsilon}{\partial \bar{z}^\delta}\,\xi^\delta_j. \tag{4.5}$$

Учитывая (4.2) и (4.3), легко видеть, что матрица $\left(\dfrac{\partial \bar{z}^\varepsilon}{\partial z^\delta}\right)$ имеет форму

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^\alpha_\beta & 0 & 0 \\ z^\alpha_{,l}\dfrac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^s} \cdot \dfrac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} & 0 & \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\,\delta^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^\alpha_\beta \delta^\tau_\sigma \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Здесь $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$ — $(n \times n)$-клетка; δ^α_β — $\{(m+1) \times (m+1)\}$-клетка; $z^\alpha_{,l}\dfrac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^s} \cdot \dfrac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k}$ — $\{n\,(m+1) \times n\}$-клетка; $\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\,\delta^\alpha_\beta$ — $\{n\,(m+1) \times n\,(m+1)\}$-клетка; $\delta^\alpha_\beta\delta^\tau_\sigma$ — $\{(m-n)\,(m+1) \times (m-n)\,(m+1)\}$-клетка.

Из формы матрицы (4.6) видно: 1) $\xi^{\bar{i}}_j = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\,\xi^k_j = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$, и так как $\xi^{\bar{i}}_{\bar{k}} = \delta^i_k$, то $\xi^{\bar{i}}_j = \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}\,\xi^{\bar{i}}_{\bar{k}}$; 2) $\xi^{\bar{\alpha}}_j = \xi^\alpha_j = z^\alpha_{,j}$ или, в силу (4.3), (4.4), $\xi^{\bar{\alpha}}_j = \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}\,\bar{z}^\alpha_{,k} = \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}\,\xi^{\bar{\alpha}}_{\bar{k}}$; 3) $\xi^{\bar{\alpha}}_{ji} = z^\alpha_{,s}\dfrac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^r} \cdot \dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}\,\xi^k_j + \dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\xi^\alpha_{jk}$; подставляя в правую часть последнего равенства значения компонент из (3.1), получим

$$\xi^{\bar{\alpha}}_{ji} = \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\Gamma^s_{jk} + \frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^r}\,\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j}\right) z^\alpha_{,s} +$$
$$+ \left(\sum_\tau e_\tau \Omega_{\tau|jk}\eta^\alpha_{\tau|} - K_0 g_{jk} z^\alpha\right)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \overline{\Gamma}^r_{ik} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j} z^\alpha_{,s} + \Big(\sum_\tau e_\tau \overline{\Omega}_{\tau|is} \overline{\eta}^\alpha_{\tau|} - K_0 \overline{g}_{is} \overline{z}^\alpha\Big) \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^j} =$$

$$= \Big\{\overline{\Gamma}^r_{ik} \overline{z}^\alpha_{,r} + \sum_\tau e_\tau \overline{\Omega}_{\tau|ik} \overline{\eta}^\alpha_{\tau|} - K_0 g_{ik} \overline{z}^\alpha\Big\} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j} = \overline{\xi}^\alpha_{ik} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j};$$

$$4)\ \xi^{\overline{\alpha}}_{j\sigma|} = \xi^\alpha_{j\sigma|} = (-\overline{\Omega}_{\sigma|sj} \overline{g}^{sh} \overline{z}^\alpha_{,h} + \sum_\tau e_\tau \overline{\mu}_{\tau\sigma|i} \overline{\eta}^\alpha_{\tau|}) \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} = \overline{\xi}^\alpha_{k\sigma|} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}.$$

Суммируя эти результаты, окончательно получим $\xi^{\overline{s}}_j = \overline{\xi}^s_k \dfrac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}$.

Последнее равенство показывает, что в пространстве, касательном к расслоению E, n-мерная плоскость, натянутая на ξ_j в $U_\lambda \times F$ (в $\pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\theta)$) совпадает с плоскостью, натянутой на $\overline{\xi}_j$ в $U_\theta \times F$ (в $\pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\theta)$). Это означает, что все распределения R_λ в $U_\lambda \times F$ объединяются в единое n-мерное распределение R класса W^{l-2}_p в E. Лемма 6 доказана.

3. Свойства максимального интегрального многообразия. Пусть $N^*(x^i_0, z^\alpha_0, z^\alpha_{,j0}, \eta^\alpha_{\sigma|0})$ — точка в расслоении E, локальные координаты которой удовлетворяют условиям (3.8), а D^* — n-мерное максимальное интегральное многообразие распределения R, проходящее через точку N^*.

Лемма 7. *Отображение $\pi: D^* \to D$ есть сюръективное накрывающее отображение.*

Доказательство. В § 3 определены лифты кривых, расположенных в D, в случае, когда D — односвязная область n-мерного пространства. Ввиду леммы 6 понятие лифта кривой легко распространяется на расслоение E над многообразием D и рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 2 § 3, доказывается, что $\pi: D^* \to D$ — сюръекция. Далее рассмотрим пересечение D^* и $\pi^{-1}(U_\lambda)$. Вообще говоря, это пересечение не линейно связно и имеет много линейно связных компонент. В силу леммы 4 каждая линейно связная компонента посредством π отображается на U_λ гомеоморфно. Таким образом, каждый элемент U_λ из покрытия многообразия D просто накрыт при отображении π [9, гл. 2, § 1], т. е. $\pi: D^* \to D$ — накрывающее отображение. Лемма 7 доказана.

Следствие. *Для каждого максимального интегрального многообразия D^* в E над односвязным многообразием D проекция π есть гомеоморфизм.*

4. Доказательство теоремы 2. В каждой окрестности многообразия D^*, лежащей над U_λ, введем те же локальные координаты, что и в U_λ. Затем применим рассуждения, приведенные в п. 3 § 3. Получим, что соотношения, аналогичные (3.14), (3.16), выполняются на всем D^*, и, рассматривая отображение $f: D^* \to V_m$, определенное формулами $(x^i, z^\alpha, z^\alpha_{,j}, \eta^\alpha_{\sigma|}) \to (z^\alpha)$, увидим, что

$S_n = f(D^*)$ есть поверхность класса W_p^l в V_m (W_p^l-погружение многообразия D^* в V_m). В силу (3.14), (3.16) поверхность $S_n = f(D^*)$ обладает всеми свойствами, перечисленными в теореме 2.

Единственность поверхности S_n с точностью до движения доказывается повторением соответствующих рассуждений § 3. Теорема 2 доказана.

Выражаю искреннюю признательность В. Т. Фоменко и всем участникам геометрического семинара СКНЦ за полезное обсуждение работы.

Список литературы: **1.** *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., Изд-во иностр. лит., 1948. 316 с. **2.** *Sasaki S.* A global formulation of the fundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space.— «Nagoya math. j.», 1958, vol. 13, p. 69—82. **3.** *Sasaki S.* A proof of the fundamental theorem of hypersurfaces in a space-form.— «Tensor», 1972; No 24, p.363—373. **4.** *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. N.-Y.-L.-S., Interscience, 1969, vol. 2. 817 p. **5.** *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. 255 с. **6.** *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии, М., «Мир», 1970. 412 с. **7.** *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970. 720 с. **8.** *Зуланке Р. Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., «Мир», 1975. 348 с. **9.** *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М., «Мир», 1971. 680 с.

Поступила 25 июля 1977 г.

УДК 513

Н. И. Кованцов

РЕБРО ВОЗВРАТА ПОВЕРХНОСТИ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Широко известны работы (Д. Гильберт, Э. Хольмгрен и др.) о непогружаемости в целом в трехмерное евклидово пространство регулярных поверхностей постоянной отрицательной кривизны [1—3]. После выхода этих работ было высказано предположение (Кон-Фоссен и др.) о том, что требование постоянства кривизны не является существенным. Существенно лишь то, что кривизна поверхности должна быть отделена от нуля некоторым отрицательным числом. В работах Н. В. Ефимова, Э. Г. Позняка и Э. Р. Розендорна [4—8] это предположение было обосновано — теорема Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны была перенесена на общие поверхности со всюду отрицательной, но не стремящейся к нулю кривизной.

Невозможность погружения состоит в наличии на каждой из указанных поверхностей особенностей, нарушающих ее регулярность,— ребер возврата, конических точек и т. д. В случае поверхностей постоянной кривизны $K = -\lambda^2 = \mathrm{const}$ к этим особенностям приводит рассмотрение основного дифференциального уравнения

$$\omega_{uv} = \lambda^2 \sin \omega, \tag{1}$$

которому удовлетворяет угол ω между положительными направлениями асимптотических линий поверхности; u и v — натуральные параметры асимптотических. Двойной интеграл от обеих частей уравнения (1), распространенный по произвольному асимптотическому четырехугольнику, с увеличением этого четырехугольника неограниченно растет для левой части и остается ограниченным для правой (ограниченность второго интеграла обычно называют теоремой Хаццидакиса, доказавшего ее в 1880 г. [9]). Полученное противоречие доказывает невозможность бесконечно простирающейся во все стороны регулярной асимптотической сети (которая на рассматриваемых поверхностях является чебышевской), а тем самым невозможность существования и бесконечно простирающейся во все стороны поверхности.

В случае произвольных поверхностей с отделенной от нуля отрицательной кривизной уравнение (1) заменяется более общим (см. уравнение (10) в работе [10]), но с коэффициентами, допускающими определенные оценки. Наличие таких оценок дает возможность, как и в случае уравнения (1), привести к противоречию предположение о существовании бесконечной регулярной поверхности указанного вида.

В точках, где $\omega = 0$, асимптотические линии касаются друг друга. Это заставляет предполагать, что если касающиеся линии образуют угол π, то совокупность точек касания есть ребро возврата поверхности, если же этот угол равен нулю, то это — коническая точка. Через нее проходят все асимптотические линии поверхности, причем каждой асимптотической первого семейства соответствует касающаяся ее в конической точке асимптотическая линия второго семейства. Это в точности соответствует строению развертывающихся поверхностей, относительно которых можно условиться считать, что в точках касания их образующих с ребром возврата совпадающие асимптотические имеют противоположные направления, а в конических точках — одно и то же.

Поведение поверхностей в окрестности особых точек исследовалось рядом авторов [11—14], однако ряд вопросов, относящихся к этому поведению, остается открытым. В частности, неизвестно, может ли ребро возврата быть, как в случае развертывающейся поверхности, совершенно произвольной пространственной кривой. Неизвестно, как ведут себя асимптотические в точках их касания с ребром возврата. Всегда ли этот возврат будет тем же самым, что и в случае развертывающихся поверхностей, т. е. каждое нормальное сечение поверхности плоскостью, ортогональной к ребру, имеет точку ребра своей точкой возврата первого рода?

На эти и подобные им вопросы дается ответ в настоящей статье. Ответ будет лишен необходимой полноты, так как все рассмотрения ведутся в малом. Эти рассмотрения в общем случае будут относиться как к поверхностям отрицательной, так и к поверхностям нулевой кривизны. Поскольку они связаны с системой дифференциальных уравнений типа Коши, придется ограничиться лишь случаем аналитических коэффициентов.

Для каждого наперед заданного ребра возврата может быть единственным образом построена поверхность постоянной кривизны (в работе отмечается одно исключение, когда ребром возврата оказывается прямая линия). Следовательно, снова учтя ту оговорку, которая сделана выше, можно сказать, что, вообще говоря, каждая поверхность постоянной отрицательной кривизны представляет собой совокупность своих асимптотических, касающихся некоторой пространственной кривой.

Аналогично можно показать, что с произволом одна функция двух аргументов может быть построена поверхность неположительной кривизны, все асимптотические которой проходят через одну точку. Эта точка может удаляться в бесконечность, и тогда мы получаем аналог цилиндра. Такова, например, псевдосфера.

В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Пусть $\lambda(s, v)$ — произвольная аналитическая функция, определенная при значениях $-d \leqslant v \leqslant d$, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ и не обращающаяся в нуль при $v = 0$; пусть γ — произвольная пространственная кривая с радиусом вектором $\rho(s)$, кривизна $k(s)$ и кручение $\varkappa(s)$ которой — аналитические функции ее длины s в указанных пределах; пусть τ, ν, β — единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали кривой γ. Тогда существует единственная поверхность σ вида

$$\boldsymbol{r}(s, v) = \boldsymbol{\rho}(s) + v\boldsymbol{\tau} + f(s, v)\boldsymbol{\nu} + \varphi(s, v)\boldsymbol{\beta}, \tag{2}$$

имеющая неположительную гауссову кривизну $K = -\lambda^2$, и γ — ребро возврата этой поверхности. Асимптотические линии обоих семейств имеют огибающей кривую γ и в каждой ее точке имеют общую соприкасающуюся плоскость.

Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

1. Основные уравнения. Будем считать, что линии v — асимптотические линии поверхности σ. Функции $f(s, v)$, $\varphi(s, v)$ — искомые.

Дифференцируя (2), находим

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}_s = (1 - kf)\boldsymbol{\tau} + (vk + f_s - \varkappa\varphi)\boldsymbol{\nu} + (\varphi_s + \varkappa f)\boldsymbol{\beta},\\ \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{\tau} + f_v\boldsymbol{\nu} + \varphi_v\boldsymbol{\beta},\\ \boldsymbol{r}_{vv} = f_{vv}\boldsymbol{\nu} + \varphi_{vv}\boldsymbol{\beta}.\end{gathered} \tag{3}$$

Из того, что линии v — асимптотические, следует

$$(\boldsymbol{r}_s\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{vv}) = (1 - kf)(\varphi_{vv}f_v - f_{vv}\varphi_v) - (vk + f_s - \varkappa\varphi)\varphi_{vv} + (\varphi_s + \varkappa f) f_{vv} = 0. \tag{4}$$

Принимая во внимание теорему Бельтрами — Эннепера, найдем кручение асимптотических v:

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_v & \varphi_v \\ 0 & f_{vv} & \varphi_{vv} \\ 0 & f_{vvv} & \varphi_{vvv} \end{vmatrix}}{(f_v\varphi_{vv} - \varphi_v f_{vv})^2 + \varphi_{vv}^2 + f_{vv}^2}$$

или

$$\varphi_{vvv} f_{vv} - f_{vvv}\varphi_{vv} = \lambda\,[(\varphi_{vv} f_v - f_{vv}\varphi_v)^2 + \varphi_{vv}^2 + f_{vv}^2]. \qquad (5)$$

Искомая поверхность определяется уравнениями (4) и (5) при граничных условиях, которые мы сформулируем ниже. Предварительно, однако, сведем систему уравнений (4) и (5) к системе уравнений первого порядка. С этой целью положим

$$\varphi_v = a,\ f_v = c,\ a_v = hp,\ c_v = p. \qquad (6)$$

Тогда, как легко видеть, уравнения (4), (5) примут соответственно вид

$$\varkappa f - (1 - kf)\,a + \varphi_s = h\,(vk - \varkappa\varphi + f_s - (1 - kf)\,c), \qquad (7)$$

$$h_v = b, \qquad (8)$$

где $b = \lambda\,[(a - ch)^2 + 1 + h^2]$.

Из уравнения (7) находим

$$\varphi_s = a_1, \qquad (9)$$

где $a_1 = h\,(vk - \varkappa\varphi + f_s) - \varkappa f + (1 - kf)\,(a - ch)$.

Условие полной интегрируемости $a_s = a_{1v}$ с учетом равенства (8) дает

$$a_s = h_1 p, \qquad (10)$$

где $h_1 p = b\,(vk - \varkappa\varphi - c\,(1 - kf) + f_s) + h\,(k - \varkappa a + c_s) - \varkappa c - kc\,(a - ch)$.

Запишем теперь условие полной интегрируемости $(hp)_s = (h_1 p)_v$; приняв во внимание равенства $f_{sv} = f_{vs} = c_s$, $c_{sv} = c_{vs} = p_s$ и заменив производные φ_v, f_v, a_v, c_v, h_v их значениями из (6), (8), получим

$$h_s = b_1, \qquad (11)$$

где $b_1 = \frac{\lambda_v}{p}\,[(a - ch)^2 + 1 + h^2]\,(vk - \varkappa\varphi - c\,(1 - kf) + f_s) + 2\frac{b}{p} \times [(h - ac + c^2h)\,(vk - \varphi\varkappa - c\,(1 - kf) + f_s) + k - \varkappa a + c_s + kc^2] - (1 - kf)\,b - k\,(a - ch) - \varkappa\,(1 + h^2)$.

Выпишем, наконец, условие полной интегрируемости $b_s = b_{1v}$ и найдем из него

$$p_v = t, \qquad (12)$$

где $t = \frac{A}{B}\,p$ и $A = -\lambda_s p + \lambda_{vv}\,(vk - \varkappa\varphi - c\,(1 - kf) + f_s) + \lambda_v \times [3\,(k - \varkappa a + kc^2 + c_s) + 2\,(h - ac + c^2h)\,(vk - \varphi\varkappa - c\,(1 - kf) +$

$+ f_s) - 2p(1 - kf)] + 2\lambda[b - ap + chp + bc^2)(vk - \varphi\varkappa - c(1 - kf) +$
$+ f_s) + p_s - p\varkappa h + 3pkc + (h - ac + c^2h)(k - \varkappa a - p(1 - kf) + kc^2 +$
$+ c_s)] - 2\lambda^2 p(a - ch)(vk - \varkappa\varphi - c(1 - kf) + f_s)$, $B = 2\lambda[(h - ac +$
$+ c^2h)(vk - \varphi\varkappa - c(1 - kf) + f_s) + k - \varkappa a + c_s + kc^2] + \lambda_v(vk -$
$- \varkappa\varphi - c(1 - kf) + f_s)$.

В правой части уравнения (12), как видим, содержится только аргумент s, входящий в λ и k, $\varkappa$, аргумент v, искомые функции φ, f, a, c, p, h, а также производные искомых функций f, c, p по s. Система (4) и (5) дифференциальных уравнений второго и третьего порядков свелась к системе уравнений первого порядка:

$$\varphi_v = a,\ \varphi_s = a_1,\ a_v = hp,\ a_s = h_1 p,\ h_v = b,\ h_s = b_1, \qquad f_v = c,\ c_v = p,\ p_v = t. \tag{13}$$

Система (13) — в инволюции. Это непосредственно видно из способа ее построения. Это же можно показать, воспользовавшись методом внешних форм [15]. Для этого запишем систему (13) в виде системы в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} d\varphi &= adv + a_1ds; & da &= phdv + ph_1ds; \\ dh &= bdv + b_1ds; & df &= cdv + c_1ds; \\ dc &= pdv + p_1ds; & dp &= tdv + t_1ds. \end{aligned} \tag{14}$$

Коэффициенты этой системы есть функции от s, v, f, φ, a, c, h, p, а также от $c_1 = f_s$, $p_1 = c_s$, $t_1 = p_s$. Продифференцируем систему (14) внешним образом. Поскольку $a_s = a_{1v}$, $(hp)_s = (h_1p)_v$, $b_s = b_{1v}$, результат внешнего дифференцирования первых трех уравнений (с учетом внешнего дифференцирования двух последующих) приводит к тождеству, ибо при таком дифференцировании используются равенства $f_{sv} = f_{vs}$, $c_{sv} = c_{vs}$, т. е. $c_s = c_{1v}$, $p_s = p_{1v}$.

Внешнее дифференцирование трех последних уравнений (14) приводит к квадратичным уравнениям

$$[dc_1 - p_1dv,\ ds] = 0; \quad [dp_1 - t_1dv,\ ds] = 0, \tag{15}$$

$$[dt\,dv] + [dt_1ds] = 0. \tag{16}$$

Исследуем систему (16). С этой целью, продифференцировав t, обнаружим, что

$$dt = Vdv + Sds + C_1dc_1 + P_1dp_1 + T_1dt_1, \tag{17}$$

где V, S, C_1, P_1, T_1 — функции от v, s, f, φ, a, c, h, p, c_1, p_1, t_1. Из уравнений (16) получаем путем продолжения $dc_1 = p_1dv + \alpha ds$, $dp_1 = t_1dv + \beta ds$; α, β — коэффициенты продолжения. Вносня (16) в (17), получим квадратичное уравнение $T_1[dt_1dv] + [dt_1 - (S + \alpha C_1 + \beta P_1)dv,\ ds] = 0$. Оно может быть записано в виде $[dt_1 - (S + \alpha C_1 + \beta P_1)\, dv,\ ds + T_1 dv] = 0$. Отсюда $dt_1 = (S + \alpha C_1 + \beta P_1)\, dv + \eta\, (ds + T_1 dv)$, η — коэффициент продолжения.

При шести уравнениях Пфаффа (14) и трех квадратичных уравнениях (15), (16), получающихся их внешним дифференцированием, имеем три коэффициента продолжения α, β, η. Это означает, что система (14) имеет решение, зависящее от трех произвольных функций одного аргумента и шести постоянных. При этом считаются заданными функции $k(s)$, $\varkappa(s)$, $\lambda(s, v)$. Поскольку вопрос о существовании системы Пфаффа (14) решается положительно при аналитических коэффициентах этой системы, приходится ограничиться выбором лишь аналитических функций k, $\varkappa$, λ.

Вернемся к системе (13). Выберем какую-либо точку $M_0(s_0, 0)$, $s_1 \leqslant s_0 \leqslant s_2$. Пусть в этой точке $\varphi = \varphi_0$, $a = a_0$, $h = h_0$, $f = f_0$, $c = c_0$, $p = p_0$. Пусть $f(s, 0) = f^*(s)$, $c(s, 0) = c^*(s)$, $p(s, 0) = p^*(s)$. Значения $\varphi_0, a_0, h_0, f_0, c_0, p_0$, равно как и функции $f^*(s)$, $c^*(s)$, $p^*(s)$ (аналитические!), произвольны. При этом должно быть $f^*(s_0) = f_0$, $c^*(s_0) = c_0$, $p^*(s_0) = p_0$. Вместо того чтобы говорить о том, что функции f^*, c^*, p^* принимают наперед заданные значения при $s = s_0$, можно говорить о том, что значения f_0, c_0, p_0 определяются наперед заданными функциями f^*, c^*, p^*. Тогда можно говорить, что решение системы (13) зависит от трех функций одного аргумента и от трех постоянных.

При заданной полной кривизне поверхность, как известно, определяется с произволом две функции одного аргумента. То, что здесь она определена с произволом три функции одного аргумента, объясняется тем, что уравнениями (13) поверхность представлена как однопараметрическое семейство ее асимптотических, сопоставленных с точками кривой $\gamma : \rho(s)$ так, что каждому значению s соответствует определенная асимптотическая. Соответствие между множеством асимптотических и множеством точек кривой добавляет к двум функциям одного аргумента, определяющим поверхность, еще одну такую функцию.

2. **Решение задачи Коши.** Положим $f^*(s) = f(s, 0) = 0$, $c^*(s) = c(s, 0) = 0$. Тогда $f_s(s, 0) = 0$, $c_s(s, 0) = 0$. Отсюда и из уравнения (13), а также (7), (9) и (11) находим

$$
\begin{gathered}
\varphi_s(s, 0) = -h\varphi\varkappa + a, \\
a_s(s, 0) = -\lambda\,(1 + a^2 + h^2)\,\varphi\varkappa + h\,(k - a\varkappa), \\
h_s(s, 0) = -\frac{\lambda_v}{p}(1 + a^2 + h^2)\,\varphi\varkappa + \frac{2\lambda}{p}(1 + a^2 + h^2) \times \\
\times (-h\varphi\varkappa + k - a\varkappa) - \lambda\,(1 + a^2 + h^2) - ak - \varkappa\,(1 + h^2).
\end{gathered} \tag{18}
$$

Дифференцируя дважды по v уравнение (5) и учитывая (6), при $v = 0$ получим

$$
p = \frac{2\lambda k}{\lambda + \varkappa} \quad (\lambda + \varkappa \neq 0). \tag{19}
$$

В таком случае систему (18) можно записать в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varphi' = -h\varphi\varkappa + a;\ a' = -\lambda(1 + a^2 + h^2)\varphi\varkappa + h(k - a\varkappa);$$
$$h' = (1 + a^2 + h^2)\left(-\frac{\lambda_v}{2\lambda}\varphi\varkappa - h\varphi\varkappa - a\varkappa\right)\frac{\lambda + \varkappa}{k} - ak + a^2\varkappa \qquad (20)$$

($\lambda(s,\ 0)$ и $\lambda_v(s,\ 0)$ — заданные функции от s). Проинтегрируем ее при граничных условиях $\varphi(s_0) = a(s_0) = h(s_0) = 0$, $s_1 \leqslant s_0 \leqslant s_2$, s_0 — произвольно. Поскольку эти условия определяют единственное решение и поскольку при (19) уравнения (20) удовлетворяются значениями $\varphi(s,\ 0) = a(s,\ 0) = h(s,\ 0) = 0$, то это и будет решение системы (20).

