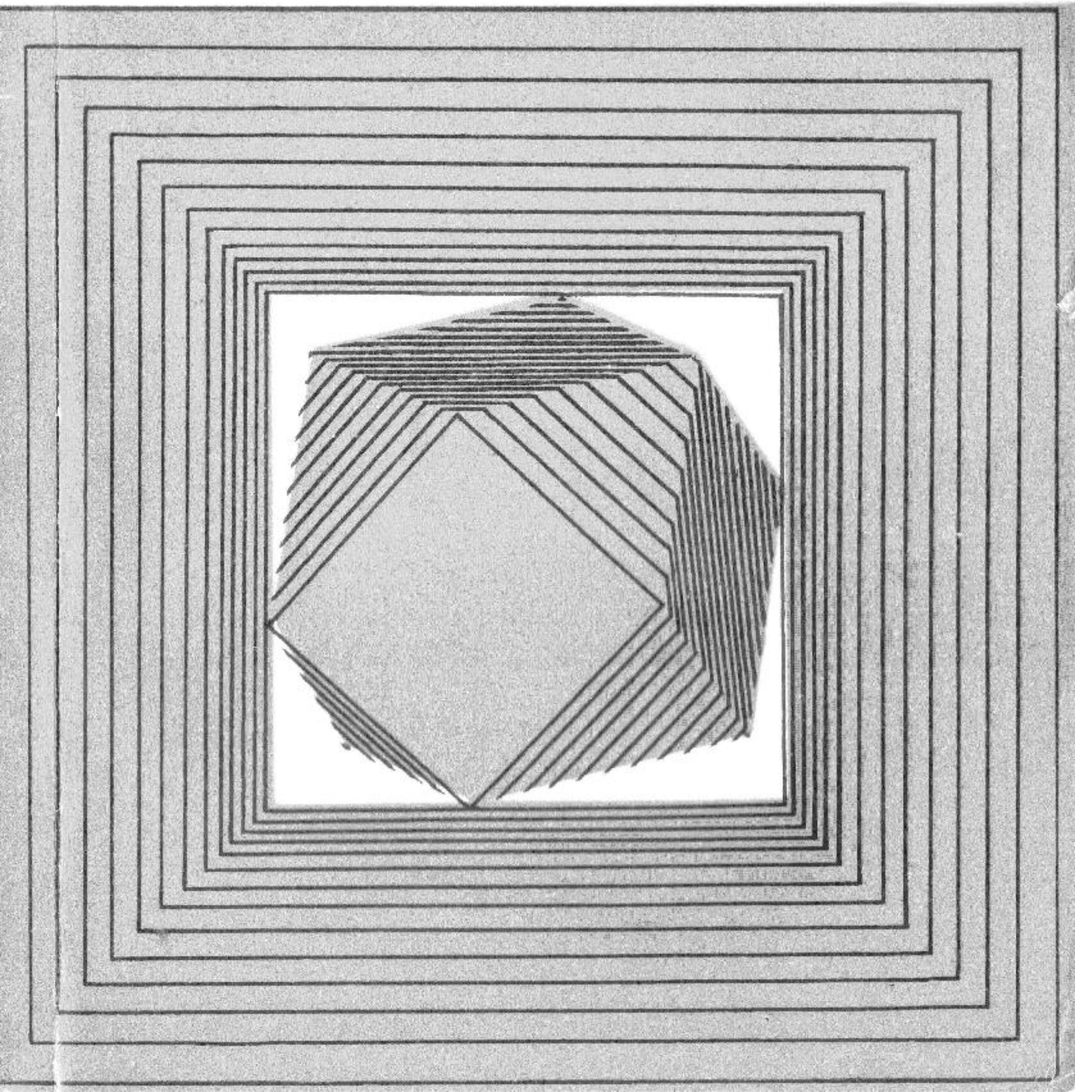
УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК **21**



СОДЕРЖАНИЕ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 21

Редактор А. Л. Алиева. Художественный редактор Т. П. Воробиенко. Технический редактор Л. Т. Момот. Корректор Л. П. Пипенко

Информ. бланк № 2895

Сдано в набор 23.11.77. Подп. в печать 1.03.78. БЦ № 09119. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать. 9 усл. печ. л. 10,7 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд. № 601. Зак. 7-524. Цена 1 р. 50 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак: 805:

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 21

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

Харьков
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1978

513
У45
УДК 513

Украинский геометрический сборник, вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, 143+6 с.

В статьях сборника рассматриваются вопросы геометрии «в целом» (теоремы существования и единственности выпуклых поверхностей, грани выпуклого компакта, вопросы теории смешанных объемов, оценки размеров кривых ограниченной кривизны); геометрии римановых пространств (бесконечно малые деформации поверхностей, теоремы сравнения для объемов, минимальные поверхности в пространстве Лобачевского); геометрии дифференцируемых многообразий (расслоения и погружения); неголономной геометрии.

Предназначен для научных работников математических специальностей.

Списки лит. в конце статей.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-92, 40-17-24.

Редакция естественнонаучной литературы

$У \frac{20203-601}{М226(04)-78}$ 363—78

УДК 513

Ю. А. Аминов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БИАНКИ ДЛЯ ОБЛАСТИ МНОГОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Поверхность постоянной отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве преобразованием Бианки переводится в поверхность той же постоянной отрицательной кривизны [1]. Установим аналогичное свойство преобразования Бианки, примененного к области n-мерного пространства Лобачевского L^n, лежащей в $(2n-1)$-мерном евклидовом пространстве. Это преобразование определяется следующим образом. Пусть $x = x(y_1, \ldots, y_n)$ — радиус-вектор подмногообразия, y_i — полугеодезические координаты, такие что линейный элемент записывается в виде

$$ds^2 = e^{2y_n}(dy_1^2 + \cdots + dy_{n-1}^2) + dy_n^2. \tag{1}$$

Тогда преобразование Бианки подмногообразию x ставит в соответствие подмногообразие $\bar{x}$ следующим образом:

$$\bar{x} = x - x_{y_n}. \tag{2}$$

Теорема. *Преобразование Бианки n-мерное подмногообразие постоянной отрицательной кривизны в евклидовом пространстве E^{2n-1} переводит в подмногообразие той же постоянной отрицательной кривизны.*

Для доказательства найдем вид линейного элемента $\bar{x}$. Пусть Γ^k_{ij} — коэффициенты Кристоффеля ds^2; единичные ортогональные друг другу нормали к L^n обозначим через n_σ; $\sigma = 1, \ldots, n-1$, L^σ_{ij} — коэффициенты вторых квадратичных форм по отношению к этим нормалям. Имеем $\bar{x}_{y_i} = x_{y_i} - x_{y_n y_i} = x_{y_i} - \Gamma^j_{ni} x_{y_j} - L^\sigma_{ni} n_\sigma$

Запишем коэффициенты Кристоффеля $\Gamma^j_{ni} = g^{jl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial y_n} + \frac{\partial g_{ln}}{\partial y_i} - \frac{\partial g_{in}}{\partial y_l}\right)$. Отсюда видно, что $\Gamma^j_{ni} = 0$ при $i \neq j$. Кроме того, найдем

$$\Gamma^j_{nj} = 1 \text{ при } j \neq n,\ \Gamma^n_{nn} = 0. \tag{3}$$

Поэтому можно записать

$$\begin{gathered}\bar{x}_{y_i} = x_{y_i} - x_{y_i} - L^\sigma_{ni} n_\sigma = -L^\sigma_{ni} n_\sigma,\ i \leqslant n-1, \\ \bar{x}_{y_n} = x_{y_n} - L^\sigma_{nn} n_\sigma.\end{gathered} \tag{4}$$

Дифференциал $d\bar{x}$ с помощью (4) имеет вид $d\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{y_j} dy_j = -n_\sigma \left(\sum_{j=1}^{n} L^\sigma_{nj} dy_j\right) + x_{y_n} dy_n$. Принимая во внимание ортогональность векторов n_σ и x_{y_n}, получаем

$$d\bar{s}^2 = \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} L_{nj}^{\sigma}\, dy_j\right)^2 + dy_n^2. \tag{5}$$

Докажем, что при некотором выборе нормалей найдутся такие функции $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}$, что

$$d\bar{y}_\sigma = e^{y_n} \sum_{j=1}^{n} L_{nj}^{\sigma}\, dy^j. \tag{6}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты вторых квадратичных форм удовлетворяли уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y_i} e^{y_n} L_{nj}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial y_j} e^{y_n} L_{ni}^{\sigma} = 0. \tag{7}$$

Покажем, что эти уравнения выполняются в силу уравнений Кодацци для x, которые имеют вид [2, с. 196]

$$L_{nj,\,i}^{\sigma} - L_{ni,\,j}^{\sigma} = \sum_{\tau} (\mu_{\tau\sigma/i} L_{nj}^{\tau} - \mu_{\tau\sigma/j} L_{ni}^{\tau}). \tag{8}$$

Ниже покажем, что можно так выбрать поле нормалей n_σ, что все коэффициенты кручения $\mu_{\tau\sigma|i}$ будут равны нулю. В этом случае распишем уравнения Кодацци (8), принимая во внимание (3):

$$L_{nj,\,i}^{\sigma} - L_{ni,\,j}^{\sigma} = \frac{\partial L_{nj}^{\sigma}}{\partial y_i} - \frac{\partial L_{ni}^{\sigma}}{\partial y_j} + L_{ij}^{\sigma} (\Gamma_{nj}^{j} - \Gamma_{ni}^{i}). \tag{9}$$

Умножим (9) на e^{y_n}. Если i и $j \neq n$, то $\Gamma_{nj}^{j} = \Gamma_{ni}^{i} = 1$. В этом случае уравнение (7) выполнено. Если же один из индексов, например i, равен n, то с учетом $\Gamma_{nn}^{n} = 0$ получим $\frac{\partial e^{y_n} L_{nj}^{\sigma}}{\partial y_n} - \frac{\partial e^{y_n} L_{nn}^{\sigma}}{\partial y_j} - L_{nj}^{\sigma} e^{y_n} + L_{nj}^{\sigma} e^{y_n} = 0$. Таким образом и в этом случае (7) выполнено. Докажем теперь сформулированное утверждение.

Лемма. *Если область L^n погружена в E^{2n-1}, то можно выбрать поле нормалей, так что коэффициенты кручения будут равны нулю.*

Используем уравнение (47,14) [2, с. 197]. Если коэффициенты кручения обращаются в ноль в одной координатной системе, то в силу их тензорного характера они обращаются в ноль в любой другой. В силу теоремы 1 из [3] на L^n существуют локальные ортогональные координаты $u_1, \ldots, u_n$, такие что u_i есть линии кривизны на подмногообразии. В этом случае при каждом $\sigma = 1, \ldots, n-1$ $L_{ij}^{\sigma} = 0$ при $i \neq j$. Рассмотрим выражение, входящее в указанное уравнение (47,14): $g^{ih} (L_{ij}^{\tau} L_{hk}^{\sigma} - L_{ik}^{\tau} L_{hj}^{\sigma}) = g^{jk} (L_{jj}^{\tau} L_{kk}^{\sigma} - L_{kk}^{\tau} L_{jj}^{\sigma}) = 0$. Следовательно, уравнение (47,14) имеет вид

$$\mu_{\tau\sigma/j,\,k} - \mu_{\tau\sigma/k,\,j} + \sum_{\rho} (\mu_{\rho\tau/j} \mu_{\rho\sigma/k} - \mu_{\rho\tau/k} \mu_{\rho\sigma/j}) = 0. \tag{10}$$

Левую часть (10) обозначим через $T_{jk}^{\tau\sigma}$. Покажем, что существует один нормальный вектор $\bar{n}_1$, такой что все соответствующие ему коэффициенты кручения $\bar{\mu}_{1k/l}$ равны нулю. Пусть $\bar{n}_1$ входит в ортонормированный базис нормалей $\bar{n}_k$, который связан с другим базисом n_p следующим образом: $\bar{n}_k = a_{kp}n_p$. Матрица a_{kp} ортогональная. Должны выполняться уравнения $\bar{\mu}_{1k/l} = -a_{kp}\frac{\partial a_{1p}}{\partial u_l} + a_{1p}a_{kp}\mu_{pq/l} = 0$. Умножив на $a^{\tau k}$ и свернув по k, получим систему

$$\frac{\partial a_{1\tau}}{\partial u_j} = \sum_p a_{1p}\mu_{p\tau/j}, \quad \begin{matrix} \tau = 1, \ldots, n-1, \\ j = 1, \ldots, n. \end{matrix} \tag{11}$$

Условие интегрируемости системы (11) имеет вид $a_{1\sigma}T_{jk}^{\tau\sigma} = 0$. В силу (10) это условие выполнено. Так как по индексам p и τ коэффициенты $\mu_{p\tau/j}$ кососимметричны, то $\frac{\partial}{\partial u_j}\sum_\tau a_{1\tau}^2 = 2\sum_{p,\tau} a_{1p}a_{1\tau}\mu_{p\tau/j} = 0$. Начальные значения функций $a_{1\tau}$ положим такие, чтобы выполнялось соотношение $\sum_\tau a_{1\tau}^2 = 1$. Тогда векторное поле $\bar{n}_1 = a_{1\tau}n_\tau$ будет искомым. Рассмотрим нормальное подпространство, ортогональное $\bar{n}_1$. Коэффициенты кручения нормалей из этого подпространства опять удовлетворяют уравнению (10). Аналогично построению $\bar{n}_1$ построим последовательно поля $\bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_{n-1}$, у которых все коэффициенты кручения нулевые. Лемма доказана.

Линейный элемент $\bar{x}$ с использованием (5) записывается в виде $d\bar{s}^2 = e^{-2y_n}(d\bar{y}_1^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2) + dy_n^2$. Следовательно, $\bar{x}$ — подмногообразие постоянной отрицательной кривизны. Из (4) следует $(\bar{x}_{y_i}x_{y_j}) = 0$ при $\begin{matrix} i = 1, \ldots, n, \\ j = 1, \ldots, n-1. \end{matrix}$ Это означает, что касательная плоскость к орисфере $y_n = \text{const}$ будет нормальной плоскостью к $\bar{x}$, а нормальная плоскость к x касается $\bar{x}$. Поле единичных векторов $e^{-y_n}x_{y_j}$, $j = 1, \ldots, n-1$ на $\bar{x}$ является параллельно переносимым в нормальном расслоении подмногообразия, полученного из L^n преобразованием Бианки.

Список литературы

1. Darboux G. Lesons sur la théorie générale des surfaces, vol. III, Paris p. 1887—1896.
2. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948. 316 с.
3. Аминов Ю. А. О погружении областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство. —«Докл. АН СССР», 1977, т. 236, № 3, с. 521—524.

Поступила 11 мая 1977 г.

УДК 513

Л. Л. Бескоровайная

A-ДЕФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХМЕРНОГО РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА СО СТАЦИОНАРНЫМИ ДЛИНАМИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Класс бесконечно малых деформаций поверхностей, сохраняющих элемент площади (A-деформаций), достаточно широк. Поэтому такие деформации целесообразно рассматривать при тех или иных ограничениях. В настоящей работе исследуется задача о существовании A-деформаций при условии стационарности длин асимптотических линий на поверхности трехмерного риманова пространства. Она сводится к системе уравнений, сходной с системой, полученной А. В. Погореловым [1] для поверхностей положительной внешней кривизны, которая решается с помощью аппарата обобщенных аналитических функций [2]. В статье проводится исследование поверхностей отрицательной внешней кривизны, в связи с чем результаты принимают иной геометрический смысл.

Отметим, что в работах [3], [4] изучаются подобные вопросы для поверхностей трехмерного евклидова пространства.

1. A-деформация поверхностей в V_3. Пусть (y^1, y^2, y^3) — точка трехмерного риманова пространства V_3 с метрическим тензором $g_{ij}(y^1, y^2, y^3)$. Пусть в V_3 задана регулярная поверхность F: $y^i = y^i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2, 3$, где u^1, u^2 — координаты точки на поверхности. Предположим, что поверхность F испытывает бесконечно малую деформацию первого порядка, переходя к моменту ε в поверхность $\overset{*}{F}$;

$$\overset{*}{y}{}^i = y^i + \varepsilon\xi^i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Здесь ξ^i — вектор скорости перемещения точек поверхности F в начальный момент деформации (или вектор смещения).

Если линейный элемент ds^2 поверхности F имеет вид $ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$, где

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^j}{\partial u^\beta}, \tag{2}$$

то линейный элемент $d\overset{*}{s}{}^2$ поверхности $\overset{*}{F}$ примет следующий вид $d\overset{*}{s}{}^2 = \overset{*}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta$, где $\overset{*}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} = \overset{*}{g}_{ij}\frac{\partial \overset{*}{y}{}^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \overset{*}{y}{}^j}{\partial u^\beta}$. В дальнейшем всюду латинские индексы $i, j, k, \ldots$ принимают значения 1, 2, 3, а греческие α, $\beta, \gamma, \ldots$ — значения 1, 2. Учитывая (1), вычисляем выражение первой вариации $2\varepsilon_{\alpha\beta}$ метрического тензора поверхности F:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\xi^k\frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^j}{\partial u^\beta} + g_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta} + g_{ij}\frac{\partial \xi^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^j}{\partial u^\beta}. \tag{3}$$

Введем элементы матрицы $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, обратной для $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Тогда $\overset{*}{\tilde{g}} = \overset{*}{g}_{11}\overset{*}{g}_{22} - \overset{*}{g}{}_{12}^{2} = \tilde{g} + 2\varepsilon\tilde{g}\varepsilon_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} + \boxed{\varepsilon^2}$, где $\tilde{g} = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2$ и через ε^2 обозначены величины не ниже второго порядка малости относительно ε, которыми мы всюду будем пренебрегать. Отсюда найдем вариацию элемента площади поверхности F:

$$\delta\, d\sigma = \left.\frac{\partial d\overset{*}{\sigma}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \varepsilon_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta}\, d\sigma.$$

Деформацию вида (1) поверхности назовем бесконечно малой ареальной (А-деформацией), если в начальный момент ($\varepsilon = 0$) элементы площадей на поверхности стационарны. Необходимое и достаточное условие этого требования, очевидно, имеет вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} = 0 \tag{4}$$

или, учитывая (3):

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\xi^k \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^j}{\partial u^\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} + 2g_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} = 0. \tag{4'}$$

2. Уравнения А-деформации в полугеодезических координатах. В римановом пространстве V_3 в окрестности поверхности F введем полугеодезическую параметризацию v^i, $i = 1, 2, 3$, относительно которой уравнения базисной поверхности F будут $v^\alpha = u^\alpha$, $v^3 = 0$. Тогда $\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} = \delta^\alpha_\beta$, $\frac{\partial v^3}{\partial u^1} = \frac{\partial v^3}{\partial u^2} = 0$; $g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{33} = 1$ во всей параметризованной окрестности. На поверхности F в соответствии с (2) $g_{\alpha\beta}|_F = \tilde{g}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta < 3$. Уравнения поверхности $\overset{*}{F}$ теперь запишем в виде $\overset{*}{y}{}^\alpha = \overset{*}{v}{}^\alpha = v^\alpha + \varepsilon\xi^\alpha = u^\alpha + \varepsilon\xi^\alpha$, $\overset{*}{y}{}^3 = \overset{*}{v}{}^3 = \varepsilon\xi^3$.

Учитывая эти соотношения, из (3) найдем выражение $2\varepsilon_{\alpha\beta}$ в полугеодезических координатах. Они совпадают с полученными А. В. Погореловым (см. 1, гл. VI, § 4,6] вариациями метрического тензора поверхности F:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial v^k}\xi^k + \tilde{g}_{\alpha\gamma}\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial u^\beta} + \tilde{g}_{\beta\gamma}\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial u^\alpha}. \tag{5}$$

Признак А-деформации (4′) в полугеодезических координатах в силу (5) приобретает форму

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial v^k}\xi^k g^{\alpha\beta} + 2\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^\alpha} = 0. \tag{6}$$

3. О свойстве А-деформации оставлять стационарными длины двух семейств кривых на поверхности. Отметим, что на регулярной поверхности, погруженной в трехмерное риманово пространство, А-деформация оставляет стационарными длины двух взаимно ортогональных семейств вещественных кривых.

Действительно, кривые, длины которых остаются стационарными в начальный момент А-деформации поверхности F, следует вычислить из дифференциального уравнения

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = 0, \tag{7}$$

где величины $2\varepsilon_{\alpha\beta}$ через вектор смещения выражаются по формулам (5) при учете (6). Случай $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv 0$, α, $\beta = 1$, 2 исключаем из рассмотрения, так как ему соответствует бесконечно малое изгибание поверхности F (т. е. тривиальная А-деформация). Тогда дискриминант алгебраического 2-го порядка относительно $du^1 : du^2$ (или $du^2 : du^1$) уравнения (7) всегда положителен. Чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить его, например, в ортогональной координатной системе на поверхности [см. также (4)]: $D = \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} = \varepsilon_{12}^2 + \frac{\tilde{g}_{22}}{\tilde{g}_{11}}\varepsilon_{11}^2$. Следовательно, уравнение (7) имеет два различных вещественных корня.

Если же полученные два семейства кривых со стационарными длинами принять в качестве координатных, то, учитывая (4), из (7) получим $\tilde{g}_{12} = 0$. Этот факт свидетельствует о взаимной ортогональности указанных семейств кривых.

4. А-деформация поверхности со стационарными длинами асимптотических линий. Исследуем вопросы существования и произвола А-деформации поверхности отрицательной внешней кривизны K_e при дополнительном условии, что в начальный момент времени остаются стационарными длины двух семейств асимптотических линий.

Теорема. *Нетривиальные А-деформации со стационарными длинами асимптотических линий на поверхностях отрицательной внешней кривизны трехмерного риманова пространства допускают минимальные поверхности и только они. Вектор смещения при этом зависит от одной произвольной регулярной функции $t(u^1, u^2)$ двух переменных и двух регулярных функций $\mu = \mu(u^1 + u^2)$ и $\nu = \nu(u^1 - u^2)$.*

Доказательство. При заданных условиях уравнение (7) и уравнение асимптотических линий $\lambda_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = 0$ должны определять одинаковые геометрические образы. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $2\varepsilon_{\alpha\beta} = t\lambda_{\alpha\beta}$, где $t = t(u^1, u^2)$ — некоторая функция точки поверхности. Или, учитывая (5):

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial v^k}\xi^k + \tilde{g}_{\alpha\gamma}\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial u^\beta} + \tilde{g}_{\beta\gamma}\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial u^\alpha} = t \cdot \lambda_{\alpha\beta}. \tag{8}$$

Последнее соотношение умножим на $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и просуммируем по α, β. Тогда в силу (6) находим, что $t\lambda_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} = t2H = 0$, т. е. $2H = 0$ (здесь $t \neq 0$: случай $t = 0$ равносилен бесконечно малому изгибанию).

Отсюда следует, что нетривиальные А-деформации со стационарными длинами двух семейств асимптотических линий могут допускать только минимальные поверхности.

Значит, поставленная задача сводится к решению систем уравнений (6), (8) для минимальных поверхностей. Учитывая, что [1] $\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial u^3} = -2\lambda_{\alpha\beta}$, эти уравнения примут вид: $\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \xi^\gamma \tilde{g}^{\alpha\beta} + 2\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^\alpha} = 0$, $\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \xi^\gamma + \tilde{g}_{\alpha\gamma} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial u^\beta} + \tilde{g}_{\beta\gamma} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial u^\alpha} = (t + 2\xi^3)\lambda_{\alpha\beta}$. Так как ξ^γ — тензор на F, представим эту систему уравнений в ковариантных производных на базе метрического тензора $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ поверхности F:

$$\xi^\alpha_{,\alpha} = 0, \quad \tilde{g}_{\alpha\gamma}\xi^\gamma_{,\beta} + \tilde{g}_{\beta\gamma}\xi^\gamma_{,\alpha} = (t + 2\xi^3)\lambda_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

Легко видеть, что общее решение уравнения $\xi^\alpha_{,\alpha} = 0$ через некоторый градиентный вектор ψ_β выражается в виде

$$\xi^\alpha = c^{\alpha\beta}\psi_\beta, \tag{10}$$

где $c^{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\alpha\gamma}\tilde{g}^{\beta\delta}c_{\gamma\delta}$; $c_{\gamma\delta}$ — дискриминантный тензор поверхности F. Подставив ξ^α из (10) во второе соотношение (9), получим систему уравнений

$$\tilde{g}_{\alpha\delta}c^{\delta\gamma}\psi_{\gamma,\beta} + \tilde{g}_{\beta\delta}c^{\delta\gamma}\psi_{\gamma,\alpha} = (t + 2\xi^3)\lambda_{\alpha,\beta} \tag{11}$$

относительно градиентного вектора ψ_γ. Через этот вектор можно выразить третью компоненту ξ^3 вектора смещения. Для этого достаточно ввести тензор $d^{\alpha\beta} = \frac{1}{K_e} c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}\lambda_{\gamma\delta}$, $d^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\gamma$, умножить (11) на $d^{\alpha\beta}$ и просуммировать по α, β; тогда получим

$$\xi^3 = \frac{1}{2}(c^{\alpha\beta}d^\gamma_\alpha\psi_{\beta,\gamma} - t). \tag{12}$$

Итак, мы нашли представление вектора смещения ξ^i, $i = 1, 2, 3$, (10), (12) через градиентный вектор ψ_β и функцию $t(u^1, u^2)$. Вектор ψ_β здесь не может быть произвольным. Найдем условия, которым он должен удовлетворять.

Отнесем поверхность F к изотермическим координатам (их можно ввести на всей поверхности в целом, см. [2]). В изотермической координации для минимальных поверхностей выполняются равенства $\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22}$, $\tilde{g}_{12} = 0$, $\lambda_{22} = -\lambda_{11}$, $\lambda_{12} = 0$. При их учете из (11) найдем кроме (12) еще одно независимое уравнение. Оно связывает компоненты градиентного вектора ψ_β $\psi_{2,2} - \psi_{1,1} = 0$ и в развернутом виде дает следующее уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа относительно функции $\psi(u^1, u^2)$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^{2^2}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial u^{1^2}} - \frac{\partial \ln \tilde{g}_{11}}{\partial u^1}\frac{\partial\psi}{\partial u^1} - \frac{\partial \ln \tilde{g}_{11}}{\partial u^2}\frac{\partial\psi}{\partial u^2} = 0. \tag{13}$$

Найдем интеграл этого уравнения, принимающий определенные значения $\psi|_{u^1-u^2=x_0} = \mu(u^1 + u^2)$, $\psi|_{u^1+u^2=y_0} = \nu(u^1 - u^2)$, $\mu(y_0) =$

$= \nu(x_0)$ на его характеристиках. Придем к задаче Гурса [см., например, 5], из которой следует, что каждой паре функций $\mu(u^1 + u^2)$ и $\nu(u^1 - u^2)$ отвечает единственное решение $\psi(u^1, u^2)$ уравнения (13). Но через функции $\psi(u^1, u^2)$ и $t(u^1, u^2)$ у нас представлены компоненты вектора смещения (10), (12). Теорема доказана.

Список литературы

1. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, гл. VI. М., «Наука», 1969. 760 с.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
3. Бескоровайна Л. Л. Про нескінченно малі деформації, що зберігають довжину асимптотичних ліній. —«Матеріали університетської наук. конф. молодих вчених, присвяченої 100-річчю з дня народження В. І. Леніна» (природничі науки). Одеса, 1970, с. 104—109.
4. Бескоровайная Л. Л. Канонические А-деформации, сохраняющие длины линий кривизны поверхности. —«Мат. сб.», т. 97 (139), № 2(6), 1975, с. 163—176.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970. 710 с.

Поступила 20 мая 1976 г.

УДК 513

Ю. Д. Бураго

О РАДИУСЕ ИНЪЕКТИВНОСТИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ СВЕРХУ КРИВИЗНЫ

1. Радиусом инъективности $r(x)$ риманова многообразия M в точке x называется supremum тех $\varepsilon > 0$, для которых экспоненциальное отображение $\exp_x : T_x M \to M$ инъективно в шаре радиуса ε с центром в нуле. Нижнюю грань $r(x)$ по всем $x \in M$ называют радиусом инъективности для M. Для полных односвязных многообразий M положительной ограниченной сверху секционной кривизны K_σ радиус инъективности $r(M)$ во многих случаях удается оценить снизу [1]. При отказе от $K_\sigma > 0$ радиус $r(M)$ снизу, вообще говоря, не оценивается. Здесь будут даны в двумерном случае некоторые оценки снизу для верхней точной грани $r(x)$ по всем $x \in M$.

2. В дальнейшем всюду G — неполное связное односвязное двумерное риманово многообразие с гауссовой кривизной $\leqslant K$, $K > 0$, а $\overline{G}$ — минимальное метрическое пополнение G; предполагается, что $\overline{G}$ компактно. Положим $\partial G = \overline{G} \setminus G$. Пусть ρ — метрика $\overline{G}$. Для множества $E \subset \overline{G}$ полагаем $R(E) = \sup\{\rho(x, \overline{G} \setminus E),\ x \in E\}$. В частности, $R = R(G) = \sup\{\rho(x, \partial G),\ x \in G\}$. Пусть $F(E)$ — площадь множества $E \subset G$, а $s(\gamma)$ — длина кривой γ.

3. Поводом для возникновения этой заметки послужили следующие два вопроса, поставленные Р. Оссерманом. Верно ли, что при $R(G) \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ непременно $F(G) \geqslant \frac{4\pi}{K}$? Верно ли, что при $R(G) < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ найдется точка x, для которой $R = r(x)$? Следующие результаты содержат положительный ответ на оба вопроса.

4. Теорема. (A) *Если* $R(G) < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ и $p \in G$, *причем* $\rho(p, \partial G) = R$, *то* $r(p) = R$.

(B) *Если* $R \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, *то существует такая точка* $p \in G$, *что* $\rho(p, \partial G) \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ *и* $r(p) \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

Пусть $S_{K, R}$ при $0 < R < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ — открытый круг радиуса R на сфере $S^2(K)$ кривизны K и при $R \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ — сфера $S^2(K)$ с выколотой точкой.

5. Следствие 1. *Справедливо неравенство* $F(G) \geqslant F(S_{K, R})$. *Равенство достигается тогда и только тогда, когда* G *изометрично* $S_{K, R}$.

6. Следствие 2. *Пусть* M — *замкнутое односвязное риманово многообразие кривизны* $\leqslant K$, $K > 0$. *Тогда существует такая точка* $p \in M$, *что* $r(p) \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

7. *Замечания.*

1. Как будет видно из доказательства, в случае (A) отображение $\exp_p$ инъективно даже в замкнутом круге радиуса R; если же $\rho(p, \partial G) < R$, то $\exp_p$ инъективно в пересечении круга радиуса R с областью определения $\exp_p$. В случае (B) это, вообще говоря, не так.

2. Полученные результаты легко распространить на негладкие двумерные многообразия удельной кривизны $\leqslant K$, $K > 0$. При $K \leqslant 0$ теорема и следствие 1 [с заменой сферы $S^2(K)$ соответственно плоскостью Евклида ($K = 0$) или Лобачевского ($K < 0$)] тривиально справедливы, а следствие 2 бессодержательно.

3. Теорема и следствие 1 не допускают обобщения по размерности. Точнее, для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует последовательность таких трехмерных гомеоморфных замкнутому шару многообразий M_i с $R(M_i) = 1$, для которых $\limsup_{i \to \infty} \{r(p),\ p \in M_i,\ \rho \times (p, \partial M_i) \geqslant \varepsilon\} = 0$. Соответствующий пример получается из примера, построенного в [4] при подходящем выборе свободных параметров. Возможно ли обобщение по размерности следствия 2, не известно.

4. Следствие 1 немедленно вытекает из теоремы п. 4 и теоремы сравнения Рауха. Оно допускает также простое доказатель-

ство, независимое от теоремы. Следствие 2 доказано в конце заметки.

5. Ясно, что достаточно ограничиться случаем $K=1$. В дальнейшем всюду будем считать $K=1$.

8. Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Геодезической пространства $\overline{G}$ назовем такую кривую γ, что для любой точки $x \in \gamma$ найдется дуга $\widehat{yz}$ кривой γ, являющаяся кратчайшей, причем x есть внутренняя точка $\widehat{yz}$.

Поясом назовем геодезическую γ, являющуюся простой замкнутой кривой (замкнутую геодезическую) и удовлетворяющую дополнительному условию: для любых $x, y \in \gamma$ одна из двух ее дуг является кратчайшей. Двуугольником назовем замкнутое множество, ограниченное двумя кратчайшими с общими концами — вершинами двуугольника. Сумму длин этих кратчайших будем называть периметром двуугольника.

9. Следующие два утверждения хорошо известны.

Лемма 1 [2]. *Если периметр l двуугольника D меньше 2π, то в D существует пояс γ длины $s(\gamma) \leqslant l$.*

Пояс γ является границей того из содержащихся в D двуугольников, который имеет наименьший периметр.

Лемма 2. *Если $E \subset \overline{G}$, $p \in G$ и $\rho(p, E) = \sup\{\rho(x, E), x \in G\} > 0$, то существуют три геодезические γ_i с началом p и концами в E, имеющие длину $\rho(p, E)$ и разбивающие окрестность p на секторы с углами α_i, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi$, $i = 1, 2, 3$. (В частности, две из γ_i могут совпадать, а третья являться их продолжением).*

Эта лемма есть просто вариант леммы Берже ([1, с. 275; 2]).

10. Пояс γ (и соответственно ограниченную им область Q_γ) будем называть крайним, если в Q_γ нет других поясов. Для различных поясов γ, γ' имеем $Q_\gamma \cap Q_{\gamma'} = \varnothing$, хотя не исключено, что $\gamma \cap \gamma' \neq \varnothing$.

11. Лемма 3. *В области $\overline{Q}_\gamma \subset \overline{G}$, ограниченной поясом γ, содержится хотя бы один крайний пояс. Число различных крайних поясов, содержащихся в $\overline{G}$, конечно.*

Доказательство леммы стандартно получается из следующих хорошо известных утверждений. Длины поясов γ ограничены сверху числом $2\,\mathrm{diam}\,\overline{G}$. Множество кривых, лежащих в компакте и имеющих равномерно ограниченные длины, компактно. Предел кратчайших есть кратчайшая. По теореме Гаусса—Бонне $F(Q_\gamma) \geqslant \omega(Q_\gamma) = 2\pi - \tau(\gamma) \geqslant 2\pi$, где ω — кривизна, а τ — поворот со стороны Q_γ; поэтому число попарно непересекающихся Q_γ не превосходит $\frac{1}{2\pi} F(G)$.

12. Лемма 4. *Если область Q_γ ограничена крайним поясом γ, то либо $R(Q_\gamma) \geqslant \pi$, либо для любой точки $x \in \gamma$ найдется такая точка $y \in \overline{Q}_\gamma$, что $\rho(x, y) \geqslant \pi$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a(\gamma)<2\pi$ и $R(Q_\gamma)<\pi$. Из теоремы 2 работы [3] с учетом неравенства $F(Q_\gamma)\geqslant 2\pi$ следует, что $R(Q_\gamma)\geqslant\frac{\pi}{2}$. Пусть $m\in Q_\gamma$ и $\rho(m, \gamma)\geqslant\frac{\pi}{2}$. Из того, что $R(Q_\gamma)<\pi$, а γ — крайний пояс, следует, что любая точка $x\in\overline{Q}_\gamma$ соединима с m единственной кратчайшей (проходящей в $\overline{Q}_\gamma$), причем такие кратчайшие не могут разветвляться. Иными словами, $\exp_m$ инъективно в такой замкнутой области $N\subset T_mG$, что $\exp_m N=\overline{Q}_\gamma$. Поэтому можно определить отображение $\varphi\colon\overline{Q}_\gamma\to S^2(1)$ равенством $\varphi=(\exp_m|_N)^{-1}\circ I\circ\exp_{m'}$, где $m'\in S^2(1)$, а $I\colon T_mG\to T_{m'}S^2(1)$ — линейная изометрия. Тогда $\varphi(\overline{Q}_\gamma)$ содержит полусферу с центром m'. Следовательно, для любой точки $y\in\varphi(\gamma)$ диаметрально противоположная ей точка $z\in\varphi(\overline{Q}_\gamma)$. Расстояние $\tilde\rho(y, z)$ в индуцированной метрике области $\varphi(\overline{Q}_\gamma)$ не меньше π. Из теоремы сравнения Рауха следует, что отображение φ — нерастягивающее. Поэтому тем более $\rho(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z))\geqslant\pi$. Лемма доказана.

13. Приступим к доказательству теоремы. Пусть $p\in G$, допустим, что $\exp_p$ не инъективно в пересечении области определения $\exp_p$ с открытым кругом радиуса π с началом в нуле. Тогда найдется двуугольник D, ограниченный двумя различными кратчайшими pq длины $R'<\pi$. Согласно леммам **1** и **3**, в D содержится непустое конечное множество крайних поясов γ_i, ограничивающих области $Q_{\gamma_i}=Q_i$.

14. Пусть E — объединение тех компонент $\overline{G}\setminus\{x\in G,\ \rho(x, p)\leqslant R'\}$, которые пересекаются с ∂G. Положим $G'=\overline{G}\setminus E$. Ясно, что $D\subset G'$ и $R(G')\leqslant R$. Заметим, что при $x\in G'$ будет $\rho(x, \partial G')=\rho(x, q)$, так что

$$R\geqslant R(G')=\sup\{\rho(x, q),\ x\in G'\}. \tag{1}$$

Действительно, пусть $\rho(x, \partial G')=\rho(x, y)$, $y\in\partial G'$, $y\neq q$. На кратчайшей xy найдется точка $z\in\partial D$. Тогда $\rho(p, z)+\rho(z, q)=\rho(p, q)=\rho(p, y)\leqslant\rho(p, z)+\rho(z, y)$, так что $\rho(z, q)\leqslant\rho(z, y)$, и поэтому $\rho(x, \partial G')=\rho(x, y)=\rho(x, z)+\rho(z, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, q)\leqslant\rho(x, q)$.

15. В каждой области $\overline{Q}_i$ фиксируем точку x_i так, что $\rho(x_i, q)=\max\{\rho(x, q),\ x\in\overline{Q}_i\}$. Существует по крайней мере две различные кратчайшие qx_i. Обозначим через D_i ограниченный ими двуугольник. Если $\operatorname{int}D_i\cap\operatorname{int}D_j\neq\varnothing$, то либо $D_i\subset D_j$, либо $D_j\subset D_i$. Поэтому можно указать такой двуугольник $D_{i_0}=D^0$ с вершинами q, $x_{i_0}=x^0$, который не содержит отличных от него двуугольников D_i. Нетрудно видеть, что D^0 не может пересекаться с областями Q_i, отличными от $Q_{i_0}=0^0$.

16. Покажем, что $R(G')\geqslant\pi$. Если $\rho(x^0, q)\geqslant\pi$, то это следует из (1). Если же $\rho(x^0, q)<\pi$, то по леммам **1** и **3** двугольник D^0 содержит область Q, ограниченную крайним поясом. По выбору i_0 областью Q может быть лишь Q^0. При этом, очевидно, $x^0 \in \partial Q^0$, и с помощью леммы 2 заключаем, что $\overline{Q}^0 = D^0$. Теперь по лемме 4 найдется такая точка $z \in \overline{Q}^0$, что $\rho(q, z) \geqslant \pi$, и поэтому ввиду (1) $R(G') \geqslant \pi$.

17. В случае (А) последнее неравенство противоречит условию $R < \pi$, и теорема доказана. Пусть имеет место случай (B), $R \geqslant \pi$. Рассмотрим множество Δ односвязных замкнутых областей $\Omega \subset \overline{G}$, удовлетворяющих условию: существует такая точка $x \in \Omega$, что $\rho(x, \partial\Omega) \geqslant \pi$ и $\rho(x, y) = \rho(x, \partial\Omega)$ для любой точки $y \in \partial\Omega$. Точку x назовем центром Ω. Множество Δ непусто, ибо построенное выше множество $G' \in \Delta$. Нетрудно видеть, что в Δ существует элемент Ω_0 наименьшей площади. Пусть x_0 — центр Ω_0. Если $r(x_0) \geqslant \pi$, то теорема доказана. Пусть $r(x_0) < \pi$. Тогда, рассуждая как в пп. 13—16, но с заменой области $\overline{G}$ на Ω_0, получим область $\Omega' \in \Delta$, играющую для Ω_0 ту же роль, что G' для $\overline{G}$. По построению Ω' ее центр x' принадлежит некоторому двуугольнику с вершинами x_0, y_0, причем $y_0 \in \partial\Omega'$. С другой стороны, $\rho(x_0 y_0) = r(x_0) < \pi$, так что $y_0 \in \operatorname{int}\Omega_0$. Поэтому $F(\Omega_0 \setminus \Omega') > 0$, т. е. $F(\Omega') < F(\Omega_0)$, что противоречит выбору Ω_0. Теорема доказана.

18. Докажем следствие 2. Пусть M' — компонента M, x, $y \in M'$, $\rho(x, y) = \operatorname{diam} M'$. Если $\rho(x, y) \geqslant \pi$, достаточно применить нашу теорему к $M' \setminus \{x\}$. Если $\rho(x, y) < \pi$, то существуют две различные кратчайшие xy, разбивающие M' на два двуугольника D_1, D_2. По лемме 1 в каждом двуугольнике D_i найдется пояс γ_i, ограничивающий область Q_i, не пересекающуюся с внутренностью второго двуугольника. По теореме 2 работы [3] будет $R(Q_i) \geqslant \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$, что противоречит неравенству $\operatorname{diam} M' < \pi$.

Список литературы

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., «Мир», 1971. 343 с.
2. Топоногов В. А. Изопериметрическое неравенство для поверхностей, гауссова кривизна которых ограничена сверху. —«Сиб. мат. журн.», 1969, т. 10, № 1, с. 144—157.
3. Ионин В. К. Об изопериметрических и некоторых других неравенствах для многообразий ограниченной кривизны. — «Сиб. мат. журн.», 1969, т. 10, № 2, с. 329—342.
4. Ионин В. К. Изопериметрические неравенства в односвязных римановых пространствах неположительной кривизны.—«ДАН СССР», 1972, т. 203, № 2, с. 282—284.

Поступила 12 мая 1977 г.

УДК 513

С. В. Буяло

ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕМОВ В РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Введение. Основной результат настоящей заметки составляют теоремы 2.3, 2.4. Поясним обстоятельства, в связи с которыми возникает потребность в них.

1.1. Известная теорема сравнения Рауха состоит в следующем. Пусть M, M' — римановы многообразия размерности m; $m \geqslant 2$; $\gamma : [0, s_0] \to M$, $\gamma' : [0, s_0] \to M'$ — нормальные геодезические, а Y, Y' — нормальные* поля Якоби вдоль γ, γ', удовлетворяющие условиям $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$, $|\dot{Y}(0)| = |\dot{Y}'(0)|$. Предположим, что γ' не имеет сопряженных точек в $(0, s_0)$ и выполнены неравенства

$$K_\sigma(t) \leqslant K'_{\sigma'}(t), \qquad (*)$$

где $K_\sigma(t)$, $K'_{\sigma'}(t)$ — секционные кривизны M, M' в точках $\gamma(t)$, $\gamma'(t)$ и в любых двумерных направлениях σ, σ', содержащих $\dot{\gamma}(t)$, $\dot{\gamma}'(t)$. Тогда при всех $t \in [0, s_0]$ $|Y(t)| \geqslant |Y'(t)|$. (Точка означает дифференцирование по t).

1.2. Эта теорема допускает следующее обобщение [2; 4, с. 30]. Пусть N — n-мерное подмногообразие M, $1 \leqslant n < m$, ортогональное к γ в точке $\gamma(0)$; N' — гиперповерхность в M', ортогональная γ' в точке $\gamma'(0)$. Пусть, далее, Y и Y' — соответственно N, N' — якобиевы поля вдоль γ, γ' (см. [3, с. 275]), причем $|Y(0)| = |Y'(0)|$. Предположим, что $\gamma'((0, s_0))$ не содержит фокальных точек гиперповерхности N'. Если при этом все нормальные кривизны N по отношению к $\dot{\gamma}(0)$ не меньше максимума нормальных кривизн N' относительно $\dot{\gamma}'(0)$ и выполняется условие (*), то при всех $t \in [0, s_0]$ $|Y(t)| \geqslant |Y'(t)|$.

1.3. Теорема 1.2 становится неверной, если не предполагать, что N' — именно *гиперповерхность*. Соответствующие примеры приведены в [2].

1.4. В связи с 1.3 отметим следующее. Из 1.1, в частности, следует, что если секционные кривизны m-мерного многообразия M неотрицательны, то для $p \in M$ отображение $\exp_p : M_p \to M$ является до первой сопряженной точки нерастягивающим. Но если N — вполне геодезическое n-мерное подмногообразие M, $1 \leqslant n < m - 1$ (например, геодезическая при $m > 2$), то экспоненциальное отображение подмногообразия $\exp_N : N^\perp \to M$ может перестать быть нерастягивающим и до появления фокальных точек [2; 4, с. 32].

1.5. Однако, как следует из теоремы 2.3 настоящей заметки, отображение $\exp_N$ в условиях п. 1.4 тем не менее не увеличивает объем. Последнее заключение не следует непосредственно из тео-

---

* Якобиево поле Y вдоль γ называется нормальным, если оно ортогонально γ, т. е. если $\langle Y, \dot{\gamma}\rangle = 0$. В дальнейшем мы рассматриваем только нормальные якобиевы поля.

рем 1.1, 1.2. Так, если мы, например, дополним подмногообразие N (чтобы применить теорему 1.2) до вполне геодезической гиперповерхности $\widetilde{N}$, то фокальные точки $\widetilde{N}$ могут появиться существенно раньше фокальных точек N. Это обстоятельство не было учтено в доказательстве теоремы 1 в работе [5], так что второе из неравенств (3) [5], вообще говоря, неверно*. Однако теорема 1 [5] справедлива, как это непосредственно следует из теоремы 2.3.

2. Формулировки основных результатов. 2.1. Обозначения. Все многообразия и подмногообразия считаем C^∞-гладкими. В m-мерном римановом многообразии M, $m \geqslant 2$ рассматривается замкнутое n-мерное подмногообразие N, $0 \leqslant n < m$. Обозначим через $N^\perp$ нормальное расслоение над N. Пусть P — фокальное множество отображения $\exp_N : N^\perp \to M$, т. е. множество критических точек $\exp_N$ в $N^\perp$ [1, с. 154]. Введем на расслоении $\widetilde{N}^\perp$ единичных нормалей над N функцию $s : \widetilde{N}^\perp \to R_+$, $s(v) = \inf\{\tau > 0 : \tau v \in P\}$.

Для $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $v \in \widetilde{N}^\perp$ обозначим через $S_j(v)$ j-тую элементарную симметрическую функцию главных кривизн $\varkappa_i(v)$, $i = 1, \ldots, n$ подмногообразия N относительно нормали v, т. е. $S_0(v) \equiv 1$, $S_j(v) = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_j} \varkappa_{i_1}(v) \ldots \varkappa_{i_j}(v)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Если W — конечномерное вещественное векторное пространство, то $\Lambda_k(W)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ — вещественное векторное пространство k-векторов. Скалярное произведение в W индуцирует скалярное произведение и норму в $\Lambda_k(W)$.

Введем функции

$$f_\mu(s) = \begin{cases} \sin\sqrt{\mu}s/\sqrt{\mu}, & \mu > 0, \\ s, & \mu = 0, \\ \operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}\,s/\sqrt{|\mu|}, & \mu < 0, \end{cases} \quad g_\mu(s) = \begin{cases} \cos\sqrt{\mu}s, & \mu > 0, \\ 1, & \mu = 0, \\ \operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}\,s, & \mu < 0. \end{cases}$$

2.2. Поле $\hat{Z}(s) \in \Lambda_{m-1}(M_{\gamma(s)})$ $(m-1)$-векторов вдоль геодезической γ (см. п. 1.1) будем называть N-якобиевым, если найдутся N-якобиевы векторные поля $Z_1, \ldots, Z_{m-1}$ вдоль γ такие, что для каждого $s \in (0, s_0]$ $\hat{Z}(s) = Z_1(s) \Lambda \ldots \Lambda Z_{m-1}(s)$.

В настоящей заметке получены следующие аналоги теоремы сравнения Рауха для длин N-якобиевых $(m-1)$-полей.

2.3. **Теорема.** *Пусть $\hat{Z}$ — N-якобиево $(m-1)$-поле вдоль γ и пусть кривизны K_σ многообразия M по двумерным направлениям $\sigma = (\dot{\gamma}, v)$ ограничены снизу числом μ. Тогда отношение*

$$|\hat{Z}(s)| / \Big[\sum_{j=0}^{n} (g_\mu(s))^{n-j} (f_\mu(s))^{m-n-1+j} S_j(\dot{\gamma}(0))\Big] \tag{1}$$

не возрастает на $(0, s(\dot{\gamma}(0)))$.

---

* Приведенное в [5] доказательство теоремы 1 справедливо не при всех значениях входящего в формулировку параметра δ, а лишь при $\delta \leqslant \delta(M, N)$, где число $\delta(M, N) > 0$ зависит от секционных кривизн M и нормальных кривизн N.

2.4. **Теорема.** *Пусть $\hat{Z}$ — N-якобиево $(m-1)$-поле вдоль γ; $\varkappa$- наименьшая нормальная кривизна подмногообразия N относительно нормали $\dot{\gamma}(0)$ и кривизны K_σ многообразия M по двумерным направлениям $\sigma = (\dot{\gamma}, v)$ ограничены сверху числом ν. Тогда отношение*

$$|\hat{Z}(s)| / [g_\nu(s) + \varkappa f_\nu(s))^n f_\nu^{m-n-1}(s)] \tag{2}$$

не убывает на $(0, s_1)$, где s_1 — первый положительный корень уравнения

$$(g_\nu(s) + \varkappa f_\nu(s)) f_\nu(s) = 0. \tag{3}$$

Замечание. Случай $n = 0$ рассмотрен в работе [3, с. 315].

2.5. Следствие. *В условиях и обозначениях теоремы* 2.4 $s(\dot{\gamma}(0)) \geqslant s_1$, *т. е. первая фокальная точка геодезической γ относительно подмногообразия N появляется не раньше, чем первый положительный корень уравнения* (3).

3. Вспомогательные предложения.

3.1. Обозначим через $\boldsymbol{B}_\gamma$ вещественное векторное пространство гладких векторных полей вдоль γ, касательных к N в точке $\gamma(0)$ и ортогональных γ. Индексная форма J геодезической γ определяется для $X, Y \in \boldsymbol{B}_\gamma$ равенством

$$J(X, Y) = \int_0^{s_0} [\langle \dot{X}, \dot{Y} \rangle - \langle \boldsymbol{R}(X, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, Y \rangle] \, ds + l_{\dot{\gamma}(0)}(X(0), Y(0)), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{R}$ — преобразование кривизны в M; $l_{\dot{\gamma}(0)}$ — вторая основная форма подмногообразия N относительно нормали $\dot{\gamma}(0)$. Как известно, форма J билинейпа и симметрична.

3.2. Пусть $Z_1, \ldots, Z_{m-1}$ — базис пространства N-якобиевых 1-полей вдоль γ (в частности, $Z_i \in \boldsymbol{B}_\gamma$). Предположим, что $s_0 < s(\dot{\gamma}(0))$, т. е. в $(0, s_0]$ нет фокальных точек геодезической γ относительно N. Тогда $X \in \boldsymbol{B}_\gamma$ допускает разложение $X = \sum_i \alpha_i Z_i$, и мы полагаем $\dot{X} = (\dot{X})^1 + (\dot{X})^2$, где $(\dot{X})^1 = \sum_i \dot{\alpha}_i Z_i$, $(\dot{X})^2 = \sum_i \alpha_i \dot{Z}_i$.

3.3. **Лемма.** [3, с. 284]. *Пусть $X \in \boldsymbol{B}_\gamma$, $s_0 < s(\dot{\gamma}(0))$. Тогда*

$$J(X, X) = \langle X, (\dot{X})^2 \rangle|_{s_0} + \int_0^{s_0} \langle (\dot{X})^1, (\dot{X})^1 \rangle \, ds.$$

3.4. Пусть $B : \boldsymbol{B}_\gamma \times \boldsymbol{B}_\gamma \to R$ — билинейная симметричная форма на $\boldsymbol{B}_\gamma$, $\boldsymbol{B}_\gamma^{m-1} = \boldsymbol{B}_\gamma \times \cdots \times \boldsymbol{B}_\gamma$ ($m-1$ множитель). Определим отображение $Q_B : \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1} \times \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1} \to R$ по формуле

$$Q_B(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m-1} \det \begin{pmatrix} \langle \xi_1, \eta_1 \rangle|_{s_0} & \dots & \langle \xi_1, \eta_{m-1} \rangle|_{s_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ B(\xi_i, \eta_1) & \dots & B(\xi_i, \eta_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \xi_{m-1}, \eta_1 \rangle|_{s_0} & \dots & \langle \xi_{m-1}, \eta_{m-1} \rangle|_{s_0} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{m-1}) \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$.

3.5. *Замечание.* В (5) все элементы матрицы i-того слагаемого, кроме элементов i-той строки, вычисляются в точке s_0 и, таким образом, не зависят от продолжения векторов $\xi_1(s_0), \dots, \eta_{m-1}(s_0)$ до полей $\xi_1, \dots, \eta_{m-1} \in B_\gamma$. Однако элементы i-той строки, вообще говоря, зависят от этого продолжения. Поэтому, хотя наборы векторных полей ξ, η и определяют $(m-1)$-векторные поля $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ вдоль геодезической γ, но отображение Q_B определено именно на конкретных разложениях ξ и η $(m-1)$-векторных полей $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$, а не $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$.

Из билинейности и симметричности формы B и известных свойств определителей легко получаем

3.6. *Предложение.* Отображение Q_B обладает следующими свойствами:

1. Q_B является $(2m-2)$-линейным; 2. Q_B симметрично, т. е. $Q_B(\xi, \eta) = Q_B(\eta, \xi)$; 3. Q_B антисимметрично по каждому аргументу ξ и η, т. е. если σ — перестановка чисел $\{1, \dots, m-1\}$, $\xi \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$ $\xi_\sigma = (\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(m-1)})$, то $Q_B(\xi_\sigma, \eta) = Q_B(\xi, \eta_\sigma) = \operatorname{sign} \sigma Q_B(\xi, \eta)$.

3.7. Следствие. *Пусть* $\omega = (\omega_{ij})$, $i, j = 1, \dots, m-1$ — *вещественная матрица,* $\xi \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$, $\omega\xi = \left(\sum_{j_1} \omega_{1j_1}\xi_{j_1}, \dots, \sum_{j_{m-1}} \omega_{m-1 j_{m-1}}\xi_{j_{m-1}}\right)$. *Тогда* $\omega\xi \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$ *и* $Q_B(\omega^1\xi, \omega^2\eta) = \det \omega^1 \det \omega^2 \times Q_B(\xi, \eta)$.

3.8. *Предложение.* Пусть ξ — N-якобиево, т. е. все поля $\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ — N-якобиевы. Тогда $Q_J(\xi, \eta) = \langle \nabla_{\dot\gamma}(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{m-1}), \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{m-1} \rangle|_{s_0}$.

Доказательство. Следует из того, что если ξ_i — N-якобиево, то $J(\xi_i, \eta_j) = \langle \dot{\xi}_i, \eta_j \rangle|_{s_0}$.

3.9. Основная лемма. *Пусть* $Z = (Z_1, \dots, Z_{m-1}) \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$ — *базис* N*-якобиевых полей вдоль* γ, $s_0 < s(\dot\gamma(0))$, $V = (V_1, \dots, V_{m-1}) \in B_\gamma^{m-1}$, *причем* $\langle V_i, V_j \rangle|_{s_0} = 0$ *при* $i \neq j$. *Тогда* $Q_J(V, V) \geqslant \lambda^2 Q_J(Z, Z)$, *где* $|V_1 \wedge \dots \wedge V_{m-1}|^2|_{s_0} = \lambda^2 |Z_1 \wedge \dots \wedge Z_{m-1}|^2|_{s_0}$.

Доказательство. При каждом $s \in (0, s_0]$ определим матрицу $\omega(s) = (\omega_{ij}(s))$, $i, j = 1, \dots, m-1$ равенством $V = \omega Z$. Это возможно, так как по условию в $(0, s_0]$ нет фокальных точек геодезической γ. Очевидно, $\lambda^2 = (\det \omega(s_0))^2$. Пусть для $Y \in \boldsymbol{B}_\gamma$ $\dot{Y} = (\dot{Y})^1 + (\dot{Y})^2$, как в 3.2. Введем $B: \boldsymbol{B}_\gamma \times \boldsymbol{B}_\gamma \to R$, $B(X, Y) = \langle X, (\dot{Y})^2 \rangle|_{s_0}$. Форма B, очевидно, билинейна, а из [3, с. 283, лемма 4] следует, что B симметрична. По лемме 3.3 для $i = 1$,

$\ldots, m-1$ $J(V_i, V_i) = \langle V_i, (\dot V_i)^2\rangle|_{s_0} + \int\limits_0^{s_0} |(\dot V_i)^1|^2\, ds \geqslant B(V_i, V_i)$.

Пользуясь тем, что $\langle V_i, V_j\rangle|_{s_0} = 0$ при $i \neq j$, теперь получаем $Q_J(V, V) = \sum_i J(V_i, V_i) \prod_{l \neq i} |V_l|^2|_{s_0} \geqslant \sum_i B(V_i, V_i) \prod_{l \neq i} |V_l|^2|_{s_0} = Q_B(V, V)$. По следствию 3.7 и определению формы B $Q_B(V, V) = Q_B(\omega Z, \omega Z) = Q_B(\omega(s_0) Z, \omega(s_0) Z) = \lambda^2 Q_B(Z, Z)$. Очевидно, $B(Z_i, Z_j) = \langle Z_i, \dot Z_j\rangle|_{s_0}$, и из 3.8 получаем $Q_B(Z, Z) = \langle \nabla_{\dot\gamma}(Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_{m-1}), Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_{m-1}\rangle|_{s_0} = Q_J(Z, Z)$. Лемма доказана.

4. Доказательство теорем 2.3 и 2.4.

4.1. Базис $Z = (Z_1, \ldots, Z_{m-1}) \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$-якобиевых полей вдоль γ будем называть стандартным, если $Z_1(0), \ldots, Z_n(0)$ — ортонормированный набор собственных векторов второй основной формы $l_{\dot\gamma(0)}$ подмногообразия N, $\dot Z_i(0) = \varkappa_i Z_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$, $\varkappa_i$ — соответствующие собственные числа; $Z_j(0) = 0$, $|\dot Z_j(0)| = 1$, $\langle \dot Z_j(0), \dot Z_k(0)\rangle = 0$ при $j, k = n+1, \ldots, m-1$, $j \neq k$.

4.2. Доказательство теоремы 2.3. В m-мерном пространстве M' постоянной кривизны μ рассмотрим n-мерное подмногообразие N'. Пусть $\gamma' : [0, s(\dot\gamma(0))] \to M$ — нормальная геодезическая, $\dot\gamma'(0) \in N'^{\perp}$, $\hat Z' = Z_1' \wedge \ldots \wedge Z_{m-1}'$ — N-якобиево $(m-1)$-поле вдоль γ', где $Z' = (Z_1', \ldots Z_{m-1}') \in \boldsymbol{B}_{\gamma'}^{m-1}$ — стандартный базис N'-якобиевых полей вдоль γ', причем N' таково, что соответствующие собственные числа форм $l'_{\dot\gamma'(0)}$ и $l_{\dot\gamma(0)}$ совпадают. Тогда, очевидно, $|\hat Z'(s)| = \sum\limits_{j=0}^{n} (g_\mu(s))^{n-j} (f_\mu(s))^{m-n-1+j} S_j(\dot\gamma(0))$.

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что отношение $|\hat Z|^2/|\hat Z'|^2$ не возрастает на $(0, s(\dot\gamma(0)))$. Пусть $W_1, \ldots, W_{m-1}$, $\dot\gamma$ — ортонормальные параллельные вдоль γ поля, причем $W_1(0), \ldots, W_n(0)$ — собственные векторы формы $l_{\dot\gamma(0)}$. Для $j = 1, \ldots, m-1$ положим $V_j = |Z_j'|\, W_j$. Тогда $V = (V_1, \ldots, V_{m-1}) \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$. Пусть $s_0 \in (0, s(\dot\gamma(0)))$. Для j-1, $\ldots, m-1$ по построению полей V_j и условиям теоремы получаем $\langle Z_j', \dot Z_j'\rangle|_{s_0} = J'(Z_j', Z_j') \geqslant J(V_j, V_j)$.

Теперь, так как наборы $Z'(s_0)$ и $V(s_0)$ состоят из попарно ортогональных векторов, $\langle \nabla_{\dot\gamma'} \hat Z', \hat Z'\rangle|_{s_0} = Q_{J'}(Z', Z') \geqslant Q_J(V, V)$.

Заметим теперь, что если N-якобиево $(m-1)$-поле $\hat Z$ равно нулю при некотором $s \in (0, s(\dot\gamma(0)))$, то $\hat Z \equiv 0$. Это следует из того, что в $(0, s(\dot\gamma(0)))$ нет фокальных точек геодезической γ относительно N. Поэтому можно считать, что $\hat Z = Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_{m-1}$, где N-якобиевы поля $Z = (Z_1, \ldots, Z_{m-1}) \in B_\gamma^{m-1}$ линейно независимы, а значит, образуют базис N-якобиевых полей вдоль γ. Так как $s_0 < s(\dot\gamma(0))$, то по лемме 3.9 $Q_J(V, V) \geqslant \lambda^2 Q_J(Z, Z) = \lambda^2 \times$

$\times \langle \bar{\nabla}_{\dot\gamma} \hat{Z}, \hat{Z} \rangle|_{s_0}$, где $\lambda^2 = |\hat{U}(s_0)^2 / |\hat{Z}(s_0)^2 = |\hat{Z}'(s_0)|^2 / |\hat{Z}(s_0)|^2$. Таким образом, $\frac{d}{ds}\langle \hat{Z}, \hat{Z} \rangle|_{s_0} \cdot \langle \hat{Z}', \hat{Z}' \rangle|_{s_0} \leqslant \frac{d}{ds}\langle \hat{Z}', \hat{Z}' \rangle|_{s_0} \cdot \langle \hat{Z}, \hat{Z} \rangle|_{s_0}$, и отношение $|\hat{Z}|^2/|\hat{Z}'|^2$ не возрастает на $(0, s(\dot\gamma(0)))$. Теорема доказана.

4.3. Доказательство теоремы 2.4. Пусть $\tilde{s}_1 = \min(s_1, s(\dot\gamma(0)))$. Очевидно, достаточно доказать, что отношение (2) не убывает на $(0, \tilde{s}_1)$. В m-мерном пространстве M' постоянной кривизны ν рассмотрим n-мерное подмногообразие N'. Пусть $\gamma' : [0, s_1] \to M'$ — нормальная геодезическая, $\dot\gamma(0) \in N'^{\perp}$, все нормальные кривизны подмногообразия N' относительно нормали $\dot\gamma'(0)$ равны $\varkappa$, $\hat{Z}' = Z_1' \wedge \cdots \wedge Z_{m-1}'$ — N-якобиево $(m-1)$-поле вдоль γ', где $Z' = (Z_1', \ldots, Z_{m-1}') \in \boldsymbol{B}_{\gamma'}^{m-1}$ — стандартный базис N'-якобиевых полей вдоль γ'. Тогда, очевидно, $|\hat{Z}'(s)| = (g_\nu(s) + \varkappa f_\nu(s))^n \times \times f_\nu^{m-n-1}(s)$, и в $(0, s_1)$ нет фокальных точек геодезической γ' относительно N'. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что отношение $|\hat{Z}|^2/|\hat{Z}'|^2$ не убывает на $(0, \tilde{s}_1)$.

Если $\hat{Z}$, $\hat{\hat{Z}}$ — N-якобиевы $(m-1)$-поля вдоль γ, то $|\hat{\hat{Z}}|^2 = \lambda^2 \times \times |\hat{Z}|^2$, $\lambda^2 = \mathrm{const}$. Так как $\hat{Z} \not\equiv 0$, то $\hat{Z}(s) \neq 0$ при $\tilde{s} \in (0, \tilde{s}_1)$. Поэтому считаем, что $\hat{Z} = Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_{m-1}$, где $Z = (Z_1, \ldots, Z_{m-1}) \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$ — стандартный базис N-якобиевых полей.

Пусть $s_0 \in (0, \tilde{s}_1)$. Тогда, применяя процесс ортогонализации к набору векторов $(Z_{m-1}(s_0), \ldots, Z_{n+1}(s_0), Z_n(s_0), \ldots, Z_1(s_0))$, не трудно найти невырожденную $(m-1) \times (m-1)$-матрицу ω_0 такую, что набор векторов $(y_1, \ldots, y_{m-1}) = y = \omega_0 Z(s_0)$ обладает свойствами: $\langle y_i, y_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ и наборы $(y_{n+1}, \ldots, y_{m-1})$, $(Z_{n+1}(s_0), \ldots, Z_{m-1}(s_0))$ порождают одно и то же подпространство в $M_{\gamma(s_0)}$. Обозначим $Y = \omega_0 Z \in \boldsymbol{B}_\gamma^{m-1}$ — базис N-якобиевых полей вдоль γ. Тогда, очевидно, $Y_{n+1}(0) = \cdots = Y_{m-1}(0) = 0$.

Для $i = 1, \ldots, m-1$ определим векторные поля V_i вдоль $\gamma'|(0, s_0]$ равенствами $V_i = |Y_i| \cdot |Z_i'|^{-1} \cdot Z_i'$. Тогда $V = (V_1, \ldots, V_{m-1}) \in \boldsymbol{B}_{\gamma'}^{m-1}$ и по построению базиса Y и условиям теоремы при $i = 1, \ldots, m-1$ $J(Y_i, Y_i) \geqslant J'(V_i, V_i)$. Так как векторы $Y_1(s_0), \ldots, Y_{m-1}(s_0)$ попарно ортогональны, то $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\langle \hat{Z}, \hat{Z} \rangle|_{s_0} = Q_J(Z, Z) = (\det \omega_0)^{-2} Q_J(Y, Y) \geqslant (\det \omega_0)^{-2} Q_{J'}(V, V)$. По лемме 3.9 $Q_{J'}(V, V) \geqslant \lambda^2 Q_{J'}(Z', Z') = \frac{\lambda^2}{2}\frac{d}{ds}\langle \hat{Z}', \hat{Z}' \rangle|_{s_0}$, где $|\hat{V}(s_0)|^2 = \lambda^2 |\hat{Z}'(s_0)|^2$. Тогда $|\hat{Z}(s_0)|^2 = (\det \omega_0)^{-2} |\hat{Y}(s_0)|^2 = (\det \omega_0)^{-2} |\hat{V}(s_0)|^2 = \lambda^2 (\det \omega_0)^{-2} \times \times |\hat{Z}'(s_0)|^2$, $\frac{d}{ds}\langle \hat{Z}, Z \rangle|_{s_0} \cdot \langle \hat{Z}', Z' \rangle|_{s_0} \geqslant \frac{d}{ds}\langle \hat{Z}', \hat{Z}' \rangle|_{s_0} \cdot \langle \hat{Z}, \hat{Z} \rangle|_{s_0}$, и отношение $|\hat{Z}|^2/|\hat{Z}'|^2$ не убывает на $(0, \tilde{s}_1)$, а значит, и на $(0, s_1)$. Теорема доказана.

3.4. Доказательство следствия 2.5. Пусть $\hat{Z} = Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_{m-1}$ — N-якобиево $(m-1)$-поле вдоль γ, где $Z = (Z_1, \ldots, Z_{m-1}) \in B_{\gamma}^{m-1}$ — стандартный базис N-якобиевых 1-полей. Тогда, как легко видеть, предел при $s \to 0$ отношения (2) равен единице. По теореме 2.4 для всех $s \in (0, s_1]$ $|\hat{Z}(s)| \geqslant (g_{\nu}(s) + \varkappa f_{\nu}(s))^n \times f_{\nu}^{m-n-1}(s)$. Поэтому в $(0, s_1)$ нет фокальных точек геодезической γ относительно N, т. е. $s(\dot{\gamma}(0)) \geqslant s_1$.

Список литературы

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., «Мир», 1971. 343 с.
2. Warner F. W. Extensions of the Ranch comparison theorem to submanifolds. — «Frans. Amer. Math. Soc.», 1966, № 122 (2), p. 341—356.
3. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий, М., «Мир», 1967. 335 с.
4. Cheeger J., Ebin D. Comparison theorems in Riemannian geometry, North — Holland math. library, № 9, 1975.
5. Буяло С. В. Одна экстремальная георема римановой геометрии. — «Мат. заметки», 1976 № 19 (5), с. 795—804.
6. Буяло С. В. Об экстремальном случае одной оценки объема риманова многообразия. — В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 20, Харьков, 1977, с. 23—27.

Поступила 8 апреля 1977 г.

УДК 513

Н. И. Глова

К ПРОЕКТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P

В работах [1, 2] рассматривались вопросы метрической теории системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в пространстве E_4. Настоящая заметка посвящена исследованию некоторых проективно инвариантных свойств указанной системы кривых. В четырехмерном проективном пространстве P_4 необходимо выбрать базис пространства, проективно инвариантно связанный с Пфаффовой системой кривых. Достаточно построить проективно инвариантную 2-плоскость (будем называть ее 2-плоскостью π), дополняющую в каждой точке пространства касательную 2-плоскость ρ системы рассматриваемых кривых до всего пространства P_4, т. е. прямая сумма 2-плоскостей π и ρ должна совпадать с пространством P_4.

Если условия интегрируемости рассматриваемой системы уравнений выполнены, интегральные кривые расположены на двумерной поверхности V_2 пространства P_4. Осевой 2-плоскостью поверхности V_2 в данной точке четырехмерного проективного пространства называется двумерная плоскость, по которой пересекаются трехмерные соприкасающиеся плоскости линий сопряженной сети этой поверхности, проходящей через данную точку [3].