Таким образом, решая систему (13) при граничных условиях $f(s,\ 0) = c(s,\ 0) = 0$, $p(s,\ 0) = \frac{2\lambda(s,\ 0)\,k(s)}{\lambda(s,\ 0) + \varkappa(s)}$, $\varphi(s_0, 0) = a(s_0, 0) = h(s_0, 0) = 0$, получаем единственное решение $f = f(s,\ v)$, $\varphi = \varphi(s,\ v)$, подчиненное условию

$$f(s,\ 0) = 0,\ \varphi(s, 0) = 0,\ f_v(s,\ 0) = 0,\ f_s(s,\ 0) = 0,$$
$$\varphi_s(s,\ 0) = 0,\ \varphi_v(s,\ 0) = 0,\ \varphi_{vv}(s, 0) = 0 \qquad (21)$$

(здесь учтены равенства $f_v = c$, $\varphi_v = a$, $\varphi_{vv} = a_v = hp$). Но тогда из равенств (3) следует, что асимптотические v поверхности σ касаются кривой γ и имеют в точках касания общие с ней соприкасающиеся плоскости.

Обратим внимание на то, что если в первых двух уравнениях системы (20) положить $\varphi = a = 0$, то при $k \neq 0$ получим $h = 0$. В силу (19) это значение будет удовлетворять и третьему уравнению (20). Значит, достаточно потребовать лишь касания кривой γ и асимптотических поверхности σ, как из этого будет следовать и соприкосновение кривых, т. е. совпадение их соприкасающихся плоскостей. Следовательно, касания этих кривых без их соприкосновения не может быть.

Остановимся на исключенном случае $\lambda(\mathrm{s},\ 0) = -\varkappa(\mathrm{s})$. В этом случае кручение асимптотических $\mathrm{s} = \mathrm{const}$ в точках кривой γ равно по модулю и противоположно по знаку кручению этой кривой. Третье уравнение (20) будет содержать справа слагаемое $2\lambda k/p$. Если $\lambda(s,\ 0) \neq 0$, $k \neq 0$, то добиться того, чтобы поверхность σ проходила через кривую γ, невозможно. Последнее станет возможным в следующих двух случаях:

1°. $\lambda(s,\ 0) = 0$. Тогда и $\varkappa = 0$, и кривая γ — плоская. Уравнения (19) примут вид (штрих означает дифференцирование по s) $\varphi' = a$, $a' = kh$, $h' = -ka$.

Интегралы этой системы: $a = C_1 \sin(\alpha + C_2)$, $h = C_1 \cos(\alpha + C_2)$, $\varphi = C_1 \int \sin(\alpha + C_2)\,d\mathrm{s} + C_3$, где $\alpha = \int k(\mathrm{s})\,d\mathrm{s}$, C_1, C_2, C_3 — const.

По условиям задачи следует взять $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Функ-ция $p(\mathrm{s}, 0)$ в этом случае остается неопределенной. Это озна-чает, что если кривая γ — плоская и $\lambda(\mathrm{s}, 0) = 0$, то можно про-вести бесчисленное множество поверхностей неположительной кривизны $-\lambda^2(\mathrm{s}, v)$ (произвол — одна функция одного аргумент $p(\mathrm{s}, 0) \neq 0$), имеющих эту кривую своим ребром возврата.

2°. $k(\mathrm{s}) = 0$. Кривая γ — прямая линия, но кручение ее мы полагаем равным $-\lambda(\mathrm{s}, 0)$. Уравнения (18) в этом случае при-нимают вид $\varphi' = -h\varkappa\varphi + a$, $a' = (1 + a^2 + h^2)\varphi\varkappa^2 - ha\varkappa$, $h' =$
$= (1 + a^2 + h^2)\left(-\frac{\lambda_v}{p}\varphi\varkappa + \frac{2}{p}\varkappa^2(h\varphi + a)\right) + \varkappa a^2$.

Решение $\varphi = a = h = 0$ возможно. Следовательно, можно не только сделать асимптотические v касательными к наперед задан-ной прямой, но и совместить их соприкасающиеся плоскости с плоскостями, проходящими через нее и определяемыми круче-нием $\varkappa = -\lambda(\mathrm{s}, 0)$.

В частности, поверхность σ может быть поверхностью по-стоянной отрицательной кривизны $-\lambda^2 = \mathrm{const}$. Мы должны в этом случае положить $\varkappa = -\lambda = \mathrm{const}$. Тем самым установ-лено существование поверхности постоянной отрицательной кри-визны, ребром возврата которой является прямая линия. Асимп-тотические линии поверхности касаются этого ребра. При равно-мерном движении точки касания M по ребру соприкасающаяся плоскость асимптотической равномерно вращается вокруг этого ребра.

В рассматриваемом случае функция $p(\mathrm{s}, 0)$ может быть вы-брана произвольно, но, как и прежде, она должна быть отличной от нуля, так как в ряде предыдущих равенств эта функция входит в знаменатели некоторых выражений.

3. Асимптотические второго семейства. Найдем асимптотиче-ские второго семейства поверхности σ. Для этого выпишем про-изводные

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{ss} &= (-fk' - k^2v - 2kf_s + \varphi k\varkappa)\boldsymbol{\tau} + (vk' + f_{ss} - \varphi\varkappa' + k - \\ &- fk^2 - f\varkappa^2 - 2\varphi_s\varkappa)\boldsymbol{\nu} + (f\varkappa' + \varphi_{ss} + vk\varkappa + 2f_s\varkappa - \varphi\varkappa^2)\boldsymbol{\beta}, \\ \boldsymbol{r}_{sv} &= -f_vk\boldsymbol{\tau} + (f_{sv} + k - \varphi_v\varkappa)\boldsymbol{\nu} + (\varphi_{sv} + f_v\varkappa)\boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \tag{22}$$

Разложим функции f, φ, f_v, φ_v, f_{vv}, φ_{vv}, f_s, φ_s, f_{ss}, φ_{ss}, f_{sv}, φ_{sv}, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, k, $\varkappa$ в ряды Тейлора в окрестности какой-либо точ-ки $M(\mathrm{s}_0, 0)$, при этом, не нарушая общности, можно положить $\mathrm{s}_0 = 0$. Принимая во внимание (21), получаем

$$f = \frac{1}{2} f^0_{vv}v^2 + \frac{1}{3!}(f^0_{vvv}v^3 + 3f^0_{vvs}v^2s) + \cdots ;$$

$$\varphi = \frac{1}{3!}\varphi^0_{vvv}v^3 + \frac{1}{4!}(\varphi^0_{vvvv}v^4 + 4\varphi^0_{vvvs}v^3s) + \cdots ;$$

$$f_v = f^0_{vv}v + \frac{1}{2}(f^0_{vvv}v^2 + 2f^0_{vvs}vs) + \cdots ;$$

$$\varphi_v = \frac{1}{2}\varphi^0_{vvv}v^2 + \frac{1}{3!}(\varphi^0_{vvvv}v^3 + 3\varphi^0_{vvvs}v^2 s) + \cdots ;$$

$$f_{vv} = f^0_{vv} + f^0_{vvv}v + f^0_{vvs}s + \cdots ;$$

$$\varphi_{vv} = \varphi^0_{vvv}v + \frac{1}{2}(\varphi^0_{vvvv}v^2 + 2\varphi^0_{vvvs}vs) + \cdots ;$$

$$f_s = \frac{1}{2}f^0_{svv}v^2 + \frac{1}{3!}(f^0_{svvv}v^3 + 3f^0_{svvs}v^2 s) + \cdots ;$$

$$\varphi_s = \frac{1}{3!}\varphi^0_{svvv}v^3 + \frac{1}{4!}(\varphi^0_{svvvv}v^4 + 4\varphi^0_{svvvs}v^3 s) + \cdots ;$$

$$f_{ss} = \frac{1}{2}f^0_{ssvv}v^2 + \frac{1}{3!}(f^0_{ssvvv}v^3 + 3f^0_{ssvvs}v^2 s) + \cdots ; \qquad (23)$$

$$\varphi_{ss} = \frac{1}{3!}\varphi^0_{ssvvv}v^3 + \frac{1}{4!}(\varphi^0_{ssvvvv}v^4 + 4\varphi^0_{ssvvvs}v^3 s) + \cdots ;$$

$$f_{sv} = f^0_{svv}v + \frac{1}{2}(f^0_{svvv}v^2 + 2f^0_{svvs}vs) + \cdots ;$$

$$\varphi_{sv} = \frac{1}{2}\varphi^0_{svvv}v^2 + \frac{1}{3!}(\varphi^0_{svvvv}v^3 + 3\varphi^0_{svvvs}v^2 s) + \cdots ;$$

$$\tau = \tau_0 + k_0\nu_0 s + \frac{1}{2}(k'_0\nu_0 - k_0^2\tau_0 + k_0\varkappa_0\beta_0)s^2 + \cdots ;$$

$$\nu = \nu_0 + (-k_0\tau_0 + \varkappa_0\beta_0)s + \frac{1}{2}(-k'_0\tau_0 - k_0^2\nu_0 + \varkappa'_0\beta_0 - \varkappa_0^2\nu_0)s^2 + \cdots ;$$

$$\beta = \beta_0 - \varkappa_0\nu_0 s + \frac{1}{2}(-\varkappa'_0\nu_0 + \varkappa_0 k_0\tau_0 - \varkappa_0^2\beta_0)s^2 + \cdots ;$$

$$k = k_0 + k'_0 s + \frac{1}{2}k''_0 s^2 + \cdots ; \quad \varkappa = \varkappa_0 + \varkappa'_0 s + \frac{1}{2}\varkappa''_0 s^2 + \cdots$$

Легко видеть, что в правой части каждого из последних равенств можно вынести v в той степени, в какой этот аргумент входит в первый член разложения. Это означает, что после такого вынесения у нас не появится отношений s/v и мы будем избавлены от необходимости находить предел такого отношения. Важно отметить, что в каждом равенстве (23) сначала подряд идут две последовательных степени v, а аргумент s стоит множителем при той степени v, с которой начинается разложение.

Ограничимся в разложениях (3) для $\boldsymbol{r}_s$, $\boldsymbol{r}_v$ и (22) для $\boldsymbol{r}_{ss}$, $\boldsymbol{r}_{sv}$ лишь первыми членами (ради простоты не выписываем нулей): $\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{\tau} + k(s + v)\boldsymbol{\nu} + \frac{1}{2}\varkappa(ks^2 + 2kvs + f_{vv}v^2)\boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{\tau} + (ks + f_{vv}v)\boldsymbol{\nu} + \frac{1}{2}(k\varkappa s^2 + 2\varkappa f_{vv}vs + \varphi_{vvv}v^2)\boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{r}_{ss} = -k^2(s + v)\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\nu} + k\varkappa(v + s)\boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{r}_{sv} = -k(ks + f_{vv}v)\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\nu} + \varkappa(f_{vv}v + ks)\boldsymbol{\beta}$. Уравнение (5) при $f_{vv} \neq 0$ дает $\varphi_{vvv} = \lambda f_{vv}$ $(v = 0)$. Далее, при $v = 0$ имеем (см. (13), (19)) $f_{vv} = c_v = p = 2\lambda k(\lambda + \varkappa)^{-1}$.

Выпишем следующие необходимые нам выражения

$$L' = (\boldsymbol{r}_{ss}\boldsymbol{r}_s\boldsymbol{r}_v) = \left(\frac{3}{2}k\varkappa f_{vv} - \frac{1}{2}k\lambda f_{vv} - k^2\varkappa\right)v^2 + \cdots = \\ = -k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-1}v^2 + \cdots;$$

$$M' = (\boldsymbol{r}_{sv}\boldsymbol{r}_s\boldsymbol{r}_v) = \left(-\frac{1}{2}k(\lambda+\varkappa)f_{vv} + \varkappa f_{vv}^2\right)v^2 + \cdots = \\ = -\lambda k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-2}v^2 + \cdots; \tag{24}$$

$$W^2 = [\boldsymbol{r}_s\boldsymbol{r}_v]^2 = (f_{vv}-k)^2v^2 + \cdots = k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-2}v^2 + \cdots$$

Точками обозначены члены, порядок которых выше второго, причем в силу отмеченного выше свойства правых частей равенств (23) каждый такой член содержит множителем v^2.

Уравнение асимптотических линий второго семейства имеет вид $L'ds + 2M'dv = 0$, откуда

$$\frac{ds}{dv} = -2\frac{M'}{L'} = -2\frac{-\lambda k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-2}v^2 + \cdots}{-k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-1}v^2 + \cdots}.$$

Поскольку все члены в числителе и знаменателе имеют множитель v^2, их на него можно сократить и в пределе при $v \to 0$, $s \to 0$ (характер этого перехода к пределу в силу того же замечания об уравнениях (23) не играет роли) получаем значение производной $\frac{ds}{dv} = -\frac{2\lambda}{\lambda+\varkappa}$.

Далее,

$$\frac{d^2s}{dv^2} = -\frac{2}{L'^2}\left[(M_v'L' - L_v'M') + (M_s'L' - L_s'M')\frac{ds}{dv}\right].$$

Но

$$M_v' = -2\lambda k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-2}v + \cdots;$$
$$M_s' = -[\lambda k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-2}]'v^2 + \cdots;$$
$$L_v' = -2k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-1}v + \cdots;$$
$$L_s' = -[k^2(\lambda-\varkappa)^2(\lambda+\varkappa)^{-1}]'v^2 + \cdots,$$

а потому $M_v'L' - L_v'M' = Pv^4 + \cdots$; $M_s'L' - L_s'M' = Qv^4 + \cdots$, где P, Q — некоторые коэффициенты. Следовательно, в пределе $\frac{d^2s}{dv^2} = -2\frac{P(\lambda+\varkappa) - 2Q\lambda}{k^4(\lambda-\varkappa)^4}(\lambda+\varkappa)$. Для асимптотических второго семейства имеем производные $\frac{d\boldsymbol{r}}{dv} = \boldsymbol{r}_v + \boldsymbol{r}_s\frac{ds}{dv}$; $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dv^2} = \boldsymbol{r}_{vv} + 2\boldsymbol{r}_{vs}\frac{ds}{dv} + \boldsymbol{r}_{ss}\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 + \boldsymbol{r}_s\frac{d^2s}{dv^2}$. При $v = 0$ это дает $\frac{d\boldsymbol{r}}{dv} = \left(1 + \frac{ds}{dv}\right)\boldsymbol{\tau}$; $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dv^2} = \left(f_{vv} + 2k\frac{ds}{dv} + k\left(\frac{ds}{dv}\right)^2\right)\boldsymbol{\nu} + \frac{d^2s}{dv^2}\boldsymbol{\tau}$. Следовательно, асимптотические линии второго семейства касаются ребра возврата γ и имеют в точках касания общую с ним соприкасающуюся плоскость. Теорема доказана.

Замечание. Из формул (24) видно, что при $v=0$ полная кривизна поверхности σ принимает значение $K=-M'^2/W^4=-\lambda^2$, т. е. равна функции $-\lambda^2$ (как и на всей поверхности).

В случае торсов $\lambda=0$ можно положить $h=0$, $p=0$, т. е. $a_v=\varphi_{vv}=0$, $c_v=f_{vv}=0$; отсюда $\varphi=\alpha v+\beta$; $f=\gamma v+\delta$, где α, β, γ, δ — некоторые функции от s. Асимптотические v — прямые линии. Уравнения (4) и (5) тождественно удовлетворены. Беря $\alpha=\beta=\gamma=\delta$, получаем $\varphi=f=0$. Уравнение (2) поверхности σ приобретает известный вид $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}+v\boldsymbol{\tau}$.

4. Ребро возврата поверхности. Покажем, что линия γ для поверхности σ в общем случае действительно является ребром возврата, т. е. у каждого сечения поверхности плоскостью, нормальной к γ, точка его пересечения с γ есть точка возврата первого рода.

Действительно, пусть $v=v(s)$ — искомое нормальное сечение. Не нарушая общности, можем положить в точке M его пересечения с γ $s=0$. Кроме того, в этой точке, очевидно, $v=0$. Разложим функцию $v(s)$ в ряд Тейлора в окрестности точки M:

$$v=v's+\frac{1}{2}v''s^2+\frac{1}{3!}v'''s^3+\cdots \tag{25}$$

Внесем (25) в уравнение (2) поверхности σ и разложим в правой части векторы $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ и функции v, f, φ в ряды Тейлора (в точке M ради простоты положим $\boldsymbol{\rho}=0$; кроме того, учтем разложения (23)):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\tau}s+\frac{1}{2}k\boldsymbol{\nu}s^2+\frac{1}{3!}(k'\boldsymbol{\nu}-k^2\boldsymbol{\tau}+k\varkappa\boldsymbol{\beta})s^3+\cdots+\\+\left(v's+\frac{1}{2}v''s^2+\frac{1}{3!}v'''s^3+\cdots\right)\left(\boldsymbol{\tau}+k\boldsymbol{\nu}s+\frac{1}{2}(k'\boldsymbol{\nu}-\cdots)s^2+\cdots\right)+\\+\left(\frac{1}{2}f_{vv}(v's+\cdots)^2+\cdots\right)(\boldsymbol{\nu}+(-k\boldsymbol{\tau}+\varkappa\boldsymbol{\beta})s+\cdots)+\\+\left(\frac{1}{6}\varphi_{vvv}(v's+\cdots)^3+\cdots\right)\left(\boldsymbol{\beta}-\varkappa\boldsymbol{\nu}s+\frac{1}{2}(-\varkappa'\boldsymbol{\nu}+\cdots)s^2+\cdots\right).\end{gathered} \tag{26}$$

Поскольку кривая (25) есть нормальное сечение поверхности σ, плоскость которого ортогональна к γ в M, то коэффициент при $\boldsymbol{\tau}$ в разложении (26) должен обратиться в нуль:

$$\begin{gathered}s-\frac{1}{6}k^2s^3+\cdots+\left(v's+\frac{1}{2}v''s^2+\frac{1}{6}v'''s^3+\cdots\right)\times\\\times\left(1-\frac{1}{2}k^2s^2+\cdots\right)-ks\left(\frac{1}{2}f_{vv}v'^2s^2+\cdots\right)+\cdots=0.\end{gathered}$$

Приравниваем нулю коэффициенты при $s, s^2, s^3, \ldots$: $v'+1=0$, $v''=0$, $v'''=\frac{3}{2}kf_{vv}-k^2$. Разложение (26) примет вид $\boldsymbol{r}=\left(\frac{1}{2}(f_{vv}-k)s^2+\cdots\right)\boldsymbol{\nu}+\left(\left(\frac{1}{2}f_{vv}\varkappa-\frac{1}{6}\varphi_{vvv}-\frac{1}{3}k\varkappa\right)s^3+\cdots\right)\boldsymbol{\beta}$.

Ограничимся первыми членами разложений. Обозначая координаты текущей точки сечения в нормальной плоскости через y, z, получим следующие уравнения кривой, аппроксимирующей сечение:

$$y = \frac{1}{2}(f_{vv} - k)s^2, \; z = \left(\frac{1}{2}f_{vv}\varkappa - \frac{1}{3}k\varkappa - \frac{1}{6}\varphi_{vvv}\right)s^3,$$

или

$$y = \frac{1}{2}k\frac{(\lambda-\varkappa)}{(\lambda+\varkappa)}s^2; \; z = \frac{1}{3}k\frac{(\lambda-\varkappa)^2}{\lambda+\varkappa}s^3.$$

Это полукубическая парабола, для которой точка M есть точка возврата первого рода. Утверждение доказано.

Список литературы: 1. *Hilbert D.* Mathematiche Probleme. Vortrag gehelten auf dem II Internationalen Math. Kongress zu Paris, 1900.— «Gött. Nachr.», 1900, S. 253—297. 2. *Гильберт Д.* О поверхностях постоянной гауссовой кривизны (пер. с нем.). — В кн.: Об основаниях геометрии. М., Гостехтеориздат, 1956, с. 213—221. 3. *Holmgren E.* Sur les surfaces à courbure constante négative.— «C.-R. Ac. Sci.», 1902, t. 134. 4. *Ефимов Н. В.* Невозможность в трехмерном евклидовом пространстве полной регулярной поверхности с отрицательной верхней гранью гауссовой кривизны.— ДАН СССР, 1963, т. 150, № 6, с. 1206—1209. 5. *Ефимов Н. В.* Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны.— «Мат. сб.», 1964, т. 64, № 2, с. 286—320. 6. *Позняк Э. Г.* О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 3. Харьков, 1966, с. 78—92. 7. *Розендорн Э. Р.* О полных поверхностях отрицательной кривизны $K \leqslant -1$ в евклидовых пространствах E_3 и E_4.— «Мат. сб.», 1962, т. 58, № 4, с. 453—478. 8. *Розендорн Э. Р.* Поверхности отрицательной кривизны с изолированными точками.— Тезисы кр. науч. сообщ. Междунар. конгресса математиков, секция 9, М., 1966, с. 42—43. 9. *Hazzidakis I. N.* Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstanten Krümmungsmass.— «Journ. reine und angev. Math.», 1880, Bd. 88. 10. *Ефимов Н. В.* Проблемы изометрического погружения в целом.— «Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда», 1963, т. 1, с. 86—99. 11. *Amsler M. H.* Des surfaces à courbure négative constante dans l'éspace à trois dimensions et de leur singularitées.— «Math. ann.», 1955, t. 130. 12. *Розендорн Э. Р.* Слабо нерегулярные поверхности отрицательной кривизны.— «Усп. мат. наук», 1966, т. 21, вып 5, с. 59—116. 13. *Розендорн Э. Р.* Гладкая особая дуга на поверхности постоянной отрицательной кривизны.— ДАН СССР, 1976, т. 229, № 6, с. 1321—1323. 14. *Виноградский А. С.* Граничные свойства поверхностей с медленно меняющейся отрицательной кривизной.— «Мат. сб.», 1970, т. 82, № 124, с. 285—289. 15. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1948. 432 с.

Поступила 11 марта 1977 г.

УДК 513

Е. А. Королев, Т. Н. Фомина

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТ И ПЕТЕРСОНА

Минимальные поверхности представляют собой частный случай поверхностей переноса, когда кривыми переноса служат минимальные линии. Поверхности же переноса являются частным случаем поверхностей Петерсона, когда линии Γ_1 и Γ_2, порождающие коническую сеть — плоские, расположенные в несобственной плоскости.

В этой статье будет рассмотрен случай цилиндро-конической сети, когда лишь одна из линий, например Γ_2, лежит в бесконечно удаленной плоскости. При этом будет показано, что единственной минимальной поверхностью, несущей такую сеть, является катеноид.

Уравнение поверхности с сопряженной сетью конических линий (поверхности Петерсона) запишем в виде

$$x = \frac{a_1(u) - b_1(v)}{a_4(u) - b_4(v)},\ y = \frac{a_2(u) - b_2(v)}{a_4(u) - b_4(v)},\ z = \frac{a_3(u) - b_3(v)}{a_4(u) - b_4(v)} \tag{1}$$

и уравнения линий в виде $\Gamma_1 : x = \frac{a_1'(u)}{a_4'(u)},\ y = \frac{a_2'(u)}{a_4'(u)},\ z = \frac{a_3'(u)}{a_4'(u)}$; $\Gamma_2 : x = \frac{b_1'(v)}{b_4'(v)},\ y = \frac{b_2'(v)}{b_4'(v)},\ z = \frac{b_3'(v)}{b_4'(v)}$.

В случае цилиндро-конической сети $a_4' \neq 0,\ b_4' = 0$, поэтому $a_4 \neq \mathrm{const},\ b_4 = \mathrm{const}$. Не нарушая общности, можно считать, что $a_4 = u,\ b_1 = v,\ b_4 = 0$. При этом уравнения (1) примут вид

$$x = \frac{a_1(u) - v}{u},\ y = \frac{a_2(u) - b_2(v)}{u},\ z = \frac{a_3(u) - b_3(v)}{u}. \tag{2}$$

Эта поверхность должна быть минимальной, т. е. коэффициенты ее квадратичных форм должны удовлетворять уравнению $EN + GL = 0$, которое в данном случае запишется так:

$$(\boldsymbol{a}'u - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 (\boldsymbol{b}'',\ \boldsymbol{a}'u - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}'') = \boldsymbol{b}'^2 (\boldsymbol{a}''u^2,\ \boldsymbol{a}'u - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}'). \tag{3}$$

Выполнение этого функционального уравнения необходимо и достаточно, чтобы поверхность (2) была минимальной.

Упростим уравнение (3). При $u = 0$ оно принимает вид $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}(0))^2 (\boldsymbol{b}'',\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}(0),\ \boldsymbol{b}') = 0$.

Вектор $\boldsymbol{b}(v)$ не может быть постоянным; значит, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}(0) \neq 0$ и поэтому $(\boldsymbol{b}'',\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}(0),\ \boldsymbol{b}') = 0$, откуда следует, что кручение кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}(0)$ равно нулю, т. е. что эта кривая плоская. Пусть она лежит в плоскости $b_3 = a_3(0)$, тогда $b_3' = b_3'' = 0$.