Поскольку двумерная поверхность в пространстве P_4 несет в общем случае единственную сопряженную сеть, со всякой двумерной поверхностью четырехмерного проективного пространства связано двупараметрическое семейство осевых 2-плоскостей. Их можно принять за 2-плоскости π, которые вместе с касательной 2-плоскостью дают инвариантное оснащение поверхности в каждой точке проективного пространства P_4.

В данной заметке построение проективно инвариантной 2-плоскости распространено на случай системы интегральных кривых двумерного распределения в пространстве P_4. В этом случае сопряженность невзаимная. В касательной 2-плоскости ρ каждой точки пространства P_4 имеются два куспидальных направления и два направления, сопряженных куспидальным. В интегрируемом случае эти направления сливаются в пару сопряженных направлений. Выберем любую пару из четырех проективно инвариантных направлений. Соприкасающиеся гиперплоскости к линиям, сгибаемым выбранными направлениями, пересекаются по 2-плоскости π. Построение 2-плоскости π в последнем случае неоднозначно. В каждой точке M проективного пространства P_4 существует, вообще говоря, шесть различных проективно инвариантных 2-плоскостей, имеющих с касательной 2-плоскостью ρ общей лишь точку M и дополняющих 2-плоскость ρ до всего пространства P_4.

Первый параграф посвящен куспидальным и сопряженным им направлениям системы интегральных кривых рассматриваемого распределения. Рассмотрен случай, когда всякое направление касательной 2-плоскости двумерной поверхности V_2 пространства P_4 является сопряженным некоторому направлению. В этом случае двумерная поверхность принадлежит трехмерному проективному пространству P_3.

Во втором параграфе строится фокусная кривая 2-плоскости π как кривая, описываемая точкой пересечения 2-плоскости π с бесконечно близкой 2-плоскостью π при непрерывном изменении направления в касательной 2-плоскости ρ. Исследуются некоторые свойства этой кривой.

В третьем параграфе исследуется вопрос о существовании огибающей поверхности системы 2-плоскостей π двумерной поверхности V_2 пространства P_4. Доказана теорема: *для того чтобы семейство 2-плоскостей π двумерной поверхности имело в проективном пространстве $\boldsymbol{P}_4$ огибающую поверхность, необходимо и достаточно, чтобы фокусная кривая этой 2-плоскости распадалась на пару прямых.*

В последнем параграфе из совокупности интегральных кривых рассматриваемой системы дифференциальных уравнений выделен класс кривых, у которых соприкасающиеся гиперплоскости содержат 2-плоскость π. Получено дифференциальное уравнение этих кривых. Каждому направлению касательной 2-плоскости ρ в точке M соответствует одна кривая полученного класса кривых. В окрестности каждой точки M четырехмерного проективного пространства построенная совокупность кривых расположена на двумерной поверхности пространства $\boldsymbol{P}_4$, проходящей через точку M.

§ 1. Куспидальные направления

1. В четырехмерном проективном пространстве $\boldsymbol{P}_4$ рассмотрим систему интегральных кривых двух дифференциальных уравнений Пфаффа

$$\sum_{i=0}^{4} P_i dX_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{4} Q_i dX_i = 0, \tag{1.1}$$

где $X_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ — однородные координаты пространства P_4; функции P_i, Q_i — однородные функции координат класса C^2.

Условиями интегрируемости системы уравнений (1.1) являются требования обращения в нуль миноров четвертого порядка матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \frac{\partial}{\partial X_0} & \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_4} \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \frac{\partial}{\partial X_0} & \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_4} \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

При выполнении условий интегрируемости множество всех интегральных кривых системы уравнений (1.1), проходящих через произвольную точку M пространства P_4, расположено на двумерной поверхности

$$u = u(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4), \; v = v(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4). \tag{1.3}$$

Пространство P_4 расслаивается на двупараметрическое семейство поверхностей так, что в каждой точке пространства касательная 2-плоскость ρ системы (1.1)

$$\sum_{i=0}^{4} P_i X_i = 0, \; \sum_{i=0}^{4} Q_i X_i = 0 \tag{1.4}$$

касается в этой точке соответствующей двумерной поверхности.

В неоднородной системе координат при $X_0 \equiv 1$ условия интегрируемости (1.2) исходной системы дифференциальных уравнений принимают вид

$$G_1 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix} = 0; \quad G_2 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.2'}$$

2. Фиксируем точку M пространства P_4. В касательной 2-плоскости ρ системы интегральных кривых (1.1), соответствующей точке M, выделяются направления, двигаясь по которым касательные 2-плоскости в бесконечно близких точках пересекаются не в точке, а по прямой. В неоднородных координатах эти направления задаются уравнением

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ dP_1 & dP_2 & dP_3 & dP_4 \\ dQ_1 & dQ_2 & dQ_3 & dQ_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.5)$$

Направления δx_i ($i = 1, 2, 3, 4$) пересечения бесконечно близких касательных 2-плоскостей определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{4} P_i \delta X_i = 0, && \sum_{i=0}^{4} P_i \delta X_i = 0, \\ &\sum_{i=0}^{4} Q_i \delta X_i = 0, \quad \text{или} && \sum_{i=0}^{4} Q_i \delta X_i = 0, \\ &\sum_{i=0}^{4} dP_i \delta X_i = 0, && \sum_{i=0}^{4} dQ_i \delta X_i = 0. \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Специализируем систему координат таким образом, чтобы точка M совпала с началом координат, касательная 2-плоскость ρ с координатной 2-плоскостью X_1OX_2. Условия интегрируемости (1.2') принимают вид

$$G_1 = P_{21} - P_{12} = 0, \quad G_2 = Q_{21} - Q_{12} = 0, \qquad (1.2'')$$

где $P_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial x_k}$, $Q_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial x_k}$.

Уравнение (1.5) в этой системе координат запишется так:

$$\begin{vmatrix} P_{11} P_{21} \\ Q_{11} Q_{21} \end{vmatrix} dx_1^2 + \left\{ \begin{vmatrix} P_{11} P_{22} \\ Q_{11} Q_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{12} P_{21} \\ Q_{12} Q_{21} \end{vmatrix} \right\} dx_1 dx_2 + \\ + \begin{vmatrix} P_{12} P_{22} \\ Q_{12} Q_{22} \end{vmatrix} dx_2^2 = 0. \qquad (1.5')$$

Уравнение (1.5') определяет в касательной 2-плоскости системы интегральных кривых (1.1) два направления, обладающих указанным свойством. Следуя терминологии Фубини и Чеха [4], назовем эти направления куспидальными направлениями. Линии, огибаемые этими направлениями, будем называть куспидальными линиями.

Направление (1.6), по которому пересекаются бесконечно близкие в куспидальном направлении касательные 2-плоскости, назовем сопряженным соответствующему куспидальному направлению

В выбранной системе координат это направление $\tau = \frac{\delta x_2}{\delta x_1}$ определяется одним из выражений:

$$\tau = -\frac{P_{12}k + P_{11}}{P_{22}k + P_{21}}; \quad \tau = -\frac{Q_{12}k + Q_{11}}{Q_{22}k + Q_{21}}, \tag{1.7}$$

где $k = \frac{dx_2}{dx_1}$ — корень уравнения (1.5′).

3. В случае выполнения условий интегрируемости сопряженность, определяемая уравнением (1.5′), будет взаимной. Уравнение (1.5) определяет в этом случае, вообще говоря, единственную сопряженную сеть.

Если сопряженная сеть поверхности (1.3) не единственна, то из уравнения (1.5) следует $\begin{vmatrix} P_{11}P_{12} \\ Q_{11}Q_{12} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} P_{11}P_{22} \\ Q_{11}Q_{22} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} P_{22}P_{12} \\ Q_{22}Q_{12} \end{vmatrix} = 0$, или $\frac{P_{11}}{Q_{11}} = \frac{P_{12}}{Q_{12}} = \frac{P_{21}}{Q_{21}} = \frac{P_{22}}{Q_{22}}$.

Если P_1 и P_2 принять за независимые переменные x_1 и x_2, то имеет место $Q_{12} = 0$, $Q_{21} = 0$, $Q_{22} = Q_{11}$, откуда следует $Q_1 = Q_1(x_1)$, $Q_2 = Q_2(x_2)$, $Q_1' = Q_2' = a$, где a — постоянная величина. Штрихом обозначено дифференцирование по аргументу.

Из последних равенств следует

$$Q_1 = ax_1 + \alpha, \; Q_2 = ax_2 + \beta. \tag{1.8}$$

Так как поверхность (1.3) можно задать уравнениями $x_3 = x_3(x_1, x_2)$, $x_4 = x_4(x_1, x_2)$, то, учитывая равенства $Q_1 = \frac{\partial x_4}{\partial x_1}$, $Q_2 = \frac{\partial x_4}{\partial x_2}$, $P_1 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}$, $P_2 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2}$, из (1.8) получим $x_4 = ax_3 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$, где a, α, β, γ — постоянные величины. Следовательно, поверхность (1.3) принадлежит трехмерному проективному пространству P_3.

4. Двойное отношение μ двух пар сопряженных направлений равно $\mu = \frac{k_1 - \tau_1}{k_1 - \tau_2}, \frac{k_2 - \tau_1}{k_2 - \tau_2}$, где k_1, k_2 — корни уравнения (1.5′).

Подставляя в выражение для μ значения k_1, k_2 и τ_1, τ_2 из (1.5′) и (1.7), находим

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} P_{11} & P_{22} & P_{12} + P_{21} & 0 \\ Q_{11} & Q_{22} & Q_{12} + Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{12} + Q_{21} & Q_{11} & Q_{22} \\ 0 & P_{12} + P_{21} & P_{11} & P_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 & P_{12} & P_{11} & 0 \\ G_2 & Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} & Q_{12} & G_2 \\ 0 & P_{22} & P_{12} & G_1 \end{vmatrix}}. \tag{1.9}$$

Это выражение является проективным инвариантом системы (1.1). В случае выполнения условий интегрируемости (1.2′) знаменатель обращается в нуль, а $\mu = \infty$.

§ 2. Построение 2-плоскости π для систем интегральных кривых двух уравнений Пфаф- фа в P_4

1. Как следует из предыдущего параграфа, в каждой точке M пространства P_4 с совокупностью интегральных кривых систем дифференциальных уравнений (1.1) связано четыре проективно ин- вариантных направления касательной 2-плоскости. Выберем любу пару этих направлений. Соприкасающиеся гиперплоскости к ли ниям, огибаемым этими направлениями, пересекаются по 2-плос кости π. Таким образом, каждой точке пространства P_4 присоеди няется шесть 2-плоскостей, проективно инвариантно связанных с системой интегральных кривых (1.1). В интегрируемом случае он сливаются в одну 2-плоскость.

В фиксированной точке M пространства P_4 рассмотрим одн из 2-плоскостей

$$\sum_{i=0}^{4} A_i X_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{4} B_i X_i = 0. \qquad (2.1$$

2. Построим фокусную кривую этой 2-плоскости, т. е. кривую которую описывает точка пересечения этой двумерной плоскост с бесконечно близкой 2-плоскостью при непрерывном изменени направления. Бесконечно близкая к (2.1) 2-плоскость

$$\sum_{i=0}^{4} (A_i + \delta A_i)(X_i + \delta X_i) = 0, \quad \sum_{i=0}^{4} (B_i + \delta B_i)(X_i + \delta X_i) = 0. \quad (2.2$$

Рассматривая неоднородную систему координат, введенную предыдущем параграфе, получим координаты фокуса, т. е. точк пересечения 2-плоскостей (2.1) и (2.2) в виде

$$X_3 = \frac{I_4 t^2 + I_5 t + I_6}{I_1 t^2 + I_2 t + I_3}, \quad X_4 = \frac{I_7 t^2 + I_8 t + I_9}{I_1 t^2 + I_2 t + I_3}, \qquad (2.3$$

где $t = \frac{\delta x_2}{\delta x_1}$;

$$I_1 = A_{32} B_{42} - A_{42} B_{32}; \quad I_2 = A_{31} B_{42} + A_{32} B_{41} - A_{41} B_{32} - A_{42} B_{31};$$
$$I_3 = A_{31} B_{41} - A_{41} B_{31}, \quad I_4 = A_2 B_{42} - B_2 A_{42};$$
$$I_5 = A_1 B_{42} + A_2 B_{41} - B_2 A_{41} - B_1 A_{42}, \quad I_6 = A_1 B_{41} - B_1 A_{41}; \quad (2.4$$
$$I_7 = B_2 A_{32} - A_2 B_{32}, \quad I_8 = B_1 A_{32} + B_2 A_{31} - A_2 B_{31} - A_2 B_{32};$$
$$I_9 = B_1 A_{31} - A_1 B_{31}, \quad A_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, \quad B_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial x_j}.$$

При непрерывном изменении направления в касательной 2-плос кости ρ фокус (2.3) опишет в 2-плоскости π фокусную кривую Это кривая второго порядка. Ее основные инварианты

$$\delta = I_1 I_3 - \frac{1}{4} I_2^2, \quad \Delta = - \begin{vmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_4 & I_5 & I_6 \\ I_7 & I_8 & I_9 \end{vmatrix}. \qquad (2.5$$

Можно показать, что двойное отношение произвольной четверки точек фокусной кривой равно двойному отношению соответствующей четверки направлений касательной 2-плоскости системы интегральных кривых (1,1).

В дальнейшем будем считать, что за координатные оси OX_3 и OX_4 приняты касательные к фокусной кривой, проведенные из начала координат. При этом выполнены условия

$$I_5^2-4I_4I_6=0, \quad I_8^2-4I_7I_9=0. \tag{26}$$

§ 3. Огибающая семейства 2-плоскостей π двумерной поверхности V_2 пространства P_4

1. Предположим, что условия интегрируемости (1.2) системы интегральных кривых (1.1) выполнены. При этом совокупность интегральных кривых (1.1), соответствующих выбранной точке M пространства P_4, расположена на двумерной поверхности V_2. Построение 2-плоскости (2.1) в этом случае однозначно. Имеет смысл ставить вопрос о существовании огибающей поверхности семейства 2-плоскостей π.

Теорема. *Для того чтобы семейство 2-плоскостей π имело в проективном пространстве P_4 огибающую поверхность, необходимо и достаточно, чтобы фокусная кривая этой 2-плоскости распадалась на пару прямых.*

Будем искать огибающую поверхность семейства 2-плоскостей (2.1), зависящих от двух параметров X_1 и X_2. Дифференцируем уравнения (2.1) по параметрам

$$\sum_{i=0}^{4} A_{ij}X_i+A_j=0, \quad \sum_{i=0}^{4} B_{ij}X_i+B_j=0, \quad (j=1,2). \tag{3.1}$$

В специализированной системе координат систему уравнений (3.1) можно записать так:

$$A_{3j}X_3+A_{4j}X_4=-A_j, \quad B_{3j}X_3+B_{4j}X_4=-B_j, \quad (j=1,2) \tag{3.2}$$

Используя введенные обозначения (2.4), рассмотрение системы уравнений (3.2) можно заменить рассмотрением системы уравнений

$$\begin{gathered} I_2X_3=I_5, \quad I_2X_4=I_8, \quad (I_1+I_3)\,X_3=I_4+I_6, \\ (I_1+I_3)\,X_4=I_7+I_9. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Допустим, что семейство 2-плоскостей π имеет в проективном пространстве P_4 огибающую поверхность. Следовательно, система уравнений (3.3) имеет решение и выполняются такие условия:

$$\frac{I_5}{I_2}=\frac{I_4+I_6}{I_1+I_3} \quad \text{и} \quad \frac{I_8}{I_2}=\frac{I_7+I_9}{I_1+I_3}$$

или

$$\frac{I_1+I_3}{I_2}=\frac{I_4+I_6}{I_5}=\frac{I_7+I_9}{I_8}. \qquad (3.4)$$

Откуда $\sigma=\begin{vmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_4 & I_5 & I_6 \\ I_7 & I_8 & I_9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I_1+I_3 & I_2 & I_3 \\ I_4+I_6 & I_5 & I_6 \\ I_7+I_9 & I_8 & I_9 \end{vmatrix}=0.$

Фокусная кривая 2-плоскостей π распадается в этом случае на пару прямых.

2. Обратно. Обращение в нуль величины σ равносильно существованию скалярных величин α и β, удовлетворяющих равенствам

$$I_2=\alpha I_1+\beta I_3, \quad I_5=\alpha I_4+\beta I_6, \quad I_8=\alpha I_7+\beta I_9. \qquad (3.5)$$

Фокусная кривая распадается на пару прямых, соответствие между направлениями касательной 2-плоскости ρ и точками фокусной кривой есть соответствие между рядами первого порядка, т. е. правые части равенств (2.3) являются дробно-рациональными функциями параметра t.

Уравнения $I_1t^2+I_2t+I_3=0$, $I_4t^2+I_5t+I_6=0$ имеют общий корень, следовательно, имеет место равенство $\begin{vmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & 0 \\ I_4 & I_5 & I_6 & 0 \\ 0 & I_1 & I_2 & I_3 \\ 0 & I_4 & I_5 & I_6 \end{vmatrix}=$ $=(I_1I_5-I_2I_4)(I_2I_6-I_5I_3)-(I_1I_6-I_3I_4)^2=0$. С учетом равенств (3.5) последнее условие можно записать так: $(I_1I_6-I_3I_4)^2(\alpha\beta-1)=0$. Аналогично уравнения $I_1t^2+I_2t+I_3=0$, $I_7t^2+I_8t+I_9=0$ имеют общий корень, поэтому выполнено условие $(I_1I_9-I_3I_7)(\alpha\beta-1)=0$. Пусть $I_1I_6-I_3I_4=0$ и $I_1I_9-I_7I_3=0$. Следовательно, $\frac{I_1}{I_3}=\frac{I_4}{I_6}=\frac{I_7}{I_9}$, откуда следует $\frac{I_1+I_3}{\alpha I_1+\beta I_3}=\frac{I_4+I_6}{\alpha I_4+\beta I_6}=$ $=\frac{I_7+I_9}{\alpha I_7+\beta I_9}$, что с учетом равенств (3.5) дает соотношение (3.4).

Рассмотрим случай $\alpha\beta-1=0$. При этом система равенств (3.5) принимает вид $\alpha^2I_1-\alpha I_2+I_3=0$, $\alpha^2I_4-\alpha I_5+I_6=0$, $\alpha^2I_7-\alpha I_8+I_9=0$. Так как α — единственно, то уравнения эквивалентны, т. е. $\frac{I_1}{I_4}=\frac{I_2}{I_5}=\frac{I_3}{I_6}$, $\frac{I_1}{I_7}=\frac{I_2}{I_8}=\frac{I_3}{I_9}$, откуда следуют равенства (3.4).

Теорема доказана.

§ 4. О некоторых классах проективно инвариантных линий двумерного распределения пространства P_4

Из системы интегральных кривых (1.1) выделим кривые

$$X_i=X_i(\omega) \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad (4.1)$$

у которых соприкасающаяся гиперплоскость содержит 2-плоскость π, т. е. существует нетривиальный набор скалярных величин a, b, c, удовлетворяющих равенствам

$$X_i = aX_i' + bX_i'' + cX_i''' \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{4.2}$$

где $X_i' = \frac{dX_i}{dw}$, X_i удовлетворяет системе уравнений 2-плоскости π (2.1). Из (2.1) следует

$$X_3 = \frac{\Delta_{40}}{\Delta_{34}} X_0 + \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{34}} X_1 + \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{34}} X_2, \quad X_4 = \frac{\Delta_{03}}{\Delta_{34}} X_0 + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{34}} X_1 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{34}} X_2, \tag{4.3}$$

где $\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} A_i & A_k \\ B_i & B_k \end{vmatrix}$.

Подставив выражения (3.4) в систему уравнений (4.2) и исключая из последней величины a, b, c, получим, что все миноры четвертого порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \Delta_{34}X_0 & X_0' & X_0'' & X_0''' \\ \Delta_{34}X_1 & X_1' & X_1'' & X_1''' \\ \Delta_{34}X_2 & X_2' & X_2'' & X_2''' \\ \Delta_{40}X_0 + \Delta_{41}X_1 + \Delta_{42}X_2 & X_3' & X_3'' & X_3''' \\ \Delta_{03}X_0 + \Delta_{13}X_1 + \Delta_{23}X_2 & X_4' & X_4'' & X_4''' \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

обращаются в нуль. Так как эти требования должны выполняться тождественно относительно величин X_0, X_1, X_2, то должны обращаться в нуль миноры четвертого порядка следующих матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta_{34} & X_0' & X_0'' & X_0''' \\ 0 & X_1' & X_1'' & X_1''' \\ 0 & X_2' & X_2'' & X_2''' \\ \Delta_{40} & X_3' & X_3'' & X_3''' \\ \Delta_{03} & X_4' & X_4'' & X_4''' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & X_0' & X_0'' & X_0''' \\ \Delta_{34} & X_1' & X_1'' & X_1''' \\ 0 & X_2' & X_2'' & X_2''' \\ \Delta_{41} & X_3' & X_3'' & X_3''' \\ \Delta_{13} & X_4' & X_4'' & X_4''' \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & X_0' & X_0'' & X_0''' \\ 0 & X_1' & X_1'' & X_1''' \\ \Delta_{34} & X_2' & X_2'' & X_2''' \\ \Delta_{42} & X_3' & X_3'' & X_3''' \\ \Delta_{23} & X_4' & X_4'' & X_4''' \end{pmatrix}.$$

Из последних условий следует

$$\begin{vmatrix} \Delta_{34} & 0 & 0 & X_0' & X_0'' \\ 0 & \Delta_{34} & 0 & X_1' & X_1'' \\ 0 & 0 & \Delta_{34} & X_2' & X_2'' \\ \Delta_{40} & \Delta_{41} & \Delta_{42} & X_3' & X_3'' \\ \Delta_{03} & \Delta_{13} & \Delta_{23} & X_4' & X_4'' \end{vmatrix} = 0. \tag{4.6}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\Delta_{4k}\Delta_{l3} - \Delta_{k3}\Delta_{4l} = \Delta_{kl}\Delta_{34}$, $k, l = 0, 1, 2, 3, 4$ $(k \neq l)$. Последнее равенство дает возможность записать уравнение (4.6) в виде

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{4} A_i X_i'' & \sum_{i=0}^{4} A_i X_i' \\ \sum_{i=0}^{4} B_i X_i'' & \sum_{i=0}^{4} B_i X_i' \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.6')$$

Построенный класс кривых линий можно получить из други геометрических соображений. Совокупность интегральных линий системы дифференциальных уравнений (1.1), у которых в каждой точке кривой соприкасающаяся 2-плоскость пересекается с осна щающей 2-плоскостью по прямой, определяется уравнением (4.6').

Дифференциальное уравнение (4.6') с системой уравнений

$$\sum_{i=0}^{4} P_i X_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{4} Q_i X_i' = 0 \qquad (1.1')$$

и системой дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=0}^{4} (P_i' X_i' + P_i X_i'') = 0, \quad \sum_{i=0}^{4} (Q_i' X_i' + Q_i X_i'') = 0 \qquad (4.7)$$

выделяют из системы интегральных кривых (1.1) некоторый клас кривых, названный классом проективно геодезических линий. Через каждую точку пространства P_4 по любому направлению каса тельной 2-плоскости ρ проходит единственная проективно геодези ческая линия. В окрестности каждой точки M четырехмерного проективного пространства эта совокупность кривых расположен на двумерной поверхности пространства P_4, проходящей чере точку M. Построенный класс интегральных кривых является не которым аналогом совокупности геодезических «прямейших» сис темы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в четырехмер ном евклидовом пространстве E_4 [1] и зависит от четырех прои вольных постоянных.

Список литературы

1. Глова Н. И. О геодезических линиях системы интегральных кривых дву уравнений Пфаффа в E_4. — В кн.: Укр. геометр. сб., Вып. 17, Харько 1975, с. 44—50.
2. Глова Н. И. К теории кривизны системы интегральных кривых дву уравнений Пфаффа в E_4. — В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 18, Харько 1975, с. 37—48.
3. Гольдберг В. В. Семейство осевых плоскостей поверхности четырехме ного проективного пространства и некоторые задачи, связанные с этим се мейством. — «Сиб. мат. журн.», 1960, т. I, № 4, с. 559—577.
4. Fubini G. — «E. Čech. Geometria Proiettiva Differenziole», t. 2. Bologn 1927.

Поступила 21 января 1977

УДК 513

В. Ф. Игнатенко

О ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ С ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Пусть на плоскости задана прямоугольная координатная система Oxy; a_k ($k = 0, \ldots, r-1 > 0$) — оси ортогональной симметрии плоскости, проходящие через начало координат O. Уравнение осей запишем так: $\eta_k \equiv x \sin k\alpha - y \cos k\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{r}$.

Оси a_k задают циклическую группу симметрий $[r]$ порядка $2r$ (в обозначениях Г. С. М. Коксмера [1]). Обозначим через C_n неприводимую действительную кривую порядка n, симметричную относительно осей a_k. Любые две соседние оси образуют минимальный угол [2] относительно $[r]$, определяющий фундаментальную область этой группы.

Если G — группа симметрий центрально-симметричного многогранника в пространстве E^m, то сумма четных степеней левых частей нормированных уравнений всех его гиперплоскостей симметрии (в прямоугольных декартовых координатах) представляет собой многочлен, инвариантный относительно G. Этот способ построения инвариантных многочленов оказался удобным для нахождения общих уравнений алгебраических гиперповерхностей, инвариантных относительно некоторых групп G [3]. В настоящей заметке доказывается, что этот способ неприменим на плоскости ($m = 2$) в случае четного числа $r = 2s$ осей симметрии; имеет место тождество

$$\sum_{k=0}^{r-1} \eta_k^r = \rho (x^2 + y^2)^s, \ \rho = \mathrm{const}. \tag{1}$$

Для доказательства рассмотрим центральную кривую C_r: $\sum_{k=0}^{r-1} \eta_k^r(x, y) = c$, где $r = 2s > 2$, $c > 0$. Эта кривая является гладкой. В самом деле, если (x_0, y_0) — кратная точка C_r, то в ней частные производные левой части уравнения C_r по x и y равны нулю: $\sum_{k=0}^{r-1} \eta_k^{r-1}(x_0, y_0) \sin k\alpha = 0$, $\sum_{k=0}^{r-1} \eta_k^{r-1}(x_0, y_0) \cos k\alpha = 0$. Вычитая из первого второе, умножая их соответственно на x_0, y_0, получаем $c = 0$, что противоречит выбору кривой.

Из уравнений a_1 и C_r находим $x^r \sum_{k=0}^{r-1} \sin^r (k-1)\alpha = c \cos^r \alpha$, $r = 2s$. Это уравнение имеет r корней, которые определяют r различных точек пересечения прямой a_1 с кривой C_r (действительных и мнимых). Множество этих точек можно представить (неоднозначно) как объединение двух непересекающихся множеств, каждое из которых симметрично другому относительно начала O; пусть точки A_j ($j = 1, \ldots, s \geqslant 2$) составляют одно из них. Так как кривая C_r

гладкая, то она пересекает прямую a_1 ортогонально в каждой из точек A_j (в противном случае такая точка есть центр двух ветвей кривой и, следовательно, является ее кратной точкой). Если ω_j $(j = 1, \ldots, s)$ — окружности, имеющие общий центр O и проходящие через точки A_j соответственно, то A_j — точки соприкосновения ω_j с кривой C_r. Отражая точки A_j и их образы относительно всех прямых a_k, получим по r точек соприкосновения C_r с каждой окружностью ω_j (орбиты точек A_j).

Поскольку точка соприкосновения двух алгебраических кривых является кратной точкой их пересечения [4, с. 64], то r точек соприкосновения C_r с любой из окружностей ω_j определяют $2r$ общих простых точек этих кривых. Пусть ω_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$ — действительная окружность, проходящая через действительную точку A_p, $B = a_2 \cap \omega_p$. Расстояние точки B от произвольно выбранной оси симметрии a_τ $(0 \leqslant \tau \leqslant r-1)$ равно расстоянию точки A_p от некоторой другой оси a_ν $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1)$; все расстояния входят в уравнение C_r в одной и той же четной степени $r = 2s$, поэтому точка $B \in C_r$. (Короче, $B \in C_r$, так как $A_p \in C_r$ и все оси симметрии равноправны относительно C_r, что видно из ее уравнения). Следовательно, кривая и окружность ω_p имеют $4r$ общих простых точек (это вся орбита точки A_p). По теореме Безу [4, с. 72] окружность ω_r принадлежит кривой C_r. Исключив эту окружность из состава C_r, получим кривую C_{r-2} порядка $r-2$. Но эта кривая имеет те же r осей симметрии и, значит, с каждой из оставшихся окружностей ω_j $(j \neq p)$ имеет $2r$ общих точек, а так как $2r > 2(r-2)$, то каждая $\omega_j \subset C_{r-2} \subset C_r$, т. е. C_r есть совокупность всех окружностей ω_j, что и доказывает тождество (1).

Значение коэффициента ρ найдем, подставляя в (1) координаты любой точки единичной окружности, например, (1,0) или (0,1), что дает соответственно $\rho = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \sin^r k\alpha = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \cos^r k\alpha$.

С помощью рассуждений, только что проведенных для кривой C_{r-2}, легко доказать, что при $r = 2s$ и $\sigma < s$ будет $\sum\limits_{k=0}^{r-1} \eta_k^{2\sigma} = \rho_\sigma \times (x^2 + y^2)^\sigma$, $\rho_\sigma = \mathrm{const}$. В частности, при $\sigma = 1$ это тождество доказывается элементарно: так как число осей четно, $r = 2s$, то для каждой оси найдется ей перпендикулярная ось; прямым подсчетом получим

$$\sum_{k=0}^{r-1} \eta_k^2 = \sum_{t=0}^{s-1} (x \sin t\alpha - y \cos t\alpha)^2 + \sum_{t=0}^{s-1} (x \cos t\alpha + y \sin t\alpha)^2 = \\ = s(x^2 + y^2) \ \ (\rho_1 = s).$$

Примечание. Приведем некоторые способы нахождения общего уравнения кривой C_n с заданными осями симметрии. Э. Гурса [5] доказал, что кривую с r осями симметрии можно задать уравнением $\varphi(z\bar{z}, z^r + \bar{z}^r) = 0$, где φ — многочлен, $z = z + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $i = \sqrt{-1}$. Э. Чиани [6] получил общее уравнение C_n в полярных координатах. В ряде работ [6—9 и др.] изучаются отдельные типы симметричных кривых C_n.

Отметим такой способ составления несферической образующей степени r общего уравнения C_n (сферическая образующая — это степени x^2+y^2). Поскольку множество всех биссектрис минимальных углов кривой C_n инвариантно относительно группы $[r]$, то произведение левых частей их уравнений будет указанной образующей. Возьмем, например, трехлепестковую розу $(x^2+y^2)^2 = c(3x^2y-y^3)$, $c \neq 0$ с тройной точкой в начале координат. Эта кривая имеет симметрию правильного треугольника со следующими вершинами: $(\sqrt{3},\ 1)$, $(-\sqrt{3},\ 1)$, $(0,\ -2)$. Уравнения ее осей симметрии и биссектрис минимальных углов соответственно

$$x=0,\quad x\pm\sqrt{3}\,y=0; \tag{2}$$

$$y=0,\quad \sqrt{3}\,x\pm y=0. \tag{3}$$

Правая часть уравнения трехлепестковой розы с точностью до постоянного множителя есть произведение левых частей уравнений (3) или, с такой же точностью, — старшая форма суммы третьих степеней левых частей нормированных уравнений всех сторон треугольника [10] и является образующей общего уравнения кривой C_n, симметричной относительно прямых (2).

Список литературы

1. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections. — «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 588—621.
2. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. О плоскостях ортогональной симметрии поверхностей евклидова пространства E^m. — В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 8. Харьков, 1970, с. 38—48.
3. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. Общее уравнение алгебраической поверхности с симметрией правильного 600-гранника в пространстве E^4. — В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 13. Харьков, 1973, с. 71—74.
4. Уокер Р. Алгебраические кривые. М., ИЛ, 1952. 236 с.
5. Goursat E. Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. — «Ann. sc. de l'École Norm.», 1887, vol. IV. № 3, p. 159—200.
6. Loria G. Spezielle ebene algebraische Kurven. — «Enz. Math. Wiss.», 1908, Bd III, C, 5.
7. Колесников О. Н. Геометрическое образование плоских кривых четвертого порядка. — «Изв. Крым. пед. ин-та», 1958, т. 29, с. 86—154.
8. Bottoni B. Sulla simmetria rotatoria. — «Giorn. mat. Battaglini», 1960, vol. 88, № 1, p. 108—125.
9. Чуб А. Т. Некоторые вопросы из теории алгебраических кривых. — «Изв. Крым. пед. ин-та», 1961, т. 35, с. 143—172.
10. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. Алгебраические поверхности с симметрией правильного m-мерного симплекса. — В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 16, Харьков, 1974, с. 3—8.

Поступила 25 апреля 1977 г.

УДК 513.81 : 517.544

С. Б. Климентов

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ РОДА $p \geqslant 0$

1. Введение. Формулировка результатов

1. В работе исследуются дифференциальные свойства разли ных краевых задач теории изгибаний поверхностей рода $p \geqslant 0$ по ложительной внешней кривизны в зависимости от дифференциал ных свойств исходных данных.

Вопросы гладкости решений рассматриваемых геометрическ задач сводятся к исследованию гладкости решений задачи Рима для системы дифференциальных уравнений на замкнутой риман вой поверхности.

Работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе форм лируются геометрические и соответствующие аналитические резул таты, а также устанавливается связь между ними. § 2,3 посвящ ны доказательству теоремы о гладкости решений краевой зада Римана. Как следствие из нее получается обобщение известн теоремы И. Н. Векуа о гладкости решений краевой задачи Гил берта [1, гл. 4, § 7].

Для классов регулярности функций и геометрических объекто в работе используются обозначения книги [1].

2. Прежде чем сформулировать полученные результаты, введе вспомогательные понятия и обозначения.

Рассмотрим поверхность S рода $p \geqslant 0$ положительной внешн кривизны, расположенную в трехмерном римановом пространстве V Пусть Λ — край поверхности S, состоящий из $r+1$ $(r \geqslant 0)$ жо дановых, попарно непересекающихся кривых. Через S^* обознач односвязную поверхность, полученную из S проведением канон ческих разрезов L_i $(i = 1, \ldots, 2p + r)$. Разрезы L_i будем рассма ривать в двух экземплярах: L_i^+ и L_i^-. Таким образом, $\partial S^* = \Lambda \cup L^+ \cup L^-$, где $L^\pm = \bigcup\limits_{i=1}^{2p+r} L_i^\pm$. Величины, связанные с кривыми L будем помечать знаками (+) и (—) соответственно.

Везде далее предполагаем выполненными следующие требов ния на регулярность: $S, V_3 \in C_\alpha^n$, $n \geqslant 3$, $0 < \alpha < 1$; $\Lambda \in C_\alpha^k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $0 < \alpha < 1$ (значения k ниже конкретизируются); $L_i \in C$ $(i = 1, \ldots, 2p + r)$.

В работе изучаются следующие вопросы.

I. Задача о бесконечно малых (б. м.) изгибаниях поверхност S, подчиненной краевому условию обобщенного скольжения $\bar{\xi} l =$ где $\bar{\xi}$ — поле б. м. изгибания поверхности S на краю $\Lambda \in C_\alpha^{n-}$

l — заданное на краю Λ векторное поле класса C_α^{n-2}, принадлежащее поверхности S; σ — заданная на Λ скалярная функция класса C_α^{n-2}.

II. Задача о б. м. изгибаниях поверхности S^*, подчиненной краевым условиям $\alpha\delta k_{nN} + \beta\delta\tau_{gN} = \sigma$ на $\Lambda \in C_\alpha^n$, $\delta k^+ = \delta k^-$; $\delta\varkappa^+ = \delta\varkappa^-$ на $L^\pm$, где α, β, σ — заданные на Λ скалярные функции класса C_α^{n-2}; N — заданное вдоль Λ векторное поле класса C_α^{n-2}, принадлежащее S: δk_{nN}, $\delta\tau_{gN}$ — вариации при б. м. изгибании нормальной кривизны и геодезического кручения поверхности S^* на краю Λ в направлении поля N; $\delta k^\pm$ и $\delta\varkappa^\pm$ — вариации при б. м. изгибании соответственно кривизны и кручения кривых $L^\pm$.

III. Задача об изометрических преобразованиях поверхности S^*, подчиненной краевым условиям $\alpha\Delta k_{nN} + \beta\Delta\tau_{gN} = \sigma$ на $\Lambda \in C_\alpha^n$, $\Delta k^+ = \Delta k^-$, $\Delta\varkappa^+ = \Delta\varkappa^-$ на $L^\pm$, где α, β, σ, N — то же, что и выше; Δk_{nN}, $\Delta\tau_{gN}$ — приращения при изометрическом преобразовании нормальной кривизны и геодезического кручения поверхности S^* на краю Λ в направлении поля N; $\Delta k^\pm$, $\Delta\varkappa^\pm$ — приращения при изометрическом преобразовании соответственно кривизны и кручения кривых $L^\pm$.

При рассмотрении задач II и III предполагаем, что пространство V_3 — постоянной кривизны.

3. Вопросы разрешимости задач I—III достаточно полно исследованы в работах [1—5]. В них на исходные данные задач накладываются минимально допустимые при используемых методах требования регулярности и не исследуется гладкость решений. Естественно задаться вопросом: если исходные данные задач I—III достаточно регулярны, какова будет регулярность этих задач на $S \cup \Lambda$? Основной результат работы составляют следующие теоремы.

Теорема 1. *Если задача I разрешима, то* $\xi \in C_\alpha^{n-2}(S \cup \Lambda)$.

Теорема 2. *Если задача II разрешима и* ξ *— поле б. м. изгибания поверхности* S^*, *то* $\xi \in C_\alpha^n(S^* \cup \Lambda \cup L^+ \cup L^-)$.

Теорема 3. *Если задача III разрешима и* $\hat{S}^*$ *— поверхность, изометричная* S^*, *то* $\hat{S}^*$ *принадлежит классу* C_α^n *вплоть до края.*

4. Обратимся теперь к краевым задачам теории функций на римановой поверхности, используемых при изучении затронутых выше вопросов.

Пусть R — замкнутая риманова поверхность (двумерное ориентируемое компактное многообразие с конформной структурой) рода $p \geq 0$, и G — область на R (возможно, несвязная). Границу G обозначим Γ и будем считать состоящей из конечного числа жордановых попарно непересекающихся кривых. Замыкание $G - \overline{G} = G \cup \Gamma$ будем также рассматривать как компактную риманову поверхность с краем Γ. Контур Γ считаем ориентированным так, что при обходе его в положительном направлении область G остается слева. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $G^+ \equiv G$; $G^- \equiv (R \setminus G) \setminus \Gamma$; $\overline{G}^{\pm} = G^{\pm} \cup \Gamma$.

Задача Гильберта. Найти в G решение уравнения

$$\partial \bar{z} w + Aw + B\bar{w} = F, \tag{1}$$

предельные значения которого на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda(t)}\, w\} = \gamma(t), \tag{2}$$

где $z = x + iy$, $i^2 = -1$ — локальная униформизирующая римановой поверхности R; $A(z)$, $B(z)$, $F(z)$ — известные коварианты по $\bar{z}$, определенные в $\overline{G}$; $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; $\bar{w}$, $\bar{\lambda}$ — величины, комплексно-сопряженные w, λ; $\lambda(t)$, $\gamma(t)$ — заданные на Γ функции, $|\lambda| \equiv 1$.

Из рассуждений работ [1—5] вытекает, что теоремы 1—3 являются следствием такого утверждения:

Теорема 4. *Если* $\Gamma \in C_\alpha^{m+1}$, $A, B, F \in C_\alpha^m(\overline{G})$, $\lambda(t)$, $\gamma(t) \in C_\alpha^{m+1}$, (Γ), $m \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$ *и существует решение задачи Гильберта* $w(z)$, *то* $w(z) \in C_\alpha^{m+1}(\overline{G})$.

Замечание. Теорема 4 является обобщением известной теоремы И. Н. Векуа, доказанной им для плоской области [1, гл. 4, § 7]. Рассуждения настоящей работы не опираются на эту теорему и содержат ее новое доказательство.

5. Рассмотрим теперь следующую краевую задачу.

Задача Римана. Найти в G^+ и G^- непрерывно продолжаемые на Γ решения $w^+(z)$ и $w^-(z)$ уравнения (1), предельные значения которых на Γ удовлетворяют краевому условию

$$w^+(t) = G(t)\, w^-(t) + g(t), \tag{3}$$

где $G(t)$, $g(t)$ — заданные на Γ функции, $G(t) \neq 0$.

Теорема 5. *Если* $\Gamma \in C_\alpha^{m+1}$, A, B, $F \in C_\alpha^m(\overline{G}\pm)$, $G(t)$, $g(t) \in C_\alpha^{m+1}(\Gamma)$, $m \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$ *и существует решение задачи Римана* $w^{\pm}(z)$, *то* $w^{\pm}(z) \in C_\gamma^{m+1}(\overline{G}\pm)$.

Решение задачи Гильберта при требованиях на гладкость, указанных в теореме 4, можно рассматривать как решение некоторой задачи Римана при требованиях на гладкость, указанных в теореме 5 [6], поэтому теорема 4 есть следствие теоремы 5. Все последующие рассуждения направлены на доказательство теоремы 5.

§ 2. Вспомогательные построения

В этом параграфе устанавливаются факты, необходимые для доказательства теоремы 5, а также доказывается теорема 5 в предположении, что $A = B = F \equiv 0$.

1. Дифференциальные свойства интеграла типа Коши. Рассмотрим ограниченную плоскую область D с границей L, состоящей из

конечного числа жордановых попарно непересекающихся кривых. Пусть на L задана функция $\varphi(t)$, где t — аффикс точки, принадлежащей L.

Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{4}$$

Дословным повторением доказательства теоремы 1.10 главы 1 книги [1] доказывается

Лемма 1. *Пусть $L\in C_\alpha^m$, $\varphi\in C_\alpha^m(L)$, $m\geqslant 1$, $0<\alpha<1$. Тогда $\Phi(z)\in C_\alpha^m(D\cup L)$.*

Возьмем конечное покрытие римановой поверхности R параметрическими кругами $\{W_k\}$ такое, что контур Γ пересекают только круги, имеющие центр на Γ, и такое, что круги, имеющие центр на Γ, не покрывают ни G, ни $R\setminus G$. Через $\{\nu_k\}$ обозначим разбиение единицы класса C^∞ на R, подчиненное покрытию $\{W_k\}$.

Набор множеств $\{W_k\cap\overline{G}\}$ составит покрытие римановой поверхности $\overline{G}$. Обозначим его $\{W_k^*\}$. Семейство соответствующих сужений функций ν_k на W_k^* будет разбиением единицы класса C^∞ на $\overline{G}$, подчиненным покрытию $\{W_k^*\}$. Обозначим его $\{\nu_k^*\}$.

Везде далее считаем введенные покрытия и подчиненные им разбиения единицы фиксированными.

Пусть $M(t,z)$ — ядро Коши для римановой поверхности R, дивизор особенностей которого расположен вне $\overline{G}$ и вне кругов из покрытия $\{W_k\}$, имеющих центр на Γ [8]. Рассмотрим функцию $f(t)$, заданную на Γ.

Лемма 2. *Если $\Gamma\in C_\alpha^{m+1}$, $f(t)\in C_\alpha^m(\Gamma)$, $m\geqslant 0$, $0<\alpha<1$, то интеграл типа Коши*

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}f(t)\,M(t,z)\,dt \tag{5}$$

принадлежит классу $C_\alpha^m(\overline{G})$.

Доказательство. $\Phi(z)$ — аналитическая в G функция [7]. Пусть $\{W_k\}_{k=1}^{l}$ — набор кругов из покрытия $\{W_k\}$, покрывающий Γ. Обозначим $W^*=\bigcup\limits_{k=1}^{l}W_k^*$, $W^*\subset\overline{G}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $\Phi(z)\in C_\alpha^m(W^*)$.

По определению контурного интеграла на римановой поверхности $\Phi(z)=\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}\nu_k(t)\,f(t)\,M(t,z)\,dt$, где $\Gamma_k=\Gamma\cap W_k$. Очевидно, $\Phi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}\nu_k(t)\,f(t)\,M(t,z)\,dt$ — аналитическая в $\bigcup\limits_{k=1}^{l}W_k\setminus$

$\setminus \mathrm{supp}\, \nu_k$ функция (через $\mathrm{supp}\, \nu_k$ обозначен носитель функции ν_k). Если $z \in W_k$, имеем

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} \nu_k(t) f(t) \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} \nu_k(t) f(t) M_1(t, z)\, dt = I_1(z) + I_2(z),$$

где $M_1(t, z)$ аналитична по z в W_k [8].

Образ кривой Γ_k в параметрической плоскости t можно дополнить до замкнутого контура с сохранением соответствующей гладкости, положив на дополнении $\nu_k(t) f(t) \equiv 0$. Поэтому [1, гл.], § 3]

$$I_1(z) \in C_\alpha^m(W_k^*). \quad (6)$$

$I_2(z)$ аналитична в W_k [9. гл. 1, § 1], отсюда $\Phi_k(z) \in C_\alpha^m(W^*)$, следовательно, $\Phi(z) \in C_\alpha^m(W^*)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если* $\Gamma \in C_\alpha^m$, $f(t) \in C_\alpha^m(\Gamma)$, $m \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, *то интеграл типа Коши (5) принадлежит классу* $C_\alpha^m(\overline{G})$.

Доказательство дословно повторяет предыдущее, только для получения соотношения (6) надо сослаться на лемму 1.

2. Дифференциальные свойства решений задачи Римана для аналитических функций. В этом пункте, рассматривая краевую задачу Римана, везде считаем $A = B = F \equiv 0$.

Пусть $g(t)$ — заданная на Γ функция и пусть в краевом условии (3) $G(t) = 1$. В этом случае задача Римана превратится в так называемую «задачу о скачке» для аналитических функций [здесь и везде далее, рассматривая аналитический случай, вместо $w(z)$ пишем $\Phi(z)$]:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \ t \in \Gamma. \quad (7)$$

Лемма 4. *Пусть* $g(t) \in C_\alpha^m(\Gamma)$, $\Gamma \in C_\alpha^{m+1}$ $(\Gamma \in C_\alpha^m)$, $0 < \alpha < 1$, $m \geqslant 0$ $(m \geqslant 1)$ *и пусть существует решение задачи* (7) $\Phi^\pm(z)$. *Тогда* $\Phi^\pm(z) \in C_\alpha^m(\overline{G}^\pm)$.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из представления решения задачи (7) в виде [7] $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} g(t) M(t, z)\, dt + \mathrm{const}$ и из леммы 2 (леммы 3).

Рассмотрим однородную задачу Римана для аналитических функций:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \ t \in \Gamma, \quad (8)$$

где $\Phi^\pm(t)$ — предельные значения искомых функций $\Phi^\pm(z)$, аналитических в $G^\pm$, $G(t) \neq 0$ — заданная на Γ функция.

Лемма 5. *Пусть* $G(t) \in C_\alpha^m(\Gamma)$, $\Gamma \in C_\alpha^{m+1}$ $(\Gamma \in C_\alpha^m)$ $0 < \alpha < 1$, $m \geqslant 0$ $(m \geqslant 1)$ *и пусть существует решение задачи* (8) $\Phi^\pm(z)$. *Тогда* $\Phi^\pm(z) \in C_\alpha^m(\overline{G}^\pm)$.

Доказательство. Пусть Γ состоит из r компонент Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Если $\varkappa_i = \operatorname{ind}_{\Gamma_i} G(t) = 0$, $i = 1, \ldots, r$, то, прологарифмировав краевое условие (8), придем к рассмотрению решения задачи о скачке [10], и наше утверждение будет следствием леммы 4.

Пусть не все $\varkappa_i = 0$. Превратим $\overline{G}^+$ в замкнутую риманову поверхность R^+, заклеивая контуры Γ^i, $i = 1, \ldots, r$ кругами T_i, $i = 1, \ldots, r$ (о локально-конформном склеивании см. [7]). На R^+ построим функцию $P_i(z)$, $i = 1, \ldots, r-1$, аналитическую в $R^+ \setminus T_r$ вплоть до Γ_r и имеющую внутри T_i, $i = 1, \ldots, r-1$, единственный в $(R^+ \setminus T_r) \cup \Gamma_r$ простой нуль (о построении таких функций см. [10]).

Обозначим через z_k, $k = 1, \ldots, l$ нули функции $\Phi^+(z)$ (каждый нуль считаем столько раз, какова его кратность). Построим на R^+ функцию $F_k^+(z)$, $k = 1, \ldots, l$, аналитическую в $R^+ \setminus T_r$ вплоть до Γ_r и имеющую в точке z_k, $k = 1, \ldots, l$ единственный в $(R^+ \setminus T_r) \cup \Gamma_r$ простой нуль. Обозначим $H^+(z) = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{r-1} P_i^{\varkappa_i}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{l} F_k^+(z)}$.

Превратим теперь $\overline{G}^-$ в замкнутую риманову поверхность R^-, заклеивая кругами T_i, $i = 1, \ldots, r$, контуры Γ_i, $i = 1, \ldots, r$. Пусть z_j, $j = 1, \ldots, s$ — нули функции $\Phi^-(z)$ (каждый нуль считаем столько раз, какова его кратность). Построим на R^- функцию $F_j^-(z)$, $j = 1, \ldots, s$, аналитическую в $R^- \setminus T_r$ вплоть до Γ_r и имеющую в точке z_j, $j = 1, \ldots, s$ единственный простой нуль. Обозначим $H^-(z) = \dfrac{1}{\prod\limits_{j=1}^{s} F_j^-(z)}$, $\Phi_0^+(z) = \Phi^+(z) H^+(z)$, $\Phi_0^-(z) = \Phi^-(z) H^-(z)$ и перейдем к рассмотрению на R решения $\Phi_0^{\pm}(z)$ задачи $\Phi_0^+(t) = G_0(t)\Phi_0^-(t)$, где $G_0(t) = \dfrac{H^+(t)}{H^-(t)} G(t)$, $\operatorname{ind}_{\Gamma_i} G_0(t) = 0$, $i = 1, \ldots, r$, $G_0(t) \in C_\alpha^m(\Gamma)$.

Лемма 5 доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующая очевидная

Лемма 6. *Пусть* $\Gamma \in C_\alpha^m$, $m \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$ *и пусть функция* $f(z) \in C_\alpha^m(G)$. *Тогда* $f(t) \in C_\alpha^m(\Gamma)$, *где* t — *аффикс точки контура* Γ.

Рассмотрим неоднородную задачу Римана для аналитических функций:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{9}$$

где $G(t) \neq 0$, $g(t)$ — заданные на Γ функции; $\Phi^{\pm}(t)$ — предельные значения на Γ искомых функций $\Phi^{\pm}(z)$, аналитических в $G^{\pm}$.

Лемма 7. *Пусть* $G(t)$, $g(t) \in C_\alpha^m(\Gamma)$, $\Gamma \in C_\alpha^{m+1}$ $(\Gamma \in C_\alpha^m)$, $0 < \alpha < 1$, $m \geqslant 0$ $(m \geqslant 1)$ *и пусть существует решение задачи* ($\Phi^\pm(z)$. *Тогда* $\Phi^\pm(z) \in C_\alpha^m(\overline{G}^\pm)$.

Доказательство. Предположим сначала, что соответст вующая однородная задача

$$X^+(t) = G(t)\, X^-(t) \tag{10}$$

имеет решение, нули которого не лежат на Γ. Пусть $X_0^\pm(z)$ — та кое решение задачи (10). Нули функций $X_0^\pm(z)$ заключим в дост точно малые круги U_i^+, U_j^- (считаем $U_i^+ \subset G^+$, $U_j^- \subset G^-$ настол ко малыми, что они попарно не пересекаются и не пересекают Г). Границы кругов U_i^+ и U_j^- обозначим соответственно Γ_i^+ и Γ_j^- и положим $\Gamma^+ = \bigcup_i \Gamma_i^+$, $\Gamma^- = \bigcup_j \Gamma_j^-$. Γ_i^+ и Γ_j^- считаем ориентирован ными так, чтобы при положительном обходе этих контуров U_i^+ и U_j^- оставались слева.

Введем в рассмотрение две несвязные области $\tilde{G}^+$ и $\tilde{G}^-$: $\tilde{G}^+ = \{[G^+ \setminus (\bigcup_i U_i^+)] \cup (\bigcup_j U_j^-)\}$, $\tilde{G}^- = \{[G^- \setminus (\bigcup_j U_j^-)] \cup (\bigcup_i U_i^+)\}$, а также две аналитические в $\tilde{G}^+$ и $\tilde{G}^-$ функции $\tilde{\Phi}^+(z)$ и $\tilde{\Phi}^-(z)$, по ложив

$$\tilde{\Phi}^+(z) = \begin{cases} \dfrac{\Phi^+(z)}{X_0^+(z)}, & z \in [G^+ \setminus (\bigcup_i U_i^+)], \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma^-} \dfrac{\Phi^-(t)}{X_0^-(t)} M(t, z)\, dt, & z \in (\bigcup_j U_j^-), \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}^-(z) = \begin{cases} \dfrac{\Phi^-(z)}{X_0^-(z)}, & z \in [G^- \setminus (\bigcup_j U_j^-)], \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma^+} \dfrac{\Phi^+(t)}{X_0^+(t)} M(t, z)\, dt, & z \in (\bigcup_i U_i^+), \end{cases}$$

где $M(t, z)$ — ядро Коши на R, дивизор особенностей которого ле жит вне кругов U_i^+, U_j^- [8].

Обозначим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. Определим на $\tilde{\Gamma}$ функцию $\tilde{g}(t)$, положив

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} \dfrac{g(t)}{X_0^+(t)}, & t \in \Gamma, \\ \dfrac{\Phi^+(t)}{2X_0^+(t)} - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma^+} \dfrac{\Phi^+(t')}{X_0^+(t')} M(t', t)\, dt', & t \in \Gamma^+, \\ -\dfrac{\Phi^-(t)}{2X_0^-(t)} + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma^-} \dfrac{\Phi^-(t')}{X_0^-(t')} M(t', t)\, dt', & t \in \Gamma^-, \end{cases}$$

где $M(t, z)$ — то же ядро Коши на R, что и выше.

Из лемм 2 и 6 имеем $\tilde{g}(t) \in C_\alpha^m(\Gamma)$.

Учитывая определение функций $\tilde{\Phi}^{+}(z)$, $\tilde{\Phi}^{-}(z)$, $\tilde{g}(t)$, а также формулы Сохоцкого—Племеля для интеграла типа Коши на римановой поверхности [7], получим, что $\tilde{\Phi}^{+}(z)$ и $\tilde{\Phi}^{-}(z)$ есть аналитические соответственно в $\tilde{G}^{+}$ и $\tilde{G}^{-}$ функции, предельные значения которых на $\tilde{\Gamma}$ удовлетворяют краевому условию $\tilde{\Phi}^{+}(t) - \tilde{\Phi}^{-}(t) = \tilde{g}(t)$.

Из леммы 4 имеем $\tilde{\Phi}^{\pm}(z) \in C_{\alpha}^{m}(\overline{\tilde{G}})$. Отсюда $\Phi^{\pm}(z) \in C_{\alpha}^{m}(\overline{G}^{\pm})$.

Пусть теперь задача (10) не имеет решения, не равного нулю на Γ. Рассмотрим задачу

$$X^{+}(t) = G(t)\, P^{k}(t)\, X^{-}(t), \tag{11}$$

где k — целое положительное число, зависящее от p — рода поверхности R и от $\operatorname{ind}_{\Gamma} G(t)$; $P(z)$ — аналитическая в G вплоть до Γ функция, имеющая в G единственный нуль (о существовании такой функции см. [10]).

В [11] доказано, что при специальном выборе k задача (11) имеет решение $X_{0}^{\pm}(z)$, не равное нулю на Γ. Доказательство леммы 7 завершается рассуждением, аналогичным приведенному выше, с использованием решения $X_{0}^{\pm}(z)$ задачи (II).

Лемма 7 доказана.

3. Введение нормы в пространстве $C_{\alpha}^{m}(\overline{G})$. Дифференциальные свойства оператора Tf. Пусть $f(z)$ — некоторая функция или тензорная величина класса $C_{\alpha}^{m}(\overline{G})$, $m \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$. Через $C_{\alpha}^{m}(f, \overline{W}_{k}^{*})$ обозначим норму $f(z)$ в замкнутом параметрическом круге (полукруге), вводимую И. Н. Векуа [1, гл. 1, § 1]. Норму $f(z)$ в пространстве $C_{\alpha}^{m}(\overline{G})$ вводим так: $C_{\alpha}^{m}(f, \overline{G}) = \max\limits_{k} C_{\alpha}^{m}(f, \overline{W}_{k}^{*})$.

Полученное нормированное пространство будет полным [12]. Очевидно, что при замене покрытия римановой поверхности R введенная нами норма вообще говоря изменится, но останется эквивалентной прежней.

Пусть $f(z)$ — ковариантна по $\bar{z}$, определенная на $\overline{G}$. Рассмотрим оператор $T_{G}f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} f(t)\, M(t, z)\, dT$, где $M(t, z)$ — ядро Коши на римановой поверхности R, дивизор особенностей которого лежит вне $\overline{G}$ и вне кругов из покрытия $\{W_{k}\}$, имеющих центр на Γ.

Справедливо следующее утверждение [12], [13].

Лемма 8. *Пусть* $\Gamma \in C_{\alpha}^{m+1}$ $(\Gamma \in C_{\alpha}^{m})$, $f(z) \in C_{\alpha}^{m}(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$, $m \geqslant 0$ $(m \geqslant 1)$. *Тогда функция* $g(z) = T_{G}f$ *принадлежит классу* $C_{\alpha}^{m+1}(\overline{G})$, *причем* $T_{G}f$ *вполне непрерывно отображает пространство ковариант по* $\bar{z}$ *класса* $C_{\alpha}^{m}(\overline{G})$ *в пространство функций класса* $C_{\alpha}^{m}(\overline{G})$.

Доказательство леммы 8 в работе [12] проведено для случая $\Gamma \in C_\alpha^{m+1}$, $m \geqslant 0$. В случае $\Gamma \in C_\alpha^m$, $m \geqslant 1$ доказательство дословно повторяется.

Лемма 9. *Если* $f \in L_\rho(\bar{G})$, $\rho > 2$, *то функция* $g(z) = T_G f \in C_\alpha(\bar{G})$, $\alpha = \frac{\rho - 2}{\rho}$.

Доказательство леммы 9 аналогично первой части доказательства леммы 8 [I, гл. 1, теорема 1.19].

§ 3. Доказательство теоремы 5

Решение задачи Римана (1), (3) можно представить в виде $w^\pm = w_0^\pm + w_1^\pm$, где $w_1^\pm$ — частные решения уравнения (1) в области $G^\pm$, задаваемые формулой $w_1^\pm(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G^\pm} \Omega_1^\pm(t, z) F(t) dT - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G^\pm} \Omega_2^\pm(t, z) \overline{F(t)}\, dT$, где $\Omega_1^\pm$, $\Omega_2^\pm$ — ядра однородного уравнения (1) в области $G^\pm$ [6], а $w_0^\pm(z)$ — решение задачи

$$\partial_{\bar{z}} w_0^\pm + A w_0^\pm + B \bar{w}_0^\pm = 0 \quad \text{в } G^\pm,$$

$$w_0^+(t) = G(t)\, w_0^-(t) + g_0(t) \quad \text{на } \Gamma,$$

$$g_0(t) = g(t) - w_1^+(t) + G(t)\, w_1^-(t).$$

В условиях теоремы 5 из определения ядер $\Omega_1^\pm$, $\Omega_2^\pm$, [6] и из лемм 6 и 8 имеем $w_1^\pm(z) \in C_\alpha^{m+1}(\bar{G}^\pm)$, $g_0(t) \in C_\alpha^{m+1}(\Gamma)$.

Таким образом, теорему 5 достаточно доказать в предположении $F \equiv 0$. Все дальнейшие рассуждения ведутся в этом предположении.

Лемма 10. *Если* $A, B \in L_\rho(\bar{G}^\pm)$, $\rho > 2$, $\Gamma \in C_\alpha^1$, $G(t)$, $g(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, *то решение задачи* (1), (3), *если оно существует, принадлежит классу* $C_\beta(\bar{G}^\pm)$, *где* $\beta = \min\left(\alpha, \frac{\rho - 2}{\rho}\right)$.

Доказательство. Согласно результатам И. И. Данилюка [14], $w^\pm(z) = \Phi^\pm(z) \exp \omega^\pm(z)$, где $\Phi^\pm(z)$ аналитичны в $G^\pm$ и непрерывны в $\bar{G}^\pm$, $\omega^\pm(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G^\pm}\left(A + B\frac{\bar{w}^\pm}{w^\pm}\right) M^\pm(t, z)\, dT$, $M^\pm(t, z)$ — ядра Коши на R, дивизоры особенностей которых лежат в $G^\mp$. Так как $\left(A + B\frac{\bar{w}^\pm}{w^\pm}\right) \in L_\rho(\bar{G}^\pm)$, $\rho > 2$, то по лемме 9 $\omega^\pm(z) \in C_\beta(\bar{G}^\pm)$, $\beta = \frac{\rho - 2}{\rho}$.

Аналитические функции $\Phi^\pm(z)$ будут решением краевой задачи Римана $\Phi^+(t) = G(t)\,[\exp(\omega^-(t) - \omega^+(t))]\, \Phi^-(t) + g(t) \exp(-\omega^+(t))$, где в силу леммы 6 $G \cdot \exp[\omega^- - \omega^+]$, $g \cdot \exp(-\omega^+) \in C_\beta(\Gamma)$, $\beta = \min\left(\alpha, \frac{\rho - 2}{\rho}\right)$.

По лемме 7 $\Phi^{\pm}(z) \in C_{\beta}(\overline{G}^{\pm})$, т. е. $w^{\pm}(z) \in C_{\beta}(G^{\pm})$. Лемма 10 доказана.

Теперь докажем теорему 5. Рассмотрим случай $m = 0$. $w^{\pm}(z)$ удовлетворяет в $\overline{G}^{\pm}$ следующему интегральному уравнению [6]: $w^{\pm}(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G^{\pm}} (Aw^{\pm} + B\overline{w}^{\pm}) M^{\pm}(t, z)\, dT = \Phi^{\pm}(z)$, где $\Phi^{\pm}(z)$ — аналитические в $G^{\pm}$ функции; $M^{\pm}(t, z)$ — ядра Коши на R, дивизоры особенностей которых лежат в $G^{\pm}$. По лемме 10 $w^{\pm}(z) \in C_{\alpha}(\overline{G}^{\pm})$. Отсюда по лемме 8

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G^{\pm}} (Aw^{\pm} + B\overline{w}^{\pm}) M^{\pm}(t, z)\, dT \in C_{\alpha}^{1}(\overline{G}^{\pm}).$$

По лемме 6 будем иметь $g_1(t) = T_{G^+}(Aw^{+} + B\overline{w}^{+}) - G(t)\, T_{G^-} \times (Aw^{-} + B\overline{w}^{-}) \in C_{\alpha}^{1}(\Gamma)$.

Таким образом, на Γ $\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + g_0(t)$, где $g_0(t) = g(t) + g_1(t) \in C_{\alpha}^{1}(\Gamma)$. По лемме 7 $\Phi^{\pm}(z) \in C_{\alpha}^{1}(\overline{G}^{\pm})$. Отсюда $w^{\pm}(z) \in C_{\alpha}^{1}(\overline{G}^{\pm})$.

Для произвольного $m \geqslant 0$ утверждение теоремы получается по методу индукции.

Замечание. В лемме 7 рассматриваются два случая:

$$1)\ \Gamma \in C_{\alpha}^{m+1},\ m \geqslant 0; \quad 2)\ \Gamma \in C_{\alpha}^{m},\ m \geqslant 1.$$

Утверждение леммы в случае 1) использовано при доказательстве леммы 10, а в случае 2) — при завершении доказательства теоремы 5.

Список литературы

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
2. Фоменко В. Т. Об изгибании и однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем. — В кн.: Мат. сб., 1964, т. 63, № 3, с. 409—425.
3. Фоменко В. Т., Тюриков Е. В. Об изгибании поверхностей рода $\rho > 0$ с краем в пространстве постоянной кривизны при внешних связях. — «Докл. АН СССР», т. 231, № 1, 1976, с. 43—45.
4. Тюриков Е. В. О жесткости поверхностей рода $\rho \geqslant 0$ с краем, расположенных в пространстве Лобачевского. — «Сиб. мат. журн.», 1976, т. 17, № 5, с. 1129—1140.
5. Климентов С. Б. Бесконечно малые изгибания поверхностей рода $\rho > 0$ положительной внешней кривизны с краевым условием обобщенного скольжения. — В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 19, Харьков, 1976, с. 57—65.
6. Родин Ю. Л. Интегралы типа Коши и краевые задачи для обобщенных аналитических функций на замкнутых римановых поверхностях. — «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 4, с. 798—801.
7. Зверович Э. И., Литвинчук Г. С. Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения. — «Усп. мат. наук», 1968, т. 23, вып. 3, с. 67—121.

8. Гусман С. Я., Родин Ю. Л. Ядро интеграла типа Коши на замкнуты[х] римановых поверхностях. — «Сиб. мат. журн.», 1962, т. 3, № 4, с. 527—531.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963. 639 с.
10. Родин Ю. Л. Краевые задачи теории аналитических функций на риман[о]вых поверхностях конечного рода. — В кн.: Исследования по современны[м] проблемам ТФКП. М., Физматгиз, 1960, с. 436—442.
11. Родин Ю. Л. Краевая задача Римана на римановых поверхностях и е[е] приложения. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1960.
12. Климентов С. Б. Изгибания поверхностей рода $p \geqslant 0$ положительно[й] внешней кривизны. — В кн.: Укр. геом. сб. Вып. 19, Харьков, 1976, с. 37—56.
13. Фоменко В. Т., Климентов С. Б. Об изгибаниях поверхностей рода $p \geqslant 0$ положительной внешней кривизны в римановом пространстве. — «Докл. АН СССР», 1976, т. 227, № 5, с. 1064—1066.
14. Данилюк И. И. Об интегральном представлении решений некоторых эллиптических систем первого порядка на поверхностях с приложением.

Поступила 25 января 1977 г.

УДК 513.73

В. М. Кузаконь, М. О. Рахула

ИНВАРИАНТЫ РАССЛОЕНИЯ ЛОКАЛЬНО-ЕВКЛИДОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. Представляет интерес изучение точной последовательности иммерсии и субмерсии

$$V_n \xrightarrow{F} V_{n+r} \xrightarrow{\Phi} V_r, \tag{1}$$

когда иммерсия F погружает n-мерное многообразие V_n в $(n+r)$-мерное многообразие V_{n+r} и субмерсия Φ расслаивает многообразие V_{n+r} на n-мерные слои, причем одним из слоев является образ $F(V_n)$. В этой статье изучается простейший случай, когда $n = r = 1$ и V_2 — локально-евклидово многообразие. Изучение начинается с диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ a\downarrow & & b\downarrow & & c\downarrow \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{C} \end{array} \tag{2}$$

и соотношений

$$\begin{aligned} &\tilde{f}^I_1 a' = b^I_J f^J_1, \\ &\tilde{f}^I_{11}(a')^2 + \tilde{f}^I_1 a'' = b^I_J f^J_{11}, \\ &\tilde{f}^I_{111}(a')^3 + 3\tilde{f}^I_{11} a' a'' + \tilde{f}^I_1 a''' = b^I_J f^J_{111}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}_J b_I^J = c'\varphi_I,\\
&\tilde{\varphi}_{KL} b_I^K b_J^L = c'\varphi_{IJ} + c''\varphi_I\varphi_J,\\
&\tilde{\varphi}_{PQS} b_I^P b_J^Q b_K^S = c'\varphi_{IJK} + 3c''\varphi_{(IJ}\varphi_{K)} + c'''\varphi_I\varphi_J\varphi_K,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

возникновение которых объяснено в работе [1].

Точность последовательности (1) приводит к соотношениям

$$
\varphi_I f_1^I = 0,\quad \varphi_{IJ} f_1^I f_1^J + \varphi_I f_{11}^I = 0,\quad \varphi_{IJK} f_1^I f_1^J f_1^K + 3\varphi_{IJ} f_{11}^I f_1^J + \varphi_I f_{111}^I = 0,
$$
$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{5}
$$

(В работе [1] производные функции φ имеют греческие индексы; здесь они принимают единственное значение 2 и поэтому опускаются). Как показано в [1], от производных $\{f_1^I,\ f_{11}^I,\ f_{111}^I, \dots\}$ и $\{\varphi_I, \varphi_{IJ}, \varphi_{IJK}, \dots\}$ можно перейти к величинам $\{F_1^I = f_1^I,\ F_{11}^I = f_{11}^I - f_1^I\Gamma_{11}^1,\ F_{111}^I = f_{111}^I - 3F_{11}^I\Gamma_{11}^1 - F_1^I\Gamma_{111}^1, \dots\}$ и $\{\Phi_I = \varphi_I,\ \Phi_{IJ} = \varphi_{IJ} + \Gamma_{22}^2\varphi_I\varphi_J,\ \Phi_{IJK} = \varphi_{IJK} + 3\Gamma_{22}^2\Phi_{(IJ}\varphi_{K)} + \Gamma_{222}^2\varphi_I\varphi_J\varphi_K, \dots\}$, где $\Gamma_{11}^1 = \dfrac{f_1^I f_{11}^I}{f_1^J f_1^J}$, $\Gamma_{111}^1 = \dfrac{f_1^I f_{111}^I}{f_1^J f_1^J}, \dots$ $\Gamma_{22}^2 = -\dfrac{\varphi_{IJ}\varphi_I\varphi_J}{(\varphi_K\varphi_K)^2}$, $\Gamma_{222}^2 = -\dfrac{\varphi_{IJK}\varphi_I\varphi_J\varphi_K}{(\varphi_L\varphi_L)^3}$ и тогда соотношения (3,4) упростятся:

$$
\tilde{F}_1^I a' = b_J^I F_1^J,\quad \tilde{F}_{11}^I (a')^2 = b_J^I F_{11}^J,\quad \tilde{F}_{111}^I (a')^3 = b_J^I F_{111}^J, \dots \tag{6}
$$

$$
\tilde{\Phi}_J b_I^J = c'\Phi_I,\quad \tilde{\Phi}_{KL} b_I^K b_J^L = c'\Phi_{IJ},\quad \tilde{\Phi}_{PQS} b_I^P b_J^Q b_K^S = c'\Phi_{IJK}, \dots \tag{7}
$$

Вид соотношений (5) не изменится, в них только малые буквы f и φ заменятся заглавными F и Φ.