Введем вектор $\boldsymbol{p}(u) = \boldsymbol{a}'u - \boldsymbol{a}$; тогда уравнение (3) примет вид $(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b})^2 (\boldsymbol{b}'',\ \boldsymbol{p} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}') = \boldsymbol{b}'^2 (\boldsymbol{a}''u^2,\ \boldsymbol{p} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}')$; учитывая, что теперь вектор $\boldsymbol{b} = \{v,\ b_2(v),\ a_3(0)\}$, это уравнение можно записать в скалярной форме

$$\sum_{i=1}^{7} U_i V_i = 0, \tag{4}$$

где U_i — функции от u, V_i — функции от v, а именно:

$$U_1 = p_3 + a_3(0); \qquad V_1 = (v^2 + b_2^2)\, b_2'';$$
$$U_2 = 2p_2(p_3 + a_3(0)); \qquad V_2 = b_2'' b_2;$$
$$U_3 = 2p_1(p_3 + a_3(0)); \qquad V_3 = v b_2;$$
$$U_4 = \{p_1^2 + p_2^2 + (p_3 + a_3(0))^2\}(p_3 + a_3(0)); \qquad V_4 = b_2'';$$
$$U_5 = -a_3'' u^2; \qquad V_5 = (b_2' v - b_2)(1 + b_2'^2);$$
$$U_6 = -a_3'' p_1 u^2 + a_1''(p_3 + a_3(0))\, u^2; \qquad V_6 = b_2'(1 + b_2'^2);$$
$$U_7 = a_3'' p_3 u^2 - a_2''(p_3 + a_3(0))\, u^2; \qquad V_7 = 1 + b_2'^2.$$
(5)

Приступим к решению этого функционального уравнения. Прежде всего заметим, что если функция $b_2(v)$ линейна, то поверхность, удовлетворяющая уравнению (4), развертывающаяся; будучи минимальной, она является плоскостью. Этот случай не представляет интереса, и поэтому будем считать, что $b_2(v)$ нелинейна, в силу чего

$$V_4 = b_2'' \neq 0,\ V_7 = 1 + b_2'^2 \neq 0. \tag{6}$$

Разделим все члены уравнения (4) на V_7 и затем продифференцируем его по v; получим в результате $\sum\limits_{i=1}^{6} U_i\,(V_i V_7^{-1})' = 0$.

Так как, согласно (5), $V_6 V_7^{-1} = b_2'$, то $(V_6 V_7^{-1})' = b_2''$. Учитывая (6), можно все члены полученного уравнения разделить на $(V_6 V_7^{-1})' = b_2''$, в результате чего множитель при U_6 обратится в единицу; дифференцируя теперь по v, получим $\sum\limits_{i=1}^{5} U_i\,[(V_i V_7^{-1})'/b_2'']' = 0$. Но здесь множитель при U_5 равен $[(V_5 V_7^{-1})'/b_2'']' = [b_2' v - b_2)'/b_2'']' = v' = 1$; поэтому, дифференцируя по v еще раз, получим

$$\sum_{i=1}^{4} U_i\,[(V_i V_7^{-1})'/b_2'']'' = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда $[(V_4 V_7^{-1})'/b_2'']'' = 0$, т. е. $[b_2''/(1 + b_2'^2)]'/b_2'' = \alpha v + \alpha_1$, или $[b_2''/(1 + b_2'^2)]' = (\alpha v + \alpha_1)\, b_2''$, где α и α_1 — постоянные. Интегрируя это равенство по v (правую сторону по частям), найдем

$$b_2'' = (1 + b_2'^2)(\alpha b_2' v - \alpha b_2 + \alpha_1 b_2' + \alpha_2), \tag{8}$$

α_2 — постоянная. При этом уравнение (7) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{3} U_i\,[(V_i V_7^{-1})'/b_2'']'' = 0. \tag{9}$$

Если $U_1 = 0$, поверхность является плоскостью. Поэтому можно считать, что $U_1 \neq 0$; деля на него (9) и дифференцируя по u, получаем

$$a_2'' [(V_2 V_7^{-1})'/b_2'']'' + a_1'' [(V_3 V_7^{-1})'/b_2'']'' = 0. \qquad (10)$$

Предположим, что $a_1'' = 0$, т. е. $a_1 = hu + h_1$ (h и h_1 — постоянные). При этом в уравнении (10) останется только первый член, и может представиться два подслучая.

1. $a_2'' = 0$, т. е. $a_2 = ku + k_1$ (k и k_1 — постоянные); для $b_2(v)$ получаем, кроме (8), еще одно дифференциальное уравнение

$$(v^2 + b_2^2 - 2k_1 b_2 - 2h_1 v)\, b_2'' = (1 + b_2'^2)(\gamma b_2' v - \gamma b_2 + \gamma_1 b_2' + \gamma_2) \qquad (11)$$

и три дифференциальных уравнения для $a_3(u)$:

$$\begin{aligned} a_3'' u^2 &= (p_3 + a_3(0))\,[\alpha\{k_1^2 + h_1^2 + (p_3 + a_3(0))^2\} + \gamma]; \\ a_3'' h_1 u^2 &= (p_3 + a_3(0))\,[\alpha_1\{k_1^2 + h_1^2 + (p_3 + a_3(0))^2\} + \gamma_1]; \\ a_3'' k_1 u^2 &= (p_3 + a_3(0))\,[\alpha_2\{k_1^2 + h_1^2 + (p_3 + a_3(0))^2\} + \gamma_2]. \end{aligned} \qquad (12)$$

Подставляя (8, 11 и 12) в функциональное уравнение (4), получим тождество. Это означает, что поверхность, задаваемая уравнениями $x = (hu + h_1 - v)/u$, $y = [ku + k_1 - b_2(v)]/u$, $z = [a_3(u) - a_3(0)]/u$, является минимальной поверхностью Петерсона, если существует такой набор постоянных, при которых система (12) для функции $a_3(u)$ и система уравнений (8 и 11) для функции $b_2(v)$ будут совместны.

После несложных преобразований приходим к выводу, что система (12) совместна лишь когда

$$\alpha_1 = h_1 \alpha,\ \gamma_1 = h_1 \gamma,\ \alpha_2 = k_1 \alpha,\ \gamma_2 = k_1 \gamma. \qquad (13)$$

При этих условиях с помощью (8) уравнение (11) можно записать так: $[(v^2 + b_2^2 - 2k_1 b_2 - 2h_1 v)\,\alpha - \gamma]\,(b_2' v - b_2 + h_1 b_2' + k_1) = 0$. Но здесь второй сомножитель $\neq 0$, так как в противном случае $b_2(v)$ была бы линейной функцией; поэтому система для $b_2(v)$ такова: $b_2'' = (1 + b_2'^2)(\alpha b_2' v - \alpha b_2 + \alpha_1 b_2' - \alpha_2)$, $\alpha(v^2 + b_2^2 - 2k_1 b_2 - 2h_1 v) - \gamma = 0$.

Выполняя несложные преобразования, приходим к выводу, что эта система совместна тогда и только тогда, когда $h_1 = 0$ и $\alpha k_1^2 + \gamma = 1$, и, следовательно, $b_2 = k_1 + \sqrt{(1 - \alpha v^2)/\alpha}$. При этом, учитывая (13), получим решение системы (12) в виде $a_3 = a_3(0) - u \int \frac{\sqrt{c}\, du}{u \sqrt{\alpha (1 - cu^2)}}$.

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $k = 0$; при этом $b_2 = \sqrt{1 - v^2}$, $a_3 = u \operatorname{arch}(1/u)$, и уравнения поверхности примут вид $x = -v/u$, $y = -\sqrt{1 - v^2}/u$, $z = \operatorname{arch}(1/u)$.

Полагая здесь $v = -\cos \tilde{v}$, приходим к параметрическому заданию катеноида: $x = \frac{\cos \tilde{v}}{u}$, $y = \frac{\sin \tilde{v}}{u}$, $z = \operatorname{arch} \frac{1}{u}$.

2. $a_2'' \neq 0$. Проделав соответствующие преобразования, получим поверхность $x = (hu + h_1 - v)/u$; $y = [a_2(u) - b_2(v)]/u$; $z = [a_3(u) - a_3(0)]/u$. Эта поверхность может быть минимальной поверхностью Петерсона, если существует такой набор констант, при котором будет совместна как система уравнений для функций $a_2(u)$ и $a_3(u)$: $a_3'' u^2 = [\alpha \{h_1^2 + p_2^2 + (p_3 + a_3(0))^2\} + \gamma + 2\beta p_2](p_3 + a_3(0))$, $a_3'' h_1 u^2 = [\alpha_1 \{h_1^2 + p_2^2 + (p_3 + a_3(0))^2\} + \gamma_1 + 2\beta_1 p_2](p_3 + a_3(0))$, $a_3'' p_2 u^2 = [a_2'' u^2 - \gamma_2 - 2\beta_2 p_2 - \alpha_2 \{h_1^2 + p_2^2 + (p_3 + a_3(0))^2\}](p_3 + a_3(0))$, так и система уравнений для функции b_2: $b_2'' = (1 + b_2'^2)(\alpha b_2' v - \alpha b_2 + \alpha_1 b_2' + \alpha_2)$, $b_2 b_2'' = (1 + b_2'^2) \times (\beta b_2' v - \beta b_2 + \beta_1 b_2' + \beta_2)$, $(v^2 + b_2^2 - 2h_1 v) b_2'' = (1 + b_2'^2)(\gamma b_2' v - \gamma b_2 + \gamma_1 b_2' + \gamma_2)$.

Довольно громоздкие преобразования приводят к выводу, что обе системы могут быть совместны лишь при условии пропорциональности констант α_i, β_i, γ_i, α, β, γ. Но в таком случае функция b_2 будет линейной, а полученная поверхность — развертывающейся.

Во всех остальных случаях исследование совместности и решение — они потребовали большого счета и здесь не приводятся — систем дифференциальных уравнений, полученных при решении функционального уравнения (4), приводят только к развертывающейся поверхности.

Поступила 15 января 1978 г.

УДК 513

В. Т. Лисица

О ГОЛОНОМНОСТИ ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМАХ

Рассмотрим класс погружений в риманово пространство R^m $(m > n)$ римановой поверхности F^n такой, что в каждой точке $x \in F^n$ все вторые квадратичные формы погружения и метрический тензор одновременно приводятся к диагональному виду

$$ds^2 = \sum_i g_{ii} dx_i^2, \quad \mathrm{II}_p = \sum_i \Omega_{p|ii} dx_i^2, \ p = 1, 2, \ldots, m-n.$$

Это означает, что в каждой точке поверхности F^n существует n главных направлений. Класс таких погружений не пуст [1]. В случае, когда R^m — евклидово пространство, Ю. А. Аминовым доказана, а в работе [2] сформулирована следующая лемма:

Пусть F^n — подмногообразие отрицательной кривизны в евклидовом пространстве E^m. Пусть в каждой точке $x \in F^n$ существует n главных направлений. Тогда они голономны.

Существование и голономность главных направлений дает возможность ввести удобные для исследования поверхности координаты [2].

В настоящей заметке лемма Ю. А. Аминова переносится на случай, когда объемлющее пространство R^m неевклидово, а его тензор кривизны удовлетворяет некоторому условию. А именно, верна

Теорема. *Пусть F^n — подмногообразие отрицательной внешней секционной кривизны в римановом пространстве R^m. Пусть в каждой точке $x \in F^n$ существует n главных направлений. Если тензор кривизны пространства R^m удовлетворяет условию*

$$\langle R(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z};\ \boldsymbol{n}_p\rangle = 0,\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ m - n, \tag{A}$$

где $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ — касательные к F^n векторы, а $\boldsymbol{n}_p$ — нормаль, тогда главные направления голономны.

Сформулируем следствия, которые ниже будут доказаны.

Следствие 1. *Пусть R^m — вещественное риманово пространство постоянной кривизны. Если F^n — подпространство в R^m отрицательной внешней кривизны и если в каждой точке $x \in F^n$ существует n главных направлений, то они голономны.*

Следствие 2. *Пусть R^m — кэлерово многообразие постоянной кривизны, а F^n — кэлерово подмногообразие отрицательной внешней кривизны. Пусть в каждой точке $x \in F^n$ существует n главных направлений. Тогда они голономны.*

Это утверждение верно также и в случае, когда оба многообразия R^m и F^n кватернионные кэлеровы.

В этой заметке будет приведен пример поверхности F^3 отрицательной внешней кривизны в пространстве R^5 непостоянной кривизны, у которой существуют 3 главных направления и некоторые из них неголономны.

Условие (A) теоремы уже использовалось в работе [3] при изучении строения римановых пространств некоторого класса. Это условие означает, что уравнения Кодацци в таких пространствах R^m имеют такой же вид, как и в евклидовом пространстве.

Введем некоторые необходимые понятия и обозначения, пользуясь терминологией работы [4]. ∇_X — ковариантная производная в направлении вектора $\boldsymbol{X}$ в пространстве R^m. Тензор кривизны пространства R^m имеет вид

$$R(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} = \nabla_X\nabla_Y\boldsymbol{Z} - \nabla_Y\nabla_X\boldsymbol{Z} - \nabla_{[X;\,Y]}\boldsymbol{Z}, \tag{B}$$

где векторы $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ принадлежат касательному к R^m пространству; $\boldsymbol{n}_p\,(p = 1, \ldots, m - n)$ — ортогональные единичные нормали к поверхности F^n; λ_{pi} — главная нормальная кривизна поверхности F^n, соответствующая нормали $\boldsymbol{n}_p$ и главному направлению $\boldsymbol{X}_i$. Под внешней секционной кривизной поверхности F^n

понимаем разность $\tilde{K}_{ik} = k(X_i;\ X_k) - K(X_i;\ X_k)$, где $k(X_i;\ X_k)$ и $K(X_i;\ X_k)$ — секционные кривизны поверхности F^n и пространства R^m соответственно по двумерной площадке, натянутой на векторы X_i и X_k.

Доказательство теоремы. Воспользуемся следующим свойством главных направлений [5]:

$$\nabla_{X_i} \boldsymbol{n}_p = \lambda_{pi} X_i + \sum_{q=1}^{m-n} \mu_{qp|i} \boldsymbol{n}_q. \tag{1}$$

Продифференцировав ковариантно правую и левую часть уравнения (1) по другому главному направлению X_k, получим

$$\nabla_{X_k} \nabla_{X_i} \boldsymbol{n}_p = \lambda_{pi} \nabla_{X_k} X_i + X_i \nabla_{X_k} \lambda_{pi} + \\ + \sum_q [\boldsymbol{n}_q \nabla_{X_k} \mu_{qp|i} + \mu_{qp|i} \nabla_{X_k} \boldsymbol{n}_q] = \lambda_{pi} \nabla_{X_k} X_i + \cdots \tag{2}$$

В уравнениях (2) и ниже точками будем обозначать члены, содержащие векторы X_i, X_k, $\boldsymbol{n}_p$ $(p = 1, \ldots, m-n)$. Уравнение (2) умножим на λ_{pk} и просуммируем по индексу p:

$$\sum_p \lambda_{pk} \nabla_{X_k} \nabla_{X_i} \boldsymbol{n}_p = \nabla_{X_k} X_i \sum_p \lambda_{pi} \lambda_{pk} + \cdots \tag{3}$$

По формуле Гаусса имеем $\sum\limits_p \lambda_{pi} \lambda_{pk} = \tilde{K}_{ik}$. Из формулы ($B$) следует, что

$$\nabla_{X_k} \nabla_{X_i} \boldsymbol{n}_p = \nabla_{X_i} \nabla_{X_k} \boldsymbol{n}_p + \nabla_{[X_k X_i]} \boldsymbol{n}_p + R(X_k;\ X_i)\, \boldsymbol{n}_p. \tag{4}$$

Пользуясь свойством главных направлений (1), преобразуем правую часть (4):

$$\nabla_{X_i} \nabla_{X_k} \boldsymbol{n}_p = \nabla_{X_i} \left(\lambda_{pk} X_k + \sum_q \mu_{qp|k} \boldsymbol{n}_q\right) = \lambda_{pk} \nabla_{X_i} X_k + \cdots \tag{5}$$

Подставим (5) в (4) и полученное выражение для $\nabla_{X_k} \nabla_{X_i} \boldsymbol{n}_p$ в (3). Обозначая $\sum\limits_p \lambda_{pk}^2 = \gamma_k^2$, найдем

$$\tilde{K}_{ik} \nabla_{X_k} X_i - \gamma_k^2 \nabla_{X_i} X_k = \sum_p \lambda_{pk} [\nabla_{[X_k X_i]} \boldsymbol{n}_p + R(X_k;\ X_i)\, \boldsymbol{n}_p] + \cdots \tag{6}$$

Меняя ролями X_i и X_k, получаем

$$\tilde{K}_{ik} \nabla_{X_i} X_k - \gamma_i^2 \nabla_{X_k} X_i = \sum_p \lambda_{pi} [\nabla_{[X_i X_k]} \boldsymbol{n}_p + R(X_i;\ X_k)\, \boldsymbol{n}_p] + \cdots \tag{7}$$

Умножим (6) на $\tilde{K}_{ik}$, а (7) на γ_k^2 и сложим:

$$(\tilde{K}_{ik}^2 - \gamma_i^2 \gamma_k^2) \nabla_{X_k} X_i = \tilde{K}_{ik} \sum_p \lambda_{pk} [\nabla_{[X_k X_i]} \boldsymbol{n}_p + R(X_k;\ X_i)\, \boldsymbol{n}_p] + \\ + \gamma_k^2 \sum_p \lambda_{pi} [\nabla_{[X_i X_k]} \boldsymbol{n}_p + R(X_i;\ X_k)\, \boldsymbol{n}_p] + \cdots \tag{8}$$

Если теперь (6) умножим на γ_i^2, а (7) — на $\tilde{K_{ik}}$ и полученные выражения сложим, получим:

$$(\tilde{K}_{ik}^2-\gamma_i^2\gamma_k^2)\nabla_{X_i}X_k=\tilde{K}_{ik}\sum_p\lambda_{pi}[\nabla_{[X_iX_k]}n_p+R(X_i;\ X_k)n_p]+$$
$$+\gamma_i^2\sum_p\lambda_{pk}[\nabla_{[X_kX_i]}n_p+R(X_k;\ X_i)n_p]+\cdots \tag{9}$$

Пользуясь тем, что $\nabla_{X_k}X_i-\nabla_{X_i}X_k=[X_kX_i]$, $R(X_i;\ X_k)n_p=$ $=-R(X_k;\ X_i)n_p$ [4], вычтем (9) из (8):

$$(\tilde{K}_{ik}^2-\gamma_i^2\gamma_k^2)[X_k;\ X_i]=(\tilde{K}_{ik}-\gamma_i^2)\sum_p\lambda_{pk}[\nabla_{[X_kX_i]}n_p+$$
$$+R(X_k;\ X_i)n_p]+(\tilde{K}_{ik}-\gamma_k^2)\sum_p\lambda_{pi}[\nabla_{[X_kX_i]}n_p+$$
$$+R(X_k;X_i)n_p]+\cdots \tag{10}$$

Так как F^n — голономное подмногообразие в R^m и векторы X_i и X_k — касательные в F^n, то скобка Ли векторов X_i и X_k принимает одно и то же значение в пространствах F^n и R^m. Главные направления в каждой точке $x\in F^n$ образуют базис касательного пространства к F^n в точке x, поэтому скобка Ли векторов X_i и X_k представима в виде линейной комбинации главных векторов. Пусть проекция $[X_kX_i]$ на некоторое главное направление X_l $(X_l\neq X_i;\ X_l\neq X_k)$ равна ρ. Тогда $\nabla_{[X_kX_l]}n_p=\nabla_{\rho X_l+\ldots}n_p=$ $=\rho\nabla_{X_l}n_p+\cdots=\rho\lambda_{pl}X_l+\cdots$, где точками обозначены члены, не содержащие X_l. Учитывая это, умножим скалярно уравнение (10) на X_l. По условию теоремы $\langle R(X_k;\ X_i)n_p;\ X_l\rangle=0$, поэтому получим

$$\rho(\tilde{K}_{ik}^2-\gamma_i^2\gamma_k^2)=\rho(\tilde{K}_{ik}-\gamma_i^2)\sum_p\lambda_{pl}\lambda_{pk}+\rho(\tilde{K}_{ik}-\gamma_k^2)\sum_p\lambda_{pi}\lambda_{pl}=$$
$$=\rho[(\tilde{K}_{ik}-\gamma_i^2)\tilde{K}_{lk}+(\tilde{K}_{ik}-\gamma_k^2)\tilde{K}_{il}]. \tag{11}$$

Предположим, что $\rho\neq 0$. Сокращая правую и левую часть уравнения (11) на ρ, получим $(\tilde{K}_{ik}^2-\gamma_i^2\gamma_k^2)=(\tilde{K}_{ik}-\gamma_i^2)\tilde{K}_{lk}+(\tilde{K}_{ik}-$ $-\gamma_k^2)\tilde{K}_{il}$. Здесь в правой части строго положительное выражение, а в левой — неположительное. Значит, $\rho=0$, т. е. $[X_kX_i]$ разлагается только по векторам X_i и X_k. Отсюда и следует, что главные направления голономны.

Доказательство следствия 1. Достаточно проверить выполнимость условия (A) теоремы. В пространстве постоянной кривизны тензор кривизны имеет вид $R(X;\ Y)Z=K(X\langle Y;\ Z\rangle-$ $-Y\langle X;\ Z\rangle)$. Умножая скалярно на n_p, в правой части равенства получим нуль, так как n_p — нормаль, а X, Y — касательные к F^n векторы, следовательно, $\langle R(X;\ Y)Z;\ n_p\rangle=0$, тем самым следствие доказано.

Прежде чем перейти к доказательству двух других следствий, напомним некоторые необходимые сведения. Комплексной структурой на римановом многообразии R^m называется тензорное поле

I типа (1; 1), обладающее свойством $I^2 = -E$, где E — тождественное преобразование касательного пространства к R^m. Пусть R^m — кэлерово многообразие, а F^n — кэлерово подмногообразие многообразия R^m. Метрика многообразия R^m обладает свойством $\langle X;\ Y\rangle = \langle IX;\ IY\rangle$, где X и Y — касательные к R^m векторы. Касательное к F^n пространство обладает свойством инвариантности по отношению к I, т. е. если T_pF^n — касательное к F^n пространство в точке p, то из $X \in T_pF^n$ следует $IX \in T_pF^n$ [6].

Кватернионной структурой на римановом многообразии R^m называется система трех тензорных полей F, G, H типа (1; 1), удовлетворяющих условиям $F^2 = -E$, $G^2 = -E$, $H^2 = -E$, $GH = -HG = F$, $HF = -FH = G$, $FG = -GF = H$, где E — тождественное преобразование касательного к R^m пространства. Пусть F^n — кватернионное кэлерово подмногообразие многообразия R^m. Метрика многообразия R^m обладает свойством $\langle X;\ Y\rangle = \langle FX;\ FY\rangle = \langle GX;\ GY\rangle = \langle HX;\ HY\rangle$. Касательное к F^n пространство обладает свойством инвариантности по отношению к F, G, H [7].

Доказательство следствия 2. Достаточно проверить выполнимость условия (A) теоремы. Так как R^m имеет постоянную кривизну, его тензор кривизны имеет вид: $\langle R(X;\ Y)\,\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle = \frac{k}{4}\{\langle Y;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle X;\ Z\rangle - \langle X;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle Y;\ Z\rangle + \langle IY;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle IX;\ Z\rangle - \langle IX;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle IY;\ Z\rangle - 2\langle IX;\ Y\rangle\langle I\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle\}$, где I — комплексная структура в R^m, а X, Y, Z — касательные к F^n векторы [6]. Так как $\boldsymbol{n}_p$ — нормаль к F^n, то $\langle X;\ \boldsymbol{n}_p\rangle = \langle Y;\ \boldsymbol{n}_p\rangle = \langle Z;\ \boldsymbol{n}_p\rangle = 0$. В силу инвариантности касательного к F^n пространства относительно I имеем $\langle IX;\ \boldsymbol{n}_p\rangle = \langle IY;\ \boldsymbol{n}_p\rangle = \langle IZ;\ \boldsymbol{n}_p\rangle = 0$, а поскольку метрика R^m кэлерова, то $\langle I\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle = \langle I^2\boldsymbol{n}_p;\ IZ\rangle = -\langle \boldsymbol{n}_p;\ IZ\rangle = 0$. Но тогда получим, что $\langle R(X;\ Y)\,\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle = 0$.

Рассмотрим случай кватернионных R^m и F^n. Так как R^m имеет постоянную кривизну, то $\langle R(X;\ Y)\,\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle = \frac{k}{4}\{\langle Y;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle X;\ Y\rangle - \langle X;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle Y;\ Z\rangle + \langle FY;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle FX;\ Z\rangle - \langle FX;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle FY;\ Z\rangle - 2\langle FX;\ Y\rangle\langle F\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle + \langle GY;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle GX;\ Z\rangle - \langle GX;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle GY;\ Z\rangle - 2\langle GX;\ Y\rangle\langle G\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle + \langle HY;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle HX;\ Z\rangle - \langle HX;\ \boldsymbol{n}_p\rangle\langle HY;\ Z\rangle - 2\langle HX;\ Y\rangle\langle H\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle\}$. Тензоры F, G, H оставляют инвариантным касательное к F^n пространство и обладают свойством $\langle X;\ Y\rangle = \langle FX;\ FY\rangle = \langle GX;\ GY\rangle$. Рассуждая точно так же, как и в следствии 2, получим, что $\langle R(X;\ Y)\,\boldsymbol{n}_p;\ Z\rangle = 0$.

Рассмотрим уравнение (10). На тензор кривизны пространства R^m не будем теперь налагать никаких ограничений. Умножим (10) скалярно на X_l $(X_l \neq X_i,\ X_l \neq X_k)$. Пусть ρ — проекция $[X_k;\ X_i]$ на X_l. После приведения подобных членов получим

$$\rho\,[(\tilde{K}_{ik} - \gamma_i^2)\,\tilde{K}_{lk} + (\tilde{K}_{ik} - \gamma_k^2)\,\tilde{K}_{il} - (\tilde{K}_{ik}^2 - \gamma_i^2\gamma_k^2)] = (\tilde{K}_{ik} - \gamma_i^2)\sum_p \lambda_{pk}\langle R(X_k;\ X_i)\,X_l;\ \boldsymbol{n}_p\rangle + (\tilde{K}_{ik} - \gamma_k^2)\sum_p \lambda_{pi}\langle R(X_k;\ X_i)\,X_l;\ \boldsymbol{n}_p\rangle.$$

выражение в квадратных скобках в левой части полученного уравнения обозначим через $M_{ik}(X_l)$, а выражение в правой части уравнения — через $N_{ik}(X_l)$. Если F^n — подмногообразие строго отрицательной внешней кривизны, тогда $M_{ik}(X_l) \neq 0$ и $\rho = \frac{N_{ik}(X_l)}{M_{ik}(X_l)}$. Если $N_{ik}(X_l) \neq 0$, то $\rho \neq 0$ и направление X_l будет неголономным; если же $N_{ik}(X_l) = 0$ для всех $i,\ k \neq l$, то X_l — голономное направление. Из этих рассуждений следует, что в теореме можно было бы не требовать $\langle R(X_i;\ X_k)\, X_l;\ n_p\rangle = 0$, а достаточно потребовать, чтобы $N_{ik}(X_l) = 0$ для всех $i,\ k \neq l$.

Приведем пример пространства R^5 непостоянной кривизны и подмногообразия в нем (подмногообразие F^3) отрицательной внешней кривизны, в котором существует 3 главных направления и не все из них голономны. Можно будет проверить, что в этом примере условие $N_{ik}(X_l) = 0$ не выполняется.

Пример. Рассмотрим риманово многообразие, заданное метрикой $ds^2 = g_{ij}dx_i dx_j$ со следующим g_{ij}: $g_{44} = 1$, $g_{55} = 1$, $g_{11} = 2\exp(-4x_3 - x_4 - 3x_5)$; $g_{12} = -\exp(-3x_3 - 3x_4 + x_5)$; $g_{13} = \exp(-2x_3 + x_4 - 3x_5)$; $g_{23} = -\exp(-x_3 + x_4 + x_5)$; $g_{22} = 2\exp(-2x_3 - x_4 + x_5)$; $g_{33} = \exp(x_4 - x_5)$, где $\exp x = e^x$.

Рассмотрим координатную поверхность, заданную уравнениями $x_4 = x_5 = 0$ (поверхность F^3). $g_{ij}|_{x_4=x_5=0}$, $i,j = 1,\ 2,\ 3$, будут коэффициентами метрического тензора поверхности F^3. Координатные направления e_4 и e_5 будут нормалями к поверхности F^3. Коэффициенты второй квадратичной формы, соответствующие нормали e_σ, будут равны $\Omega_{\sigma|ij} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\sigma}\right|_{x_4=x_5=0}$ $(\sigma = 4,\ 5)$. Составим матрицу из коэффициентов первой квадратичной формы поверхности F^3

$$G = \begin{pmatrix} 2\exp(-4x_3) & -\exp(-3x_3) & \exp(-2x_3) \\ -\exp(-3x_3) & 2\exp(-2x_3) & -\exp(-x_3) \\ \exp(-2x_3) & -\exp(-x_3) & 1 \end{pmatrix}$$

и матрицы вторых квадратичных форм поверхности F^3, соответствующие нормалям e_4 и e_5:

$$A = \begin{pmatrix} -\exp(-4x_3) & \frac{3}{2}\exp(-3x_3) & \frac{1}{2}\exp(-2x_3) \\ \frac{3}{2}\exp(-3x_3) & -\exp(-2x_3) & -\frac{1}{2}\exp(-x_3) \\ \frac{1}{2}\exp(-2x_3) & -\frac{1}{2}\exp(-2x_3) & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -3\exp(-4x_3) & -\frac{1}{2}\exp(-3x_3) & -\frac{3}{2}\exp(-2x_3) \\ -\frac{1}{2}\exp(-3x_3) & \exp(-2x_3) & -\frac{1}{2}\exp(-x_3) \\ -\frac{3}{2}\exp(-2x_3) & -\frac{1}{2}\exp(-x_3) & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие векторные поля на F^3: $e_1' = (e^{2x_3}; e^{x_3};$ $-2)$; $e_2' = (e^{x_3};\ 1;\ e^{-x_3})$; $e_3' = (-e^{x_3};\ 1;\ 2e^{-x_3})$. За базисные поля выбраны координатные векторные поля. Составим матрицу C из координат этих векторов:

$$C = \begin{pmatrix} e^{2x_3} & e^{x_3} & -2 \\ e^{x_3} & 1 & e^{-x_3} \\ -e^{x_3} & 1 & 2e^{-x_3} \end{pmatrix}.$$

Чтобы показать, что направления векторов e_1'; e_2'; e_3' являются главными как для нормали e_4, так и для e_5, достаточно проверить, что матрицы CGC', CAC' и CBC' диагональные. Это проверяется непосредственно.

Это и означает, что направления e_1'; e_2'; e_3' — главные как для e_4, так и для e_5. Главные нормальные кривизны для e_4 будут $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = -7/2$, а для e_5 — $\mu_1 = 1/2, \mu_2 = -5/2$, $\mu_3 = 1/2$. По формуле Гаусса легко установить, что F^3 имеет отрицательную секционную внешнюю кривизну. Можно проверить, что в данном примере главное направление e_3' неголономно. Найдем скобку Ли $[e_1'; e_2']$. Ее i-я координата находится по формуле: $(\partial\xi^i/\partial x_j)\,\eta^j - (\partial\eta^i/\partial x_j)\,\xi^j$, где ξ^i, η^i i-ые координаты векторов e_1' и e_2' соответственно; так как ξ^i и η^i зависят только от x_3, то $j = 3$, $i = 1, 2, 3$. Подставляя вместо ξ^i и η^i их значения, получим $[e_1';\ e_2'] = (4e^{x_3},\ e^{x_3};\ -2e^{-x_3})$. Скалярное произведение этого вектора на e_3' не равно 0. Значит, направление e_3' неголономно. В этом примере, как можно проверить, не выполняется условие $N_{ik}(X_l) = 0$. Например, можно подсчитать, что $N_{12}(e_3') \neq 0$. Приведенный пример показывает, что требование, чтобы $N_{ik}(X_l) = 0$ для голономности направления X_l существенно.

В заключение автор благодарит А. А. Борисенко за помощь в работе и Ю. А. Аминова, за любезно предоставленное доказательство теоремы в случае, когда $R^m = E^m$.

Список литературы: 1. *J. D. Moore*. Isometric immersions of space forms in space forms.— «Pacific j. math.», 1972, vol. 40, No 1, p. 157-166. 2. *Аминов Ю. А.* О погружении областей n-мерного пространства Лобачевского в n-мерное евклидово пространство.— ДАН СССР, 1977, т. 236, № 3, с. 521—524. 3. *Maltz R.* The nullity spaces of curvature.— J. diff. geom., 1972, vol. 7, No 3-4, p. 519-523. 4. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М., «Мир», 1971. 343 с. 5. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948. 316 с. 6. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry, vol. II. New York-London-Sydney, Interscience publ., 1969. 470 p. 7. *Ishihara S.* Quaternion Kählerian manifolds.— «J. diff. geom.», 1974, vol. 9, No 4, p. 483-500.

Поступила 10 февраля 1978 г.

УДК 513

Л. А. Масальцев

РАЗМЕРЫ УСТОЙЧИВЫХ ОБЛАСТЕЙ НА НЕКОТОРЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ СФЕРЫ

Минимальное подмногообразие M с краем ∂M (случай $\partial M=\varnothing$ не исключается) называется устойчивым относительно ∂M, если для любого регулярного варьирующего поля ξ с компактным носителем на M вторая вариация площади поверхности $\delta^2 S(\xi)$ подмногообразия M неотрицательна. Если же существует варьирующее поле ξ, для которого $\delta^2 S(\xi)<0$, то подмногообразие M называется неустойчивым. Известно, что замкнутые минимальные подмногообразия сферы S^n неустойчивы [2]. В предлагаемой статье будут найдены размеры устойчивых областей на некоторых минимальных подмногообразиях сферы.

Пусть D — область на M с гладкой границей ∂D. Можно поставить следующую краевую задачу: $\Delta\varphi=\lambda\varphi$ в области D, $\varphi=0$ на ∂D (Δ — оператор Лапласа — Бельтрами). Эта задача имеет дискретный спектр, и для первого положительного собственного значения ее $\lambda_1(D)$ вариационный принцип формулируется так [5]: $\lambda_1(D)=\inf\limits_{\varphi\in W^{1,0}(D)}\dfrac{\|d\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2}$, где $W^{1,0}(D)=\Big\{\varphi:\varphi$ непрерывна в D, $\varphi=0$ на dD, $d\varphi$ определено почти всюду и $\int\limits_D|d\varphi|^2\,dv<\infty\Big\}$.

1. Простейшим примером замкнутого p-мерного минимального подмногообразия сферы S^n является большая сфера S^p, образующая вполне геодезическое подмногообразие. В предложении 5.1.1. [2] показано, что произвольное сечение V нормального расслоения $N(S^p)$ может быть представлено в виде $V=\sum\limits_{i=1}^{n-p}\varepsilon_i V_i$, где V_i — ковариантно постоянные сечения $N(S^p)$, образующие в каждой точке $m\in S^p$ ортонормированный базис пространства $N_m(S^p)$, а ε_i — произвольные функции на S^p.

Пусть D — область с гладкой границей ∂D на S^p. Вторая вариация площади области $D\subset S^p$ с фиксированной границей ∂D имеет вид $\delta^2S(V)=\int\limits_D\langle\Delta V-pV,\ V\rangle\,ds_p$, где на варьирующее поле V наложено условие $V|_{\partial D}=0$, ds_p — элемент площади поверхности D.

Используя общий вид поля V и вариационный принцип для $\lambda_1(D)$, получим

$$\delta^2S(V)=\int\limits_D\Big(\sum_{i=1}^{n-p}|\nabla\varepsilon_i|^2-p\varepsilon_i^2\Big)\,ds_p\geqslant\int\limits_D(\lambda_1(D)-p)\sum_{i=1}^{n-p}\varepsilon_i^2\,ds_p.$$

Следовательно, справедливо такое утверждение.

Теорема 1. *Если первое собственное значение области $D \subset S^p \subset S^n$ удовлетворяет неравенству $\lambda_1(D) \geqslant p$, то вторая вариация площади $\delta^2 S(V)$ неотрицательна и область D устойчива.*

Особо отметим два частных случая.

А) $p = 1$. В этом случае D есть отрезок геодезической длины L на сфере S^n. Оператор Лапласа — Бельтрами в одномерном случае сводится к $-d^2/dx^2$. Задача на собственные значения для оператора $-d^2/dx^2$ на отрезке $[0, L]$ с нулевыми граничными условиями имеет первое положительное собственное значение $\lambda_1(D) = (\pi/L)^2$. Условие устойчивости отрезка геодезической D на сфере S^n сводится к требованию $\lambda_1(D) = (\pi/L)^2 \geqslant 1$. Это есть иная формулировка хорошо известного факта, что отрезок геодезической на сфере S^n будет кратчайшей, если его длина не превосходит π.

Б) Рассмотрим случай, когда область $D = D^p$ представляет собой полусферу S^p. При вычислении $\lambda_1(D^p)$ воспользуемся теоремой Р. Куранта, которая утверждает, что первая собственная функция области D обращается в нуль только на границе ∂D, а внутри D знакопостоянна. Оператор Лапласа — Бельтрами полусферы D^p в радиально-геодезических координатах имеет вид [3, с. 483] $\Delta = -\partial^2/\partial r^2 - (p-1)\operatorname{ctg} r \cdot \partial/\partial r + \Delta^*$, где Δ^* — угловая часть (не содержащая дифференцирований $\partial/\partial r$). Нетрудно убедиться, что функция $\cos r$ будет собственной функцией Δ, отвечающей собственному значению $\lambda = p$. Кроме того, эта функция обращается в нуль только на границе ∂D_p $(r = \pi/2)$. По теореме Р. Куранта она будет первой собственной функцией оператора Лапласа — Бельтрами полусферы D^p. Следовательно, $\lambda_1(D^p) = p$.

Следствие 1. *Если область $D \subset S^p \subset S^n$ содержится в некоторой полусфере D^p, то она устойчива.*

Для доказательства достаточно использовать монотонную зависимость λ_1 от области: если $D \subseteq \bar{D}$, то $\lambda_1(D) \geqslant \lambda_1(\bar{D})$.

Обратное утверждение неверно. Имеются примеры областей на сфере типа пояса, содержащего вполне геодезическую окружность, для которых λ_1 достаточно велико. Очевидно, что такой пояс не может быть помещен ни в какую полусферу. В то же время, согласно теореме 1, такие области устойчивы.

2. В качестве второго примера мы дадим достаточные условия устойчивости области на минимальных подмногообразиях сферы, имеющих вид $S^p \times S^q$.

Для положительных целых p, q и положительных действительных чисел r, s положим $S^p(r) \times S^q(s) = \{(x, y) \in R^{p+1} \times R^{q+1} : \|x\| = r, \|y\| = s\} \subset R^{p+q+2}$. Легко проверить, что $\sum_{p,q} = S^p\left(\left(\frac{p}{p+q}\right)^{1/2}\right) \times S^q\left(\left(\frac{q}{p+q}\right)^{1/2}\right) \subset S^{p+q+1}$ минимально в S^{p+q+1} и $\sum_{i=1}^{p+q} k_i^2 = p + q$, где k_i — главные нормальные кривизны

$\sum_{p,q}$ в S^{p+q+1}. Заметим, что $\sum_{1,1}$ есть классический тор Клиффорда в S^3.

Теорема 2. *Пусть D область с гладкой границей на подмногообразии $\sum_{p,q}$ единичной сферы S^{p+q+1}. Тогда, если $\lambda_1(D) \geqslant 2(p+q)$, область D устойчива.*

Доказательство. Воспользуемся формулой для второй вариации площади, приведенной в статье Ю. А. Аминова [1, с. 404]:

$$\delta^2 S(\zeta) = \int_D \left[|\nabla \varepsilon|^2 + \varepsilon^2 \sum_{j,\alpha} \mu_{j\rho|\alpha} \mu^{\alpha}_{j\rho|} - \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^{n} (k_i^{\rho})^2 + \sum_{i=1}^{n} K(e_i, \zeta) \right) \right] ds, \tag{1}$$

где варьирующее поле $\zeta = \varepsilon n_\rho$ направлено по одному из базисных векторов нормального пространства $N_p(M)$, функция ε обращается в нуль на границе области ∂D, $\mu_{j\rho|\alpha}$ — коэффициенты кручения [4, § 47], k_i^{ρ} — i-я главная нормальная кривизна по отношению к нормальному вектору n_ρ, $K(e_i, \zeta)$ — секционная кривизна объемлющего пространства в направлении (e_i, ζ).

В данном случае коэффициенты кручения равны нулю, так как $\sum_{p,q}$ — гиперповерхность, $\sum_{i=1}^{p+q} k_i^2 = p+q$, $\sum_{i=1}^{p+q} K(e_i, \zeta) = p+q$. Следовательно, формула для второй вариации площади области D на $\sum_{p,q}$ имеет вид $\delta^2 S(\zeta) = \int_D (|\nabla\varepsilon|^2 - \varepsilon^2 \cdot 2(p+q))\, ds$. Из вариационного принципа следует, что если $\lambda_1(D) \geqslant 2(p+q)$, то подынтегральное выражение $\geqslant 0$, и теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть область D содержится в произведении областей $D_1 \times D_2$, где $D_1 \subset S^p\left(\left(\frac{p}{p+q}\right)^{1/2}\right)$ и $D_2 \subset S^q\left(\left(\frac{q}{p+q}\right)^{1/2}\right)$. Тогда, если $\lambda_1(D_1) + \lambda_1(D_2) \geqslant 2(p+q)$, то область D устойчива.*

Для доказательства достаточно напомнить два свойства спектра: монотонную зависимость λ_1 от области и спектр области $D_1 \times D_2$ есть множество чисел вида $\{\lambda_i + \mu_j\}$, где $\lambda_i \in \operatorname{Spec}(D_1)$, $\mu_j \in \operatorname{Spec}(D_2)$ [5].

Следствие 3. *Если область D содержится в произведении $D^p\left(\left(\frac{p}{p+q}\right)^{1/2}\right) \times D^q\left(\left(\frac{q}{p+q}\right)^{1/2}\right)$, то она устойчива.*

Для доказательства достаточно заметить, что $\lambda_1(D^p(r)) = \frac{p}{r^2}$.

3. Подмногообразия Веронезе. Классическая поверхность Веронезе есть минимальное вложение проективной плоскости $P^2(1/3)$ гауссовой кривизны 1/3 в единичную сферу $S^4(1)$. Это вложение может быть задано следующим образом: $\psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(xy, xz, yz,$

$\frac{1}{2}(x^2-y^2)$, $\frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2+y^2-2z^2))$, $x^2+y^2+z^2=3$. Индикатрисой нормальной кривизны в каждой точке поверхности Веронезе является окружность.

Б. О'Нейл [7] ввел понятие изотропного подмногообразия. Пусть метрическая форма подмногообразия M^n, погруженного в $\tilde{M}^m$, в точке p единична, а вторая фундаментальная форма имеет вид $B(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^{\alpha} x^i y^j e_\alpha$, где $\{e_\alpha\}_1^n$ — ортонормированный базис касательного пространства $T_p(M)$, а $\{e_\alpha\}_{n+1}^m$ — ортонормированный базис нормального пространства $N_p(M)$, $X=(x^i)$, $Y=(y^j)\in T_p(M)$. Для всякого единичного вектора X, вектор $B(X, X)=\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha} x^i x^j e_\alpha \in N_p(M^n)$ называется вектором нормальной кривизны M^n в точке p в направлении X. Многообразие M^n называется λ-изотропным в точке p, если для всякого единичного $X\in T_p(M^n)$ $\|B(X, X)\|=\lambda=\mathrm{const}$. Если это условие выполнено в произвольной точке M^n, то M^n называется λ-изотропным погружением в $\tilde{M}^m$.

Б. О'Нейл доказал возможность неомбилического изотропного вложения проективного пространства $P^n(\sigma_n)$ кривизны σ_n в сферу S^{e_n-1}, где $\sigma_n=n/[2(n+1)]$ и $e_n=[n(n+3)]/2$. Это вложение минимально и является естественным обобщением поверхности Веронезе по размерности. Свойства данного вложения в каждой точке описывает

Лемма 1. (О' Нейл [7]). *Пусть многообразие M^n постоянной кривизны $\sigma_n=\frac{n}{2(n+1)}$ погружено в многообразие $\tilde{M}^{e_n-1}$ постоянной кривизны 1. Если M^n изотропное подмногообразие $\tilde{M}^{e_n-1}$, то*

(I) *M^n есть минимальное подмногообразие $\tilde{M}^{e_n-1}$.*

(II) $\|B(X,X)\|^2=\frac{n-1}{n+1}$. $X\in T_p(M^n)$, $\|x\|=1$.

(III) $\|B(X, Y)\|^2=n/[2(n+2)]$ *для всякой пары векторов* $X, Y \mid X\perp Y$, $\|X\|=\|Y\|=1$;

(IV) $1/2n(n-1)$ *векторов* $B(e_i, e_j)$ $(i<j)$ *ортогональны между собой;*

(V) *угол* θ *между* $B(e_i, e_i)$ *и* $B(e_j, e_j)$ *одинаков для всякой пары* i, j *и* $\cos\theta=-1/(n-1)$.

(VI) $\{B(e_i, e_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ *ортогонально* $\{B(e_i, e_j)\}_{1\leqslant i<j\leqslant n}$.

(VII) $\dim\{B(e_i, e_i)\cup B(e_i, e_j)_{i<j}\}=\frac{1}{2}n(n+1)-1$.

С помощью процесса ортогонализации векторов легко доказывается следующая лемма.

Лемма 2. (Ито и Огиуе [6]) $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ *векторов нормального пространства* $N_p(M^n)$

$$e_{\tilde a}=\sqrt{n+1}/\sqrt{n(n-a)(n-a+1)}\,\Big\{\sum_{b=1}^{a-1}B(e_b,\ e_b)+$$
$$+(n-a+1)B(e_a,\ e_a)\Big\},\ 1\leqslant a\leqslant n-1;$$
$$e_{(\widetilde{i,j})}=\sqrt{2(n+1)}/\sqrt{n}\,B(e_i,\ e_j),\ 1\leqslant i<j\leqslant n$$

образуют ортонормированную систему. Матрицы вторых фундаментальных форм относительно этих ортов имеют вид

$$(h_{ij}^{\tilde a})=\begin{array}{c}\\(a)\end{array}\left\|\begin{array}{ccccc}0 & \overset{(a)}{\vdots} & & & 0\\ \cdots & \lambda_a & & & \\ & & \mu_a & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \mu_a\end{array}\right\|\qquad (h_{lm}^{(\widetilde{i,j})})=\left\|\begin{array}{ccccc} & \overset{(i)}{\vdots} & & \overset{(j)}{\vdots} & \\ \cdots & 0 & \cdots & Q & \cdots\\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & Q & \cdots & 0 & \cdots\\ & \vdots & & \vdots & \end{array}\right\|\begin{array}{c}\\(i);\\ \\(j)\\ \\ \end{array}$$

$$\lambda_a=\frac{\sqrt{n(n-a)}}{\sqrt{(n+1)(n-a+1)}},\quad \mu_a=\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{(n-a)(n-a+1)(n+1)}},$$
$$Q=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(n+1)}}$$

и все остальные элементы матриц равны нулю.

Пусть v — произвольный единичный вектор из нормального пространства $N_p(M^n)$. Обозначим через $\{k_i^v\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ главные нормальные кривизны подмногообразия M^n в точке p относительно вектора v.

Лемма 3. *Величина* $\sum_{i=1}^{n}(k_i^v)^2=-\sum_{i\neq j}k_i^vk_j^v$ *не зависит от выбора* v *и равна* $n/(n+1)$.

Для вычисления $\sum(k_i^v)^2$ воспользуемся формулой $\sum_{i=1}^{n}(k_i^v)^2=$ $=-\sum_{i\neq j}[h_{ii}^vh_{jj}^v-(h_{ij}^v)^2]=\sum_{i=1}^{n}(h_{ii}^v)^2+\sum_{i\neq j}(h_{ij}^v)^2$, которая легко следует из тождества $\det(h_{ij}^v-k\delta_{ij})=\prod_{i=1}^{n}(k_i^v-k)$ и условия минимальности $\sum_i h_{ii}^v=0$.