2. Дифференциальные инварианты иммерсии F получаются из соотношений (6) путем исключения из них величин a' и b_J^I. Начнем с того, что из первого соотношения выведем равенство $\tilde{F}_1^I \tilde{F}_1^I (a')^2 = F_1^I F_1^I$.

После этого можно путем деления на соответствующие степени выражения $F_1^I\ F_1^I$ из остальных соотношений (6) исключить производную a'. Получится последовательность векторов

$$
\frac{F_1^I}{(F_1^J F_1^J)^{1/2}},\quad \frac{F_{11}^I}{F_1^J F_1^J},\quad \frac{F_{111}^I}{(F_1^J F_1^J)^{3/2}}, \dots, \tag{8}
$$

инвариантных относительно b. Первый из них является единичным вектором касательной к кривой $F(V_1)$. Второй вектор направлен по нормали, так как $F_{11}^I F_1^I = 0$. Длина этого вектора равна кривизне кривой

$$
k = \frac{(F_{11}^I F_{11}^I)^{1/2}}{F_1^J F_1^J} = \frac{\left|\begin{vmatrix} f_1^1 & f_{11}^1 \\ f_1^2 & f_{11}^2 \end{vmatrix}\right|}{[(f_1^1)^2 + (f_1^2)^2]^{3/2}}. \tag{9}
$$

Следующие векторы (8) также направлены по нормали; их длины вместе с кривизной k и составляют набор инвариантов иммерсии F. Можно показать, что длины третьего и последующих векторов равны соответствующим производным кривизны k по длине дуги. Например, пронормировав на $F(V_1)$ параметр так, что $F_1^I F_1^I = 1$, получим для третьего вектора $(F_{111}^I F_{111}^I) = \frac{F_{11}^I F_{111}^I}{k} = k'$.

3. Сложнее обстоит дело с субмерсией Φ. Правда, на первом этапе можно поступить так же и исключить из соотношений (7) производную c'. Заметив, что $\tilde{\Phi}_I \tilde{\Phi}_I = (c')^2 \Phi_I \Phi_I$, разделим каждое соотношение (7) почленно на $(\tilde{\Phi}_I \tilde{\Phi}_I)^{1/2}$. В результате получим последовательность ковариантных тензоров

$$\frac{\Phi_I}{(\Phi_J \Phi_J)^{1/2}}, \quad \frac{\Phi_{IJ}}{(\Phi_K \Phi_K)^{1/2}}, \quad \frac{\Phi_{IJK}}{(\Phi_L \Phi_L)^{1/2}}, \ldots \tag{10}$$

валентности 1, 2, 3, ... соответственно относительно преобразования b. Одновременно появляется последовательность бинарных форм первого, второго и высших порядков:

$$\frac{\Phi_I X^I}{(\Phi_J \Phi_J)^{1/2}}, \quad \frac{\Phi_{IJ} X^I X^J}{(\Phi_K \Phi_K)^{1/2}}, \quad \frac{\Phi_{IJK} X^I X^J X^K}{(\Phi_L \Phi_L)^{1/2}}, \ldots$$

Обращение в нуль линейной формы дает уравнение касательной к кривой семейства в данной точке: $\Phi_I X^I = 0$. Единственный инвариант этой формы — скалярный квадрат ковектора $\Phi_I (\Phi_J \Phi_J)^{-1/2}$, равен единице. Совместный инвариант его с квадратичной формой равен нулю: $\Phi_{IJ} \Phi_I \Phi_J = 0$. Инвариантов квадратичной формы два:

$$I_1 = \frac{\Phi_{11} + \Phi_{22}}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^{1/2}}, \quad I_2 = \frac{1}{\Phi_1^2 + \Phi_2^2} \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Воспользуемся обозначениями, введенными в [1]: $S = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$, $M = \varphi_{11} + \varphi_{22}$, $L = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$, $T = -\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix}$, и приведем эти инварианты к виду

$$I_1 = \frac{T}{S^{3/2}}, \quad I_2 = \frac{T^2}{S^3} - \frac{MT - LS}{S^2}. \tag{12}$$

Тем самым алгебраические инварианты тензоров (10) становятся дифференциальными инвариантами семейства кривых. Оба инварианта (12) имеют хорошее истолкование. Инвариант — I_1 есть кривизна кривой семейства. На $F(V_1)$ он совпадает с величиной (9), в чем можно убедиться с помощью соотношений (5), в которых f и φ нужно заменить на F и Φ соответственно.

Далее рассмотрим вектор градиента $g(\varphi_1, \varphi_2)$ и введем единичные векторы касательной и нормали: $\boldsymbol{e} = \frac{1}{S^{1/2}}(\varphi_2, -\varphi_1)$, $\boldsymbol{n} = \frac{1}{S^{1/2}} \times$

$= (\varphi_1, \varphi_2)$. Затем определим вектор $\frac{dg}{de} = \frac{1}{S^{1/2}}(\varphi_{11}\varphi_2 - \varphi_{12}\varphi_1, \varphi_{12}\varphi_2 - \varphi_{22}\varphi_1)$, характеризующий скорость изменения вектора градиента $\boldsymbol{g}$ в направлении вектора касательной $\boldsymbol{e}$.

Теорема 1. *Вектор* $\frac{dg}{de}$ *обладает свойствами:*

1) отношение его проекции на касательную к длине вектора градиента равно I_1, *т. е.*

$$\left(\frac{dg}{de},\ \boldsymbol{e}\right) : |\boldsymbol{g}| = \frac{T}{S^{3/2}}; \tag{13}$$

2) отношение его проекции на нормаль к длине вектора градиента равно $\sqrt{-I_2}$, *т. е.*

$$\left(\frac{dg}{de}, \boldsymbol{n}\right) : |\boldsymbol{g}| = \frac{[S(MT - LS) - T^2]^{1/2}}{S^{3/2}}; \tag{14}$$

3) отношение его длины к длине вектора градиента равно $\sqrt{I_1^2 - I_2}$, *т. е.*

$$\left|\frac{dg}{de}\right| : |\boldsymbol{g}| = \frac{(MT - LS)^{1/2}}{S}. \tag{15}$$

Доказательство. Равенство (13) проверяется непосредственным вычислением. Равенства (15) и затем (14) получим, используя разложения $MT - LS = (\varphi_{11}\varphi_2 - \varphi_{12}\varphi_1)^2 + (\varphi_{12}\varphi_2 - \varphi_{22}\varphi_1)^2$, $S(MT - LS) - T^2 = [(\varphi_{11}\varphi_2 - \varphi_{12}\varphi_1)\varphi_1 + (\varphi_{12}\varphi_2 - \varphi_{22}\varphi_1)\varphi_2]^2$.

Инварианты (14)—(16) связаны очевидным равенством $\frac{1}{g^2}\left(\frac{dg}{de}\right)^2 = \frac{1}{g^2}\left(\frac{dg}{de}, \boldsymbol{e}\right)^2 + \frac{1}{g^2}\left(\frac{dg}{de}, \boldsymbol{n}\right)^2$, по существу эквивалентным второму соотношению (12).

Так как $I_2 \leqslant 0$, то квадратичной формой $\Phi_{IJ}X^IX^J$ в каждой точке определяется два самосопряженных направления: $k_1 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ (направление градиента) и $k_2 = \frac{\Phi_{11}\varphi_1}{\Phi_{22}\varphi_2}$. Они взаимно перпендикулярны в случае $\frac{dg}{de} \parallel \boldsymbol{n}$, т. е. в точке спрямления кривой семейства, и совпадают, если $\frac{dg}{de} \parallel \boldsymbol{e}$. Заслуживает внимания последний случай; тогда $I_2 = 0$. Легко подсчитать, что

$$dS \wedge d\varphi = 2S^{3/2}\sqrt{-I_2}\, dx \wedge dy \tag{16}$$

(предполагается, что x и y — локальные координаты на V_2). Отсюда видно, что равенство $I_2 = 0$ равнозначно тому, что величина S (и вместе с ней длина градиента) постоянна вдоль каждой кривой $\Phi = \text{const}$. Равенство $I_2 = 0$ в одной точке означает, что линия уровня функции Φ касается в этой точке кривой семейства.

К получению дифференциальных инвариантов третьего и следующих порядков естественно привлечь методы алгебраической теории. Воспользуемся символическим методом [2]. Обозначим первый ковектор в ряду (10) символом α, для второго тензора введем два идеальных параллельных ковектора $\overset{1}{\beta}$ и $\overset{2}{\beta}$, для третьего тензора — четыре таких ковектора $\overset{1}{\gamma}, \overset{2}{\gamma}, \overset{3}{\gamma}, \overset{4}{\gamma}$ и т. д. С их скалярными произведениями поступим как с факторами первого рода. В первую очередь заметим, что $\alpha^2 = 1$, $(\alpha\overset{1}{\beta})^2 = 0$ и $(\alpha\overset{1}{\gamma})^3 = 0$. Инварианты (12) имеют символические записи $I_1 = (\overset{1}{\beta})^2$, $I_2 = \frac{1}{2}[\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}]^2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} (\overset{1}{\beta})^2 & (\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}) \\ (\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}) & (\overset{2}{\beta})^2 \end{vmatrix}$. Здесь применен и фактор второго рода. Инварианты третьего порядка можно образовать с помощью различных записей, например: $(\overset{1}{\gamma})^2(\overset{1}{\gamma}\alpha) = \frac{1}{S}\Phi_{IIK}\Phi_K$, $(\overset{1}{\gamma}\overset{2}{\gamma})^2(\overset{1}{\gamma}\alpha)(\overset{2}{\gamma}\alpha) = \frac{1}{S^2}\Phi_{IJK}\Phi_{IJL}\Phi_K\Phi_L$, $(\overset{1}{\gamma})^2[\overset{1}{\gamma}\alpha] = \frac{2}{S}\Phi_{II[1}\Phi_{2]}$, $(\overset{1}{\gamma}\overset{2}{\gamma})^2(\overset{1}{\beta}\overset{1}{\gamma})(\overset{1}{\beta}\overset{2}{\gamma}) = \frac{1}{S^{3/2}} \times \Phi_{IJK}\Phi_{IJL}\Phi_{KL}$. Среди них есть, разумеется, и дискриминант кубической формы

$$D = \frac{1}{2}[\overset{1}{\gamma}\overset{2}{\gamma}]^2[\overset{3}{\gamma}\overset{4}{\gamma}]^2[\overset{1}{\gamma}\overset{3}{\gamma}][\overset{2}{\gamma}\overset{4}{\gamma}] \tag{17}$$

[2, с. 150, 193]. Все комитанты имеют также инвариантный смысл.

Остановимся на двух инвариантах третьего порядка. Якобиан (φ, ψ) двух функций φ и ψ (его обозначение заимствовано из [2]) является инвариантом тогда и только тогда, когда инвариантно внешнее произведение их дифференциалов, что видно из записи $d\varphi \wedge d\psi = (\varphi, \psi)\, dx \wedge dy$.

Теорема 2. *Якобианы*

$$\left(\frac{M}{S}, \varphi\right) \text{ и } \left(\frac{L}{T}, \varphi\right) \tag{18}$$

есть дифференциальные инварианты третьего порядка субмерсии Φ.

Доказательство. Из двух первых соотношений (4) найдем формулы преобразования величин S, T, M и L:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= (c')^2 S, & \tilde{M} &= c'M + c''S, \\ \tilde{T} &= (c')^3 T, & \tilde{L} &= (c')^2 L + c'c''T. \end{aligned} \tag{19}$$

Дифференцируем эти соотношения:

$d\tilde{S} = 2c'c''Sd\varphi + (c')^2 dS$, $d\tilde{T} = 3(c')^2 c''Td\varphi + (c')^3 dT$, $d\tilde{M} = (c''M + c'''S)\, d\varphi + c'dM + c''dS$, $d\tilde{L} = \{2c'c''L + [(c'')^2 + c'c''']\, T\}\, d\varphi + (c')^2 dL + c'c''dT$.

Умножая внешне на $d\varphi = c'd\varphi$, получаем

$$d\tilde{S} \wedge d\tilde{\varphi} = (c')^3 dS \wedge d\varphi,\ d\tilde{T} \wedge d\tilde{\varphi} = (c')^4 dT \wedge d\varphi,$$
$$d\tilde{M} \wedge d\tilde{\varphi} = (c')^2 dM \wedge d\varphi + c'' dS \wedge d\varphi,$$
$$d\tilde{L} \wedge d\tilde{\varphi} = (c')^3 dL \wedge d\varphi + (c')^2 c'' dT \wedge d\varphi. \tag{20}$$

Заметим, что выражения $\frac{dS \wedge d\varphi}{S^{3/2}}$ и $\frac{dT \wedge d\varphi}{S^2}$ инвариантны, поэтому соответствующие коэффициенты являются инвариантами. Первый из них, согласно (16), $\frac{(S, \varphi)}{S^{3/2}} = 2\sqrt{-I_2}$, а второй $\frac{(T, \varphi)}{S^2} = \frac{(U_1, \varphi)}{S^{3/2}} + 3I_1\sqrt{-I_2}$, где первое слагаемое на $F(V_1)$ равно k'. Учитывая это, легко проверить с помощью (19, 20) инвариантность внешних произведений $d\left(\frac{M}{S}\right) \wedge d\varphi$ и $d\left(\frac{L}{T}\right) \wedge d\varphi$ и, следовательно, якобианов (18).

Теорема 3. *Если на кривых семейства* $\Phi = \text{const}$ *постоянна функция* $\frac{M}{S}$ $\left(\textit{или } \frac{L}{T}\right)$, *т. е. равен нулю первый (второй) инвариант (18), то возможна такая параметризация с кривых семейства, что при переходе от* φ *к* $\tilde{\varphi}$ *будет выполняться равенство* $\tilde{M} = 0$ $(\tilde{L} = 0)$.

Доказательство. Если существует такая функция $f(t)$, что $\frac{M}{S} = f \circ \varphi$, то из (19) следует, что для обращения $\tilde{M}$ в нуль функция c должна удовлетворять дифференциальному уравнению $c'' + c'f = 0$, откуда

$$c(u) = \int_{u_0}^{u} e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}\,dx. \tag{21}$$

Точно такое же выражение для c находим и в случае $\frac{L}{T} = f \circ \varphi$.

Таким образом, определяются два важных класса расслоений локально-евклидова многообразия V_2. Первый класс определяется инвариантным условием $d\left(\frac{M}{S}\right) \wedge d\varphi = 0$, второй класс — условием $d\left(\frac{L}{T}\right) \wedge d\varphi = 0$. В первом случае расслоение можно задать локально гармонической функцией, во втором — функцией, гессиан которой равен нулю.

Пример 1. Функция $\varphi \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2$ не является гармонической, но $\frac{M}{S} = \frac{1}{\varphi}$. Поэтому из (21) при $f(t) = \frac{1}{t}$ находим $c(u) = x_0 \ln \frac{u}{u_0}$ и получаем гармоническую функцию $\tilde{\varphi} = x_0 \ln \frac{\varphi}{u_0}$.

Пример 2. Для функции $\varphi \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}$ находим $\frac{L}{T} = -\frac{1}{2(\varphi - I_3 : I_2)}$, где I_2 и I_3 — обычные алгебраические инварианты. Поэтому возможен переход к функции $\tilde{\varphi} = C_1(\varphi - I_3 : I_2)^{1/2} + C_2$, удовлетворяющей уравнению Монжа — Ампера $\tilde{L} = 0$.

Пример 3. Для однородного бинарного полинома степени n $\varphi \equiv \frac{1}{n!}\varphi_{I_1 I_2 \ldots I_n}x^{I_1}x^{I_2}\cdots x^{I_n}$, $I_k = 1, 2$; $k = 1, \ldots, n$ имеет место равенство $\frac{L}{T} = -\frac{n-1}{n\varphi}$. Гессиан функции $\tilde{\varphi} = C_1\sqrt[n]{\varphi} + C_2$ равен нулю.

Заключение. Так как в системе (4) есть два соотношения первого, три второго и четыре третьего порядка, то изучено девять соотношений. Исключение из них величин c', c'', c''' и одного параметра, например угла поворота, определяющего матрицу (b_j^i), может привести не более чем к пяти существенным инвариантам. Получаем 9-мерное пространство представления четырехчленной группы. Если представление регулярно, орбиты четырехмерны и инвариантов будет ровно пять — это могут быть инварианты (11), (17) и (18). Этим вопрос об отыскании алгебраически независимых инвариантов субмерсии Ф порядка 3 можно считать исчерпанным.

Список литературы

1. Рахула М. О. Ортогональные инварианты иммерсии и субмерсии. — См. статью в настоящем сборнике.
2. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. ГИТТЛ, М.—Л., 1948. 408 с.

Поступила 19 апреля 1977 г.

УДК 513

А. К. Лапковский, В. Н. Лаптинский

К ТЕОРИИ ЛИФТОВ В АФФИННОМ РАССЛОЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО МНОГООБРАЗИЯ

Настоящая статья является естественным завершением работы [1]. Основной ее результат — установление зависимости лифтов аффинного расслоенного многообразия от изменения линейной связности.

1. Рассмотрим многообразие B класса дифференцируемости C^∞. Пусть $P(B, GL(n, R))$, $P(B, GA(n, R))$ — соответственно расслоенное многообразие реперов и аффинное расслоенное многообразие многообразия B (используется символика, введенная в [2]).

Известно, что аффинная группа $GA(n, R)$, состоящая из элементов $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & a \end{pmatrix}$, $a \in GL(n, R)$, $\alpha \in R^n = R \times \cdots \times R$, имеет две под-группы $GA_0(n, R) = \{A \mid \boldsymbol{\alpha} = 0\}$, $T(n, R) = \{A \mid a = E$ — единица $GA(n, R)\}$. Алгебры Ли этих групп обозначим соответственно через $\boldsymbol{GA}(n, R)$, $\boldsymbol{GA}_0(n, R)$, $\boldsymbol{T}(n, R)$.

Пусть Γ — линейная связность на B, а $\tilde{\Gamma}$ — аффинная связность, канонически присоединенная к связности Γ. Вложение τ многообразия P в $\tilde{P}$ определяет [2, с. 106] однозначное разложение $\tilde{\omega} = \omega + \theta$, где $\tilde{\omega}\,(\in \boldsymbol{GA}(n, R))$, $\omega\,(\in \boldsymbol{GA}_0(n, R))$ — 1-формы связностей соответственно $\tilde{\Gamma}$, Γ, а $\theta\,(\in \boldsymbol{T}(n, R))$ — 1-форма смещения.

Форма θ является тензорной: при правом сдвиге R_a в группе $GA_0(n, R)$ форма θ меняется [2, с. 78] следующим образом:

$$R_a^* \theta = a^{-1} \theta. \tag{1}$$

Пусть u_t, $t \in [0, 1]$ — некоторая локальная ($u_t \subset U$, U — координатная окрестность точки u_0 в B) дифференцируемая параметризованная кривая в B; y_0 — такая точка из P, что $\pi(y_0) = u_0$ (π — каноническая проекция). Возьмем в P такую кривую y_t, для которой $y_0 = x_0$ и $\pi(y_t) = u_t$ (ее касательное поле y_t'). Если кривая y_t является горизонтальной относительно связности Γ, то лифт $\tilde{\boldsymbol{u}}_t$ кривой u_t относительно $\tilde{\Gamma}$ (и определенный в P) может быть задан [2, с. 109] в форме $\tilde{\boldsymbol{u}}_t = y_t c_t^{-1}$, где c_t — кривая в $T(n, R)$, удовлетворяющая системе $c_t^{-1} c_t' = \theta(y_t')$, $c_0 = c(0) = E \in T(n, R)$; c_t' — касательное поле кривой c_t.

Если кривая y_t не является горизонтальной, то имеет место

Лемма 1. *Лифт $\tilde{\boldsymbol{u}}_t$ кривой u_t может быть задан в виде:*

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_t = y_t a_t^{-1} c_t^{-1}, \tag{2}$$

где a_t и c_t являются решениями соответственно систем

$$a_t^{-1} a_t' = \omega(y_t'), \; a_0 = a(0) = E \in GA_0(n, R), \tag{3}$$

$$c_t^{-1} c_t' = a_t \theta(y_t'), \; c_0 = E \in T(n, R). \tag{4}$$

Действительно, так как a_t — решение (3), то $x_t = y_t a_t^{-1}$ есть горизонтальная кривая относительно связности Γ [2, с. 47]. Но из (1) следует, что при перестройке кривой y_t в горизонтальную форма θ преобразуется по правилу $\theta(x_t') = a_t \theta(y_t')$. Тогда в силу отмеченного выше утверждения из [2, с. 109] получаем требуемое. Имеет место также следующая

Лемма 2. *Решение системы* (4) *дается формулой*

$$c_t = E + \int_0^t a_\sigma \theta(y_\sigma')\, d\sigma. \tag{5}$$

Непосредственно проверяется далее, что формула Тейлора для c_t имеет ковариантный вид:

$$c_t = E + t\theta(y'_0) + \frac{t^2}{2!}\nabla\theta(y'_0) + \cdots + \frac{t^{p+1}}{(p+1)!}\nabla^p\theta(y'_0) + \\ + \frac{1}{(p+1)!}\int_0^t (t-\sigma)^{p+1} a_\sigma \nabla^{p+1}\theta(y'_\sigma)\,d\sigma. \qquad (6)$$

Здесь $\nabla^p\theta(y'_t) = \frac{d}{dt}\nabla^{p-1}\theta(y'_t) + \omega(y'_t)\nabla^{p-1}\theta(y'_t)$, $p = 1, 2, \ldots$ есть ковариантная производная порядка p от тензорной формы $\theta(y'_t)$ в связности с формой $\omega(y'_t)$, причем $\nabla^0\theta(y'_t) = \theta(y'_t)$, $\nabla^p\theta(y'_0) = (\nabla^p_*\theta(y'_t))_{t=0}$.

Напомним, что ковариантная формулировка теоремы Тейлора для тензорных полей дана еще Рузом [3] (см. также [4]), но при существенном использовании нормальных координат. Мы не применяем явно нормальных координат, а потому, несмотря на естественность формулы (6), она требует обоснования с помощью соотношения (5).

Отметим, что $c_1 = c(1)$ дает трансляционную часть элемента неоднородной группы голономии [2, с. 109].

2. При исследовании формул (5), (6) важное значение имеет число линейно независимых форм в совокупности

$$\theta(y'_t),\ \nabla\theta(y'_t),\ \ldots,\ \nabla^{p-1}\theta(y'_t). \qquad (7)$$

Так как алгебра $\boldsymbol{T}(n, R)$ отождествима с векторным пространством R^n, то будем рассматривать 1-формы (7) со значениями в векторном пространстве R^n. Тогда получаем векторы $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta}^1_t, \ldots, \boldsymbol{\theta}^{n-1}_t$, порождаемые соответственно формами (7). При этом, рассматривая элементы группы $T(n, R)$ также со значениями в векторном пространстве R^n и сопоставляя групповому элементу $c_t \in T(n, R)$ вектор $\boldsymbol{c}_t$, формуле (5) придадим вид

$$\boldsymbol{c}_t = \int_0^t a_\sigma\boldsymbol{\theta}(y'_\sigma)\,d\sigma. \qquad (8)$$

Ясно, что a_σ следует уже рассматривать со значениями в $GL(n, R)$ [что возможно в силу изоморфизма $GA_0(n, R)$ и $GL(n, R)$].

Будем называть кривую u_t уплощенной кривой степени k, $k = 1, \ldots, n$, если существует k таких функций γ_m, $m = 0, \ldots, k-1$, что имеет место линейное разложение

$$\boldsymbol{\theta}^k_t = \gamma_m(t)\,\boldsymbol{\theta}^m_t,\ \boldsymbol{\theta}^0_t = \boldsymbol{\theta}_t, \qquad (9)$$

причем векторы $\boldsymbol{\theta}^m_t$ линейно независимы $(\forall t)$.

Если все точки кривой u_t имеют степень уплощения 1, то кривую u_t называют геодезической. Если степень уплощения кривой u_t равна 2, то кривая u_t называется почти геодезической

[6, с. 87]. Кривая со степенью уплощения n, очевидно, есть кривая основного типа.

Теорема 1. *Если u_t — кривая со степенью уплощения k, т. е. выполняется* (9), *то существуют функции $\underset{(m)}{s_t}$, $m = 0, \dots, k-1$, такие, что имеет место представление*

$$c_t = \underset{(m)}{s_t}\theta_0^m, \tag{10}$$

где 1-формы $\theta_0, \theta_0^1, \dots, \theta_0^{k-1}$ (со значениями в векторном пространстве R^n) соответствуют формам (7) *и $\theta_0^m \doteq (\theta_t^m)_{t=0}$.*

Для доказательства введем функции $\varkappa_{m,t}$, $m = 0, \dots, k-1$, удовлетворяющие равенствам

$$a\theta_t = \varkappa_{m,t}\theta_0^m, \quad \varkappa^{(j)}_{m,t}\Big|_{t=0} = \frac{d^j\varkappa_{m,t}}{dt^j}\bigg|_{t=0} = \delta_m^j, \ j = 0, \dots, k-1,$$

где δ_m^j — символ Кронекера. Дифференцируя эти равенства k раз по t, получим

$$a_t\theta^j(y_t') = \varkappa^{(j)}_{m,t}\theta_0^m, \tag{11}$$

$$a_t\theta^k(y_t') = \varkappa^{k}_{m,t}\theta_0^m. \tag{12}$$

Используя (9), преобразуем левую часть (12): $\gamma_{j,t}(a_t\theta^j(y_t')) = \varkappa^{(k)}_{m,t}\theta_0^m$, откуда с помощью (11) найдем $\varkappa^{(k)}_{m,t}\theta_0^m = \gamma_{j,t}\varkappa^{j}_{m,t}\theta_0^m$. Отсюда следует, что функции $\varkappa_{m,t}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$\varkappa_t^{(k)} = \gamma_{j,t}\varkappa_t^{(j)}. \tag{13}$$

Теперь искомые функции $\underset{(m)}{s_t}$ находятся по правилу: $\underset{(m)}{s_t} = \int\limits_0^t \varkappa_{m,\sigma}\,d\sigma$, что и доказывает теорему.

Разложение (10) является каноническим; векторы $\theta_0, \dots, \theta_0^{k-1}$ инвариантно связаны с кривой u_t в окрестности точки $t = 0$. Отметим, что при $k = 1$ получаем из (13) уравнение первого порядка $\frac{d\varkappa_t}{dt} = \gamma_{0,t}\varkappa_t$, $\varkappa_t = \varkappa_{0,t}$, откуда легко находим $\varkappa_t = \exp\int\limits_0^t \gamma_\sigma d\sigma$, $\gamma_\sigma = \gamma_{0,\sigma}$. Тогда $c_t = s_t\theta_0$, где $s_t = \int\limits_0^t \varkappa_\sigma\,d\sigma = \int\limits_0^t \left(\exp\int\limits_0^\sigma \gamma_\rho\,d\rho\right) d\sigma$ является каноническим параметром геодезической [6, с. 475].

Естественно, что и в общем случае найденные функции $\underset{(m)}{s_t}$ инвариантно связаны с кривой; они дают канонические параметры для кривой u_t со степенью уплощения k.

3. Используя формулу (5) или (8), можно сравнить лифт $\tilde{\boldsymbol{u}}_t$ кривой u_t с лифтом $\tilde{\boldsymbol{u}}_t^2$, построенным относительно канонической

аффинной связности $\widetilde{\Gamma^{\Omega}}$, если линейная связность Γ^{Ω} определена формой $\omega^{\Omega} = \omega + \Omega$, где форма ω имеет прежний смысл, а Ω есть некоторая форма типа $\mathrm{ad}\,(GA_0\,(n, R))$ со значениями в алгебре $\boldsymbol{GA}_0\,(n, R)$.

Можно показать (см. [1, с. 107]), что имеет место

Лемма 3. *Горизонтальную кривую x_t^{Ω} в связности Γ^{Ω} можно представить в виде $x_t^{\Omega} = y_t a_t^{-1} z_t^{-1}$, $z \in GA_0\,(n, R)$, $z^{-1}z = E$, где a_t есть решение системы* (3), *а z_t удовлетворяет следующей системе* $z^{-1}\,dz = \mathrm{ad}\,(a_t)\,\Omega\,(y_t')$, $z_0 = E$. Тогда из лемм 1, 2, 3, вытекает

Лемма 4. *Лифт $\widetilde{\boldsymbol{u}}_t^{\Omega}$ кривой u_t, определенный в P относительно связности Γ^{Ω}, может быть определен по правилу*

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_t^{\Omega} = -y_t a_t^{-1} z_t^{-1} C_t^{\Omega}, \quad a_t \in GL\,(n, R), \quad z_t \in GL\,(n, R), \tag{14}$$

где $c_t^{\Omega} = -\int\limits_0^t z_\sigma a_\sigma \theta\,(y_\sigma')\,d\sigma$. Из этой леммы вытекает

Теорема 2. *Если $\widetilde{\boldsymbol{u}}_t$ — лифт кривой u_t, определенный в $\widetilde{P}$ относительно связности $\widetilde{\Gamma}$, то лифт $\widetilde{\boldsymbol{u}}_t^{\Omega}$ той же кривой u_t, но в связности $\widetilde{\Gamma}^{\Omega}$, получается из лифта $\widetilde{\boldsymbol{u}}_t$ следующим образом:* $\widetilde{\boldsymbol{u}}_t^{\Omega} = \widetilde{\boldsymbol{u}}_t + x_t^{\Omega} \int\limits_0^t \Omega\,(x_\sigma')\,z_\sigma^{-1} \boldsymbol{c}_\sigma^{\Omega}\,d\sigma$.

Для доказательства достаточно в равенстве (14) преобразовать $\boldsymbol{c}_t^{\Omega}$ к виду

$$\boldsymbol{c}_t^{\Omega} = z_t \boldsymbol{c}_t - \int\limits_0^t z_\sigma \Omega\,(x_\sigma')\,\boldsymbol{c}_\sigma\,d\sigma \tag{15}$$

и воспользоваться соотношениями (2) и (8).

Отметим, что соотношение (15) обладает следующим свойством обращения:

$$\boldsymbol{c}_t = z_t^{-1} \boldsymbol{c}_t^{\Omega} + \int\limits_0^t \Omega\,(x_\sigma')\,z_\sigma^{-1} \boldsymbol{c}_\sigma^{\Omega}\,d\sigma. \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) представляют, несомненно, и самостоятельный интерес, ибо дают сравнение разверток одной и той же кривой u_t базы, но в разных связностях: соответственно $\widetilde{\Gamma}$ и $\widetilde{\Gamma}^{\Omega}$.

Замечание 1. Исследование системы (3) в связи с различными вопросами теории линейной связности проведено в работах [1, 7—10], а с учетом условий гравитации — в [11].

Замечание 2. Все рассуждения настоящей заметки переносятся и на случай аффинной связности (в обобщенном смысле), ассоциированной заданной линейной связности Γ [2, с. 106]; при этом следует заменять 1-форму смещения θ на 1-форму $\theta + \nabla\eta$, где η — некоторое векторное поле (знак ∇ имеет прежний смысл). Например, формуле (8) в новых условиях соответствует следуюная формула $c_t = a\eta + \int\limits_0^t a_\sigma \theta (y'_\sigma)\, d\sigma$. Непосредственно проверяется, что для определяемого этой формулой вектора c_t формула Тейлора также имеет ковариантный вид.

Авторы выражают искреннюю благодарность проф. А. С. Феденко, проф. В. И. Ведерникову, доц. И. В. Белько и всем участникам семинара кафедры геометрии БГУ им. В. И. Ленина за обсуждение результатов настоящей работы.

Список литературы

1. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. О сравнении разверток локальных путей дифференцируемого многообразия.— «Укр. геометр. сб.». Вып. 13, Харьков, 1972, с. 106—109.
2. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., ИЛ., 1960, 128 с.
3. Ruse H. S. Proc. Math. Soc. 31, 1930, с. 225; 32, 1931, с. 87.
4. Александров А. Н., Пирагас К. А. Экспоненциальное отображение и теорема Тейлора в тензорном анализе. Препринт ИТФ—74—70Р. Киев, 1974.
5. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств.— «ДАН СССР», т. 151, № 4, 1963.
6. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М., ИЛ, 1960, 559 с.
7. Лаптинский В. Н., Лапковский А. К. О структуре решения задачи Коши для линейной дифференциальной системы на многообразии.— «Укр. мат. журн.», т. XXVI, вып. 3, 1974, с. 393—397.
8. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. О горизонтальных путях в главных расслоениях с линейной связностью.— «Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук» № 3, 1974, с. 46—51.
9. Лаптинский В. Н., Лапковский А. К. О некоторых матричных операторах и их приложении в теории линейной связности на дифференцируемом многообразии.— «Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук», № 6, 1973, с. 25—29.
10. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. О горизонтальных путях на многообразиях с почти тензорной структурой.— Литовский мат. сб., т. XIV, № 2, 1974, с. 199—200.
11. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. О горизонтальных путях и «прецессии Томаса» в теории гравитации.— «Изв. вузов. Физика», 1975, № 1, с. 98—101.

Поступила 13 сентября 1976 г.

УДК 513

П. Е. Марков

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Многие вопросы теории бесконечно малых (б. м.) изгибаний поверхностей в пространствах постоянной кривизны приводят к системе уравнений для вариации коэффициентов второй основной формы поверхности, получаемой варьированием уравнений Гаусса и Кодацци. Эту систему будем называть основной системой теории б. м. изгибаний поверхностей. Связь решений основной системы с изгибающими полями для поверхностей трехмерного евклидова пространства подробно исследована И. Н. Векуа [1]. Было показано, в частности, что наличие только нулевого решения этой системы обеспечивает геометрическую жесткость поверхности, а всякому ненулевому решению в случае односвязной поверхности соответствует нетривиальное б. м. изгибание.

Для пространства Лобачевского из результатов работы [2] вытекает, что отсутствие ненулевых решений основной системы означает жесткость поверхности. Однако, в случае существования ненулевого решения вопрос о жесткости поверхности остался открытым. Неисследованными остались также вопросы зависимости изгибающих полей от решений основной системы для поверхностей эллиптического пространства.

В настоящей работе исследуется система уравнений для вариаций коэффициентов вторых основных форм двумерной поверхности в четырехмерном пространстве (Евклида или Минковского). Полученные результаты позволяют установить зависимость изгибающих полей от решений основной системы для поверхностей трехмерного пространства произвольной постоянной кривизны.