Пусть v произвольный единичный вектор из нормального пространства $N_p(M^n)$. Используя обозначения леммы 2, запишем $v=\sum_{k=1}^{n-1}c_ke_{\tilde k}+\sum_{i<j}c_{(\widetilde{i,j})}e_{(\widetilde{i,j})}$. Матрица второй фундаментальной формы M^n в точке p относительно вектора v имеет вид $(h_{lm}^v)=$ $=\sum_{k=1}^{n-1}c_k(h_{lm}^{\tilde k})+\sum_{i<j}c_{(i,j)}(h_{lm}^{(\widetilde{i,j})})$. Непосредственно из леммы 2 сле-

дует, что $\sum\limits_{l\neq m}(h^v_{lm})^2 = 2Q^2\cdot\sum\limits_{i<j}c^2_{(i,\widetilde{j})} = \frac{n}{n+1}\sum\limits_{i<j}c^2_{(i,\widetilde{j})}$. Также из леммы 2 вытекает, что элемент h^v_{ii} имеет вид $h^v_{ii} = c_1\mu_1 + \cdots + c_{i-1}\mu_{i-1} + c_i\lambda_i$ $h^v_{nn} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i\mu_i$. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n}(h^v_{ii})^2 = (c_1\lambda_1)^2 + (c_1\mu_1 + c_2\lambda_2)^2 + \cdots + (c_1\mu_1 + \cdots + c_{n-2}\mu_{n-2} + c_{n-1}\lambda_{n-1})^2 + (c_1\mu_1 + \cdots + c_{n-1}\mu_{n-1})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i^2(\lambda_i^2 + (n-i)\mu_i^2) + 2\sum\limits_{i<j} c_ic_j(\mu_i\mu_j(n-j) + \mu_i\lambda_j)$.

Из леммы 2 следует, что для всякого i $\lambda_i^2 + (n-i)\mu_i^2 = n/(n+1)$. Используя условие минимальности $\lambda_j + (n-j)\mu_j = 0$, получим $\sum\limits_{i=1}^{n}(h^v_{ii})^2 = \frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}c_i^2$. Учитывая, что вектор v единичный, окончательно имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}(k^v_i)^2 = \frac{n}{(n+1)}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}c_i^2 + \sum\limits_{i<j}c^2_{(i,\widetilde{j})}\right) = \frac{n}{(n+1)}$.

Теперь можно определить размеры устойчивых областей на подмногообразие Веронезе $P^n(\sigma_n)$ единичной сферы S^{e_n-1}.

Теорема 3. *Пусть D — область с гладкой границей на подмногообразии Веронезе $P^n(\sigma_n)$ единичной сферы S^{e_n-1}, где $\sigma_n = n/2(n+1)$ и $e_n = n(n+3)/2$. Тогда, если $\lambda_1(D) \geqslant n(n+2)/(n+1)$, то область D устойчива относительно вариаций, сохраняющих ее границу ∂D неподвижной.*

Доказательство. Опять воспользуемся формулой (1). В данном случае: а) $\sum\limits_{i=1}^{n}K(e_i, \zeta) = n$, б) $\sum\limits_{i=1}^{n}(k^\rho_i)^2 = \frac{n}{(n+1)}$ (согласно лемме 3). Поскольку второе слагаемое в подынтегральном выражении формулы (1) неотрицательно, то, используя вариационный принцип, получим $\delta^2 S(\zeta) \geqslant \int\limits_D\left[|\nabla\varepsilon|^2 - \varepsilon^2\left(\frac{n}{(n+1)} + n\right)\right]ds \geqslant \int\limits_D \varepsilon^2 \times$ $\times\left(\lambda_1(D) - \frac{n(n+2)}{(n+1)}\right)ds \geqslant 0$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Аминов Ю. А.* О неустойчивости минимальной поверхности в n-мерном римановом пространстве положительной кривизны.— «Мат. сб.», 1976, т. 100 (142), № 3, с. 400—419. 2. *Саймонс Дж.* Минимальные поверхности в римановых многообразиях.— «Математика», 1972, т. 16, с. 60—104. 3. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., «Мир», 1964. 533 с. 4. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., Гостехиздат, 1948, 240 с. 5. *Berger M., Gauduchon P., Mazet E.* Le spectre d'une variété riemannienne. Berlin, Springer, 1971. 217 p. 6. *Itoh T., Ogiue K.* Isotropic immersions.— «Journ. diff. geom.», 1973, vol. 8, p. 305-316. 7. *O'Neil B.* Isotropic and Kähler immersions.— «Canad. journ. math.», 1965, vol. 17, p. 907-915.

Поступила 14 ноября 1977 г.

УДК 513

А. И. Медяник

ОДНА ЗАДАЧА О РАЗБИЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

М. Фреллер в [1] доказал, что трехмерное евклидово пространство можно разбить на «пространственные кресты» — конгруэнтные многогранники, каждый из которых представляет собой объединение некоторого куба и всех его зеркальных отражений в плоскостях своих граней. Там же он высказал предположение, что аналогичное утверждение справедливо для n-мерного евклидова пространства E^n. Т. е. гипотеза М. Фреллера состоит в том, что E^n можно разбить на конгруентные кресты — многогранники, составленные из n-мерного куба и всех его зеркальных отражений в гиперплоскостях, содержащих $(n-1)$-мерные грани исходного куба.

Несколько раньше С. Стейн в [2] рассматривал вопрос о том, для всякого ли тела в E^n существует решетчатая упаковка конгруентных ему тел, плотность которой больше плотности любой нерешетчатой упаковки тех же тел. Напомним, что упаковка равных с точностью до параллельного переноса тел называется решетчатой, если центры тяжести всех тел образуют параллелепипедальную решетку. С. Стейн дал отрицательный ответ на поставленный вопрос для случая невыпуклых тел. Именно, он доказал, что, во-первых, E^{10} можно разбить (разбиение есть упаковка) на равные центрально-симметричные многогранники типа креста («удлиненные кресты») так, что их центры симметрии не образуют параллелепипедальную решетку, и, во-вторых, не существует решетчатого разбиения E^{10} на те же многогранники. Для доказательства им был использован теоретико-групповой метод, который, кстати, позволяет доказать гипотезу М. Фреллера для $n = \frac{1}{2}(3^k - 1)$, где $k \geqslant 2$.

В настоящей статье устанавливается справедливость гипотезы М. Фреллера и предлагается эффективное простое представление произвольного нормального решетчатого разбиения E^n на кресты. Указываются возможные обобщения полученных результатов.

Разбиение пространства на многогранники называется нормальным, если пересечение любых двух многогранников этого разбиения либо пусто, либо состоит только из двух граней.

Пусть Q — нормальное разбиение E^n на единичные n-мерные кубы. Поместим начало прямоугольной системы координат O в центр некоторого куба $q_0 \in Q$, а оси x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ направим параллельно его ребрам. Пусть $\boldsymbol{e}_i$ — орт оси x_i. Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ является базисом кубической решетки $\overline{Q}$ центров всех кубов разбиения Q.

Будем искать такое разбиение E^n на кресты, при котором каждый крест состоит из кубов, принадлежащих Q. В таком случае для доказательства гипотезы М. Фреллера достаточно указать координаты центров крестов, заполняющих E^n без просветов и перекрытий.

Теорема 1. *Евклидово пространство E^n можно разбить на кресты. В качестве центров крестов разбиения можно взять все те точки Q, радиусы-векторы которых $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяют линейному сравнению*

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} kx_k \equiv 0 \pmod{2n+1}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $q \in Q$ — произвольный куб, x — радиус-вектор его центра. Тогда радиусы-векторы центров тех кубов, которые инцидентны $(n-1)$-мерным граням q, имеют вид $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i$ или $\boldsymbol{z}_{n+i} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что один и только один вектор z_α $(\alpha = 0, 1, \ldots, 2n)$, где $z_0 = x$, удовлетворяет сравнению (1). Действительно, для $1 \leqslant k,\ s \leqslant n$ имеем

$$L(z_\alpha) - L(z_\beta) = \begin{cases} -k, & \text{если } \alpha = 0,\ \beta = k; \\ k, & \text{если } \alpha = 0,\ \beta = n + k; \\ k - s, & \text{если } \alpha = k,\ \beta = s; \\ k + s, & \text{если } \alpha = k,\ \beta = n + s. \end{cases}$$

На основании этих равенств заключаем, что z_α и z_β $(\alpha \neq \beta)$ не могут одновременно удовлетворять сравнению (1), так как k и s по определению не превосходят n. Следовательно, система вычетов $L(z_\alpha)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, 2n)$ по модулю $2n+1$ является полной, т. е. один и только один из этих вычетов кратен $2n+1$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Разбиение E^n на кресты, порождаемое сравнением (1), является решетчатым, т. е. центры всех крестов этого разбиения образуют параллелепипедальную решетку.*

Доказательство. Утверждение теоремы тривиально для $n = 1, 2$. Пусть $n \geqslant 3$. В качестве базисных возьмем векторы $\boldsymbol{r}_1 = (2, -1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{r}_n = (0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 1)$ и векторы $\boldsymbol{r}_i$ $(2 \leqslant i < n-1)$, отличные от нуля координаты которых равны $x_1 = x_i = -x_{i+1} = 1$. Векторы $\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют сравнению (1). Непосредственно проверяется, что любой вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ разлагается по выбранному базису следующим образом:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\left(3\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_{n-1} + \boldsymbol{r}_n + 2\sum\limits_{2}^{n-2} \boldsymbol{r}_i\right)}{(2n+1)} L(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i+1}^{n} x_k \right) \boldsymbol{r}_i, \tag{2}$$

где полагаем $\sum\limits_{k=n+1}^{n} x_k = 0$.

Коэффициенты разложения (2) являются целыми числами тогда и только тогда, когда вектор x удовлетворяет сравнению (1). Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Доказанными теоремами установлено, что совокупность всех векторов x, решающих (1), порождает решетчатое разбиение E^n на кресты. Оказывается, что обратное этому утверждение места не имеет. Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть Q' — произвольное нормальное решетчатое разбиение E^n на кресты. Тогда радиусы-векторы центров всех крестов Q' удовлетворяют некоторой системе $k \leqslant n$ независимых сравнений $L_i(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod{m_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, где $L_i(x)$ — линейная функция от координат вектора x, принимающих целочисленные значения, и $\prod\limits_1^k m_i = c(2n+1)$, причем m_i являются делителями числа $2n+1$, а число c — произведение степеней делителей числа $2n+1$.*

Для доказательства этой теоремы потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Не ограничивая общности, можно считать, что кресты разбиения Q' состоят из кубов введенного выше разбиения Q. Будем также предполагать, что куб q_0, содержащий начало координат O, является центральным кубом креста q_0'. Пусть $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ — базис решетки $\overline{Q}'$, образованной центрами всех крестов из Q'. Обозначим r_0 параллелепипед, построенный на базисных векторах.

Лемма 1. *Объем базисного параллелепипеда r_0 равен $2n+1$.*

Доказательство. Пусть X' — множество всех векторов решетки $Q' \cdot X'$ представляет собой группу относительно операции сложения векторов. Две точки пространства будем называть эквивалентными (относительно группы X'), если существует вектор $x' \in X'$, концы которого совпадают с этими точками.

Так как Q' — решетчатое разбиение, то любой его крест q' можно совместить с q_0' с помощью параллельного переноса, задаваемого вектором из X'. Значит, каждая точка E^n эквивалентна некоторой точке креста q_0'. С другой стороны, различные внутренние точки A и B креста q_0' не эквивалентны. Действительно, в противном случае параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$ должен был бы отображать q_0' на себя. А это возможно только в том случае, когда $\overrightarrow{AB}$ — нулевой вектор, т. е. когда точки A и B совпадают. Следовательно, q_0' представляет собой замыкание максимального множества попарно не эквивалентных точек.

Поскольку r_0 — базисный параллелепипед решетки $\overline{Q}_1$, то относительно группы X' инвариантно также разбиение R пространства на параллелепипеды, конгруэнтные r_0. Поэтому r_0 также является максимальным множеством попарно не эквивалентных внутренних точек. Значит, внутренние точки r_0 и q_0' попарно эквивалентны относительно группы X'.

Пусть r_α ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) — счетное множество всех параллелепипедов разбиения R. Обозначим C^* образ подмножества $C \subset r_\alpha$ при параллельном переносе, совмещающем r_α с r_0. Так как каждая точка r_0 эквивалентна некоторой точке q_0', то $r_0 = \bigcup\limits_R (r_\alpha \cap q_0')^*$. Поскольку в каждом шаре, содержащем q_0', имеется только конечное число узлов решетки $\overline{Q}'$, то лишь конечное число параллелепипедов из R имеют непустое пересечение с q_0'. Кроме того, множества $(r_\alpha \cap q_0')^*$ и $(r_\beta \cap q_0')^*$ при $\alpha \neq \beta$ в силу доказанного выше не имеют общих внутренних точек. Следовательно, r_0 и q_0' — равносоставленные из конгруэнтных многогранников и, значит, имеют равные объемы. А так как q_0' состоит из $2n+1$ единичных кубов, то объем r_0 равен $2n+1$. Лемма доказана.

Пусть X и X' — группы векторов (относительно сложения) решеток $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$ соответственно. Рассмотрим фактор-группу $T = X/X'$. Поскольку радиусы-векторы центров всех крестов разбиения Q' принадлежат X', а радиусы-векторы центров кубов, составляющих крест из Q', принадлежат различным классам смежности по подгруппе X', то порядок группы T равен $2n+1$. Пусть t_α ($\alpha = 0, 1, \ldots, 2n$) — элементы T, причем t_0 — класс смежности, совпадающий с X'. Обозначим M_i циклическую группу порядка m_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), а M — прямую сумму этих групп. Порядок группы M равен $\prod\limits_1^k m_i$.

Лемма 2. *Пусть для всех $1 \leqslant i \leqslant k$ существуют эпиморфизмы группы T на группы M_i такие, что комплексы $\tau_\alpha = (\mu_1(t_\alpha), \mu_2(t_\alpha), \ldots, \mu_k(t_\alpha))$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2n)$ попарно различны. Тогда множество τ всех комплексов τ_α относительно операции покомпонентного сложения является группой, изоморфной T, и $\prod\limits_1^k m_i = c(2n+1)$, где c представляет собой произведение степеней делителей числа $2n+1$. Если $c = 1$, то группа T изоморфна M.*

Доказательство. Поскольку μ_i — гомоморфизм, то для любых $t_\alpha \in T$, $t_\beta \in T$ $\mu_i(t_\alpha) + \mu_i(t_\beta) + \mu_i(t_\alpha + t_\beta)$ ($i = 1, 2, \ldots, k$). Поэтому по определению сложения в множестве τ имеем $\tau_\alpha + \tau_\beta = (\mu_1(t_\alpha) + \mu_1(t_\beta), \ldots, \mu_k(t_\alpha) + \mu_k(t_\beta)) = (\mu_1(t_\alpha + t_\beta), \ldots, \mu_k(t_\alpha + t_\beta))$, т. е. каждая компонента комплекса $\tau_\alpha + \tau_\beta$ является образом $t_\alpha + t_\beta \in T$ при соответствующем эпиморфизме. Значит, множество τ является группой, порядок которой по условию леммы равен $2n+1$. А так как группа τ является подгруппой группы M, произведение всех m_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) делится на $2n+1$. Итак, $\prod\limits_1^k m_i = c(2n+1)$, где c — некоторое целое число.

Поскольку μ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) — эпиморфизм, то по теореме о гомоморфизмах [3, с. 26] группа M_i изоморфна фактор-группе T/N_i, где N_i — ядро эпиморфизма μ_i. Значит, порядок группы N_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) равен $(2n+1)/m_i$, т. е. каждое из m_i является делителем числа $2n+1$. Поэтому среди делителей числа c нет таких, которые были бы взаимно простыми с числом $2n+1$. Если $c=1$, то $2n+1=\prod\limits_1^k m_i$ и, значит, подгруппа τ совпадает с M, а поэтому группа T изоморфна M. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ — базис решетки $\bar{Q}'$ и $\boldsymbol{x}'$ — радиус-вектор центра произвольного креста разбиения Q'. Коэффициенты a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ разложения $\boldsymbol{x}'$ по базису $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ удовлетворяют векторному уравнению $\boldsymbol{x}'=\sum\limits_{i=1}^n a_i\boldsymbol{r}_i$. Решая систему линейных уравнений, эквивалентную этому уравнению, по правилу Крамера, получаем $a_i=D_i(\boldsymbol{x}')/D$, $i=1, 2, \ldots, n$, где D — определитель системы, а $D_i(\boldsymbol{x}')$ — некоторые целочисленные линейные функции от координат вектора $\boldsymbol{x}'$.

Как известно, определитель D равен объему параллелепипеда, построенного на базисных векторах. Значит, по лемме 1 $D=2n+1$.

Так как по условию теоремы разбиение Q' решетчатое, то коэффициенты a_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ — целые числа, т. е. для всех $1\leqslant i\leqslant n$ $D_i(\boldsymbol{x}')\equiv 0 \pmod{2n+1}$.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор центра произвольного куба разбиения Q. Очевидно, коэффициенты разложения этого вектора по базису $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ являются целыми числами тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ совпадает с радиусом-вектором центра некоторого креста из Q'. Поэтому координаты центров крестов решетчатого разбиения Q' и только они являются решениями системы

$$D_i(\boldsymbol{x})\equiv 0 \pmod{2n+1},\ i=1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Некоторые из сравнений этой системы могут быть зависимыми от остальных. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что k первых сравнений $(k\leqslant n)$ независимы, а остальные являются их следствиями. Пусть, кроме того, d_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ — наибольший общий делитель коэффициентов i-го сравнения, а $(2n+1)/m_i$ — наибольший общий делитель чисел $2n+1$ и d_i. Тогда система (3) эквивалентна следующей системе сравнений

$$L_i(\boldsymbol{x})\equiv 0 \pmod{m_i},\ i=1, 2, \ldots, k, \tag{4}$$

где $d_iL_i(\boldsymbol{x})=D_i(\boldsymbol{x})$.

Покажем теперь, что каждое из сравнений системы (4) индуцирует гомоморфизм группы T на циклическую группу, порядок которой равен модулю соответствующего сравнения. Действительно, пусть $L(\boldsymbol{x})$ левая часть произвольного сравнения системы (4) и m — соответствующий модуль. Сопоставим каждому вектору $\boldsymbol{x}\in X$ число $L(\boldsymbol{x})$. Если x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же классу смежности $t_\alpha\in T$ $(\alpha=0, 1, \ldots, 2n)$, то $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\in t_0$.

5 8-152

Поэтому в силу линейности $L(x)$

$$L(x_1) \equiv L(x_2) \pmod{m}. \qquad (5)$$

Значит, при указанном отображении каждому классу смежности t_α ставится в соответствие вполне определенный класс вычетов по модулю m. Далее, сумме классов смежности t_α и t_β в силу линейности $L(x)$ соответствует при этом отображении сумма соответствующих классов вычетов. Следовательно, каждое сравнение системы (4) индуцирует гомоморфизм группы T на циклическую группу классов вычетов по соответствующему модулю.

Если для некоторых x_1 и x_2 и всех модулей системы (4) выполняются сравнения (5), то по свойству линейности $x_1 - x_2$ — решение (4) и, значит, x_1 и x_2 принадлежат некоторому $t_\alpha \in T$. А это означает, что различным классам смежности соответствуют не совпадающие комплексы значений.

Кроме того, построенные гомоморфизмы являются эпиморфизмами, так как по определению $L_i(x)\,(i = 1, 2, \ldots, k)$ в каждом из них имеется коэффициент взаимно простой с соответствующим модулем [4, с. 42]. Обозначим μ_i — эпиморфизм группы T на группу классов вычетов по модулю m_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. По доказанному выше порядок T равен $2n + 1$. Значит, совокупность эпиморфизмов μ_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2, из которой и следует утверждение теоремы.

Поскольку с помощью аффинного преобразования любую параллелепипедальную решетку можно перевести в кубическую, то полученные выше результаты сохраняют свою силу для крестов, построенных из конгруэнтных параллелепипедов. Кроме того, заметим, что предложенный метод исследования можно также применить к решению вопросов о решетчатых разбиениях пространства на многогранники, составленные из произвольного числа равных кубов. Но в этом случае результаты не будут столь общими. Об этом, в частности, свидетельствует уже упоминавшееся исследование С. Стейна. И, наконец, этот подход будет полезен и для других производных разбиений, связанных с разбиениями евклидова пространства на отличные от параллелепипеда параллелоэдры.

В заключение хочу выразить благодарность А. С. Лейбину за ряд замечаний, способствовавших улучшению этой статьи.

Список литературы: 1. *Freller M.* Egy terkitöltesi feladat.— «Magy. tud. akad. Mat és fiz. tud. oszt. közl.», 1973, vol. 21, No 1—2, p. 71—72. 2. *Stein S. K.* A symmetric star body that tiles but not as a lattice.— «Proc. Amer. math. soc.», 1972, vol. 36, No 2, p. 543—548. 3. *Курош А. Г.* Теория групп. М., «Наука», 1965, 648 с. 4. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. М., «Наука», 1965. 175 с.

Поступила 12 декабря 1977 г.

УДК 513

В. И. Мягков

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСА С ТРОЙНЫМ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫМ ИНФЛЕКЦИОННЫМ ЦЕНТРОМ

Настоящая заметка является продолжением работы [1], посвященной K-расслоению комплекса прямых в нормальные конгруэнции. В [1] получены уравнения комплекса, допускающего K-расслоение:

$$\omega^2 = k\omega_3^1,\ \omega_1^2 = \beta\omega_3^2,\ dk = -2k\beta\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2,\qquad -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2 \tag{0.1}$$

и найдено достаточно сложное безынтегральное представление такого комплекса. По Н. И. Кованцову [2], комплекс (0.1) имеет тройной бесконечно удаленный инфлекционный центр, и наоборот — каждый комплекс с тройным бесконечно удаленным инфлекционным центром, отнесенный к нормальному сопровождающему трехграннику [2], определяется системой (0.1).

В настоящей заметке изложено другое, более простое безынтегральное представление комплекса (0.1). Чтобы его получить, воспользуемся четырьмя результатами работы [1].

1. Дифференциальные формы ω_3^1 и $\sqrt{1+\beta^2}\,\omega_3^2$ являются полными дифференциалами. Обозначим

$$\omega_3^1 = du,\ \sqrt{1+\beta^2}\,\omega_3^2 = d\theta. \tag{0.2}$$

2. Общее смещение нормального сопровождающего трехгранника можно представить в виде

$$dA = \omega^1(e_1 - \beta e_3) + \omega_3^1(ke_2 - \gamma e_3) + \omega_3^2(k\beta - r)\,e_3; \tag{0.3}$$

$$de_1 = \omega_3^2\beta e_2 - \omega_3^1 e_3;\ de_2 = -\omega_3^2(\beta e_1 + e_3);\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2. \tag{0.4}$$

3. Каждый луч l определяется тремя параметрами: $l = l(u, v, \theta)$.

4. Кривизна комплекса (0.1) есть

$$k = \frac{f_2(\theta)}{\cos^2(u + f_1(\theta))}, \tag{0.5}$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции.

1. Рассмотрим теперь линейчатую поверхность (обозначим ее $\Pi(u_0, \theta_0)$), образованную теми лучами, для которых $u = u_0 = \mathrm{const}$, $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$. Из (0.2) вытекает, что для лучей $l(u_0, v, \theta_0)$, образующих поверхность $\Pi(u_0, \theta_0)$, имеют место равенства

$$\omega_3^1 = 0,\ \omega_3^2 = 0. \tag{1.1}$$

Внесем (1.1) в равенства (0.3), (0.4). Система (0.4) примет вид $de_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, т. е. векторы e_1, e_2, e_3 постоянны для всех лучей $l(u_0, v, \theta_0)$. Из постоянства вектора e_3 вытекает, что $\Pi(u_0, \theta_0)$ является цилиндром.

Определим касательную плоскость этого цилиндра. Векторы e_3 и dA лежат в касательной плоскости. Так как $dA \parallel (e_1 - \beta e_3)$, то касательная плоскость параллельна векторам e_1 и e_3, а постоянный вектор e_2 ортогонален касательной плоскости цилиндра $\Pi(u_0, \theta_0)$, т. е. цилиндр $\Pi(u_0, \theta_0)$ имеет постоянную нормаль e_2. Следовательно, $\Pi(u_0, \theta_0)$ — плоскость. Таким образом, справедлива

Лемма. *Лучи комплекса* (0.1), *определяемые условием* (1.1), *лежат в одной плоскости и параллельны* (образуют плоский пучок $\Pi(u_0, \theta_0)$).

Рассмотрим теперь однопараметрическую совокупность плоских пучков

$$\Pi = \Pi(u, \theta_0), \tag{1.2}$$

u — параметр. Так как $\theta = \mathrm{const}$, то

$$\omega_3^2 = 0. \tag{1.3}$$

Второе уравнение (0,4) принимает вид $de_2 = 0$, т. е. (1.2) является семейством параллельных плоскостей с общей нормалью $e_2 = e_2(\theta)$.

Определим расстояние dh между бесконечно близкими плоскостями семейства (1.2): $\Pi(u, \theta_0)$ и $\Pi(u + du, \theta_0)$. Для этого внесем (1.3) в (0.3) и вычислим скалярное произведение $dh = (dA, e_2) = \omega_3^1 k$. Учитывая равенства (0.5) и (0.2), перепишем его в виде $dh = f_2(\theta_0) \cos^{-2}(u + f_1(\theta_0))\, du$, откуда

$$h = f_2(\theta_0) \operatorname{tg}(u + f_1(\theta_0)) + C_1 \tag{1.4}$$

Определим угол φ поворота вектора e_3 при переходе от $\Pi(u, \theta_0)$ к $\Pi(u + du, \theta_0)$. Для этого внесем (1.3) в третье уравнение (0.4). Получим $de_3 = e_1 du$, т. е. $d\varphi = du$, откуда

$$\varphi = u + C_2; \tag{1.5}$$

C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Теперь мы можем дать геометрическое построение семейства пучков (1.2). Возьмем в пространстве произвольную точку M. Присоединим к точке M неподвижный трехгранник e_1, e_2, e_3. Построим плоскость, ортогональную вектору e_2 и отстоящую от точки M на расстояние (1.4). В построенной плоскости проведем пучок параллельных прямых, составляющих с вектором e_3 угол $\varphi = u + C_2$. Однопараметрическая совокупность таких пучков (с параметром u) образует семейство (1.2). Обозначим его через $\Pi(\theta_0)$ или просто — $\Pi(\theta)$.

Заметим, что величины C_1 и C_2, постоянные при фиксированном $\theta = \theta_0$, при изменении θ оказываются некоторыми функциями от θ, связанными с функциями f_1, f_2, f_3 [1].

Положим
$$u = 0,\ \omega^1 = 0. \tag{1.6}$$
Тогда система (0.3), (0.4) запишется так:
$$dA = (k\beta - r)\,\omega_3^2 e_3;\ de_3 = \omega_3^2 e_2,$$
$$de_2 = -\omega_3^2 e_3 + \beta\omega_3^2(-e_1);\ d(-e_1) = -\beta\omega_3^2 e_2. \tag{1.7}$$
При выполнении условий (1.6) величину $k\beta - r$ нужно считать функцией, зависящей от θ; обозначим ее через $\psi(\theta)$. Форма ω_3^2 сейчас имеет вид
$$\omega_3^2 = -\cos f_1(\theta)\,d\theta. \tag{1.8}$$
Вводя еще одно обозначение
$$-\psi(\theta)\cos f_1(\theta)\,d\theta = ds \tag{1.9}$$
и учитывая (1.8), запишем систему (1.7) в виде
$$dA = e_3\,ds,\ de_3 = \frac{1}{\psi(\theta)}\,e_2\,ds,$$
$$de_2 = \frac{-1}{\psi(\theta)}\,e_3\,ds + \frac{-\operatorname{tg} f_1(\theta)}{\psi(\theta)}(-e_1)\,ds,\ d(-e_1) = \frac{\operatorname{tg} f_1(\theta)}{\psi(\theta)}\,e_2\,ds.$$
Этой системой в пространстве определяется некоторая кривая L. Длина дуги s кривой L связана с параметром θ соотношением (1.9), а кривизна и кручение ее $k(s) = \frac{1}{\psi(\theta)}$, $\varkappa(s) = \frac{-\operatorname{tg} f_1(\theta)}{\psi(\theta)}$. Отсюда
$$f_1(\theta) = -\operatorname{arctg}\frac{\varkappa(s)}{k(s)},\quad \psi(\theta) = \frac{1}{k(s)}. \tag{1.10}$$
Центр луча, определяемого системой (1.6), описывает в пространстве кривую L, а сам луч касается кривой L. Возьмем на кривой L некоторую точку $M(\theta_0)$. Луч, проходящий через эту точку и касающийся кривой L, принадлежит плоскости $\Pi(0, \theta_0)$. Так как этот луч проходит через точку $M(\theta_0)$, то расстояние от плоскости $\Pi(0, \theta_0)$ до точки $M(\theta_0)$ равно нулю. А так как луч касается кривой L, то он параллелен вектору $e_3(0, \theta_0)$, т. е. образует с ним угол $\varphi = 0$.

Таким образом, при $u = 0$ равенства (1.4), (1.5) дают $C_1(\theta_0) = -f_2(\theta_0)\operatorname{tg} f_1(\theta_0)$, $C_2(\theta_0) = 0$. Поскольку $M(\theta_0)$ — произвольная точка кривой L, то $C_1(\theta) = -f_2(\theta)\operatorname{tg} f_1(\theta)$; $C_2(\theta) = 0$. Подставим эти значения в формулы (1.4), (1.5) и перейдем в них от параметра θ к длине дуги s. При этом произвольную функцию $f_2(\theta)$ нужно считать произвольной функцией аргумента s: $f_2^*(s)$. Учитывая сказанное и равенства (1.10), перепишем (1.4) и (1.5) в виде
$$h = \frac{k^2(s) + \varkappa^2(s)}{(k(s)\cos u + \varkappa(s)\sin u)\,k(s)}\,f_2^*(s)\sin u;\ \varphi = u. \tag{1.11}$$

Здесь $k(s)$, $\varkappa(s)$ и $f_2^*(s)$ — произвольные функции одного аргумента. Итак, имеем следующее безынтегральное представление комплекса (0.1).

Для того чтобы построить комплекс (0.1), возьмем в пространстве произвольную кривую L, заданную натуральными уравнениями $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$ (произвол — две функции одного аргумента); $\tau(s)$, $\nu(s)$, $\beta(s)$ — векторы ее сопровождающего трехгранника Френе. От точки $M(s)$, лежащей на кривой L, в направлении вектора $\nu(s)$ отложим отрезок длины h, вычисляемой по формуле (1.11) ($f_2^*(s)$ — произвольная функция), и через его конец проведем плоскость $\Pi(u, s)$, перпендикулярную этому отрезку. В плоскости $\Pi(u, s)$ проведем пучок параллельных прямых, составляющих с вектором $\tau(s)$ угол $\varphi = u$. Двупараметрическая совокупность таких плоских пучков $\Pi(u, s)$ образует искомый комплекс (0.1).

Обозначим этот комплекс через Σ_1. Чтобы убедиться в правильности описанного безынтегрального представления комплекса (0.1), необходимо найти дифференциальные уравнения комплекса Σ_1 и показать, что они полностью совпадают с исходной системой (0.1). Этому и посвящен следующий параграф.

2. Дифференциальные уравнения комплекса Σ_1. Итак, пусть в E_3 взята произвольная кривая L, отправляясь от которой построен комплекс Σ_1. Пусть $k = k(s)$ и $\varkappa = \varkappa(s)$ — кривизна и кручение кривой L, а векторы $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(s)$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(s)$ образуют трехгранник Френе этой кривой: $d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\tau}\, ds$,

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\tau} &= \qquad\quad k\boldsymbol{\nu}\, ds \\ d\boldsymbol{\nu} &= -k\boldsymbol{\tau}\, ds \qquad\qquad + \varkappa\boldsymbol{\beta}\, ds, \\ d\boldsymbol{\beta} &= \qquad\quad -\varkappa\boldsymbol{\nu}\, ds. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Так как прямые плоского пучка $\Pi(u, s)$ образуют с вектором $\boldsymbol{\tau}$ угол $\varphi = u$, то они параллельны вектору

$$\boldsymbol{e}_3(u, s) = \boldsymbol{\tau}(s)\cos u - \boldsymbol{\beta}(s)\sin u. \tag{2.2}$$

Пусть главная нормаль кривой L пересекает $\Pi(u, s)$ в точке O. Присоединим к точке O еще вектор

$$\boldsymbol{e}_1(u, s) = -\boldsymbol{\tau}(s)\sin u - \boldsymbol{\beta}(s)\cos u; \tag{2.3}$$

векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$ единичны, взаимно ортогональны и лежат в плоскости $\Pi(u, s)$.

На каждой прямой комплекса, принадлежащей $\Pi(u, s)$, возьмем точку A, определяемую векторным уравнением

$$\begin{aligned} A(u, s, t) = \boldsymbol{M}(s) + h(u, s)\boldsymbol{\nu}(s) + t\boldsymbol{e}_1(u, s) + \\ + \Phi(u, s, t)\boldsymbol{e}_3(u, s). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\boldsymbol{M}(s)$ — радиус-вектор кривой L, $\boldsymbol{\nu}(s)$ — вектор нормали кривой L; $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$ и $h(u, s)$ определяются формулами соответственно (2.2), (2.3) и (1.11); функция

$$\Phi(u, s, t) = -\frac{h_s'(u, s) + t(-k\sin u + \varkappa\cos u)}{k\cos u + \varkappa\sin u}. \tag{2.5}$$

Такой специальный выбор функции $\Phi = \Phi(u, s, t)$ будет понятен из дальнейших выкладок.

Присоединим к точке $\boldsymbol{A}$ ортонормированную тройку векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= -\boldsymbol{\tau}(s)\sin u - \boldsymbol{\beta}(s)\cos u, \\ \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{\nu}(s), \\ \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{\tau}(s)\cos u - \boldsymbol{\beta}(s)\sin u. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Дифференциалы векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{e}_i$ запишем в виде

$$d\boldsymbol{A} = \Omega^i\boldsymbol{e}_i, \quad d\boldsymbol{e}_i = \Omega_i^j\boldsymbol{e}_j. \tag{2.7}$$

Так как векторы $\boldsymbol{e}_i$ ортонормированны, то

$$\Omega_i^j + \Omega_j^i = 0. \tag{2.8}$$

Решим (2.6) относительно $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(s) &= -\boldsymbol{e}_1\sin u + \boldsymbol{e}_3\cos u, \quad \boldsymbol{\nu}(s) = \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{\beta}(s) &= -\boldsymbol{e}_1\cos u - \boldsymbol{e}_3\sin u. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Найдем дифференциал вектора $\boldsymbol{e}_3(u, s)$. Учитывая (2.2) и (2.1), получим $d\boldsymbol{e}_3(u, s) = -\boldsymbol{\tau}\sin u\, du + \boldsymbol{\nu}(\varkappa\sin u + k\cos u)\, ds - \boldsymbol{\beta}\cos u\, du$, чему с помощью (2.9) можно придать вид $d\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\, du + \boldsymbol{e}_2(\varkappa\sin u + k\cos u)\, d_s$. Сравнивая это разложение с (2.7), находим $\Omega_3^1 = du$, $\Omega_3^2 = (\varkappa\sin u + k\cos u)\, ds$. Проделав аналогичные выкладки для вектора $\boldsymbol{e}_2$, получим $d\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1(k\sin u - \varkappa\cos u)\, ds + \boldsymbol{e}_3(-k\cos u - \varkappa\sin u)\, ds$, откуда $\Omega_2^1 = (k\sin u - \varkappa\cos u)\, ds$; $\Omega_2^3 = (-k\cos u - \varkappa\sin u)\, ds$. Объединяя все полученные здесь значения Ω_i^j и учитывая (2.8), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= (-k\sin u + \varkappa\cos u)\, ds; \ \Omega_3^1 = du; \\ \Omega_3^2 &= (\varkappa\sin u + k\cos u)\, ds. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Используя равенства (2.1), (2.7), (2.10) и (2.8), дифференциал вектора $\boldsymbol{A}$ можно представить в виде $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1(-h\Omega_1^2 + dt + \Phi\Omega_3^1 - \sin u\, ds) + \boldsymbol{e}_2(dh + t\Omega_1^2 + \Phi\Omega_3^2) + \boldsymbol{e}_3(-h\Omega_3^2 - t\Omega_3^1 + d\Phi + \cos u\, ds)$. Заменив здесь формы Ω_i^j по формулам (2.10), получим

$$\begin{aligned} \Omega^1 &= \Phi\, du + [h(k\sin u - \varkappa\cos u) - \sin u]\, ds + dt, \\ \Omega^2 &= h_u'\, du + [h_s' + t(-k\sin u + \varkappa\cos u) + \\ &\quad + \Phi(k\cos u + \varkappa\sin u)]\, ds; \\ \Omega^3 &= (\Phi_u' - t)\, du + [-h(k\cos u + \varkappa\sin u) + \\ &\quad + \Phi_s' + \cos u]\, ds + \Phi_t'\, dt. \end{aligned} \tag{2.11}$$

После подстановки функции Φ в (2.11) форма Ω^2 примет вид $\Omega^2 = h'_u\, du$. Отсюда и из (2.10), если ввести обозначения $k^* = h'_u$, $\beta^* = \frac{(-k \sin u + \varkappa \cos u)}{(k \cos u + \varkappa \sin u)}$ (2.12), получим для всех лучей Σ_1

$$\Omega^2 = k^* \Omega_3^1; \tag{2.13}$$

$$\Omega_1^2 = \beta^* \Omega_3^2. \tag{2.14}$$

Но равенство (2.13) означает, что точка A является центром луча комплекса, а тройка векторов (2.6) образует нормальный трехгранник этого луча. Функция $k^* = h'_u$ является кривизной комплекса Σ_1 [2]:

$$k^* = f_2^*(s) \frac{k^2 + \varkappa^2}{(k \cos u + \varkappa \sin u)^2}. \tag{2.15}$$

Найдем дифференциал $dk^* = -2f^*(s)(k^2 + \varkappa^2) \frac{-k \sin u + \varkappa \cos u}{(k \cos u + \varkappa \sin u)^3} \times du + k_s^{*\prime}\, ds$, что, учитывая (2.10), (2.12) и (2.15), можно записать в виде

$$dk^* = -2k^* \beta^* \Omega_3^1 + \frac{k_s^{*\prime}}{k \cos u + \varkappa \sin u} \Omega_3^2. \tag{2.16}$$

Для того чтобы получить дифференциальные уравнения комплекса Σ_1, необходимо продифференцировать (2.13) внешним образом и раскрыть результат по лемме Картана. Используя (2.14) и (2.16), получим

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \quad k^* \Omega_3^1, \\ \Omega_1^2 &= \qquad\qquad \beta^* \Omega_3^2, \\ dk^* &= \quad -2k^* \beta^* \Omega_3^1 + \gamma^* \Omega_3^2, \\ -\Omega^3 + k^* \Omega_1^2 &= \beta^* \Omega^1 \quad + \gamma^* \Omega_3^1 + r^* \Omega_3^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Полученная система (2.17) дифференциальных уравнений комплекса Σ_1 лишь обозначениями отличается от первоначальной системы (0.1). Правильность безынтегрального представления комплекса (0.1) доказана.

3. Безынтегральное представление комплекса (0.1) позволяет в явном виде выписать решение системы дифференциальных уравнений этого комплекса.

Рассмотрим уравнения (2.17) и перечислим переменные, входящие в эту систему уравнений. Для этого отнесем E_3 к неподвижной системе координат $T^0(e_1^0, e_2^0, e_3^0)$. К каждой точке $A = x^i e_i^0 \in E_3$ присоединим ортогональный репер $T(e_1, e_2, e_3)$:

$$e_i = \alpha_i^j e_j^0. \tag{2.18}$$

Здесь α_i^j — направляющие косинусы вектора e_i. Так как репер T ортогональный, то среди девяти параметров α_i^j независимых будет только три. (Положение репера T относительно T^0 можно определить, например, тремя углами Эйлера φ^1, φ^2, φ^3).

Формы Ω^i, Ω_i^j, определяющие бесконечно малое смещение точки и тройки векторов e_i, имеют вид $\Omega^j = \alpha_i^{\prime j}\, dx^i$; $\Omega_i^j = \alpha_k^{\prime j}\, d\alpha_i^k$.

Таким образом, в систему (2.11) входят следующие переменные: x^1, x^2, x^3; φ^1, φ^2, φ^3; k^*, β^*, γ^*, r^*, из которых три нужно считать независимыми переменными, а остальные семь — искомыми функциями. (Отыскание α_i^j трудностей не представляет, т. к. α_i^j известным образом выражаются через φ^i).

Можно поступить и иначе, а именно, считать, что в систему (2.17) входит шестнадцать переменных

$$k^*,\ \beta^*,\ \gamma^*,\ r^*,\ x^i,\ \alpha_i^j\ (i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.19}$$

и представить решение системы (2.17) в параметрическом виде, т. е. выразить все шестнадцать переменных (2.19) через три новых параметра u, s, t. (При этом нужно учесть, что α_i^j — направляющие косинусы единичных взаимно ортогональных векторов e_i).

Сравнивая третье уравнение (2.17) с (2.16), найдем

$$\gamma^* = \frac{k_s^{*\prime}}{k \cos u + \varkappa \sin u}. \tag{2.20}$$

Для определения r^* в четвертое уравнение (2.17) внесем найденные значения коэффициентов k^*, β^*, γ^* и дифференциальных форм Ω^1, Ω^3. После громоздких преобразований, используя равенства (2.10), получим $(\Phi_u' - t + \beta^*\Phi + \gamma^*)\,du + [\Phi_s' - hk\cos u - h\varkappa\sin u + \cos u - k^*(-k\sin u + \varkappa\cos u) + \beta^*(hk\sin u - h\varkappa\cos u - \sin u) + r^*(k\cos u + \varkappa\sin u)]\,ds + (\Phi_t' + \beta^*)\,dt = 0$. Поскольку u, s, t — независимые переменные, то коэффициенты, стоящие при дифференциалах независимых переменных du, ds, dt, должны обращаться в нуль. Получаем систему трех уравнений: $\Phi_u' - t + \beta^*\Phi + \gamma^* = 0$, $\Phi_s' - hk\cos u - h\varkappa\sin u + \cos u - k^*(k\sin u + \varkappa\cos u) + \beta^*(hk\sin u - h\varkappa\cos u - \sin u) + r^*(k\cos u + \varkappa\sin u) = 0$, $\Phi_t' + \beta^* = 0$. Первое и третье уравнения после замены Φ, β^* и γ^* их значениями (2.5), (2.12) и (2.20) обращаются в тождества. Из второго уравнения определим

$$r^* = (k\cos u + \varkappa\sin u)^{-1}\,[-\Phi_s' + hk\cos u + h\varkappa\sin u - \cos u + k^*(-k\sin u + \varkappa\cos u) - \beta^*(hk\sin u - h\varkappa\cos u - \sin u)]. \tag{2.21}$$

Перейдем к определению α_i^j и x^i. Пусть в неподвижной системе координат кривая L определяется векторным уравнением

$$\boldsymbol{M}(s) = y^i(s)\, e_i^0. \tag{2.22}$$

Так как s — длина дуги кривой L, функции y^i подчинены условию

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dy^i}{ds}\right)^2 = 1.$$

Кривизна и кручение кривой L есть

$$k = \sqrt{(y^{1''})^2 + (y^{2''})^2 + (y^{3''})^2} \qquad (2.23)$$

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} y^{1'} & y^{2'} & y^{3'} \\ y^{1''} & y^{2''} & y^{3''} \\ y^{1'''} & y^{2'''} & y^{3'''} \end{vmatrix}}{k^2} = \frac{y^{1'''}p^1 + y^{2'''}p^2 + y^{3'''}p^3}{k^2}. \qquad (2.24)$$

Здесь введены обозначения

$$p^1 = \begin{vmatrix} y^{2'} & y^{3'} \\ y^{2''} & y^{3''} \end{vmatrix}, \quad p^2 = \begin{vmatrix} y^{3'} & y^{1'} \\ y^{3''} & y^{1''} \end{vmatrix}, \quad p^3 = \begin{vmatrix} y^{1'} & y^{2'} \\ y^{1''} & y^{2''} \end{vmatrix}. \qquad (2.25)$$

Векторы $\tau = y^{1'}e_1^0 + y^{2'}e_2^0 + y^3 e_3^0$; $\nu = k^{-1}(y^{1''}e_1^0 + y^{2''}e_2^0 + y^{3''}e_3^0)$; $\beta = k^{-1}(p^1e_1^0 + p^2e_2^0 + p^3e_3^0)$ образуют нормальный сопровождающий трехгранник Френе кривой L. Внося эти их разложения в (2.6), получим, суммируя по i:

$$e_1 = (-y^{i'}\sin u - p^i k^{-1}\cos u)\, e_i^0; \ e_2 = y^{i''}k^{-1}e_i^0;$$
$$e_3 = (y^{i'}\cos u - p^i k^{-1}\sin u)\, e_i^0.$$

Сопоставляя полученные разложения с (2.18), находим

$$\alpha_1^i = -y^{i'}\sin u - p^i k^{-1}\cos u; \ \alpha_2^i = y^{i''}k^{-1}(=\nu),$$
$$\alpha_3^i = y^{i'}\cos u - p^i k^{-1}\sin u.$$

Для определения функций $x^i = x^i(u, s, t)$ внесем (2.18), (2.22), (2.26) в (2.4). Получим $A = (y^i + h\alpha_2^i + t\alpha_1^i + \Phi\alpha_3^i)\, e_i^0$. Так как $A = x^i e_i^0$, то искомые функции x^i имеют вид $x^i = y^i + t\alpha_1^i + h\alpha_2^i + \Phi\alpha_3^i$.

Список литературы: 1. *Кованцов Н. И., Мягков В. И.* Специальный случай K-расслоения комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 19. Харьков, 1976, с. 77—90. 2. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 292 с.

Поступила 13 января 1978 г.

УДК 513

В. Е. Подран

СФЕРИЧЕСКИ ОДНОЛИСТНЫЕ ТРУБКИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^{n+1}

1. Основные понятия и постановка задачи. Пусть M^{n-1} — компактное гладкое связное ориентируемое многообразие без края, а M^n — многообразие, диффеоморфное топологическому произведению $M^{n-1} \times (-1, 1)$. Рассмотрим отображение:

$$f : M^n \to E^{n+1}, \tag{1.1}$$

являющееся C^2— погружением в евклидово пространство E^{n+1}. Пару (M^n, f) назовем трубкой и обозначим через T. Рассмотрим также трубку T_1 с краем, являющуюся образом при сужении погружения f на подмногообразие $M_1^n \subset M^n$, где $M_1^n = M^{n-1} \times [0,1)$.

Любое замкнутое $(n-1)$-мерное подмногообразие T, гомотопное на T краю трубки T_1, назовем поясом. Для любого пояса L через $s(L)$ обозначим диаметр L, т. е. $s(L) = \sup\limits_{X, Y \in L} \rho(X, Y)$, где $\rho(X, Y)$ — расстояние, измеренное на T_1 между точками X и Y. Пусть $g = \inf\limits_{L \subset T_1} s(L)$. Последовательность поясов L_m называется минимизирующей, если $\lim\limits_{m \to \infty} s(L_m) = g$. Минимизирующую последовательность поясов L_m называем ограниченной, если существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что $f[M^{n-1} \times (\alpha, 1)] \cap L_m = \varnothing$ для любого m. В противном случае последовательность поясов называем неограниченной.

Трубку T_1 будем называть рогом, если она не содержит ограниченной минимизирующей последовательности поясов, и чашей — в противном случае.

Будем говорить, что гиперплоскость σ_n отсекает от T_1 горбушку, если среди компонент прообраза множества $T_1 \setminus \sigma_n$ в M_1^n имеется компонента G с компактным замыканием, не имеющая общих точек с краем M^{n-1}. Часть $f(G)$ трубки T_1, соответствующую этой компоненте G при погружении (1.1) назовем горбушкой. Очевидно, горбушка $f(G)$ будет гиперповерхностью, которая имеет границу $f(\partial G)$, лежащую в σ_n.

Трубку (гиперповерхность) в евклидовом пространстве E^{n+1} будем называть седловой, если она не допускает отсечения горбушек никакой гиперплоскостью.

Цель первой части настоящей работы — установить топологическое строение седловой сферически однолистной трубки T, содержащей рог T_1. Кроме того, будет доказана возможность непараметрического задания трубки T. Во второй части работы изучается топологическое строение внешне полной сферически однолистной гиперповерхности в евклидовом пространстве E^{n+1}, заданной уравнением $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$ над некоторой областью D в гиперплоскости E^n, когда множество $E^n \setminus D$ состоит из локально конечного семейства компактных компонент линейной связности. При этом также исследуется строение области D. Полученные результаты являются обобщением на n-мерный случай соответствующих теорем из [1].

2. Будем считать, что сферически однолистная трубка T содержит рог T_1 и что отображение (1.1) является вложением. В [2] показано, что рог T_1 лежит внутри цилиндра, образующие которого параллельны некоторому лучу l — направлению рога T_1. В пространстве E^{n+1} введем прямоугольные декартовы координаты

наты $O, x_1, \ldots, x_{n+1}$ так, чтобы луч l был положительным лучом оси x_{n+1}. Множество точек сферы S^n, для которых координата x_{n+1} положительна (отрицательна), обозначим через S^n_+ (S^n_-).

Теорема 1. *Пусть T — полная седловая сферически однолистная трубка в евклидовом пространстве E^{n+1}, заданная C^2-погружением (1.1) и имеющая рог. Если вторая форма T невырождена, то трубка T однозначно проектируется в направлении луча l на всякую гиперплоскость P, не параллельную l; трубка T гомеоморфна топологическому произведению $S^{n-1} \times (-1, 1)$, и проекция T покрывает гиперплоскость P, за исключением компактного множества.*

Доказательство. Покажем, что в выбранной системе координат $O, x_1, \ldots, x_{n+1}$ трубка T может быть задана уравнением

$$x_{n+1} = v(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.2}$$

над некоторой областью D в гиперплоскости E^n, причем множество $E^n \setminus D$ компактно. Этот факт и тополого-метрическое строение рога, изученное в [2], приведут к заключению теоремы.