Исследование указанной системы уравнений для поверхностей четырехмерного пространства основано на изучении свойств поля бивекторов, однозначно определенного б. м. изгибанием и деформацией базиса нормальной плоскости поверхности. Это поле будет названо полем вращений поверхности при ее б. м. изгибании. Подобно вектору вращений в теории б. м. изгибаний поверхностей трехмерного евклидова пространства, введенный нами бивектор вращений играет фундаментальную роль при отделении тривиальных б. м. изгибаний от нетривиальных. Будет установлен общий вид поля вращений, соответствующего тривиальному б. м. изгибанию. Отличительной особенностью поля вращений при тривиальном б. м. изгибании двумерной поверхности в четырехмерном пространстве является отличие его от константы. Это связано с тем, что бивектор вращений описывает не только деформацию радиус-вектора поверхности, но и деформацию базиса нормальной плоскости.

По своим свойствам бивектор вращений во многом аналогичен вектору вращений в теории б. м. изгибаний поверхностей трехмерного евклидова пространства. В частности, будет показано, что производные бивектора вращений выражаются через вариации коэффициентов основных форм поверхности. Это позволяет определить общий вид вариаций коэффициентов вторых основных форм поверхности при тривиальном б. м. изгибании. Обращаясь к системе уравнений для вариаций коэффициентов основных форм, будет доказано, что, если поверхность односвязна, всякому решению этой системы соответствует единственное (с точностью до тривиального) изгибающее поле.

Для поверхностей трехмерного пространства постоянной кривизны доказывается, что, если основная система уравнений теории б. м. изгибаний имеет только нулевое решение, то поверхность жесткая. С другой стороны, если поверхность односвязна, то каждому ненулевому решению основной системы соответствует нетривиальное б. м. изгибание. Это позволяет перенести многие результаты теории б. м. изгибаний поверхностей трехмерного евклидова пространства на пространства произвольной постоянной кривизны.

§ 1. Описание пространства R_4^σ

1. Будем понимать под R_4^σ ($\sigma = 0,1$) либо четырехмерное пространство Евклида R_4^0, либо четырехмерное пространство Минковского R_4^1. В этом параграфе мы приведем известные факты векторной алгебры и теории двумерных поверхностей в пространстве R_4^σ, на которые будем ссылаться в дальнейшем.

2. Будем предполагать, что пространство R_4^σ снабжено ортонормированным базисом $\{O; \overline{e}_0, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, где $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ — векторы длины 1; $\overline{e}_0$ — вектор длины i^σ (i — мнимая единица). Каждый вектор $\overline{x}$ пространства R_4^σ может быть представлен в виде $\overline{x} = x^\alpha \overline{e}_\alpha$*). Скалярное произведение двух векторов $\overline{x} = x^\alpha \overline{e}_\alpha$ и $\overline{y} = y^\beta \overline{e}^\beta$ определяется формулой $\overline{x}\overline{y} = x^\alpha y^\beta \overline{e}_\alpha \overline{e}_\beta = (-1)^\sigma x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$. Если положить $G_{\alpha\beta} = \overline{e}_\alpha \overline{e}_\beta$, $x_\alpha = G_{\alpha\beta} x^\beta$, то можно записать $\overline{x}\overline{y} = G_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = x_\alpha y^\alpha = x^\alpha y_\alpha$.

3. Разложимым (или простым) бивектором в пространстве R_4^σ называют фигуру $\overline{x} \wedge \overline{y}$, образованную двумя векторами $\overline{x}$, $\overline{y}$, взятыми в определенном порядке. Данное определение приобретает смысл после введения понятия равенства разложимых бивекторов. Свяжем с бивектором $\overline{x} \wedge \overline{y}$ параллелограмм $OACB$, стороны которого $\overline{OA} = \overline{x}$, $\overline{OB} = \overline{y}$. Установим направление обхода по контуру этого параллелограмма, начиная его с OA. Говорят, что два разложимых бивектора равны, если связанные с ними параллелограммы лежат в параллельных (в частности, совпадающих) плоскостях, имеют одинаковое направление обхода и одинаковые площади. При этом площадь S параллелограмма $OACB$ определяется формулой $S^2 = \overline{x}^2 \overline{y}^2 - (\overline{x}\overline{y})^2$.

Пусть $\overline{x} = x^\alpha \overline{e}_\alpha$, $\overline{y} = y^\beta \overline{e}_\beta$, $\overline{u} = u^\alpha \overline{e}_\alpha$, $\overline{v} = v^\beta \overline{e}_\beta$. Тогда для равенства $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{u} \wedge \overline{v}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий [3]: $x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha = u^\alpha v^\beta - u^\beta v^\alpha$. Числа $x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha$ называют координатами бивектора $\overline{x} \wedge \overline{y}$; разложимый бивектор $\overline{x} \wedge \overline{y}$ — внешним произведением вектора $\overline{x}$ на вектор $\overline{y}$.

4. Понятие разложимого бивектора обобщается следующим образом. Пусть $\{a^{\alpha\beta}\}$ — система чисел, такая, что $a^{\alpha\beta} = -a^{\beta\alpha}$. Бивектором (не обязательно разложимым) в пространстве R_4^σ называют

---

*) Всюду в этой работе индексы α, β, γ, δ принимают значения 0, 1, 2, 3.

инвариант $\bar{\bar{a}} = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_\beta$. Множество всех бивекторов пространства R_4^σ образует 6-мерное векторное пространство, в котором два бивектора $\bar{\bar{a}} = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_\beta$ и $\bar{\bar{b}} = \frac{1}{2} b^{\alpha\beta}\bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_\beta$ равны, если $a^{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta}$, а сумма бивекторов и произведение бивектора на число λ определяются формулами $\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{b}} = \frac{1}{2}(a^{\alpha\beta} + b^{\alpha\beta})\bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_\beta$, $\lambda\bar{\bar{a}} = \frac{1}{2}\lambda a^{\alpha\beta}\bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_\beta$.

Если $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ — линейно независимые векторы в R_4^σ, то бивекторы $\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_1$, $\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_2$, $\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3$, $\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$ образуют базис пространства бивекторов. Следовательно, всякий бивектор $\bar{\bar{a}}$ может быть представлен в виде линейной комбинации разложимых бивекторов, построенных на четырех линейно независимых векторах.

5. Внутренним произведением бивектора $\bar{\bar{a}} = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_\beta$ на вектор $\bar{x} = x^\alpha\bar{e}_\alpha$ называют вектор $\bar{\bar{a}}\,\bar{x} = a^{\alpha\beta}x_\alpha\bar{e}_\beta$. Из данного определения следует линейность внутреннего произведения, а также ортогональность вектора $\bar{\bar{a}}\bar{x}$ вектору $\bar{x}$.

Для любых векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ справедливо равенство

$$(\bar{x} \wedge \bar{y})\,\bar{z} = \bar{y}\,(\bar{x}\,\bar{z}) - \bar{x}\,(\bar{y}\,\bar{z}). \tag{1}$$

В самом деле, пусть $\bar{x} = x^\alpha\bar{e}_\alpha$, $\bar{y} = y^\beta\bar{e}_\beta$, $\bar{z} = z^\alpha\bar{e}_\alpha$. Тогда имеем $(\bar{x} \wedge \bar{y})\,\bar{z} = (x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha)\,z_\alpha\bar{e}_\beta = y^\beta\bar{e}_\beta\,(x^\alpha z_\alpha) - x^\beta\bar{e}_\beta\,(z_\alpha y^\alpha) = \bar{y}\,(\bar{x}\,\bar{z}) - \bar{x}\,(\bar{y}\bar{z})$.

Скалярным произведением бивектора $\bar{\bar{a}} = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\bar{e}_\alpha \wedge \bar{e}_\beta$ на бивектор $\bar{\bar{b}} = \frac{1}{2} b^{\alpha\beta}\bar{e}_\beta \wedge \bar{e}_\beta$ называют число $\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{b}} = \frac{1}{4}(G_{\alpha\gamma}G_{\beta\delta} - G_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma})\,a^{\alpha\beta}b^{\gamma\delta}$. Если положить $G_{\alpha\gamma}G_{\beta\delta} - G_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma} = G_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$, $a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}a^{\gamma\delta}$, то можно записать $\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{b}} = \frac{1}{4} G_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}a^{\alpha\beta}b^{\gamma\delta} = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}b^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$. Будем говорить, что бивекторы $\bar{\bar{a}}$ и $\bar{\bar{b}}$ ортогональны, если $\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{b}} = 0$.

Для любых векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и любого бивектора $\bar{\bar{a}}$ имеет место равенство

$$\bar{\bar{a}}\,(\bar{x} \wedge \bar{y}) = (\bar{\bar{a}}\bar{x})\,\bar{y}. \tag{2}$$

В самом деле,

$$(\bar{\bar{a}}\bar{x})\,\bar{y} = a^{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}(x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha) = \bar{\bar{a}}\,(\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Из формул (1), (2) вытекает тождество

$$(\bar{x} \wedge \bar{y})\,(\bar{z} \wedge \bar{t}) = (\bar{x}\,\bar{z})\,(\bar{y}\,\bar{t}) - (\bar{x}\,\bar{t})\,(\bar{y}\,\bar{z}). \tag{3}$$

6. Рассмотрим в пространстве R_4^σ двумерную поверхность F класса $D_{m,\,p}$, $m \geqslant 1$, $p > 2$ (см. [1]), заданную уравнением $\bar{r} = \bar{r}\,(u^1, u^2)$. Будем предполагать, что в каждой точке поверхности F векторы $\bar{r}_{,1} \equiv \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}$, $\bar{r}_{,2} \equiv \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}$ имеют действительную длину и линейно

независимы. В этом случае метрическая форма $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ *) на F положительно определена.

Векторы $\bar{r}_{,1}\bar{r}_{,2}$ определяют в каждой точке поверхности двумерную плоскость, касательную к F. Кроме того, в каждой точке поверхности существует пара векторов $\bar{n}$, $\bar{\nu}$, взаимно ортогональных и ортогональных векторам $\bar{r}_{,1}$, $\bar{r}_{,2}$. Векторы $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ называются нормалями поверхности F, а плоскость, ими определяемая,— нормальной плоскостью этой поверхности. Базис $\{\bar{n}, \bar{\nu}\}$ в нормальной плоскости выбирается неоднозначно. Так как векторы $\bar{r}_{,1}$ $\bar{r}_{,2}$, $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ образуют базис пространства R_4^σ, а векторы $\bar{r}_{,1}$ $\bar{r}_{,2}$ имеют действительную длину, то один из векторов $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ имеет длину i^σ. Мы всюду будем считать, что $\bar{n}^2 = 1$, $\bar{\nu}^2 = (-1)^\sigma$.

7. Бивектор $\bar{n}\wedge\bar{\nu}$ не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{\bar{n}, \bar{\nu}\}$ в нормальной плоскости. В самом деле, пусть $\{\bar{n}', \bar{\nu}'\}$ — другой ортонормированный базис в нормальной плоскости поверхности F. Тогда, по определению равенства разложимых бивекторов, имеем $\bar{n}'\wedge\bar{\nu}' = \bar{n}\wedge\bar{\nu}$.

Если поверхность $F \in D_{m,p}$ $(m \geqslant 1,\ p > 2)$, то $\bar{n}\wedge\bar{\nu} \in D_{m-1,p}$. Действительно, если $F \in D_{m,p}$, то в окрестности каждой точки на F можно ввести базис $\{\bar{n}', \bar{\nu}'\}$ нормальной плоскости, такой, что $\bar{n}', \bar{\nu}' \in D_{m-1,p}$; следовательно, $\bar{n}'\wedge\bar{\nu}' \in D_{m-1,p}$, а по предыдущему, $\bar{n}\wedge\bar{\nu} = \bar{n}'\wedge\bar{\nu}'$.

8. В этом пункте мы будем предполагать, что поверхность $F \in D_{2,p}$ $(p > 2)$. Разложение векторов $\bar{r}_{,ij}$, $\bar{n}_{,i}$, $\bar{\nu}_{,i}$ по базису $\{\bar{r}_{,1}, \bar{r}_{,2}, \bar{n}, \bar{\nu}\}$ приводит к формулам Гаусса и Вейнгартена [4, с. 228]:

$$\bar{r}_{,ij} = b_{ij}\bar{n} + (-1)^\sigma \beta_{ij}\bar{\nu},\quad \bar{n}_{,i} = -g^{kl}b_{ki}\bar{r}_{,l} + (-1)^\sigma \mu_i \nu,$$
$$\bar{\nu}_{,i} = -g^{kl}\beta_{ki}\bar{r}_{,l} - \mu_i \bar{n},$$

где g^{kl} — контравариантный метрический тензор, а знак $(\cdot)_{,i}$ означает ковариантную производную соответствующего тензора по u^i. Коэффициенты b_{ij} и β_{ij} образуют дваждыковариантные симметрические тензоры на F, называемые вторыми основными тензорами поверхности F относительно нормалей $\bar{n}$ и ν соответственно. Коэффициенты μ_i образуют одноковариантный тензор и называются коэффициентами кручения базиса $\{\bar{n}, \bar{\nu}\}$ в нормальной плоскости.

Тензорам b_{ij}, β_{ij}, μ_i соответствуют инвариантные на F дифференциальные формы $\mathrm{II}(\bar{n}) = b_{ij}\,du^i du^j$, $\mathrm{II}(\bar{\nu}) = \beta_{ij}\,du^i du^j$, $\mathrm{II}(\bar{n}, \bar{\nu}) = \mu_i du^i$, называемые вторыми основными формами поверхности F. Отношения $k_n = \dfrac{b_{ij}\,du^i du^j}{ds^2}$, $k_\nu = \dfrac{\beta_{ij}\,du^i du^j}{ds^2}$ называют нормальными кривизнами поверхности в направлении $du^1 : du^2$ относительно нормалей $\bar{n}$ и $\bar{\nu}$ соответственно. Отношение $\mu = \dfrac{\mu_i\,du^i}{ds^2}$ будем называть кручением базиса $\{\bar{n}, \nu\}$ в направлении $du^1 : du^2$.

Пусть γ — произвольная кривая на F и $\bar{t}$ — единичный вектор касательной к γ. Для координат вектора $\bar{t}$ в базисе $\{\bar{r}_{,1}, \bar{r}_{,2}\}$ имеем

*) Всюду в настоящей работе $i, j, k, l = 1,2$.

$t^i = g^{ik}(\bar{t}\,\bar{r}_{,k}) = \frac{du^i}{ds}$. Следовательно, для нормальных кривизн k_n, k_ν и кручения μ в направлении $\bar{t}$ можем записать $k_n = b_{ij}t^it^j$, $k_\nu = \beta_{ij}t^it^j$, $\mu = \mu_i t^i$.

Пусть l — единичный вектор в касательной плоскости к поверхности F, ортогональный вектору $\bar{t}$. Предположим, что ориентация репера $\{\bar{l}, \bar{t}, \bar{n}, \bar{\nu}\}$ совпадает с ориентацией репера $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Обозначим $l^i = g^{ik}(\bar{l}\,\bar{r}_{,k})$. Инварианты $\tau_n = b_{ij}t^il^j$, $\tau_\nu = \beta_{ij}t^il^j$ являются геодезическими кручениями поверхности F в направлении $\bar{t}$ относительно нормалей $\bar{n}$ и $\bar{\nu}$ соответственно.

9. Если $F \in D_{3,\,p}\,(p > 2)$, то условия интегрируемости формул Гаусса и Вейнгартена приводят к уравнениям Гаусса — Кодацци — Риччи:

$$K = \frac{b + (-1)^\sigma\beta}{g},\ b_{ij,\,k} - b_{ik,\,j} = (-1)^\sigma(\beta_{ij}\mu_k - \beta_{ik}\mu_j),$$

$$\beta_{ij,\,k} - \beta_{ik,\,j} = -(b_{ij}\mu_k - b_{ik}\mu_j),\ \mu_{1,2} - \mu_{2,1} = g^{kl}(b_{l1}\beta_{k2} - b_{l2}\beta_{k1}),$$

где $b = \det\|b_{ij}\|$; $\beta = \det\|\beta_{ij}\|$; $g = \det\|g_{ij}\|$; K — внутренняя кривизна поверхности F.

§ 2. Бесконечно малые изгибания поверхностей в пространстве R_4^σ

1. Предположим, что начиная с некоторого момента времени $t = 0$, поверхность F деформируется, переходя в момент $t \geqslant 0$ в поверхность F_t, заданную уравнением $\bar{r}_t = \bar{r}_t(u^1, u^2)$, $(\bar{r}_0(u^1, u^2) \equiv \bar{r}(u^1, u^2))$. Каждая величина A на F перейдет при этом в величину A_t на поверхности F_t. Величину $\delta A = \left(\frac{dA_t}{dt}\right)_{t=0}$ называют вариацией величины A.

Деформация поверхности F является б. м. изгибанием, если вариация длины каждой дуги на F равна нулю. Векторное поле $\delta\bar{r}$ при б. м. изгибании поверхности F называется изгибающим полем этой поверхности. Изгибающее поле определяет б. м. изгибание поверхности с точностью до членов второго порядка относительно t по формуле $\bar{r}_t = \bar{r} + t\delta\bar{r} + t^2(\ldots)$. Мы будем рассматривать только такие б. м. изгибания, когда изгибающее поле $\delta\bar{r}$ обладает той же регулярностью, что и радиус-вектор поверхности: $\bar{r}$, $\delta\bar{r} \in D_{m,\,p}\,(m \geqslant 1,\ p > 2)$.

2. Варьируя равенство $ds^2 = d\bar{r}^2$ и учитывая, что $\delta(ds^2) = 0$, получим уравнение в дифференциалах для изгибающего поля: $d\bar{r}d(\delta\bar{r}) = 0$. Это уравнение эквивалентно системе

$$\bar{r}_{,1}\delta\bar{r}_{,1} = 0,\ \bar{r}_{,1}\delta\bar{r}_{,2} + \bar{r}_{,2}\delta\bar{r}_{,1} = 0,\ \bar{r}_{,2}\delta\bar{r}_{,2} = 0. \qquad (I)$$

Система (I) допускает решения вида

$$\delta\bar{r} = \bar{\bar{\Omega}}\bar{r} + \bar{C}, \qquad (4)$$

где $\overline{\overline{\Omega}}$ — произвольный постоянный бивектор; $\overline{C}$ — произвольный постоянный вектор. Изгибающие поля вида (4), а также соответствующие им б. м. изгибания будем называть тривиальными.

Тривиальное изгибающее поле представляет собою поле скоростей точек поверхности при движении ее как твердого тела в пространстве R_4^σ. Следовательно, при тривиальном б. м. изгибании вариации пространственных расстояний между каждой парой точек поверхности F равны нулю. В самом деле, если поверхность F подвергается тривиальному б. м. изгибанию, то для расстояния ρ между точками этой поверхности с радиус-векторами $\overline{r}^1$ и $\overline{r}^2$ имеем $\delta(\rho^2) = \delta[(\overline{r}^1 - \overline{r}^2)^2] = 2(\overline{r}^1 - \overline{r}^2)(\delta\overline{r}^1 - \delta\overline{r}^2) = 2[\overline{\overline{\Omega}}(\overline{r}^1 - \overline{r}^2)](\overline{r}^1 - \overline{r}^2) = 0$.

3. В теории б. м. изгибаний поверхностей трехмерного евклидова пространства фундаментальную роль играет вектор вращений [1,5]. В этом пункте мы введем аналог этого вектора в пространстве R_4^σ.

Лемма 1. *Для каждого изгибающего поля $\delta\overline{r}$ поверхности F и каждой скалярной функции φ на F существует и притом единственное поле бивекторов $\overline{\overline{V}}^\varphi$, удовлетворяющее равенствам $\delta\overline{r}_{,i} = \overline{\overline{V}}^\varphi\overline{r}_{,i}$, $\overline{\overline{V}}^\varphi(\overline{n}\wedge\overline{\nu}) = \varphi$.*

Доказательство. Пусть $\overline{r} = x^\alpha\overline{e}_\alpha$, положим

$$\delta x^\alpha_{,1} = P_1^{\beta\alpha}x_{\beta,1}, \quad \delta x^\alpha_{,2} = P_2^{\beta\alpha}x_{\beta,2}. \tag{5}$$

В силу уравнений (I_1) и (I_3) получим $P_1^{\alpha\beta}x_{\alpha,1}x_{\beta,1} = 0$, $P_2^{\alpha\beta}x_{\alpha,2}x_{\beta,2} = 0$. Отсюда вытекает, что $P_1^{\alpha\beta} = -P_1^{\beta\alpha}$, $P_2^{\alpha\beta} = -P_2^{\beta\alpha}$. Следовательно, системы величин $\{P_1^{\alpha\beta}\}$ и $\{P_2^{\alpha\beta}\}$ образуют бивекторы $\overline{\overline{P}}_1$ и $\overline{\overline{P}}_2$ соответственно. Равенства (5) можно записать в виде $\delta\overline{r}_{,1} = \overline{\overline{P}}_1\overline{r}_{,1}$, $\delta\overline{r}_{,2} = \overline{\overline{P}}_2\overline{r}_{,2}$. Из уравнения ($\mathrm{I}_2$) имеем $(\overline{\overline{P}}_1 - \overline{\overline{P}}_2)(\overline{r}_{,1}\wedge\overline{r}_{,2}) = 0$. Следовательно, бивектор $\overline{\overline{P}}_1 - \overline{\overline{P}}_2$ можно представить в виде $\overline{\overline{P}}_1 - \overline{\overline{P}}_2 = p_1\overline{r}_{,1}\wedge\overline{n} + p_2\overline{r}_{,1}\wedge\overline{\nu} + p_3\overline{r}_{,2}\wedge\overline{n} + p_4\overline{r}_{,2}\wedge\overline{\nu} + p\overline{n}\wedge\overline{\nu}$. Предположим сначала, что параметризация u^1, u^2 на F ортогональна и $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{P}}_1 - p_3\overline{r}_{,2}\wedge\overline{n} - p_4\overline{r}_{,2}\wedge\overline{\nu} = \overline{\overline{P}}_2 + p_1 r_{,1}\wedge\overline{n} + p_2\overline{r}_{,1}\wedge\overline{\nu} + p\overline{n}\wedge\overline{\nu}$. Для бивектора $\overline{\overline{P}}$ имеем: $\overline{\overline{P}}\overline{r}_{,1} = \overline{\overline{P}}_1\overline{r}_{,1} = \delta\overline{r}_{,1}$, $\overline{\overline{P}}\overline{r}_{,2} = \overline{\overline{P}}_2\overline{r}_{,2} = \delta\overline{r}_{,2}$. В случае произвольной параметризации $u^{i'}$, переходя к ортогональной, получаем $\delta\overline{r}_{,i'} = \delta\overline{r}_{,i}\dfrac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} = \overline{\overline{P}}\overline{r}_{,i}\dfrac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} = \overline{\overline{P}}\overline{r}_{,i'}$.

Пусть $\overline{\overline{P}}(\overline{n}\wedge\overline{\nu}) = (-1)^\sigma p$, положим: $\overline{\overline{V}}^\varphi = \overline{\overline{P}} + [(-1)^\sigma\varphi - p]\,\overline{n}\wedge\overline{\nu}$. Для бивектора $\overline{\overline{V}}^\varphi$ имеем $\overline{\overline{V}}^\varphi\overline{r}_{;i} = \overline{\overline{P}}\overline{r}_{,i} = \delta\overline{r}_{,i}$, $\overline{\overline{V}}^\varphi(\overline{n}\wedge\overline{\nu}) = \varphi$.

Таким образом доказано существование поля $\overline{\overline{V}}^\varphi$, удовлетворяющего условиям леммы. Докажем его единственность. Пусть $\overline{\overline{V}}_1^\varphi$ — другое поле бивекторов, такое, что $\delta\overline{r}_{,i} = \overline{\overline{V}}_1^\varphi\overline{r}_{,i}$, $\overline{\overline{V}}_1^\varphi(\overline{n}\wedge\overline{\nu}) = \varphi$. Вычитая эти равенства из соответствующих равенств для поля $\overline{\overline{V}}^\varphi$, получим $(\overline{\overline{V}}^\varphi - \overline{\overline{V}}_1^\varphi)\overline{r}_{,i} = 0$, $(\overline{\overline{V}}^\varphi - \overline{\overline{V}}_1^\varphi)(\overline{n}\wedge\overline{\nu}) = 0$. Последние условия совместны лишь при $\overline{\overline{V}}_1^\varphi = \overline{\overline{V}}^\varphi$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $\bar{r} \in D_{m,p}$ $(m \geqslant 1, p > 2)$, $\varphi \in D_{m-1,p}$, *то* $\bar{\bar{V}}^{\varphi} \in D_{m-1,p}$.

Доказательство. Представим поле $\bar{\bar{V}}^{\varphi}$ в виде $\bar{\bar{V}}^{\varphi} = v\bar{r}_{,1} \wedge \bar{r}_{,2} + v^i\bar{r}_{,i} \wedge \bar{n} + w^i\bar{r}_{,i} \wedge \bar{\nu} + (-1)^{\sigma} \varphi\bar{n} \wedge \bar{\nu}$. Так как $\varphi\bar{n} \wedge \bar{\nu} \in D_{m-1,p}$, то для доказательства леммы достаточно показать, что v, v^i, $w^i \in D_{m-1,p}$. Умножая предыдущее равенство на $\bar{r}_{,j}$, в силу леммы 1 получим $\delta\bar{r}_{,j} = v(g_{1j}\bar{r}_{,2} - g_{2j}\bar{r}_{,1}) + v^i g_{ij}\bar{n} + w^i g_{ij}\bar{\nu}$. Так как векторы $\bar{r}_{,1}$, $\bar{r}_{,2}$, $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ линейно независимы и принадлежат классу $D_{m-1,p}$ и, кроме того, $\delta\bar{r}_{,j} \in D_{m-1,p}$, то v, v^i, $w^i \in D_{m-1,p}$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что если $\bar{r}$, $\delta\bar{r} \in D_{m,p}$, $(m \geqslant 1$, $p > 2)$, то $\varphi \in D_{m-1,p}$.

Поскольку базис $\{\bar{n}, \bar{\nu}\}$ в нормальной плоскости поверхности F выбирается неоднозначно, то наряду с деформацией, определяемой изгибающим полем поверхности, этот базис допускает деформацию в нормальной плоскости, не зависящую от изгибающего поля. В следующей лемме мы установим общий вид вариаций нормалей поверхности F при б. м. изгибании ее. Предположим, что при б. м. изгибании поверхности F в поверхность F_t базис $\{\bar{n}, \bar{\nu}\}$ переходит в ортонормированный базис $\{\bar{n}_t, \bar{\nu}_t\}$ нормальной плоскости поверхности F_t.

Лемма 3. *При б. м. изгибании поверхности F, определенном изгибающим полем $\delta\bar{r}$, вариации нормалей поверхности определяются формулами*

$$\delta\bar{n} = \bar{\bar{V}}^{\varphi}\bar{n} + (-1)^{\sigma} \psi\bar{\nu}, \quad \delta\bar{\nu} = \bar{\bar{V}}^{\varphi}\bar{\nu} - \psi\bar{n}, \tag{6}$$

где ψ — произвольная скалярная функция на F.

Доказательство. Варьируя тождества

$$\bar{n}\,\bar{r}_{,i} = 0, \ \bar{\nu}\,\bar{r}_{,i} = 0, \ \bar{n}^2 = 1, \ \bar{n}\,\bar{\nu} = 0, \ \bar{\nu}^2 = (-1)^{\sigma},$$

получаем систему уравнений для вариаций нормалей поверхности F:

$$\delta\bar{n}\,\bar{r}_{,i} + \bar{n}\delta\bar{r}_{,i} = 0, \ \delta\bar{\nu}\,\bar{r}_{,i} + \bar{\nu}\delta\bar{r}_{,i} = 0, \ \bar{n}\delta\bar{n} = 0,$$
$$\bar{n}\delta\bar{\nu} + \delta\bar{n}\,\bar{\nu} = 0, \ \bar{\nu}\delta\bar{\nu} = 0. \tag{7}$$

Заметим, что для любой скалярной функции ψ поля вида (6) удовлетворяют этой системе.

Покажем, что всякое решение системы (7) имеет вид (6). Из уравнений (7_1) и (7_2) в силу леммы 1 получаем $(\delta\bar{n} - \bar{\bar{V}}^{\varphi}\bar{n})\,\bar{r}_{,i} = 0$, $(\delta\bar{\nu} - \bar{\bar{V}}^{\varphi}\bar{\nu})\,\bar{r}_{,i} = 0$. Следовательно, поля $\delta\bar{n}$ и $\delta\bar{\nu}$ имеют вид $\delta\bar{n} = \bar{\bar{V}}^{\varphi}\bar{n} + \xi^1\bar{n} + \xi^2\bar{\nu}$, $\delta\bar{\nu} = \bar{\bar{V}}^{\varphi}\bar{\nu} + \eta^1\bar{n} + \eta^2\bar{\nu}$.

Из уравнений (7_3) и (7_5) следует, что $\xi^1 = \eta^2 = 0$, а из уравнения (7_4) находим $-\eta^1 = (-1)^{\sigma}\xi^2$.
Если обозначить $(-1)^{\sigma}\xi^2 = \psi$, то для полей $\delta\bar{n}$ и $\delta\bar{\nu}$ получаем формулы (6). Лемма доказана.

В дальнейшем мы всюду будем считать, что если $\bar{r}$, $\delta\bar{r} \in D_{m,p} \times$ $\times (m \geqslant 1, \ p > 2)$, то $\psi \in D_{m-1,p}$.

Теорема 1. *Для каждого б. м. изгибания поверхности F в R_4^σ и каждой деформации базиса $\{\bar n, \bar\nu\}$ нормальной плоскости поверхности F существует и притом единственное поле бивекторов $\bar{\bar V}$, удовлетворяющее равенствам $\delta\bar r_{,i} = \bar{\bar V}\bar r_{,i}$, $\delta\bar n = \bar{\bar V}\bar n$, $\delta\bar\nu = \bar{\bar V}\bar\nu$. При этом, если $F \in D_{m,p}$ $(m \geqslant 1,\ p > 2)$, то $\bar{\bar V} \in D_{m-1,p}$.*

Доказательство. Пусть $\delta\bar r$ — произвольное изгибающее поле поверхности F. На основании леммы 1 имеем $\delta\bar r_{,i} = \bar{\bar V}{}^\varphi\bar r_{,i}$. На основании леммы 3 для вариаций нормалей поверхности F при б. м. изгибании ее запишем $\delta\bar n = \bar{\bar V}{}^\varphi\bar n + (-1)^\sigma\psi\bar\nu$, $\delta\bar\nu = \bar{\bar V}{}^\varphi\bar\nu - \psi\bar n$. Положим $\bar{\bar V} = \bar{\bar V}{}^\varphi + (-1)^\sigma\psi\bar n \wedge \bar\nu$. Для поля $\bar{\bar V}$ получаем $\bar{\bar V}\bar r_{,i} = \bar{\bar V}{}^\varphi\bar r_{,i} = \delta\bar r_{,i}$, $\bar{\bar V}\bar n = \bar{\bar V}{}^\varphi\bar n + (-1)^\sigma\psi\bar\nu = \delta\bar n$, $\bar{\bar V}\bar\nu = \bar{\bar V}{}^\varphi\bar\nu - \psi\bar n = \delta\bar\nu$. Таким образом, поле $\bar{\bar V}$ удовлетворяет условиям теоремы. На основании леммы 2 из предположений о регулярности функций φ и ψ имеем $\bar{\bar V} \in D_{m-1,p}$, если $F \in D_{m,p}$ $(m \geqslant 1,\ p > 2)$.

Докажем единственность поля $\bar{\bar V}$. Пусть $\bar{\bar V}'$ — другое поле бивекторов на F, такое, что $\delta\bar r_{,i} = \bar{\bar V}'\bar r_{,i}$, $\delta\bar n = \bar{\bar V}'\bar n$, $\delta\bar\nu = \bar{\bar V}'\bar\nu$. Вычитая эти равенства из соответствующих равенств для поля $\bar{\bar V}$, получаем $(\bar{\bar V} - \bar{\bar V}')\bar r_{,i} = 0$, $(\bar{\bar V} - \bar{\bar V}')\bar n = 0$, $(\bar{\bar V} - \bar{\bar V}')\bar\nu = 0$. Эти условия совместны лишь при $\bar{\bar V}' = \bar{\bar V}$. Теорема доказана.

Поле бивекторов $\bar{\bar V}$, определенное теоремой 1, будем называть полем вращений поверхности F при ее б. м. изгибании.

4. Класс полей вращения, соответствующих тривиальным б. м. изгибаниям, определяется следующей теоремой.

Теорема 2. *Для того чтобы изгибающее поле $\delta\bar r$ на F было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ему поле вращений $\bar{\bar V}$ имело вид*

$$\bar{\bar V} = \bar{\bar\Omega} + \omega\bar n \wedge \bar\nu, \tag{8}$$

где $\bar{\bar\Omega}$ — произвольный постоянный бивектор; ω — произвольная скалярная функция на F.

Доказательство. Пусть поле $\bar{\bar V}$ имеет вид (8). Тогда для соответствующего изгибающего поля $\delta\bar r$ имеем $\delta\bar r_{,i} = \bar{\bar\Omega}\bar r_{,i}$. Этим же равенствам удовлетворяет тривиальное изгибающее поле $\bar{\bar\Omega}\bar r$. Следовательно, поле $\delta\bar r$ имеет вид (4).

Обратно, пусть поле $\delta\bar r$ имеет вид (4). Тогда $\delta\bar r_{,i} = \bar{\bar\Omega}\bar r_{,i}$. С другой стороны, по теореме 1 $\delta\bar r_{,i} = \bar{\bar V}\bar r_{,i}$. Следовательно, $(\bar{\bar V} - \bar{\bar\Omega})\bar r_{,i} = 0$. Отсюда вытекает формула (8). Теорема доказана.

5. В теории б. м. изгибаний поверхностей трехмерного евклидова пространства большую роль играет тот факт, что производные

вектора вращений выражаются через вариации коэффициентов второй основной формы поверхности [1]. Аналогичное утверждение для поверхностей пространства R_4^σ сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 4. *Если поверхность $F \in D_{2,p}$ $(p > 2)$, то для производных поля вращений $\overline{\overline{V}}$ имеют место формулы:* $\overline{\overline{V}}_{,i} = g^{kl}[\delta b_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{n} + (-1)^\sigma \delta\beta_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{\nu}] + (-1)^\sigma \delta\mu_i \bar{n} \wedge \bar{\nu}$.

Доказательство. Дифференцируя равенства $\delta\bar{r}_{,1} = \overline{\overline{V}}\bar{r}_{,1}$, $\delta\bar{r}_{,2} = \overline{\overline{V}}\bar{r}_{,2}$ по u^2 и u^1 соответственно и вычитая результаты, получим

$$\overline{\overline{V}}_{,1}\bar{r}_{,2} = \overline{\overline{V}}_{,2}\bar{r}_{,1}. \tag{9}$$

Умножая это тождество последовательно на $\bar{r}_{,1}$, $\bar{r}_{,2}$ и пользуясь (2), запишем $\overline{\overline{V}}_{,1}(\bar{r}_{,1} \wedge \bar{r}_{,2}) = 0$, $\overline{\overline{V}}_{,2}(\bar{r}_{,1} \wedge \bar{r}_{,2}) = 0$. Следовательно, имеет место разложение $\overline{\overline{V}}_{,i} = T_i^k \bar{r}_{,k} \wedge \bar{n} + S_i^k \bar{r}_{,k} \wedge \bar{\nu} + R_i \bar{n} \wedge \bar{\nu}$. Умножая это равенство на $\bar{r}_{,j}$ и альтернируя по i, j, в силу (1) и (9) получаем $[T_1^k(\bar{r}_{,k}\bar{r}_{,2}) - T_2^k(\bar{r}_{,k}\bar{r}_{,1})]\bar{n} + [S_1^k(\bar{r}_{,k}\bar{r}_{,2}) - S_2^k(\bar{r}_{,k}\bar{r}_{,1})]\bar{\nu} = 0$. Отсюда следует, что $T_1^k g_{k2} = T_2^k g_{k1}$, $S_1^k g_{k2} = S_2^k g_{k1}$. Положим $T_{ij} = T_i^k g_{kj}$, $S_{ij} = S_i^k g_{kj}$, тогда $T_{12} = T_{21}$, $S_{12} = S_{21}$. Таким образом, можем записать

$$\overline{\overline{V}}_{,i} = g^{kl}(T_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{n} + S_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{\nu}) + R_i \bar{n} \wedge \bar{\nu}. \tag{10}$$

Варьируя формулы Гаусса и пользуясь теоремой 1, будем иметь

$$\begin{aligned}\delta\bar{r}_{,ij} &= \delta b_{ij}\bar{n} + b_{ij}\overline{\overline{V}}\bar{n} + (-1)^\sigma \delta\beta_{ij}\bar{\nu} + (-1)^\sigma \beta_{ij}\overline{\overline{V}}\bar{\nu} = \\ &= \delta b_{ij}\bar{n} + (-1)^\sigma \delta\beta_{ij}\bar{\nu} + \overline{\overline{V}}(b_{ij}\bar{n} + (-1)^\sigma \beta_{ij}\bar{\nu}) = \\ &= \delta b_{ij}\bar{n} + (-1)^\sigma \delta\beta_{ij}\bar{\nu} + \overline{\overline{V}}\bar{r}_{,ij}.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\delta\bar{r}_{,ij} = (\delta\bar{r}_{,i})_{,j} = (\overline{\overline{V}}\bar{r}_{,i})_{,j} = \overline{\overline{V}}_{,j}\bar{r}_{,i} + \overline{\overline{V}}\bar{r}_{,ij}$. Следовательно, $\overline{\overline{V}}_{,j}\bar{r}_{,i} = \delta b_{ij}\bar{n} + (-1)^\sigma \delta\beta_{ij}\bar{\nu}$. Используя (10), можем также записать $g^{kl}(T_{ki}g_{lj}\bar{n} + S_{ki}g_{lj}\bar{\nu}) = \delta b_{ij}\bar{n} + (-1)^\sigma \delta\beta_{ij}\bar{\nu}$. Отсюда получаем $T_{ij} = \delta b_{ij}$, $S_{ij} = (-1)^\sigma \delta\beta_{ij}$.

Покажем, что $R_i = (-1)^\sigma \delta\mu_i$. Варьируя формулы Вейнгартена для $\bar{n}_{,i}$, в силу теоремы 1 находим $\delta\bar{n}_{,i} = -g^{kl}\delta b_{ki}\bar{r}_{,l} - g^{kl}b_{ki}\overline{\overline{V}}\bar{r}_{,l} + (-1)^\sigma \delta\mu_i\bar{\nu} + (-1)^\sigma \mu_i \overline{\overline{V}}\bar{\nu} = -g^{kl}\delta b_{ki}\bar{r}_{,l} + (-1)^\sigma \delta\mu_i\bar{\nu} + \overline{\overline{V}}\bar{n}_{,i}$. С другой стороны, $\delta\bar{n}_{,i} = (\overline{\overline{V}}\bar{n})_{,i} = \overline{\overline{V}}_{,i}\bar{n} + \overline{\overline{V}}\bar{n}_{,i}$. Следовательно, $\overline{\overline{V}}_{,i}\bar{n} = -g^{kl}\delta b_{ki}\bar{r}_{,l} + (-1)^\sigma \delta\mu_i\bar{\nu}$. В силу (10) получаем $-g^{kl}T_{ki}\bar{r}_{,l} + R_i\bar{\nu} = -g^{kl}\delta k_{ki}\bar{r}_{,l} + (-1)^\sigma \delta\mu_i\bar{\nu}$. Отсюда следует, что $R_i = (-1)^\sigma \delta\mu_i$. Лемма доказана.

6. Вариации коэффициентов вторых основных форм поверхности F при тривиальном б. м. изгибании описываются следующей теоремой.

Теорема 3. *Для того чтобы б. м. изгибание поверхности F класса $D_{2,p}$ $(p > 2)$ было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\delta b_{ij} = \omega\beta_{ij},\ \delta\beta_{ij} = -(-1)^\sigma \omega b_{ij},\ \delta\mu_i = (-1)^\sigma \omega_{,i}, \tag{11}$$

где ω — произвольная скалярная функция на F.

Доказательство. Пусть $\delta\bar{r}$ — тривиальное изгибающее поле на F. В силу теоремы 2 для производных соответствующего ему поля вращений имеем $\overline{\overline{V}}_{,i} = \omega_{,i}\bar{n} \wedge \bar{\nu} + \omega\bar{n}_{,i} \wedge \bar{\nu} + \omega\bar{n} \wedge \bar{\nu}_{,i}$.

Пользуясь формулами Вейнгартена, запишем

$$\overline{\overline{V}}_{,i} = \omega(-g^{kl}b_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{\nu} + g^{kl}\beta_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{n}) + \omega_{,i}\bar{n} \wedge \bar{\nu}. \tag{12}$$

Отсюда в силу леммы 4 получаем $-\omega g^{kl}b_{ki} = (-1)^\sigma g^{kl}\delta\beta_{ki}$, $\omega g^{kl}\beta_{ki} = g^{kl}\delta b_{ki}$, $\omega_{,i} = (-1)^\sigma \delta\mu_i$. Умножая первые два из этих равенств на g_{lj} и свертывая по l, получаем формулы (11).

Обратно, если выполняются равенства (11), то производные поля $\overline{\overline{V}}$ имеют вид (12). С другой стороны, равенствам (12) удовлетворяет поле $\omega\bar{n} \wedge \bar{\nu}$. Следовательно, поле $\overline{\overline{V}}$ имеет вид (8). По теореме 2 это означает, что изгибающее поле $\delta\bar{r}$ тривиально. Теорема доказана.

7. Для поверхностей трехмерного евклидова пространства производные вектора вращений по дуге кривой выражаются через вариации нормальной кривизны и геодезического кручения с помощью формулы Гротемейера [1, с. 438]. Докажем аналог формулы Гротемейера для поверхностей пространства R_4^σ.

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$\frac{d\overline{\overline{V}}}{ds} = \delta k_n \bar{t} \wedge \bar{n} + \delta\tau_n \bar{l} \wedge \bar{n} + \delta k_\nu \bar{t} \wedge \bar{\nu} + \delta\tau_\nu \bar{l} \wedge \bar{\nu} + \delta\mu\bar{n} \wedge \bar{\nu},$$

где k_n, k_ν, τ_n, τ_ν, μ вычисляются в направлении $\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}$.

Доказательство. В силу леммы 4 можем записать

$$\frac{d\overline{\overline{V}}}{ds} = \overline{\overline{V}}_{,i}\frac{dx^i}{ds} = \{g^{kl}[\delta b_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{n} + (-1)^\sigma \delta\beta_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{\nu}] +$$
$$+ (-1)^\sigma \delta\mu_i \bar{n} \wedge \bar{\nu}\} t^i = A_1 \bar{t} \wedge \bar{n} + A_2 \bar{l} \wedge \bar{n} + A_3 \bar{t} \wedge \bar{\nu} +$$
$$+ A_4 \bar{l} \wedge \bar{\nu} + A_5 \bar{n} \wedge \bar{\nu}.$$

Умножая эти равенства последовательно на $\bar{t} \wedge \bar{n}$, $\bar{l} \wedge \bar{n}$, $\bar{t} \wedge \bar{\nu}$, $\bar{l} \wedge \bar{\nu}$, $\bar{n} \wedge \bar{\nu}$ и пользуясь формулой (3), получаем

$$g^{kl}\delta b_{ki}(\bar{t}\bar{r}_{,l})t^i = \delta b_{ki}t^k t^i = A_1,\quad g^{kl}\delta b_{ki}(\bar{l}\bar{r}_{,l})t^i = \delta b_{ki}l^k t^i = A_2,$$
$$g^{kl}\delta\beta_{ki}(\bar{t}\bar{r}_{,l})t^i = \delta\beta_{ki}t^k t^i = A_3,\quad g^{kl}\delta\beta_{ki}(\bar{l}\bar{r}_{,l})t^i = \delta\beta_{ki}l^k t^i = A_4,\ \delta\mu_i t^i = A_5.$$

9 7-524

Следовательно, $A_1 = \delta k_n$, $A_2 = \delta\tau_n$, $A_3 = \delta k_\nu$, $A_4 = \delta\tau_\nu$, $A_5 = \delta\mu$. Отсюда вытекает справедливость леммы.

Лемма 5 позволяет исследовать поведение изгибающего поля поверхности вдоль кривых в зависимости от вариаций геометрических характеристик поверхности вдоль этих кривых.

Теорема 4. *Если вдоль кривой γ класса $D_{2,p}$ $(p > 2)$ на поверхности F выполняются условия $\delta k_n = \omega k_\nu$, $\delta k_\nu = -\omega k_n$, $\delta\tau_n = \omega\tau_\nu$, $\delta\tau_\nu = -\omega\tau_n$, $\delta\mu = \frac{d\omega}{ds}$, где ω — произвольная скалярная функция на γ, то изгибающее поле поверхности F тривиально вдоль γ.*

Доказательство. Рассмотрим вдоль γ поле $\omega\bar n \wedge \bar\nu$. Для производной этого поля имеем

$$\frac{d}{ds}(\omega\bar n \wedge \bar\nu) = \omega\left(\frac{d\bar n}{ds} \wedge \bar\nu + \bar n \wedge \frac{d\bar\nu}{ds}\right) + \frac{d\omega}{ds}\,\bar n \wedge \bar\nu.$$

Для производных нормалей $\bar n$ и $\bar\nu$ имеем $\frac{d\bar n}{ds} = \bar n_{,i}\frac{du^i}{ds} = -g^{kl}b_{kl} \times \bar r_{,l}t^i + (-1)^\sigma\mu_i t^i\bar\nu$, $\frac{d\bar\nu}{ds} = \bar\nu_{,i}\frac{du^i}{ds} = -g^{kl}\beta_{ki}\bar r_{,l}t^i - \mu_i t^i\bar n$. Следовательно, получаем $\frac{d}{ds}(\omega\bar n \wedge \bar\nu) = \omega(-g^{kl}b_{ki}t^i\bar r_{,l} \wedge \bar\nu + g^{kl}\beta_{ki}t^i\bar r_{,l} \wedge \bar n) + \frac{d\omega}{ds}\bar n \wedge \bar\nu$. Умножая это равенство последовательно на $\bar t \wedge \bar n$, $\bar t \wedge \bar\nu$, $\bar l \wedge \bar n$, $\bar l \wedge \bar\nu$, $\bar n \wedge \bar\nu$, в силу условий теоремы будем иметь

$$(\bar t \wedge \bar n)\frac{d}{ds}(\omega\bar n \wedge \bar\nu) = \omega g^{kl}\beta_{ki}t^i(\bar t\bar r_{,l}) = \delta k_n,$$

$$(\bar l \wedge \bar n)\frac{d}{ds}(\omega\bar n \wedge \bar\nu) = \omega g^{kl}\beta_{ki}t^i(\bar l\bar r_{,l}) = \delta\tau_n,$$

$$(\bar t \wedge \bar\nu)\frac{d}{ds}(\omega\bar n \wedge \bar\nu) = -(-1)^\sigma\omega g^{kl}\beta_{ki}t^i(\bar t\bar r_{,l}) = (-1)^\sigma\delta k_\nu,$$

$$(\bar l \wedge \bar\nu)\frac{d}{ds}(\omega\bar n \wedge \bar\nu) = -(-1)^\sigma\omega g^{kl}\beta_{ki}t^i(\bar l\bar r_{,l}) = (-1)^\sigma\delta\tau_\nu,$$

$$(\bar n \wedge \bar\nu)\frac{d}{ds}(\omega\bar n \wedge \bar\nu) = (-1)^\sigma\frac{d\omega}{ds}.$$

Отсюда следует, что $\frac{d}{ds}(\omega\bar n \wedge \bar\nu) = \delta k_n\bar t \wedge \bar n + \delta k_\nu\bar t \wedge \bar\nu + \delta\tau_n\bar l \wedge \bar n + \delta\tau_\nu\bar l \wedge \bar\nu + \frac{d\omega}{ds}\bar n \wedge \bar\nu$. С другой стороны, в силу леммы 5, этому же равенству удовлетворяет поле вращений $\bar{\bar V}$. Следовательно, $\bar{\bar V} = \bar{\bar\Omega} + \omega\bar n \wedge \bar\nu$, где $\bar{\bar\Omega} = \text{const}$. Для производной изгибающего поля $\delta\bar r$ вдоль γ получаем $\frac{d(\delta\bar r)}{ds} = \bar{\bar V}\,\bar t = \bar{\bar\Omega}\,\frac{d\bar r}{ds}$. Отсюда следует, что $\delta\bar r = \bar{\bar\Omega}\bar r + \bar C$, где $\bar C = \text{const}$. Теорема доказана.

6. Предположим, что поверхность $F \in D_{3,\,p}\ (p > 2)$. Рассмотрим на F систему шести уравнений:

$$\begin{aligned} b_{11}t_{22} - 2b_{12}t_{12} + b_{22}t_{11} + (-1)^\sigma (\beta_{11}\tau_{22} - 2\beta_{12}\tau_{12} + \beta_{22}\tau_{11}) = 0,& \\ t_{ij,\,k} - t_{ik,\,j} = (-1)^\sigma (\tau_{ij}\mu_k - \tau_{ik}\mu_j + \beta_{ij}\varepsilon_k - \beta_{ik}\varepsilon_j),& \\ \tau_{ij,\,k} - \tau_{ik,\,j} = -(t_{ij}\mu_k - t_{ik}\mu_j + b_{ij}\varepsilon_k - b_{ik}\varepsilon_j),& \\ \varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{2,1} = g^{kl}(t_{l1}\beta_{k2} - t_{l2}\beta_{k1} + b_{l1}\tau_{k2} - b_{l2}\tau_{k1}),& \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

относительно восьми неизвестных $t_{ij},\ \tau_{ij},\ \varepsilon_j\ (t_{12} = t_{21},\ \tau_{12} = \tau_{21})$. Систему (II) будем называть основной системой уравнений теории б. м. изгибаний поверхностей в пространстве R_4^σ. Выясним связь решений этой системы с изгибающими полями поверхности F. Прежде всего заметим, что системе (II) удовлетворяют вариации коэффициентов вторых основных форм поверхности, так как, варьируя уравнения Гаусса—Кодацци—Риччи, получим равенства вида (II) для $\delta b_{ij},\ \delta\beta_{ij},\ \delta\mu_i$. В частности, система (II) всегда допускает решения вида

$$t_{ij} = \omega\beta_{ij},\ \tau_{ij} = (-1)^\sigma \omega b_{ij},\ \varepsilon_i = (-1)^\sigma \omega_{,i}, \qquad (13)$$

где ω — произвольная скалярная функция на F. Из теоремы 3 вытекает, что если система (II) имеет решения только вида (13), то поверхность F не допускает иных б. м. изгибаний, кроме тривиальных.

Теорема 5. *Если поверхность F односвязна, то всякому решению $t_{ij},\ \tau_{ij},\ \varepsilon_i$ системы (II) соответствует единственное, с точностью до тривиального, изгибающее поле поверхности F.*

Доказательство. Рассмотрим поля бивекторов

$$\begin{aligned} \overline{\overline{p}} &= g^{kl}[t_{1k}\overline{r}_{,l} \wedge \overline{n} + (-1)^\sigma \tau_{1k}\overline{r}_{,l} \wedge \overline{\nu}] + (-1)^\sigma \varepsilon_1 \overline{n} \wedge \overline{\nu}, \\ \overline{\overline{q}} &= g^{kl}[t_{2k}\overline{r}_{,l} \wedge \overline{n} + (-1)^\sigma \tau_{2k}\overline{r}_{,l} \wedge \overline{\nu}] + (-1)^\sigma \varepsilon_2 \overline{n} \wedge \overline{\nu}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Покажем, что $\overline{\overline{p}}_{,2} - \overline{\overline{q}}_{,1} = 0$. В самом деле, учитывая формулы Гаусса и Вейнгартена, получаем.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{p}}_{,2} - \overline{\overline{q}}_{,1} &= g^{kl}g^{ij}[t_{k2}b_{i1} - t_{k1}b_{i2} + (-1)^\sigma(\tau_{k2}\beta_{i1} - \tau_{k1}\beta_{i2})]\,\overline{r}_{,l} \wedge \overline{r}_{,j} + \\ &+ g^{kl}[t_{k1,\,2} - t_{k2,\,1} + (-1)^\sigma(\tau_{k2}\mu_1 - \tau_{k1}\mu_2 + \beta_{k2}\varepsilon_1 - \beta_{k1}\varepsilon_2)]\,\overline{r}_{,l} \wedge \overline{n} + \\ &+ (-1)^\sigma g^{kl}(\tau_{k1,\,2} - \tau_{k2,\,1} + t_{k1}\mu_2 - t_{k2}\mu_1 + b_{k1}\varepsilon_2 - b_{k2}\varepsilon_1)\,\overline{r}_{,l} \wedge \overline{\nu} + \\ &+ (-1)^\sigma[g^{kl}(t_{k2}\beta_{l1} - t_{k1}\beta_{l2} + \tau_{k1}b_{l2} - \tau_{k2}b_{l1}) + \varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{2,1}]\,\overline{n} \wedge \overline{\nu}. \end{aligned}$$

В силу (II) коэффициенты при $\overline{r}_{,l} \wedge \overline{n},\ \overline{r}_{,l} \wedge \overline{\nu},\ \overline{n} \wedge \overline{\nu}$ равны нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\overline{p}}_{,2} - \overline{\overline{q}}_{,1} &= (g^{k1}g^{l2} - g^{k2}g^{l1})[t_{k2}b_{l1} - t_{k1}b_{l2} + (-1)^\sigma(\tau_{k2}\beta_{l1} - \tau_{k1}\beta_{l2})] \times \\ &\times \overline{r}_{,1} \wedge \overline{r}_{,2} = -\frac{1}{g}[b_{22}t_{11} - 2b_{12}t_{12} + b_{11}t_{22} + (-1)^\sigma(\beta_{22}\tau_{11} - 2\beta_{12}\tau_{12} + \\ &+ \beta_{11}\tau_{22})] = 0. \end{aligned}$$

Значит, на поверхности F существует поле $\overline{\overline{V}}$, такое, что $\overline{\overline{V}}_{,1} = \overline{\overline{p}},\ \overline{\overline{V}}_{,2} = \overline{\overline{q}}$. Поле $\overline{\overline{V}}$ определяется полями $\overline{\overline{p}}$ и $\overline{\overline{q}}$ (а следовательно, тензорами t_{ij}, τ_{ij}, μ_i) однозначно с точностью до аддитив[illegible] постоянного бивектора $\overline{\overline{\Omega}}$.

Из формул (14) следует, что $\overline{\overline{V}}_{,1}\overline{r}_{,2} = \overline{\overline{V}}_{,2}\overline{r}_{,1}$. Отсюда для по[illegible]

$$\overline{U}_1 = \overline{\overline{V}}\overline{r}_{,1},\ \ \overline{U}_2 = \overline{\overline{V}}\overline{r}_{,2} \qquad (1[illegible])$$

имеем $\dfrac{\partial \overline{U}_1}{\partial u^2} = \dfrac{\partial \overline{U}_2}{\partial u^1}$. Следовательно, на F существует векторное по[illegible] $\overline{U}$, такое, что

$$\overline{U}_{,1} = \overline{U}_1,\ \ \overline{U}_{,2} = \overline{U}_2. \qquad (1[illegible])$$

Поле $\overline{U}$ определяется полями $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ однозначно с точност[illegible] до произвольного постоянного слагаемого $\overline{C}$. Полями же $\overline{\overline{p}}$ и [illegible] поле $\overline{U}$ определяется однозначно с точностью до слагаемого ви[illegible] $\overline{\overline{\Omega}}\overline{r} + \overline{C}$.

Из равенств (16) и (15) получаем $\overline{U}_{,1} = \overline{\overline{V}}\overline{r}_{,1}$, $\overline{U}_{,2} = \overline{\overline{V}}\overline{r}_{,2}$. Так[illegible] образом, поле $\overline{U}$ удовлетворяет системе уравнений (I) и являет[illegible] изгибающим. Теорема доказана.

§ 3. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей в пространствах постоянно[illegible] кривизны

1. Пусть V_3 — односвязное трехмерное риманово пространст[illegible] постоянной кривизны $K_0 \neq 0$. Пространство V_3 мы будем рассма[illegible]ривать как гиперсферу

$$\overline{r}^2 = \frac{1}{K_0} \quad (17)$$

с отождествленными диаметрально противоположными точкам[illegible] в пространстве R_4^{σ}. При этом будем считать $\sigma = 0$, если $K_0 >$ [illegible] и $\sigma = 1$, если $K_0 < 0$.

Пусть F — поверхность класса $D_{3,\,p}\,(p > 2)$, расположенн[illegible] в пространстве V_3. В этом случае векторы $\overline{r}$ и $\overline{\nu}$ можно счита[illegible] коллинеарными:

$$\overline{\nu} = \sqrt{|K_0|}\,\overline{r}. \qquad (1[illegible])$$

Отсюда выводятся равенства [4]:

$$\mu_i = 0,\ \ \beta_{ij} = -K_0 g_{ij}. \qquad (1[illegible])$$

Формулы Гаусса и Вейнгартена для поверхности F в V_3 принимаю[illegible] вид $\overline{r}_{,ij} = b_{ij}\overline{n} - K_0 g_{ij}\overline{r}$, $\overline{n}_{,i} = -g^{kl} b_{ki}\overline{r}_{,l}$. Уравнения Гаусса и Ко[illegible]дацци можно записать так: $K = \dfrac{b}{g} + K_0$, $b_{ij,\,k} - b_{ik,\,j} = 0$, а урав[illegible]нение Риччи обращается в тождество.

Для нормальных кривизн и геодезических кручений поверхност[illegible] F в V_3 находим $k_n = b_{ij}t^i l^j$, $\tau_n = b_{ij}t^i l^j$, $k_\nu = -K_0$, $\tau_\nu = 0$, кром[illegible] того, $\mu = 0$.

Плоскостью в пространстве V_3 называют пересечение V_3 с гипер[illegible] плоскостью пространства R_4^{σ}, проходящей через начало координат O[illegible]

Под плоской областью мы будем понимать либо плоскость пространства V_3, либо часть ее. Если поверхность F является плоской областью, то $\bar{n} = \text{const}$, $b_{ij} = 0$ на F.

2. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что поверхность F принадлежит классу $D_{3,\,p}\,(p > 2)$, расположена в V_3, и рассматривать только такие б. м. изгибания ее, при которых в любой момент времени t поверхность $F_t \subset V_3$. В этом случае, варьируя равенства (19), найдем

$$\delta\mu_i = 0, \;\; \delta\beta_{ij} = 0. \tag{20}$$

Отсюда получаем $\delta k_\nu = \delta\tau_\nu = \delta\mu = 0$. Формулы, установленные в леммах 4 и 5, принимают вид

$$\overline{\overline{V}}_{,i} = g^{kl}\delta b_{ki}\bar{r}_{,l} \wedge \bar{n}, \tag{21}$$

$$\frac{d\overline{\overline{V}}}{ds} = \delta k_n \bar{t} \wedge \bar{n} + \delta\tau_n \bar{l} \wedge \bar{n}. \tag{22}$$

Варьируя тождество (17), наряду с системой (I) мы получим еще одно уравнение для изгибающего поля:

$$\bar{r}\delta\bar{r} = 0. \tag{23}$$

Из равенства (18) в силу теоремы 1 находим

$$\delta\bar{r} = \overline{\overline{V}}\bar{r}. \tag{24}$$

3. Установим вид тривиального изгибающего поля поверхности F при б. м. изгибании ее в V_3. Изгибающее поле поверхности F при тривиальном б. м. изгибании ее в R_4^σ имеет вид $\delta\bar{r} = \overline{\overline{\Omega}}\bar{r} + \bar{C}$, где $\overline{\overline{\Omega}} = \text{const}$, $\bar{C} = \text{const}$. Для б. м. изгибания поверхности F в V_3 в силу (23) получаем $\bar{C}\bar{r} = 0$. Если поверхность F не является плоской областью, то вектор $\bar{r}$ принимает четыре линейно независимых значения и, следовательно, $\bar{C} = 0$. Если же F — плоская область, то вектор $\bar{C}$ представим в виде $\bar{C} = c\bar{n}$, где $c = \text{const}$.

Таким образом, *если поверхность F не является плоской областью, то всякое тривиальное изгибающее поле ее в V_3 имеет вид*

$$\delta\bar{r} = \overline{\overline{\Omega}}\bar{r}. \tag{25}$$

Если же F — плоская область, то тривиальное изгибающее поле ее таково:

$$\delta\bar{r} = \overline{\overline{\Omega}}\bar{r} + c\bar{n}, \tag{26}$$

где $\overline{\overline{\Omega}} = \text{const}$, $c = \text{const}$.

4. Установим вид поля вращений при тривиальном б. м. изгибании поверхности F в V_3.

Теорема 6. *Если поверхность F пространства V_3 не является плоской областью, то для того чтобы б. м. изгибание ее в V_3 было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы соответст-*

вующее этому б. м. изгибанию поле вращений было постоянно на F. Для того чтобы б. м. изгибание плоской области было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее поле вращений имело вид

$$\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{\Omega}}\overline{r} + c\overline{r} \wedge \overline{n}, \tag{27}$$

где $\overline{\overline{\Omega}}$ — *произвольный постоянный бивектор;* c — *произвольное число.*

Доказательство. Пусть F не является плоской областью. Тогда тривиальные изгибающие поля поверхности F определяются формулой (25). Вычитая почленно (25) из тождества (24), получим

$$(\overline{\overline{V}} - \overline{\overline{\Omega}})\,\overline{r} = 0. \tag{28}$$

Из формул (21) следует, что $\overline{\overline{V}}_{,i}\overline{r} = 0$. Поэтому, дифференцируя тождество (28), запишем $(\overline{\overline{V}} - \overline{\overline{\Omega}})\,\overline{r}_{,i} = 0$. Следовательно, бивектор $\overline{\overline{V}} - \overline{\overline{\Omega}}$ ортогонален векторам $\overline{r}_{,1}$, $\overline{r}_{,2}$, $\overline{r}$. А это возможно лишь в случае, когда $\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{\Omega}}$.

Пусть теперь F — плоская область. Тривиальные изгибающие поля поверхности F в этом случае определяются формулой (26). В силу (24) для поля вращений, соответствующего тривиальному б. м. изгибанию, получаем

$$(\overline{\overline{V}} - \overline{\overline{\Omega}})\,\overline{r} = c\overline{n}. \tag{29}$$

Дифференцируя это тождество и учитывая, что $\overline{\overline{V}}\overline{r}_{,i} = 0$, $c\overline{n} = \mathrm{const}$, имеем $(\overline{\overline{V}} - \overline{\overline{\Omega}})\,\overline{r}_{,i} = 0$. Следовательно, бивектор $\overline{\overline{V}} - \overline{\overline{\Omega}}$ можно представить в виде $\overline{\overline{V}} - \overline{\overline{\Omega}} = \omega\overline{r} \wedge \overline{n}$. Умножая это равенство на $\overline{r}$, в силу (29) получаем $\omega\overline{r}^2 = c$. Отсюда следует, что $\omega = \mathrm{const}$, т. е. бивектор $\overline{\overline{V}}$ имеет вид (27). Теорема доказана.

5. Определим вид вариаций коэффициентов второй основной формы поверхности F при тривиальном б. м. изгибании ее в V_3.

Теорема 7. *Если поверхность F не является плоской областью в V_3, то для того чтобы б. м. изгибание ее в V_3 было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы $\delta b_{ij} = 0$. Для того чтобы б. м. изгибание плоской области в V_3 было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы вариации коэффициентов второй основной формы ее имели вид* $\delta b_{ij} = c g_{ij}$, где $c = \mathrm{const}$.

Доказательство. Справедливость первого утверждения теоремы вытекает из формул (21) и теоремы 6. Докажем второе утверждение. Поле вращений плоской области при тривиальном б. м. изгибании определяется формулой (27). Из этой формулы для производных поля вращений получаем $\overline{\overline{V}}_{,i} = c\overline{r}_{,i} \wedge \overline{n}$. Отсюда в силу формул (22) имеем $c\overline{r}_{,i} \wedge \overline{n} = g^{kl}\delta b_{ki}\overline{r}_{,l} \wedge \overline{n}$. Умножая это равенство скалярно на бивектор $\overline{r}_{,j} \wedge \overline{n}$ и пользуясь формулой (3), получим $c g_{ij} = \delta b_{ij}$. Теорема доказана.

6. Из формул (22) и (24) вытекает

Теорема 8. *Если вдоль кривой γ класса $D_{2,p}$ $(p > 2)$ на поверхности F в V_3 выполняются равенства*

$$\delta k_n = \delta \tau_n = 0,$$

то изгибающее поле поверхности F вдоль γ тривиально.

7. Основной системой теории б. м. изгибаний поверхностей в V_3 будем называть систему трех уравнений

$$b_{11} t_{22} - 2 b_{12} t_{12} + b_{22} t_{11} = 0, \; t_{ij,k} - t_{ik,j} = 0 \tag{III}$$

относительно трех неизвестных t_{11}, t_{12}, t_{22}. Эта система получается из системы (II) при $\tau_{ij} = 0$, $\varepsilon_i = 0$.

Системе (III) удовлетворяют вариации коэффициентов второй основной формы поверхности F, так как варьированием уравнений Гаусса и Кодацци мы получим систему вида (III) для δb_{ij}. Отсюда и из теоремы 7 вытекает

Теорема 9. *Если система* (III) *не имеет ненулевых решений, то поверхность F не допускает нетривиальных б. м. изгибаний в V_3.*

Из теоремы 5 следует

Теорема 10. *Если поверхность F односвязна, то всякому решению t_{ij} системы* (III) *соответствует единственное (с точностью до тривиального) изгибающее поле поверхности F.*

8. Теоремы 9 и 10 позволяют обобщить многие результаты теории б. м. изгибаний поверхностей трехмерного евклидова пространства на случай пространства произвольной постоянной кривизны. В этом пункте мы сформулируем некоторые теоремы, относящиеся к б. м. изгибаниям поверхностей положительной внешней кривизны в пространстве V_3.

Точку M $(M \in F)$ будем называть точкой жесткости при б. м. изгибании поверхности F, если в этой точке $\delta k_n = 0$ по любому направлению на F.

Теорема 11. *Пусть на односвязном куске F поверхности положительной внешней кривизны в V_3 зафиксировано множество точек $\{M_n\}$. Тогда, если множество $\{M_n\}$ не содержит предельной точки, то существует нетривиальное б. м. изгибание куска F в V_3, при котором точки M_n являются точками жесткости. Если же $\{M_n\}$ содержит предельную точку, то каждое б. м. изгибание куска F, при котором точки M_n являются точками жесткости, тривиально.*

Доказательство теоремы 11 вытекает из результатов работ [6, 7].

Аналогично теореме 4 работы [8] доказывается

Теорема 12. *Односвязный кусок F поверхности положительной внешней кривизны в пространстве V_3 не допускает нетривиальных б. м. изгибаний, при которых вариация кривизны края равна нулю.*

Из результатов работы [9] следует

Теорема 13. *Пусть край L односвязного куска F поверхности положительной внешней кривизны в V_3 не содержит омбилических* *точек и составляет с одним из семейств главных направлений угол $\theta \in D_{1,p}$ ($p > 2$). Тогда, если $\varkappa \equiv \frac{1}{2\pi} \Delta_L \theta < 1$, то не существует нетривиальных б. м. изгибаний куска F, при которых вариация средней кривизны вдоль L равна нулю. Если же $\varkappa > 1$, то существует ($4\varkappa - 3$)-параметрическое семейство изгибающих полей, таких, что при б. м. изгибаниях куска F с этими полями вариация средней кривизны вдоль края равна нулю.*

Дословным повторением доказательств на случай пространства V_3 переносятся также все результаты статьи [10].

В заключение выражаю благодарность В. Т. Фоменко и всем участникам межвузовского семинара по геометрии при ТГПИ за полезное обсуждение результатов.

Список литературы

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
2. Чернявская И. А. Бесконечно малые изгибания первого и второго порядков поверхностей в пространстве Лобачевского. — Commentationes Math. Univ. Carolinae», 1975, vol. 16. № 3, p. 399—424.
3. Картан Э. Геометрия римановых пространств. ОНТИ НКТП СССР, 1936. 242 с.
4. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М., ГИИЛ, 1948. 316 с.
5. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей. — «Усп. мат. наук», т. 3, 1948, № 2, с. 147—158.
6. Фоменко В. Т. Изгибание поверхностей с сохранением точек конгруэнтности. — «Мат. сб.», 1965, т. 66, № (108) 1, с. 127—141.
7. Фоменко В. Т. Исследование решений основных уравнений теории поверхностей. — «Докл. АН СССР». 1962, т. 144, № 1, с. 69—71.
8. Бархин Г. С., Фоменко В. Т. Об изгибании поверхностей положительной кривизны с краем. — «Сиб. мат. журн.», 1963, № 1, с. 32—47.
9. Фоменко В. Т. Об изгибании поверхностей положительной кривизны при некоторых краевых условиях.—«Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 2, с. 286—288.
10. Тюриков Е. В. О жесткости поверхностей рода $p \gg 1$ с краем, расположенным в пространстве Лобачевского. — «Сиб. мат. журн.», 1976, т. XVII, № 5, с. 1129—1140.

Поступила 14 февраля 1977 г.

УДК 513

Л. А. Масальцев

Неустойчивость минимальных конусов в пространстве Лобачевского

Вопрос об устойчивости минимальных конусов в евклидовых пространствах возник в связи с теоремой о внутренней регулярности минимальных поверхностей и проблемой С. Н. Бернштейна о линейности графика минимальной гиперповерхности, заданной над

...ной гиперплоскостью евклидова пространства R^n. Он был решен ...мгреном [1] для конусов в R^4 и иным методом Дж. Саймонсом ... Последний доказал, что минимальный конус над любой не ...ной геодезической замкнутой гиперповерхностью единичной ...феры S^n евклидова пространства R^{n+1} неустойчив относительно его ...ницы при $n \leqslant 6$ и построил пример конуса над такой поверх...ностью в S^7, для которого любая вариация, сохраняющая границу, ...первоначально увеличивает площадь. Позже Бомбьери, де Джорджи и Джусти [2] показали, что данный конус имеет абсолютный мини...мум площади.