Пусть гиперплоскости $\sigma_n(h)$, заданные уравнениями $x_{n+1} = h$, $h \geqslant 0$, не касаются рога T_1 и рог T_1 лежит выше $\sigma_n(0) = E^n$. Тогда пересечение $T_1 \cap \sigma_n(h)$ является подмногообразием трубки T. По теореме Жордана-Брауэра [3, с. 172] подмногообразие $T_1 \cap \sigma_n(h)$ делит гиперплоскость $\sigma_n(h)$ на две области — внутреннюю и внешнюю. Ориентируем трубку T так, чтобы проекция на гиперплоскость $\sigma_n(h)$ сужения векторного поля ν единичной нормали к T на $T_1 \cap \sigma_n(h)$ была направлена во внешнюю область.

Покажем, что сферическое изображение трубки T принадлежит полусфере S^n_+. Предположим противное: пусть точки $X, Y \in T$ такие, что их сферические образы принадлежат S^n_+, S^n_- соответственно. Соединим точки X, Y на T путем $\varphi(t)$, $t \in [0,1]$. Пусть путь $\varphi(t)$ лежит под гиперплоскостью $\sigma_n(0)$. Согласно теореме Жордана-Брауэра, сферическое изображение пути $\varphi(t)$ пересекает экваториальную сферу $S_0^{n-1} = S^n \cap E^n$ в некоторой точке X_0. Пусть точка X_0 принадлежит оси x_1.

Рассмотрим в T_1 подмножества точек $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ такие, что при $X \in F_j$ имеет место равенство нулю скалярного произведения $\langle \nu(X), e_{j+1} \rangle$, $j = 1, \ldots, n-1$, где e_{j+1} — орт оси x_{j+1}. Подмножества F_j, $j = 1, \ldots, n-1$, являются подмногообразиями в T_1. Так как функция $z(X, x_1)$, равная координате проекции точки $X \in T_1$ на ось x_1, имеет на каждом подмногообразии $T_1 \cap \sigma_n(h)$ по крайней мере две критические точки, то пересечение $\Omega = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n-1}$ не пусто. А поскольку вторая форма T невырождена, то подмногообразия $F_1, \ldots, F_{n-1}$ пересекаются трансверсально и множество Ω содержит полные C^1-кривые, причем в Ω имеются две неограниченные в направлении оси x_{n+1} кривые γ_1, γ_2 с началом на ∂T_1.

Введем на γ_1, γ_2 естественный параметр s с началом на ∂T_1, $s \in [0, +\infty)$. Пусть $\nu_i(s)$ — сужение на γ_i векторного поля ν, $i = 1,2$. Из проведенного построения следует, что сферическое изображение множества Ω принадлежит окружности $S^1 = S^n \bigcap \sigma_2(x_1, x_{n+1})$, где $\sigma_2(x_1, x_{n+1})$ есть 2-плоскость в E^{n+1}, проходящая через оси x_1, x_{n+1}. Поэтому скалярные произведения $\langle \nu_i(s), e_{n+1} \rangle$, $i = 1,2$, строго монотонны по s.

Рассмотрим ортогональные проекции кривых $\gamma_i(s)$ на 2-плоскость $\sigma_2(x_1, x_{n+1})$, обозначим их через $\overline{\gamma}_i(s)$. Кривые $\overline{\gamma}_i(s)$ расположены между параллельными оси x_{n+1} лучами l_1, l_2 — границей «тени» цилиндра, содержащего рог. Кроме этого, кривые $\overline{\gamma}_i(s)$ согласованы с монотонными семействами прямых — их контингенций [4], являющихся ортогональными проекциями на $\sigma_2(x_1, x_{n+1})$ касательных гиперплоскостей к рогу T_1 вдоль $\gamma_i(s)$. Когда точка $X(s)$ стремится по кривой $\gamma_i(s)$ в бесконечность, хорда $\overline{\gamma}_i(0)\overline{X}(s)$ становится вертикальной, где $\overline{X}(s)$ — ортогональная проекция на $\sigma_2(x_1, x_{n+1})$ точки $X(s)$. Поэтому сферическое изображение каждой кривой $\gamma_i(s)$ покрывает некоторую ε-полуокрестность одной из экваториальных точек в $S^1 = S^n \bigcap \sigma_2(x_1, x_{n+1})$, причем для γ_1 и γ_2 это различные полуокрестности. Но тогда в окрестности экваториальной точки X_0 нарушается взаимная однозначность сферического отображения трубки T. Это противоречит предположению, что на T имеются точки, сферические образы которых лежат в полусферах S^n_+ и S^n_-.

Покажем, что сферический образ трубки T содержится в полусфере S^n_+. Действительно, так как T_1 — седловой рог, то граница его ортогональной проекции на 2-плоскость $\sigma_2(x_1\ x_{n+1})$ содержит две бесконечные выпуклые кривые, обращенные выпуклостью внутрь проекции. В силу выбранной ориентации трубки T это означает, что сферическое изображение T имеет точки в S^n_+. Отсюда и следует, что сферическое изображение трубки T содержится в полусфере S^n_+.

Используя теорему 1 из [5], заключаем, что трубка T может быть задана уравнением (1.2) над некоторой областью D гиперплоскости E^n.

В [2] показано, что рог T_1 содержит рог T_0, гомеоморфный топологическому произведению $S^{n-1} \times [0,1)$. Обозначим через Φ множество точек в E^n, гомеоморфное замкнутому n-мерному шару, границей которого является ортогональная проекция на E^n подмногообразия $\partial T_0 \subset T$. Пусть T_0' — ортогональная проекция рога T_0 на Φ, множество $N = \Phi \setminus T_0'$. Очевидно, множество N не пусто и компактно.

Можно считать, что начало координат O принадлежит N. Пусть p — произвольная прямая в E^n, проходящая через O, p_1 — один из двух лучей прямой p с началом в последней, считая от O, точке множества $N \bigcap p$. Нетрудно убедиться в том, что кривая на T, проектирующаяся в луч p_1, имеет неограниченную проекцию на p_1. Действительно, противное привело бы к нарушению взаимной однозначности в окрестности экваториальной сферы S_0^{n-1} сферического отображения трубки T. Это означает, что $N = E^n \setminus D$ (D — область задания функции v). А так как область $E^n \setminus \Phi$ гомеоморфна произведению $S^{n-1} \times (-1, 0]$, то область D, а тем самым и трубка T, гомеоморфна топологическому произведению $S^{n-1} \times (-1, 1)$. Теорема доказана.

Замечание. Обозначим через $\pi_k(T)$ k-мерную гомотопическую группу трубки T. Поскольку трубка T представима в виде топологических произведений $M^{n-1} \times (-1, 1)$ и $S^{n-1} \times (-1, 1)$, то $\pi_k(T) = \pi_k(M^{n-1}) = \pi_k(S^{n-1})$ (равенства означают здесь изоморфизм групп). Согласно обобщенной гипотезе Пуанкаре [6], многообразие M^{n-1} гомеоморфно при $n \neq 4,5$ сфере S^{n-1}, чего может не быть для $n = 4,5$, хотя трубка T и гомеоморфна $S^{n-1} \times (-1, 1)$.

3. Рассмотрим полную связную гиперповерхность F в евклидовом пространстве E^{n+1}, заданную уравнением

$$x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

в некоторой области D гиперплоскости E^n. Пусть множество $E^n \setminus D$ состоит из локально конечного семейства компактных компонент линейной связности.

Теорема 2. *Пусть F — внешне полная связная сферически однолистная гиперповерхность в евклидовом пространстве E^{n+1}, удовлетворяющая вышеперечисленным условиям. Если гессиан функции f невырожден, то F гомеоморфна топологическому произведению $S^{n-1} \times (0, 1)$ и ортогональная проекция F на гиперплоскость E^n покрывает E^n, за исключением компактного множества.*

Доказательство. Возьмем компактную компоненту линейной связности N_1 в множестве $E^n \setminus D$. Пусть $\{Q_m\}$ — последовательность гладких подмногообразий в E^n, отделяющих компоненту N_1 от $(E^n \setminus D) \setminus N_1$ и такая, что Q_{m+1} лежит внутри компактного множества V_m, границей которого является Q_m.

Поскольку гиперповерхность F может иметь не более одной горизонтальной касательной гиперплоскости, то можно считать, что в области $V_1 \setminus N_1$ нет критических точек функций f. Через F_1 обозначим некомпактную часть гиперповерхности F, соответствующую области $V_1 \setminus N_1$. Рассмотрим в F_1 подмногообразия F_1^j, заданные уравнениями $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} = 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$. Так как гессиан функции f невырожден, то подмногообразия F_1^j, $j = 2, 3, \ldots, n$, пересекаются трансверсально. Для каждого подмногообразия $f(Q_m) \subset F_1$ и каждой числовой прямой t в гиперплоскости E^n функция $z(X, t)$, равная координате проекции точки $X \in f(Q_m)$ на ось t, имеет по крайней мере две критические точки. Поэтому пересечение $\Omega = F_1^2 \cap \ldots \cap F_1^n$ не пусто. Размерность подмногообразий F_1^l одинакова и равна $n-1$. Следовательно, множество Ω содержит полные в смысле метрики df^2 C^1-кривые.

Пусть гиперповерхность F ориентирована так, что ее сферическое изображение содержится в полусфере S_+^n. Поскольку F — внешне полная гиперповерхность, то в Ω имеется две неограниченные по оси x_{n+1} кривые. Аналогично доказательству теоремы 1 заключаем, что сферическое изображение множества Ω покрывает некоторую $\varepsilon(x_1)$-окрестность экваториальных точек окружности $S^1 = S^n \cap \sigma_2(x_1, x_{n+1})$ в S_+^n, где $\sigma_2(x_1, x_{n+1})$ — 2-плоскость в E^{n+1}, проходящая через оси x_1, x_{n+1}.

Но в качестве оси x_1 можно взять произвольную прямую t в гиперплоскости E^n, проходящую через начало координат. Тогда из вышеизложенного вытекает, что сферическое изображение гиперповерхности F покрывает некоторую ε_0 — окрестность экваториальной сферы $S_0^{n-1} = S^n \cap E^n$ в полусфере S_+^n, где $\varepsilon_0 = \min\limits_{t \subset E^n} \varepsilon(t)$.

Так как гиперповерхность F сферически однолистна, то в множестве $E^n \setminus D$ нет компактных компонент линейной связности, отличных от N_1.

Аналогично доказательству теоремы 1 убеждаемся в том, что гиперповерхность F гомеоморфна топологическому произведению $S^{n+1} \times (0, 1)$. Теорема доказана полностью.

Отметим, что в трехмерном евклидовом пространстве поверхность F над множеством N_1 уходит на рог. Это действительно так, потому что в противном случае на F имелась бы замкнутая геодезическая, сферический образ которой делит сферу на две равновеликие области, но тогда сферическое изображение поверхности F не вмещалось бы в полусферу.

В связи с этим в многомерном случае возникает задача о метрическом строении гиперповерхности F, точнее: уходит ли гиперповерхность F над множеством N_1 на рог.

Список литературы. 1. *Вернер А. Л.* О внешней геометрии простейших полных поверхностей неположительной кривизны. I.— «Мат. сб.», 74 (116), 1967, с. 218—240. 2. *Подран В. Е.* О строении сферически однолистной гиперповерхности, имеющей рог.— В сб.: Геометрия, вып. 7, Л., 1978, с. 44—54. 3. *Александров П. С.* Введение в гомологическую теорию размерности. М., «Наука», 1975. 172 с. 4. *Дуткевич Ю. Г.* О задании поверхности опорной функцией.— «Вести. ЛГУ», № 1, 1963, с. 53—58. 5. *Подран В. Е.* О непараметрическом задании полной гиперповерхности в пространствах постоянной кривизны.— В сб.: Геометрия. Вып. 6. Л., 1977, с. 80—87. 6. *Смейл. С.* Обобщенная гипотеза Пуанкаре в размерностях больших четырех.— В сб. пер.: Математика, 1962, № 6 : 3, с. 139—155.

Поступила 10 октября 1977 г.

УДК 513

Л. Н. Сергиенко

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДВУХ УРАВНЕНИЙ МОНЖА В E_4

В работе «Геометрия монжевых уравнений» Д. М. Синцов выделил из общего множества интегральных кривых уравнения Монжа геодезические линии *. В настоящей заметке рассматриваются геодезические линии системы интегральных кривых двух уравнений Монжа в четырехмерном евклидовом пространстве E_4.

Рассмотрим интегральные кривые системы двух монжевых уравнений в E_4:

$$\begin{aligned}&\Phi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ dx_4)=0;\\&\Phi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ dx_4)=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Поделив на dt в соответствующей степени каждое уравнение системы, получим

$$\begin{aligned}&\Phi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')=0,\\&\Phi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')=0.\end{aligned}\tag{1'}$$

Система (1) подчиняет точке $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ пространства E_4 двумерный конус, прямолинейные образующие которого служат касательными к интегральным кривым (1). Уравнение этого конуса

$$\begin{aligned}&\Phi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ X_1-x_1,\ X_2-x_2,\ X_3-x_3,\ X_4-x_4)=0,\\&\Phi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ X_1-x_1,\ X_2-x_2,\ X_3-x_3,\ X_4-x_4)=0.\end{aligned}$$

Плоскость, касательную к конусу вдоль образующей $(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')$, можно определить уравнением

$$\sum_{k=1}^{4}\Phi'_{1x_k'}(X_k-x_k)=0;\quad \sum_{k=1}^{4}\Phi'_{2x_k'}(X_k-x_k)=0.$$

Нормальная плоскость к конусу определяется векторами $N_1=\{\Phi'_{1x_i'}\}$ и $N_2=\{\Phi'_{2x_i'}\}$, здесь и везде в дальнейшем $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Выделим те интегральные кривые системы (1), у которых в каждой точке главная нормаль лежит в нормальной плоскости, т. е. геодезические «прямейшие».

Если радиус-вектор кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, то главная нормаль кривой $\boldsymbol{n}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$. Условие того, что главная нормаль к интегральной кривой лежит в нормальной плоскости, запишется сле-

* *Синцов Д. М.* Работы по неголономной геометрии. Киев, «Вища школа», 1972. 296 с.

дующим образом: $\frac{d^2r}{ds^2} = \lambda_1(s)N_1 + \lambda_2(s)N_2$, или $\frac{d^2x_i}{ds^2} = \lambda_1\Phi'_{1x'_i} + \lambda_2\Phi'_{2x'_i}$.

Если перейти к произвольному параметру t, то последние уравнения преобразуются так: $x''_i/\sum_{k=1}^{4} x'^2_k - (x'_i\sum_{k=1}^{4} x'_k x''_k)/(\sum_{k=1}^{4} x'^2_k)^2 = \lambda_1\Phi'_{1x'_i} + \lambda_2\Phi'_{2x'_i}$.

Покажем, воспользовавшись условием однородности $\sum_{k=1}^{4} x'_k\Phi'_{x'_k} = 0$, что между уравнениями последней системы существует линейная зависимость. Для этого умножим каждое уравнение системы на соответствующее x'_i и возьмем сумму по i от 1 до 4. Получим тождество $0=0$. Таким образом, одно уравнение последней системы является следствием остальных. Исключая из оставшихся трех уравнений λ_1 и λ_2, получим уравнение искомых кривых

$$\begin{vmatrix} x''_l - \dfrac{\left(x'_l \sum\limits_{k=1}^{4} x'_k x''_k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{4} x'^2_k} & \Phi'_{1x'_l} & \Phi'_{2x'_l} \\ x''_m - \dfrac{\left(x'_m \sum\limits_{k=1}^{4} x'_k x''_k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{4} x'^2_k} & \Phi'_{1x'_m} & \Phi'_{2x'_m} \\ x''_n - \dfrac{\left(x'_n \sum\limits_{k=1}^{4} x'_k x''_k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{4} x'^2_k} & \Phi'_{1x'_n} & \Phi'_{2x'_n} \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

где $l, m, n = 1, 2, 3, 4$; l, m, n — попарно не равны между собой.

Приняв x_1 за независимую переменную, получим для определения трех функций $x_2(x_1)$, $x_3(x_1)$, $x_4(x_1)$ систему из трех дифференциальных уравнений (1'), (2) (два уравнения первого порядка и одно уравнение второго порядка), из которой геодезические «прямейшие» определяются с четырьмя произвольными постоянными.

Из системы (1) можно также выделить геодезические «кратчайшие». Берем интеграл $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\sum_{k=1}^{4} x'^2_k}\,dt$, определяющий длину дуги кривой, и ищем его экстремум при условии, что $x_i = x_i(t)$ удовлетворяют системе (1').

Задача сводится к определению абсолютного экстремума интеграла:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{4} x_k'^2}+\lambda_1(t)\,\Phi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')+\right.$$

$$\left.+\lambda_2(t)\,\Phi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')\right]dt=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t)\,dt.$$

Соответствующая система уравнений Эйлера имеет вид: $\Phi'_{x_i}-$

$$-\frac{d}{dt}\Phi'_{x_i'}=0,\ \text{или}\ \lambda_1\Phi'_{1x_i}+\lambda_2\Phi'_{2x_i}-$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{x_i'}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{4}x_k'^2}}+\lambda_1\Phi'_{1x_i'}+\lambda_2\Phi'_{2x_i'}\right)=0.$$

Отсюда

$$\frac{x_i''}{\sum\limits_{k=1}^{4}x_k'^2}-\frac{\left(x_i'\sum\limits_{k=1}^{4}x_k'x_k''\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{4}x_k'^2\right)^2}=-\lambda_1'\Phi'_{1x_i'}+\lambda_1\left[\Phi'_{1x_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{d}{dt}(\Phi'_{1x_i'})\right]-\lambda_2'\Phi'_{2x_i'}+\lambda_2\left[\Phi'_{2x_i}-\frac{d}{dt}(\Phi'_{2x_i'})\right]. \qquad (3)$$

Если за независимую переменную взять длину дуги s, то $\sum\limits_{k=1}^{4}x_k'^2=1$ и уравнения геодезических «кратчайших» сводятся к виду $\frac{d^2x_i}{ds^2}=-\lambda_1'\Phi'_{1x_i'}+\lambda_1\left[\Phi'_{1x_i}-\frac{d}{ds}(\Phi'_{1x_i'})\right]-\lambda_2'\Phi'_{2x_i'}+\lambda_2\left[\Phi'_{2x_i}-\right.$ $\left.-\frac{d}{ds}(\Phi'_{2x_i'})\right]$.

Между уравнениями системы (3) существует линейная зависимость. Если умножить каждое уравнение этой системы на соответствующее x_i' и взять сумму по i от 1 до 4, получим тождество; действительно:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'x_i''}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'^2\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'x_i''}{\left(\sum\limits_{i=1}^{4}x_i'^2\right)^{3/2}}=-\lambda_1'\sum_{i=1}^{4}x_i'\Phi'_{1x_i'}+$$

$$+\lambda_1\sum_{i=1}^{4}x_i'\left[\Phi'_{1x_i}-\frac{d}{dt}(\Phi'_{1x_i'})\right]-\lambda_2'\sum_{i=1}^{4}x_i'\Phi'_{2x_i'}+$$

$$+\lambda_2\sum_{i=1}^{4}x_i'\left[\Phi'_{2x_i}-\frac{d}{dt}(\Phi'_{2x_i'})\right]. \qquad (4)$$

Левая часть равенства равна нулю, первое и третье слагаемые правой части равны нулю в силу условия однородности. Из условия однородности находим $\sum_{i=1}^{4} x_i'' \Phi'_{x_i'} + \sum_{i=1}^{4} x_i' \frac{d}{dt} \Phi'_{x_i'} = 0$, а из уравнения Монжа получим $-\sum_{i=1}^{4} \Phi'_{x_i} x_i' = \sum_{i=1}^{4} \Phi_{x_i'}' x_i''$; отсюда $\sum_{i=1}^{4} x_i' [\Phi'_{x_i} - \frac{d}{dt} (\Phi'_{x_i'})] = 0$. Следовательно, второе и четвертое слагаемые правой части равенства (4) также равны нулю. Итак, одно уравнение системы (4) является следствием остальных.

Если за независимую переменную принять x_1, то для определения геодезических «кратчайших» необходимо найти пять функций $x_2(x_1)$, $x_3(x_1)$, $x_4(x_1)$, $\lambda_1(x_1)$, $\lambda_2(x_1)$, которые связаны тремя дифференциальными уравнениями второго порядка (4) и двумя дифференциальными уравнениями второго порядка (1').

Выясним, от скольких параметров зависит совокупность геодезических «кратчайших». Из двух уравнений системы (1') и двух уравнений системы (4) определим x_2, x_3, λ_1, λ_2 как функции независимой переменной x_1, функций x_4, x_4', x_4'' и четырех постоянных. Внеся значения λ_1, λ_2, x_2, x_3 в оставшееся третье уравнение системы (4), получим одно дифференциальное уравнение второго порядка на функцию x_4. Проинтегрировав его, находим, что геодезические «кратчайшие» в общем случае зависят от шести произвольных постоянных.

Поступила 30 января 1978 г.

УДК 513

В. Т. Фоменко

ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ВНЕШНИМИ СВЯЗЯМИ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Пусть S_0 m-связная поверхность положительной внешней кривизны в трехмерном римановом пространстве R^3, являющаяся строго внутренней частью ориентируемой поверхности S положительной внешней кривизны $K \geqslant k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$. Границу поверхности S_0 будем считать состоящей из конечного числа простых кусочно-гладких замкнутых попарно непересекающихся кривых L_i, $i = 1, 2, \ldots, m$; $m \geqslant 1$. Известно, что поверхность S_0 допускает непрерывные изгибания в R^3, т. е. в R^3 существует семейство $\{S_\tau\}$ различных изометричных поверхностей S_τ, непрерывно зависящих от параметра τ, $\tau \in [0, 1]$, и содержащее поверхность S_0.

В настоящей работе доказывается возможность непрерывных изгибаний поверхности S_0 при наличии внешних связей точечного типа.

Введем в окрестности поверхности S класса C^5_σ, $0 < \sigma < 1$, полугеодезическую систему координат v^i ($i = 1, 2, 3$) пространства R^3 с базисной поверхностью S. Обозначим через $g_{ij}\,dv^i\,dv^j$ линейный элемент пространства в этих координатах. Предположим, что $g_{ij} \in C^5_\sigma$, $0 < \sigma < 1$. Пусть x — произвольная точка поверхности S_0, $\overset{i}{v}_0(x)$ — ее координаты; S_τ — поверхность, изометричная S_0, лежащая в области невырожденности координат v^i; $\overset{i}{v}_\tau(x)$ — координаты соответствующей по изометрии точки поверхности S_τ. Положим $\xi^i_\tau(x) = \overset{i}{v}_\tau(x) - \overset{i}{v}_0(x)$.

Теорема. *Пусть x_k ($k = 1, 2, \ldots, l$) — некоторый набор различных точек поверхности S_0; $\mu_k(\tau)$, $\lambda_k(\tau)$ ($k = 1, 2, \ldots, l$) — произвольно заданные непрерывные функции параметра τ, $\tau \in [0, 1]$, $\mu_k(0) = \lambda_k(0) = 0$. Тогда существует положительная константа C, зависящая от поверхности и набора точек x_k такая, что если $|\mu_k(\tau)| \leqslant C$, $|\lambda_k(\tau)| \leqslant C$, ($k = 1, 2, \ldots, l$), то поверхность S_0 допускает непрерывные изгибания класса C^3_σ, $0 < \sigma < 1$, удовлетворяющие условиям $\xi^1_\tau(x_k) = \mu_k(\tau)$; $\xi^2_\tau(x_k) = \lambda_k(\tau)$; $k = 1, 2, \ldots, l$; $\tau \in [0, 1]$.*

При доказательстве теоремы будут применены построенные И. Н. Векуа операторы, позволяющие получать решения некоторых интегральных уравнений, принимающие в заранее фиксированных точках наперед заданные значения [1, гл. 3, § 5]. Общая схема решения задачи сходна со схемой, использованной А. В. Погореловым при решении вопроса об изометрическом погружения многообразия, близкого к погружаемому [2, гл. 6, § 7].

Приведем основные этапы доказательства теоремы.

1. Уравнения изометрических преобразований поверхности. Пусть F_0 — строго внутренняя часть с гладким краем поверхности S, содержащая поверхность S_0 как свою подобласть. Будем считать, что на поверхности F_0 введена изотермически сопряженная параметризация (u^1, u^2), отображающая F_0 и S_0 на области G_0 и D_0 соответственно, $D_0 \subset G_0$. Считая в качестве искомых функций величины $\xi_i = g_{ij}\xi^j_\tau$, $i = 1, 2, 3$, уравнения изометрических преобразований поверхности F_0 запишем в виде $L_{\alpha\beta}(\xi) \equiv \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha - 2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\xi_\gamma - 2b_{\alpha\beta}\xi_3 = \omega_{\alpha\beta}(\xi)$, ($\alpha$, $\beta = 1, 2$), где $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля поверхности F_0; $b_{\alpha\beta}$ — второй основной тензор поверхности F_0; $\omega_{\alpha\beta}(\xi)$ — коэффициенты формы

$$\Omega \equiv \omega_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = a_{ij}\xi^i_\tau \xi^j_\tau + a'_{ij}\xi^i_\tau\, d\xi^j_\tau + a''_{ij}\, d\xi^i_\tau\, d\xi^j_\tau; \qquad (1)$$

a_{ij}, a'_{ij}, a''_{ij} — функции, зависящие от параметров (u^1, u^2) и неизвестных ξ_i, ограниченные при $\max\limits_{G_0} |\xi_i| \to 0$, $i = 1, 2, 3$; $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$.

Зафиксируем область G_1 с границей ∂G_1 в плоскости z такую, что $D_0 \subset G_1 \subset G_0$; $\partial G_1 \in C^3_\sigma$, $0 < \sigma < 1$. Обозначим через $\rho(z)$ функцию класса C^∞, удовлетворяющую условиям: $\rho(z) \equiv 1$, если $z \in D_0$; $\rho(z) \equiv 0$, если $z \in G_0 \setminus G_1$; $0 \leqslant \rho(z) \leqslant 1$, если $z \in G_1 \setminus D_0$. Введем в рассмотрение оператор $L^*_{\alpha\beta}(\xi)$ по формуле $L^*_{\alpha\beta}(\xi) \equiv \equiv \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha - 2(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})^* \xi_\gamma - 2\nu^* \delta_{\alpha\beta} \xi_3$, где $(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})^* = \rho(z)\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$; $\nu^* = = \rho(z)\nu + [1 - \rho(z)]$; $b_{\alpha\beta} = \nu\delta_{\alpha\beta}$; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера; $\nu^* \geqslant \geqslant \nu_0 > 0$; $z \in G_0$. В дальнейшем будем решать в области G_0 систему уравнений $L^*_{\alpha\beta}(\xi) = \omega_{\alpha\beta}(\xi)$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$, сужение которой на область D_0, $D_0 \subset G_0$, совпадает с системой уравнений изометрических преобразований поверхности S_0.

2. Априорные оценки. В области G_0 будем рассматривать уравнения

$$L^*_{\alpha\beta}(\xi) = \omega_{\alpha\beta}\ (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{2}$$

где $\omega_{\alpha\beta}$ — известный тензор, $\omega_{\alpha\beta} \in C^2_\sigma(G_0)$, $0 < \sigma < 1$. Уравнения для первых двух компонент вектора ξ, являющегося решением уравнения (2), после соответствующих преобразований приводятся к виду:

$$\partial_{\bar z} w + Aw + B\bar w = F, \tag{3}$$

где A, B, F — известные функции класса $C^2_\sigma(G_0)$, $0 < \sigma < 1$, $w = = \xi_1 + i\xi_2$; $z = u^1 + iu^2$, $z \in G_0$. Рассмотрим в области G_0 интегральное уравнение

$$w(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{G_0} (A(\zeta) w(\zeta) + B(\zeta)\overline{w(\zeta)})\, M(\zeta, z)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{G_0} F(\zeta)\, M(\zeta, z)\, d\xi\, d\eta, \tag{4}$$

где $\zeta = \xi + i\eta$,

$$M(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z} -$$

$$- \sum_{k=1}^{l} \frac{(z - z_1)\cdots(z - z_{k-1})(z - z_{k+1})\cdots(z - z_l)}{(z_k - z_1)\cdots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\cdots(z_k - z_l)} \frac{1}{\zeta - z_k}, \tag{5}$$

z_k — образы точек x_k поверхности S_0 в плоскости z, $z_k \in D_0$; $\Phi(z)$ — заданная аналитическая в G_0 функция. Из формулы (5) и уравнения (4) следует, что $w(z_k) = \Phi(z_k)$. Всякое решение уравнения (4) будет решением уравнения (3) и наоборот, всякое решение последнего можно представить в виде (4). Уравнение (4) однозначно разрешимо, и его решение принадлежит классу $C^3_\sigma(G_0)$, а для нормы этого решения имеет место оценка $C^3_\sigma(w, G_0) \leqslant \leqslant k_1 C^3_\sigma(\Phi, G_0) + k_2 C^2_\sigma(F, G_0)$, $k_i = \text{const}$, $i = 1, 2$.

Покажем, что $\xi_3 \in C^3_\sigma(G_0)$, если $\omega_{\alpha\beta} \in C^2_\sigma(G_0)$ и форма (1) имеет вид $\Omega = a d\lambda\, d\mu$, где a, λ, μ — некоторые функции класса $C^3_\sigma(G_0)$, $0 < \sigma < 1$. Так как третьи производные λ и μ не входят в выражение $\Delta(\nu^*\xi_3)$, где Δ — оператор Лапласа, то ξ_3 в области G_0 удовлетворяет уравнению $\Delta(\nu^*\xi_3) = f$, где $f \in C^1_\sigma(G_0)$, $\nu^* \geqslant \nu > 0$. По известной теореме Шаудера [3, гл. 3, § 1] $\xi_3 \in C^3_\sigma(G_0)$, $0 < \sigma < 1$, и имеет место оценка $C^3_\sigma(\xi_3, \overline{G}_1) \leqslant k[C^1_\sigma(f, G_0) + \max\limits_{G_0}|\xi_3|]$, где $\overline{G}_1$ — замыкание G_1; $k = \mathrm{const}$. Из формул (2) при $\alpha = \beta$ получим

$$\max_{G_0}|\xi_3| \leqslant k_3[C^1_\sigma(\xi_1, G_0) + C^1_\sigma(\xi_2, G_0)] + k_4 C_\alpha(\Omega, G_0),$$

где k_3, k_4 — некоторые постоянные. Учитывая, что $\Omega = a\, d\lambda\, d\mu$, найдем $C^3_\sigma(\xi_3\, \overline{G}_1) \leqslant k_1' C^3_\sigma(\Phi, G_0) + k_2' C^3_\sigma(a, G_0)\, C^2_\sigma(d\lambda\, d\mu, G_0)$, $k_i' = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$. Используя полученные неравенства, можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $w(z)$ — решение уравнения* (4), *построенное по заданной аналитической в области G_0 функции $\Phi(z)$, $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ — решение системы* (2), *соответствующее указанному решению $w(z)$. Тогда для функций $\xi_i^* \equiv \rho(z)\xi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ имеют место оценки*

$$1)\ C^3_\sigma(\xi_i^*, G_0) \leqslant k_1'' C^3_\sigma(\Phi, G_0) + k_2'' C^2_\sigma(\Omega, G_0),\ i = 1, 2;$$

$$2)\ C^3_\sigma(\xi_3^*, G_0) \leqslant k_3'' C^3_\sigma(\Phi, G_0) + k_4'' C^3(a, G_0)\, C^2_\sigma(d\lambda\, d\mu, G_0),$$

где $\Omega = a\, d\lambda\, d\mu$, k_i'' $(i = 1, \ldots, 4)$ — некоторые константы.

3. Решение уравнений изометрических преобразований. Построим в области G_0 по заданной функции $\Phi(z)$, ограниченной по норме пространства $C^3_\sigma(G_0)$, $0 < \sigma < 1$, некоторой малой константой, сходящуюся в норме пространства $C^3_\sigma(G_0)$, $0 < \sigma < 1$, последовательность $\{\underset{n}{\xi^*}\}_{n=0}^{\infty}$, следующим образом. Положим в $\underset{0}{\xi^*} \equiv 0$. Определим в области G_0 вектор $\underset{1}{\xi}$ как решение уравнения $L^*_{\alpha\beta}(\xi) = \omega_{\alpha\beta}(\underset{0}{\xi^*})$, соответствующее заданной аналитической функции $\Phi(z)$. Здесь $\omega_{\alpha\beta}$ коэффициенты формы (1). Положим $\underset{1}{\xi^*} = \rho(z)\underset{1}{\xi}$. Определим $\underset{2}{\xi}$ как решение уравнения $L^*_{\alpha\beta}(\xi) = \omega_{\alpha\beta}(\underset{1}{\xi^*})$, соответствующее аналитической функции $\Phi(z)$, и положим $\underset{2}{\xi^*} = \rho(z)\underset{2}{\xi}$ и т. д.. Полученная последовательность $\{\underset{n}{\xi^*}\}_{n=0}^{\infty}$ в силу леммы 1 ограничена в классе $C^3_\sigma(G_0)$ и сходится, если $C^3_\sigma(\Phi, G_0) < \varepsilon$, где ε — константа, определяемая поверхностью и набором

точек x_k. Предельный вектор $\xi^* = \{\underset{1}{\xi^*}, \underset{2}{\xi^*}, \underset{3}{\xi^*}\}$ принадлежит классу $C^3_\sigma(G_0)$ и не зависит от выбора начального малого по норме приближения. Сужение предела ξ^* на область D_0 будет решением уравнений изометрических преобразований поверхности S_0, причем $\xi^*_1(x_k) + i\xi^*_2(x_k) = \Phi(z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, l$.

4. Непрерывные изгибания. Доказательство существования непрерывных изгибаний поверхности S_0 опирается на следующие леммы:

Лемма 2. *По аналитической в G_0 функции $\Phi(z) = 0$ описанной в п. 3 схемой определяется вектор $\xi^* \equiv 0$.*

Лемма 3. *Пусть $\{\Phi_\tau(z)\}$ — множество аналитических функций в G_0 такое, что $C^3_\sigma(\Phi_\tau, G_0)$ изменяется непрерывно с изменением $\tau \in [0, 1]$ и $C^3_\sigma(\Phi_\tau, G_0) < \varepsilon$, где ε — константа, определенная в п. 3. Тогда, если $\{\xi^*_\tau\}$ — множество векторов таких, что ξ^*_τ построен по аналитической функции Φ_τ методом, описанным в п. 3, то $C^3_\sigma(\xi^*_\tau, G_0)$ изменяется непрерывно при непрерывном изменении τ.*

В силу лемм 2, 3 семейство $\{\Phi_\tau\}$ аналитических в G_0 функций, непрерывно зависящее от параметра $\tau \in [0, 1]$ и удовлетворяющее условиям

1) $C^3_\sigma(\Phi_\tau, G_0) < \varepsilon$;

2) $\Phi_\tau(z_k) = \lambda'_k(\tau) + i\mu'_k(\tau)$, $k = 1, 2, \ldots, l$;

3) $\Phi_0(z) \equiv 0$; $\lambda'_k = g_{11}\lambda_k + g_{12}\mu_k$; $\mu'_k = g_{21}\lambda_k + g_{22}\mu_k$;

4) $\Phi_{\tau_1}(z_0) \neq \Phi_{\tau_2}(z_0)$, $\forall \tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$, $z_0 \in D_0$, $z_0 \neq z_k$, $k = 1, 2, \ldots, l$, определяет непрерывные изгибания поверхности S_0, подчиненной внешним связям точечного типа.

Список литературы: 1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с. 2. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., Физматгиз, 1969. 760 с. 3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964. 538 с.

Поступила 25 июня 1977 г.

СОДЕРЖАНИЕ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 22

Редактор *В. Н. Забелин*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Художественный редактор *Т. П. Воробиенко*
Технический редактор *Л. Т. Момот*
Корректор *М. Ф. Христенко*

Информ. бланк № 3988

Сдано в набор 20.04.78. Подписано в печать 25.10.78.
БЦ 09304. Формат 60×90/16. Бумага типографская № 2.
Лит. гарн. Выс. печать. 9 усл. печ. л. 10 уч.-изд. л.
Тираж 1000 экз. Изд. № 676. Зак. 8-152. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном
университете издательского объединения «Вища школа»,
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе
в Харьковской городской типографии № 16 Областного
управления по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли. 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16. З. 151.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Обобщение теорем Якоби и Эннепера о кривых. Аминов Ю. А. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 3—5.

Известная теорема Якоби о том, что сферическая индикатриса главных нормалей замкнутой кривой делит единичную сферу на две равновеликие части, обобщается следующим образом. Пусть Γ — замкнутая кривая в E^n с кривизнами $k_i \neq 0$, γ_i — индикатриса на единичной сфере S^{n-1} нормали ξ_i, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, из натурального репера. Пусть Φ_i — полоса, образованная двумерными плоскостями, проведенными через ξ_{i-1} и ξ_{i+1} вдоль кривой γ_i. Если F^2 — двумерная ориентируемая односвязная поверхность в S^{n-1}, имеющая границей γ_i и касающаяся вдоль γ_i полосы Φ_i, то интегральная кривизна F^2 равна 2π.

Теорема Эннепера обобщается так: если на двумерной поверхности в E^n с гауссовой кривизной K имеется асимптотическая линия, то ее кручение, т. е. вторая кривизна $k_2 = \pm\sqrt{-K}$. Если $K \neq 0$, то для поверхностей в E^4 вектор ξ_3 — третий из натурального сопровождающего репера асимптотической линии — касается эллипса нормальной кривизны в данной точке.

Библиогр. ссылка в подстроч. примеч.

УДК 513

Оценки эквивариантного диаметра римановых многообразий при ограничениях на кривизну. Ананов Н. Г. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 5—12.

Получены оценки снизу эквивариантного диаметра $D(M)$ риманова многообразия M. $D(M)$ определяется равенством $D(M) = \inf\limits_{G} D(M, G)$, где G — нетривиальная подгруппа группы изометрий M, а $D(M, G) = \sup\{\operatorname{diam} G(m) \mid m \in M\}$.

Список лит.: 7 назв.

УДК 513

О свойствах нормальных расслоений $N(X_2)$ в A_4. Бритов А. В. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 12—22.

Статья посвящена геометрии нормального расслоения двумерной поверхности в четырехмерном пространстве A_4 с общей аффинной фундаментальной группой или некоторой ее подгруппой. Выяснено происхождение связей между постоянными векторными (ковекторными) полями нормального расслоения, эвольвентностью, свойствами сопряженной сети, найденными ранее А. В. Чакмазяном и другими геометрами для X_2 в евклидовом пространстве E_4.

Список лит.: 10 назв.

1

УДК 513

Теорема Гаусса для C^1-гладкой седловой поверхности, имеющей простые чаши. Бычкова Т. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 22—29.

Рассматривается полная C^1-гладкая седловая поверхность, чаши которой отсекаемы некоторой плоскостью, имеют взаимнооднозначное сферическое отображение, а полярный образ чаш внешне полон. Такая поверхность имеет ограниченную внешнюю кривизну в смысле А. В. Погорелова и для нее имеет место обобщенная теорема Гаусса о равенстве внешней и внутренней кривизны. Кроме того, поверхность имеет предельный конус $A(F)$, а внутренняя кривизна поверхности $\omega(F)$ удовлетворяет равенству $\omega(F) = 2\pi\varkappa(F) + \omega(A(F))$.

Список лит.: 10 назв.

УДК 513

Зависимость свойств взаимно полярных седловых поверхностей. Вернер А. Л. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 29—35.

Рассматриваются поверхности F и F^* в E^3, взаимные относительно преобразования Лежандра в E^3 (поляритет относительно параболоида вращения). Как известно, если F — седловая C^1-гладкая и имеет инъективное сферическое изображение, то такими же свойствами обладает и F^*. Кривая пересечения F с плоскостью переходит в конус, касательный к F^* с вершиной в полюсе плоскости. Устанавливается зависимость между строением указанной кривой и конуса (в частности, из выпуклости кривой следует выпуклость конуса), а также условия появления на конусе ребер. Как следствие получены достаточные условия существования у седловой поверхности предельного конуса и условия выпуклости ее сферического образа.

Список лит.: 11 назв.

УДК 513

Инвариантная соприкасающаяся поверхность двумерного распределения пространства P_4. Глова Н. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 35—45.

В статье дано обобщение известной теоремы Бомпиани о соприкасающихся поверхностях неголономного многообразия V_3^2 в пространстве P_3 на совокупность интегральных кривых двумерного распределения пространства P_4. Построена двумерная соприкасающаяся поверхность из проективно-геодезических линий, инвариантно связанная с многообразием V_4^2 в P_4.

Получены деривационные формулы для канонического репера многообразия при его перемещении по инвариантной соприкасающейся поверхности S_2.

Доказываются некоторые теоремы, касающиеся единственной пары сопряженных направлений этой поверхности и куспидальных и сопряженных направлений двумерного распределения в P_4. Установлены необходимые и достаточные условия принадлежности поверхности S_2 трехмерному пространству.

УДК 513

К вопросу о порядке функции устойчивости в проблеме Минковского. Дискант В. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 45—47.

Минковский доказал теорему: если два выпуклых ограниченных регулярных тела n-мерного евклидова пространства имеют одинаковые функции кривизны, то эти тела равны с точностью до параллельного переноса. При этом под функцией кривизны понимается произведение главных радиусов кривизны. В заметке доказано, что в соответствующей теореме устойчивости порядок функции устойчивости не менее $1/(n-1)$.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Максимально подвижные пространства линейных элементов аффинной связности. I. Егоров А. И. Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 47—59.

Изучается пространство линейных элементов $X_{2n-1}(x, \dot{x})$ общей аффинной связности. Фундаментальный объект имеет компонентами $\Lambda^i_{jk}(x, \dot{x})$ — объект нулевой степени однородности относительно псевдовектора $\dot{x}$, и $C^i_{jk}(x, \dot{x})$ — тензор степени однородности —1 относительно $\dot{x}$ с нулевой сверткой $C^i_{jk}\dot{x}^k = 0$. В публикуемой части I работы требуется также, чтобы $C^i_{jk}\dot{x}^j = 0$. Аффинная связность может быть определена упорядоченной четверкой тензоров, выражающихся через компоненты фундаментального объекта. Устанавливается связь между максимальным порядком групп движений, допускаемых пространством, и алгебраической структурой тензоров указанной четверки, а следовательно, и структурой фундаментального объекта.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Условия инвариантности кубической поверхности относительно группы симметрий правильного тетраэдра. Игнатенко В. Ф. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 60—64.

В трехмерном евклидовом пространстве указаны необходимые и достаточные условия инвариантности кубической поверхности относительно группы симметрий правильного тетраэдра и приведен способ нахождения уравнений соответствующих плоскостей симметрии.

Список лит.: 12 назв.

УДК 513.81

Глобальная формулировка основной теоремы теории n-мерных поверхностей в m-мерном пространстве постоянной кривизны. Климентов С. Б. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 64—81.

Доказывается глобальная формулировка основной теоремы теории n-мерных поверхностей в m-мерном пространстве постоянной кривизны. Рассматриваемые объекты предполагаются обобщенно дифференцируемыми по С. Л. Соболеву. В качестве вспомогательной конструкции вводится понятие обобщенно дифференцируемого многообразия и доказывается один частный случай теоремы Фробениуса для обобщенно дифференцируемых распределений.

Список лит.: 9 назв.

УДК 513

Ребро возврата поверхности неположительной кривизны. Кованцов Н. И.— Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 81—92.

Доказывается существование и единственность поверхности с заданным ребром возврата (непрямолинейным) и заданной неположительной гауссовой кривизной, не обращающейся в нуль на ребре. Ребро возврата при этом является огибающей обоих семейств асимптотических линий поверхности, его нормальные плоскости пересекают поверхность по кривой с точкой возврата на ребре. Все рассмотрения ведутся «в малом».

Список лит.: 15 назв.

УДК 513

Минимальные поверхности Петерсона. Королев Е. А., Фомина Т. Н.— Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 92—96.

Поверхностью Петерсона называется поверхность, несущая на себе коническую сеть, т. е. сопряженную сеть, образованную линиями касания конусов, описанных около поверхности. Вершины этих конусов лежат на двух пространственных кривых. Рассматривается случай, когда обе эти кривые плоские и одна из них лежит в несобственной плоскости, поэтому сеть является цилиндро-конической. В работе установлено, что среди этого вида поверхностей Петерсона единственной минимальной поверхностью является катеноид.

УДК 513

О голономности главных направлений подмногообразий отрицательной внешней кривизны в пространственных формах. Лисица В. Т.— Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 96—102.

Пусть F^n — подмногообразие отрицательной внешней секционной кривизны в римановом пространстве R^m, n_p — нормальные векторы ($p = 1, 2, \ldots, m-n$), X, Y, Z — касательные векторы в точке $x \in F^n$. Если в каждой точке F^n существует n главных направлений и тензор кривизны пространства R^m удовлетворяет условию $\langle R(X, Y)Z, n_p\rangle = 0$ для всех p, то главные направления голономны. Как следствие получено, что если пространство R^m постоянной кривизны, а F^n — его подмногообразие отрицательной внешней кривизны, то в случае, когда R^m и F^n оба вещественны, оба кэлеровы или оба кватернионные кэлеровы, из существования главных направлений F^n следует их голономность.

Приведен пример, когда R^m — непостоянной кривизны, а на F^n отрицательной внешней кривизны существует n главных направлений, но не все голономны.

Список лит.: 7 назв.

УДК 513

Размеры устойчивых областей на некоторых минимальных подмногообразиях сферы. Масальцев Л. А.— Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 103—108.

Определяются размеры устойчивых областей на следующих минимальных подмногообразиях сферы: на вполне геодезических, на подмногообразиях вида $S^p \times S^q$ и на действительных подмногообразиях Веронезе.

Список лит.: 7 назв.

УДК 513

Одна задача о разбиении евклидова пространства. Медяник А. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 109—114.

М. Фреллер высказал предположение (см. РЖ Мат 1973, 10А 540), что n-мерное евклидово пространство можно разбить на кресты — конгруэнтные многогранники, составленные из n-мерного куба и всех его зеркальных отражений в гиперплоскостях, содержащих $(n-1)$-мерные грани исходного куба. В работе устанавливается справедливость этой гипотезы и предлагается эффективное простое представление произвольного нормального решетчатого разбиения евклидова пространства на кресты с помощью системы сравнений относительно модулей, являющихся делителями числа $2n+1$. В частности, в качестве целочисленных прямоугольных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ центров симметрии крестов решетчатого разбиения можно взять все решения сравнения $\sum_{i=1}^{n} ix_i \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\, 2n+1)$.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Безынтегральное представление комплекса с тройным бесконечно удаленным инфлекционным центром. Мягков В. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 115—122.

Рассматривается комплекс $\sum_3$ с тройным бесконечно удаленным инфлекционным центром. Найдено безынтегральное представление такого комплекса. В явном виде получено решение системы дифференциальных уравнений, определяющих комплекс $\sum_3$.

Список лит.: 2 назв.

УДК 513

Сферически однолистные трубки в евклидовом пространстве E^{n+1}. Подран В. Е.—Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 122—127.

С. Э. Кон-Фоссен ввел понятие трубки, чаши, рога для седловых поверхностей. Автор делает одно из возможных обобщений этих понятий для многомерных седловых поверхностей и доказывает, что полная сферически однолистная седловая гиперповерхность, имеющая рог, гомеоморфна топологическому произведению сферы на прямую и допускает задание в явной форме $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$, причем область определения этой функции покрывает гиперплоскость $x_{n+1} = 0$ всю, за исключением компактного множества, имеющего гомотопический тип одноточечного пространства.

Рассматривается также в известном смысле обратная задача о топологическом строении явно заданной сферически однолистной гиперповерхности, когда дополнение до $E^n\,(x_{n+1} = 0)$ области задания функции f состоит из локально конечного семейства компактных компонент линейной связности.

Список лит.: 7 назв.

УДК 513

Геодезические линии системы интегральных кривых двух уравнений Монжа в E_4. Сергиенко Л. Н.— Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 128—131.

Рассматриваются геодезические линии системы интегральных кривых двух монжевых уравнений в E_4. Получены дифференциальные уравнения геодезических «прямейших», совокупность которых зависит от четырех параметров, и геодезических «кратчайших», которые в общем случае зависят от шести произвольных постоянных.

Список лит.: 1 назв.

УДК 513

Изгибание поверхностей положительной внешней кривизны в римановом пространстве с внешними связями точечного типа. Фоменко В. Т. — Украинский геометрический сборник, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979, с. 131—135.

Пусть S — многосвязная поверхность положительной внешней кривизны в трехмерном римановом пространстве, M_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — конечный набор точек поверхности S. Доказано: поверхность S допускает такие непрерывные изгибания, что траектории движения точек M_k в пространстве имеют в окрестности каждой точки M_k заданные проекции на исходную поверхность.

Список лит.: 3 назв.