С помощью метода Саймонса будет рассмотрена устойчивость ...минимальных конусов в пространстве Лобачевского. Напомним их ...конструкцию. В некоторой геодезической сфере Σ^n пространства Лобачевского (она изометрична евклидовой сфере соответствующего ...радиуса) берется замкнутая минимальная гиперповерхность M, не ...являющаяся большой гиперсферой. Затем центр сферы Σ^n соединя...ется геодезическими с M, образуя при этом конус CM.

Теорема 1. *Пусть M^{n-1} замкнутая минимальная гиперповерх...ность в геодезической сфере Σ^n пространства Лобачевского H^{n+1}, не совпадающая с вполне геодезическим подмногообразием сферы. Тогда при $n \leqslant 6$ конус CM^{n-1} не минимизирует площадь отно...сительно своей границы.*

При доказательстве исследуется знак второй вариации площади ...конуса CM. Для этого приходится точно оценивать первые собст...венные значения двух линейных дифференциальных операторов, из ...которых складывается выражение для второй вариации. Один из ...этих операторов L_1 действует в $\overset{\infty}{C}(M)$ и его первое собственное ...значение было оценено Саймонсом. Другой оператор L_2 отличается ...от своего аналога в случае евклидова конуса и вся трудность со...стоит в получении подходящей оценки его первого собственного ...значения.

Будет показано, что пример Саймонса локально устойчивого евклидова конуса над поверхностью $S^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset S^7$ (где через $S^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ обозначена сфера радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$) дает и в случае пространства Лобачевского пример локально устойчивого минималь...ного конуса в H^8.

Теорема 2. *Рассмотрим многообразие $M = S^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ как минимальную гиперповерхность соответствующей сферы Σ^7 пространства Лобачевского H^8. Тогда при любой вариации конуса CM, сохраняющей его основание неподвижным, площадь возрастает в некоторой окрестности CM.*

Заметим, что подобным образом можно исследовать и устойчи...вость минимального конуса в сферических пространствах.

1. Некоторые свойства конусов в римановых пространствах. Рассмотрим риманово пространство V^{n+1} с метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 + \Phi^2(t) \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x^1, \ldots x^n)\, dx^i\, dx^k. \qquad (1.1)$$

Пусть M^{n-1} — замкнутая гиперповерхность в геодезической сфере $\sum_1^n (t = 1)$ с центром в точке $t = 0$ пространства V^{n+1}. Нас будет интересовать связь между второй фундаментальной формой гиперповерхности M^{n-1} в сфере $\sum_1^n$ и второй фундаментальной формой конуса CM^{n-1} в пространстве V^{n+1}. Пусть гиперповерхность M^{n-1} задана уравнениями $x^i = x^i(u^1, \ldots u^{n-1})$ $i = 1, \ldots n$. Тогда на конусе CM^{n-1} можно ввести координаты $(t, u^1, \ldots u^{n-1})$ так, что его уравнения в V^{n+1} будут иметь вид: $t = t$, $x^i = x^i(u)$. Вторая фундаментальная форма CM в пространстве V^{n+1} есть по определению

$$\mathrm{II}_{CM}(t, u) = -\langle D\xi, dx\rangle (t, u), \qquad (1.2)$$

где $dx = (dt, dx^1(u), \ldots dx^n(u))$ — вектор смещения на CM; $D\xi$ — абсолютный дифференциал вектора нормали $\xi(t, u)$ к CM, заданный по формуле $D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{kj}\, dx^j \xi^k$ $(i = 0, \ldots, n)$, где Γ^i_{kj} — символы Кристоффеля метрики (1.1). Скалярное произведение в (1.2) берется также в метрике (1.1). Пользуясь определением нормали, легко убедиться, что $\xi^0(t, u) = 0$, $\xi^i(t, u) = \xi^i(1, u)\frac{\Phi(1)}{\Phi(t)}$, $i = 1, \ldots, n$. Вычислим компоненты абсолютного дифференциала $D\xi$:

$$D\xi^0 = d\xi^0 + \Gamma^0_{kj}\, dx^j \xi^k = \Gamma_{0,kj}\, dx^j \xi^k = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi^2}{\partial t} g_{kj}(x(u))\, dx^j \xi^k = 0;$$

$$D\xi^i = d\left(\xi^i(1, u)\frac{\Phi(1)}{\Phi(t)}\right) + \sum_{1 \leqslant k, j \leqslant n} \Gamma^i_{kj}\xi^j\, dx^k +$$

$$+ \Gamma^i_{oj}\xi^j\, dt = -\xi^i(1, u)\frac{\Phi(1)}{\Phi^2(t)}\Phi'(t)\, dt + \frac{\Phi(1)}{\Phi(t)} \times$$

$$\times\, d\xi^i(1, u) + \sum_{1 \leqslant k, j \leqslant n} \Gamma^i_{kj}(t, u)\frac{\Phi(1)}{\Phi(t)}\xi^j(1, u)\, dx^k + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \times$$

$$\times\, (\Phi^2(t)\, g_{pj}(x))\, g^{pi}(x)\, \Phi^{-2}(t)\, \xi^j(1, u)\frac{\Phi(1)}{\Phi(t)}\, dt =$$

$$= \frac{\Phi(1)}{\Phi(t)}\left(d\xi^i(1, u) + \sum_{1 \leqslant k, j \leqslant n} \Gamma^i_{kj}(t, u)\, \xi^j(1, u)\, dx^k(u)\right).$$

Заметим теперь, что компоненты вектора нормали $\xi_i(u)$ к гиперповерхности M^{n-1} в сфере $\sum_1^n$ равны в точности $\xi^i(1, u)$. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что символы Кристоффеля метрики геодезической сферы $\sum_1^n$ равны соответствующим символам Кристоффеля $\Gamma^i_{kj}(t, u)$ $(1 \leqslant i, j, k \leqslant n)$ метрики пространства V^{n+1}. Следовательно,

$$\mathrm{II}_{CM}(t, u) = -\langle D\xi, dx\rangle (t, u) = \frac{\Phi(1)}{\Phi(t)}\,\mathrm{II}_M(u). \qquad (1.3)$$

Отсюда можно заключить, что главная нормальная кривизна конуса CM^{n-1} в точке (t, u) вдоль образующей t равна нулю, а остальные главные кривизны равны главным кривизнам в точке u гиперповерхности $CM^{n-1} \cap \Sigma_t^n$, рассматриваемой при вложении в геодезическую сферу Σ_t^n.

Далее, в римановом пространстве V^{n+1} с метрикой вида (1.1) минимальность гиперповерхности M^{n-1} в сфере Σ_1^n влечет минимальность поверхности $CM^{n-1} \cap \Sigma_t^n$ в сфере Σ_t^n при $0 < t \leqslant 1$. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Для того чтобы коническая поверхность $CM^{n-1} \setminus 0$ в римановом пространстве с метрикой вида (1.1) была минимальна, необходимо и достаточно, чтобы основание M^{n-1} конуса было минимальным в содержащей его геодезической сфере Σ_1^n.

Поскольку метрика пространства Лобачевского H^{n+1} кривизны $k < 0$ допускает запись $ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}{\sqrt{-k}}\right)^2 d\sigma^2$, где $d\sigma^2$ — метрика единичной n-мерной сферы евклидова пространства, то из предложения 1 следует минимальность конуса CM, натянутого на минимальную гиперповерхность геодезической сферы пространства Лобачевского.

Пусть метрика M имеет вид $ds_M^2 = \sum\limits_{i, k=1}^{n-1} g_{ik}(u^1, \ldots u^{n-1})\, du^i du^k$. Тогда метрика конуса CM $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, очевидно, выглядит так:

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^2 \sum_{i, k=1}^{n-1} g_{ik}(u^1, \ldots, u^{n-1})\, du^i\, du^k. \qquad (1.4)$$

Обозначим $\| A(t, u) \|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2$, где k_i главные нормальные кривизны CM в H^{n+1}. Из (1.3) следует, что

$$\| A(t, u) \|^2 = \| A(u) \|^2 \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}\right)^2, \qquad (1.5)$$

где $\| A(u) \|^2$ — сумма квадратов главных нормальных кривизн гиперповерхности M^{n-1} в Σ_1^n.

2. Доказательство теоремы 1

Усеченным конусом CM_ε называется поверхность, которая получается из конуса ограничением параметра t на отрезке $[\varepsilon, 1]$.

Нам нужно получить выражение для второй вариации площади или, что то же самое, индексной формы $I(V, V)$ усеченного конуса CM_ε в случае, когда варьирующее поле V имеет вид

$$V(t, u) = F(t, u)\, \xi(t, u),$$

где $\xi(t, u)$ — нормаль в пространстве Лобачевского H^{n+1} к конусу CM_ε в точке (t, u). Напомним, что индексной формой называется следующая билинейная форма на пространстве сечений нормального расслоения $N(CM_\varepsilon)$, обращающихся в нуль на границе CM_ε [4, § 3]: $I(V, W) = \int\limits_{CM_\varepsilon} \langle -\nabla^2_{CM_\varepsilon} V(t, u) + \overline{R}(V(t, u)) - \| A(t, u)\|^2 \times V(t, u), W(t, u)\rangle$. Здесь оператор $\overline{R}$ определен так: $\overline{R}(V)_m = \sum\limits_{i=1}^{n} (\overline{R}_{e_i, V} e_i)^N$, где $\{e_i\}_1^n$ — ортонормированный базис касательного пространства $T_m(CM_\varepsilon)$; $\overline{R}$ — оператор кривизны [4,3.6.1] пространства H^{n+1}, а операция $(\ldots)^N$ означает проектирование на нормальное пространство $N_m(CM_\varepsilon)$.

Нам потребуется формула для лапласиана от функции, заданной на CM_ε. Пусть $F(t, u)$ — функция на CM_ε и для фиксированного t, $F_t(u)$ есть функция на M, определенная по формуле $F_t(u) = F(t, u)$. Через ∇^2_M, как обычно, обозначим оператор Лапласа на M.

Лемма 1. $\nabla^2_{CM} F(t, u) = \left(\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}\right)^2 \nabla^2_M F_t(u) + (n-1)\sqrt{-k} \times \operatorname{cth}\sqrt{-k}t \dfrac{\partial F}{\partial t}(t, u) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, u)$.

Доказательство. Поскольку метрика на CM задана формулой (1.4), то, обозначая через $g_{ik}(t, u)$, $\Gamma^j_{ik}(t, u)$ (соответственно $g_{ik}(u)$, $\Gamma^j_{ik}(u)$) коэффициенты и символы Кристоффеля метрики CM (соответственно M), имеем $\Gamma^j_{00}(t, u) = 0$, $\Gamma^0_{ik}(t, u) = -\dfrac{\sqrt{-k}}{(\operatorname{sh}\sqrt{-k})^2} \operatorname{sh}\sqrt{-k}t \operatorname{ch}\sqrt{-k}t\, g_{ik}(u)$. $\Gamma^j_{ik}(t, u) = \Gamma^j_{ik}(u)$, $1 \leqslant i, k, j \leqslant n-1$. Теперь, выделяя в лапласиане от функции на CM дифференцирования по t, получим нужную формулу:

$$\nabla^2_{CM} F(t, u) = \sum_{i, k=0}^{n-1} g^{ik}(t, u)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^k} - \sum_{p=0}^{n-1} \Gamma^p_{ik}(t, u)\frac{\partial F}{\partial u^p}\right) =$$

$$= \sum_{i, k=1}^{n-1} \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}\right)^2 g^{ik}(u)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^k} - \sum_{p=1}^{n-1} \Gamma^p_{ik}(u)\frac{\partial F}{\partial u^p}\right) -$$

$$- \sum_{i, k=1}^{n-1} \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\operatorname{ch}\sqrt{-k}t}\right)^2 g^{ik}(u)\,\Gamma^0_{ik}(t, u)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}\right)^2 \nabla^2_M F_t(u) + (n-1)\operatorname{cth}\sqrt{-k}t\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Лемма 2. *Пусть $F(t, u)$ — функция класса C^∞ на CM_ε, для которой $F(\varepsilon, u) = F(1, u) = 0$, т. е. F обращается в нуль на границе CM_ε. Положим $V(t, u) = F(t, u)\,\xi(t, u)$. Тогда $V(t, u)$ есть сечение нормального расслоения $N(CM_\varepsilon)$, обращающееся в нуль на границе CM_ε, причем* $I(V, V) = \int\limits_{[\varepsilon, 1]\times M} \langle -\nabla_M^2 F_t(u) - \|A(u)\|^2 F -$

$$- \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (n-1)\operatorname{cth}\sqrt{-k}t\,\frac{\partial F}{\partial t} + nkF\right),\ \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^{n-3} \rangle \times$$

$\times\, dt\, dV_M$.

Доказательство. По определению оператора $\overline{R}$ имеем $\overline{R}(V) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\overline{R}_{e_i}, ve_i)^N = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \overline{R}_{e_i}, ve_i, \xi\rangle\,\xi = -\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{k}(e_i, \xi) = -nkV$, где $\overline{k}(e_i, \xi)$ — секционная кривизна пространства H^{n+1} в двумерной плоскости, натянутой на векторы e_i, ξ; она постоянна и равна k. Форма объема на CM_ε равна форме объема на $[\varepsilon, 1]\times M$, умноженной на $\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^{n-1}$. Используя лемму 2 (1.5.) и ковариантное постоянство нормали $\xi(t, u)$ в нормальном расслоении $N(CN_\varepsilon)$ (следствие формулы Вейнгартена), получаем

$$I(V, V) = \int\limits_{[\varepsilon, 1]\times M} \left\langle -\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}\right)^2 \nabla_M^2 F_t(u) - (n-1)\sqrt{-k}\operatorname{cth}\sqrt{-k}t \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - nkF - \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}\right)^2 \|A(u)\|^2 F,\ F \right\rangle \times$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^{n-1} dt\, dV_M.$$

Отсюда легко вывести требуемую формулу.

Обозначим через $\overset{\infty}{C}[\varepsilon, 1]$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[\varepsilon, 1]$. Введем два дифференциальных оператора:

$$L_1: \overset{\infty}{C}(M) \to \overset{\infty}{C}(M)\quad L_1 f = -\nabla_M^2 f - \|A(u)\|^2 f,\ L_2: \overset{\infty}{C}[\varepsilon, 1] \to \overset{\infty}{C}[\varepsilon, 1],$$

$$L_2 g = -\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}t}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^2 (g'' + (n-1)\sqrt{-k}\operatorname{cth}\sqrt{-k}\operatorname{t}g' + nkg).$$

Следуя Саймонсу, выберем в качестве функции $F(t, u)$, фигурирующей в лемме 2, функцию $F(t, u) = f_1(u)\, g_1(t)$, где f_1 — первая собственная функция оператора $L_1: L_1 f_1(u) = \lambda_1 f_1(u)$; g_1 — первая собственная функция оператора $L_2: L_2 g_1(t) = \delta_1 g_1(t)$. В этом случае [4, лемма 6.1.6] индексная форма равняется $I(V, V) = \delta_1 + \lambda_1$. Поэтому условие неустойчивости ε-усеченного конуса $I(V, V) < 0$ равносильно неравенству $\delta_1 + \lambda_1 < 0$. Для оценки λ_1

воспользуемся леммой 6.1.7 [4]. В ней доказано, что если $\bar{M}$ минимальная замкнутая гиперповерхность в единичной n-мерной сфере евклидова пространства, то либо $\bar{\lambda}_1 = 0$, и тогда $\bar{M}$—вполне геодезическое подмногообразие в сфере, либо $\bar{\lambda}_1 \leqslant -(n-1)$. Поскольку в нашем случае M не вполне геодезическое подмногообразие геодезической сферы $\sum_1^n$, а $\sum_1^n$ изометрична n-мерной евклидовой сфере радиуса $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}}$, то, учитывая изменение собственных чисел лапласиана риманова многообразия при сжатии, получим

$$\lambda_1 \leqslant -(n-1)\left(\frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^2.$$

Для оценки сверху δ_1 используем известный вариационный принцип $\delta_1 \leqslant \langle g, g\rangle^{-1}\langle L_2 g, g\rangle$, $g \in C^\infty[\varepsilon, 1]$, где скалярное произведение $\langle , \rangle$ в пространстве $C^\infty[\varepsilon, 1]$ определено так: $\langle g, f\rangle = \int\limits_\varepsilon^1 (g(t) f(t) (\operatorname{sh}\sqrt{-k}t)^{n-3}\, dt$. Легко проверить, что оператор L_2 самосопряженный и положительно определенный относительно этого произведения в $C^\infty[\varepsilon, 1]$. В качестве функции сравнения в вариационном принципе возьмем $g(t) = \sin\left(\pi\frac{p(t)}{p(1)}\right)(\operatorname{sh}\sqrt{-k}t)^{-\frac{n-2}{2}}$, где $p(t) = \ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}t - \ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}\varepsilon$. После некоторых вычислений получим $L_2 g(t) = \frac{-k}{\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}} g(t)\left[\frac{1}{4}(n-2)^2 + \frac{1}{4}n(n+2)\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}t + \right.$

$$\left. + \left(\frac{\pi}{p(1)}\right)^2\right].$$

Воспользовавшись тем, что $dp(t) = \frac{\sqrt{-k}\, dt}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\, t}$, найдем $\langle g, g\rangle =$

$$= \frac{p(1)}{2\sqrt{-k}},\ \langle L_2 g, g\rangle = \left[\frac{1}{4}(n-2)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\pi}{p(1)}\right)^2\right]\frac{(-k)}{\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}}\langle g, g\rangle + \int\limits_\varepsilon^1 \frac{(-k)}{\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}} \times$$

$$\times \frac{1}{4}n(n+2)\sin^2\left(\pi\frac{p(t)}{p(1)}\right)\operatorname{sh}\sqrt{-k}t\, dt.$$

Поскольку последний интеграл ограничен при $\varepsilon \to 0$, а $p(1) \to +\infty$, то $\langle L_2 g, g\rangle = \frac{(-k)}{\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}}\frac{(n-2)^2}{4}\langle g, g\rangle + O(1)$. Отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\,\delta_1 \leqslant \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\,\langle g, g\rangle^{-1}\langle L_2 g, g\rangle \leqslant \frac{(-k)}{\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}}\frac{(n-2)^2}{4}$. Поэтому условие неустойчивости $\lambda_1 + \delta_1 < 0$ будет выполнено при достаточно малых ε, если n удовлетворяет неравенству $\left(\frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^2\times$ $\times\left(-(n-1)+\frac{1}{4}(n-2)^2\right)<0$. Очевидно, что это неравенство верно для целых $n\leqslant 6$, что и доказывает теорему 1.

3. Доказательство теоремы 2

Нам нужно построить пример минимального конуса CM_ε в H^8, любая вариация которого, сохраняющая границу CM_ε, приводила бы к первоначальному возрастанию площади. Это равносильно тому, что для любого сечения V из нормального расслоения $N(CM_\varepsilon)$, обращающегося в нуль на границе CM_ε, выполнено неравенство $I(V, V)>0$. Из доказательства леммы 6.1.6 [4] следует, что для выполнения этого неравенства достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\delta_1+\lambda_1>0$. В приведенном ниже примере первое собственное значение λ_1 оператора L_1, действующего в $C^\infty(M)$, известно точно. Поэтому нужно оценить снизу первое собственное значение δ_1 оператора L_2, определенного в пункте 2.

Лемма 3. *Для первого собственного значения δ_1 оператора L_2 справедлива оценка*

$$(-k)^{-1}\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\cdot\delta_1>\frac{1}{4}(n-2)^2+\frac{1}{4}n(n+2)\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\varepsilon+ \\ +\left(\frac{\pi}{p(1)}\right)^2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Задача на собственные значения δ оператора L_2 имеет вид

$$\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}tg''+(n-1)\sqrt{-k}\operatorname{sh}\sqrt{-k}t\operatorname{ch}\sqrt{-k}tg'+ \\ +nk\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}tg=-\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\cdot\delta g.\ g(\varepsilon)=g(1)=0. \tag{3.2}$$

Стандартным приемом сведем ее к задаче Штурма — Лиувилля. Введем новую переменную $s=\ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}t$. Задача (3.2) примет вид

$$g''_{ss}+(n-2)\operatorname{ch}\sqrt{-k}t(s)\,g_s'-n\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}t(s)\,g= \\ =k^{-1}\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\cdot\delta g,\ g\left(\ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}\varepsilon\right)=g\left(\ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}\right)=0.$$

Если ввести новую неизвестную функцию $\tilde{g}$ по правилу $g=\varphi\tilde{g}$, где φ удовлетворяет уравнению $\frac{\varphi'}{\varphi}=-\frac{n-2}{2}\operatorname{ch}\sqrt{-k}t(s)$, то после некоторых вычислений придем к задаче Штурма—Лиувилля, собственные значения которой совпадают с собственными значениями задачи (3.2):

$$-\tilde{g}''_{ss} + \frac{1}{4}\left[(n-2)^2 + n(n+2)\frac{4e^{2s}}{(1-e^{2s})^2}\right]\tilde{g} = (-k)^{-1}\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\,\delta\tilde{g}, \quad (3.3)$$

$$\tilde{g}\left(\ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}\varepsilon\right) = \tilde{g}\left(\ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}\right) = 0.$$

Легко проверить, что коэффициент при $\tilde{g}$ в левой части уравнения задачи (3.3) является монотонной функцией и имеет минимум в точке $s = \ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}\varepsilon$, равный $\frac{1}{4}(n-2)^2 + \frac{1}{4}n(n+2)\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\varepsilon$. Известно, что для j-го собственного значения δ_j задачи (3.3) справедливо неравенство [3, с. 112]

$$(-k)^{-1}\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\,\delta_j > \frac{1}{4}(n-2)^2 + \frac{1}{4}n(n+2)\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\varepsilon + $$
$$+ j^2\pi^2\left(\ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2} - \ln\operatorname{th}\frac{\sqrt{-k}}{2}\varepsilon\right)^{-2}.$$

Пользуясь определением функции $p(t)$, получаем требуемую оценку δ_j.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим в единичной евклидовой сфере S^7 минимальную гиперповерхность $\overline{M} = S^3 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. При растяжении с коэффициентом подобия $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}}$ этой гиперповерхности будет соответствовать гиперповерхность M в геодезической сфере $\sum_1^7$ пространства Лобачевского H^8. Известно [4, замечание 5.3.1.], что для данной гиперповерхности M величина $\|A\|^2$ постоянна и равна $6\left(\frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^2$. Следовательно, $L_1 f = -\nabla^2_M f - 6\left(\frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^2 f$, $\lambda_1 = -6\left(\frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^2$. Для любого ε из оценки (3.1) следует при $n = 7$ $\left(\frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}}\right)^{-2}(\delta_1 + \lambda_1) > \frac{25}{4} + \frac{63}{4}\operatorname{sh}^2 \times \sqrt{-k}\varepsilon + \left(\frac{\pi}{p(1)}\right)^2 - 6 > \frac{1}{4}$. По лемме 6.1.6 [4] для любой вариации конуса CM_ε, сохраняющей границу неподвижной, выполнено $I(V, V) > 0$. Следовательно, все усеченные конусы CM_ε локально устойчивы. Отсюда выводится локальная устойчивость CM (ч. т. д.).

Благодарю Ю. А. Аминова и А. А. Борисенко за критику при обсуждении статьи.

Список литературы

1. Almgren F. J. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and extension of Bernstein's theorem. — «Ann. Math.», 1966, vol. 84, p. 277—292.

[illegible] Бомбьери Е., де Джорджи Е., Джусти Е. Минимальные конусы и проблема Бернштейна. — «Математика», 15 : 2. М., 1971, с. 84—103.
[illegible] Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М., «Высшая школа», 1977. 425 с.
[illegible] Саймонс Дж. Минимальные поверхности в римановых многообразиях. — «Математика», № 16 : 6, М., 1972, с. 60—104.

Поступила 13 марта 1977 г.

УДК 513

А. И. Медяник

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ К. МИРАНДЫ

К. Миранда в [1, 2] доказал теорему о существовании замкнутой выпуклой поверхности S, главные радиусы кривизны которой R_1 и R_2 как функции единичного вектора нормали $\boldsymbol{n}$ удовлетворяют уравнению

$$R_1R_2 + \phi(R_1 + R_2,\ R_1R_2,\ \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{cn} = \varphi(\boldsymbol{n}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{c}$ — неизвестный постоянный вектор.

Уравнение (1) при $\phi \equiv 0$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ — это уравнение Минковского, необходимым условием существования решения которого является, как известно, условие замкнутости:

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{n}\varphi(\boldsymbol{n})\, d\omega = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

где Ω — единичная сфера; $d\omega$ — элемент ее площади. Естественно поэтому, что и в общем случае при $\boldsymbol{c} = 0$ функция φ также должна удовлетворять некоторому условию, заменяющему (2). Но получение последнего сопряжено с большими трудностями. Чтобы обойти их, К. Миранда ввел в уравнение (1) постоянный вектор $\boldsymbol{c}$, который зависит от искомой поверхности и, значит, также является искомым. Таким образом, решение (1) представляет собой пару $(S, \boldsymbol{c})$. При такой постановке проблемы существования для доказательства в дальнейшем соответствующей теоремы единственности он предположил, что функция φ удовлетворяет и условию (2).

В настоящей работе рассматривается вопрос о широте класса функций φ, удовлетворяющих всем условиям приводимой ниже теоремы существования для уравнения (1).

Пусть $\Sigma_{n,\lambda}$ — пространство всех овалоидов класса $C^{n,\lambda}$, проходящих через начало координат в R^3 и имеющих ось z своей внутренней нормалью; $\Sigma'_{n,\lambda} = \Sigma_{n,\lambda} \times R^3$; $\Omega^{n,\lambda}$ — пространство функций класса $C^{n,\lambda}$, заданных на единичной сфере Ω; $\phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$ — функция, определенная в области $D = \{\eta_i : 0 < 4\eta_2 < \eta_1^2\}$ в R^5; $\phi_i = \partial\phi/\partial\eta_i$, $\phi_{ik} = \partial^2\phi/\partial\eta_i\partial\eta_k$.

4 7-524

Теорема существования К. Миранда. *Пусть* $\phi \in C^{m+1, \lambda}$ с $m \geqslant 2$ — *функция, положительно однородная первой степени по переменным* η_3, η_4, η_5. *Кроме того, пусть*

$$\phi_1 \geqslant 0, \ \phi_2 \geqslant a - 1 \quad (a = \text{const} > 0), \tag{3}$$

$$\sum_{i, k=2} \phi_{ik}\lambda_i\lambda_k \leqslant 0, \tag{4}$$

$$A_0\eta_2^{\mu} \leqslant \phi \leqslant A_1\eta_2^{\mu}, \tag{5}$$

где A_0, A_1, μ — *постоянные, причем* $0 \leqslant \mu < 1$.

Тогда уравнение (1) допускает решение $(S, \ \boldsymbol{c}) \in \Sigma_{m+2, \lambda}$ *для любой функции* $\varphi \in \Omega^{m, \lambda}$ с $m \geqslant 2$, *удовлетворяющей условию* (2) *и неравенству*

$$\inf \varphi > B_1 \max \left[\left(\frac{\sup \varphi}{q} \right)^{\mu}, \ \left(\frac{B_0}{1 - q} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} \right], \tag{6}$$

где $B_0 = \frac{1}{4} \max [3A_1 - 7A_0, \ \ -7A_0, \ \ 3A_1]$, $B_1 = \frac{3}{4} \max [A_1 - A_0, -A_0, \ A_1]$ и $0 < q < 1$.

Результат остается в силе и при $\mu = 1$, *если*

$$B_0 < 1, \ \ \frac{B_1 (1 + A_1 + B_1')}{1 - B_0} < 1 + A_0 - B_1', \tag{7}$$

где $B_1' = \frac{3}{4}(A_1 - A_0)$ *и вместо* (6) *выполняется условие*

$$\inf \varphi > \frac{B_1}{1 - B_0} \sup \varphi. \tag{8}$$

Поскольку частным случаем этой теоремы при $\Phi \equiv 0$ является известная теорема существования Г. Минковского, в дальнейшем будем предполагать, что $\Phi \not\equiv 0$. Это исключение дает возможность преобразовать условия (6)—(8) к более удобному для приложений виду. К тому же в случае тождественного исчезновения Φ последние тривиально выполняются для любой положительной функции φ.

Сначала докажем ряд следствий из условий (6)—(8) на функцию φ, наибольшее и наименьшее значение которой на сфере обозначим M и m соответственно.

Следствие 1. *Функция* φ *удовлетворяет условию* (6) *тогда и только тогда, когда для нее выполняется неравенство*

$$m > \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{\bar{q}} - 1 \right) M, \tag{9}$$

где $\bar{q}$ — *решение уравнения*

$$\frac{B_0}{1 - \bar{q}} = \left(\frac{M}{\bar{q}} \right)^{1-\mu}. \tag{10}$$

Доказательство. Так как $\Phi \not\equiv 0$, то $B_0 > 0$, $B_1 > 0$. Тогда из (6) следует, что $M > 0$. Поскольку, кроме того, функция

$q/(1-q)$ в интервале (0, 1) монотонна и принимает все значения из $(0, \infty)$, то уравнение (10) имеет решение и это решение единственное. Поэтому, если справедливо неравенство (9), выполняется и условие (6) с $q = \bar{q}$. С другой стороны, (9) является следствием неравенства (6). Действительно, применяя к (6) соотношение (10), получаем $m > B_1 \max\left[\left(\frac{M}{q}\right)^{\mu}, \left(\frac{B_0}{1-q}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right] \geqslant B_1\left(\frac{M}{\bar{q}}\right)^{\mu}$. Применяя еще раз (10), окончательно находим $m > B_1\left(\frac{M}{\bar{q}}\right)^{\mu} = B_1 \frac{M}{\bar{q}}\left(\frac{\bar{q}}{M}\right)^{1-\mu} = \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{\bar{q}} - 1\right) M$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Функция φ удовлетворяет неравенству*

$$\varphi > B_1 (B_0 + B_1)^{\frac{\mu}{1-\mu}}.$$

Доказательство. Обозначим $\bar{Q}$ коэффициент при M в (9). Тогда, определяя $\bar{q}$ через $\bar{Q}$, запишем

$$\bar{q} = \frac{B_1}{B_0 \bar{Q} + B_1}. \tag{11}$$

Подставляя в (10) вместо $\bar{q}$ найденное значение, имеем

$$M = \frac{B_1}{\bar{Q}}\left(B_0 + \frac{B_1}{\bar{Q}}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}}. \tag{12}$$

Из соотношений (9) и (12) получаем $m > B_1\left(B_0 + \frac{B_1}{\bar{Q}}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} > B_1 (B_0 + B_1)^{\frac{\mu}{1-\mu}}$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. *Если постоянные B_1 и B_0 удовлетворяют* (7), *то условие* (8) *является предельным для неравенства* (9) *при* μ, *стремящемся к единице.*

Доказательство. Обозначим B правую часть неравенства из следствия 2 и исследуем поведение этой величины при μ, стремящемся к единице. Из (5) и первого из неравенств в (7) вытекает, что $1 + A_1 \geqslant 1 + A_0 > 0$ и $B_1' > 0$. Поэтому из второго неравенства в (7) получаем $\frac{B_1}{1-B_0} < \frac{1 + A_0 - B_1'}{1 + A_1 + B_1'} < 1$, т. е. следствием условия (7) является неравенство $B_0 + B_1 < 1$.

Поэтому при указанном предельном переходе B стремится к нулю и, значит, при $\mu = 1$ ограничение на φ, даваемое следствием 2, становится тривиальным, что вполне согласуется с неравенством (8).

Далее, в силу неравенства $\bar{Q} < 1$ и соотношения (11) величина $M/\bar{q}$ ограничена. Поэтому из (10) получаем, что предельным значением для $\bar{q}$ является положительное число $1 - B_0$. Подставля в (9) вместо $\bar{q}$ это значение, приходим к условию (8). Утвержде ние доказано.

Полученные следствия позволяют доказать следующую теорему

Теорема 1. *Если функция* φ *из класса* $\Omega^{m,\lambda}$ $(m \geqslant 2)$ *удовлет воряет условию замкнутости (2) и условию (9), то для не выполняются все условия теоремы существования К. Миранд с* $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, *причем случай* $\mu = 1$ *надо рассматривать как пре дельный при* μ, *стремящемся к единице, и*

$$1 \leqslant \frac{1 + A_1}{1 + A_0} < \frac{1}{6}\left(\sqrt{9 + 120t} - 3\right), \tag{13}$$

где $t = \min[1,\ 1 + A_1,\ (1 + A_0)^{-1}]$.

Доказательство. Если $\mu < 1$, утверждение вытекает из следствия 1. Вторая часть утверждения теоремы вытекает из след ствия 3. Надо только доказать, что при этом выполнены условия (7).

Прежде всего покажем, что $B_0 < 1$, если имеет место (13). Легко проверить, что параметр t удовлетворяет двойному неравен ству $\frac{3}{5} < t \leqslant 1$. Поскольку $A_1 \geqslant A_0$, то из левого неравенства в (13) еледует, что оба числа $1 + A_1$ и $1 + A_0$ — положительны. Тогда из правого неравенства в (13), учитывая ограничения на t, получаем

$$1 + A_1 < 1{,}4\,(1 + A_0). \tag{14}$$

Рассматривая последнее неравенство в каждом из трех случаев $(A_0 < 0 < A_1,\ A_1 \leqslant 0,\ A_0 \geqslant 0)$ и принимая во внимание относя щиеся к ним неравенства $A_0 > -1$, $A_1 > -\frac{2}{5}$, $A_0 < \frac{2}{3}$, вытека ющие из ограничений на t, находим $4B_0 = 3A_1 - 7_0 < 1{,}2 - 2{,}8A_0 < 4$ при $A_0 < 0 < A_1$, $4B_0 = -7A_0 < 2 - 5A_1 < 4$ при $A_1 \leqslant 0$, $4B_0 = 3A_1 < 1{,}2 + 4{,}2A_0 < 4$ при $A_0 \geqslant 0$. Таким образом, в каждом из трех случаев справедливо неравенство

$$B_0 < 1. \tag{15}$$

Обозначим A отношение $\frac{1 + A_1}{1 + A_0}$. На основании (13) получаем $6A + 3 < \sqrt{9 + 120t}$, $A \geqslant 1$. Поэтому A удовлетворяет следующему квадратному неравенству: $3A^2 + 3A - 10t < 0$, которое, учитывая (14) и оценку снизу для t и A, можно привести к виду $\frac{7 - 3A}{7A - 3} > \frac{3A - 3t}{7t - 3A}$. Легко проверить, что левая часть последнего неравенства равна $B_1/(1 - B_0)$, а правая — $(1 + A_0 - B_1')/(1 + A_1 + B_1')$. Поэтому

$$\frac{B_1}{1 - B_0} > \frac{1 + A_0 - B_1'}{1 + A_1 + B_1'}. \tag{16}$$

На основании (15) и (16) заключаем, что условия (7) вытекают из двойного неравенства (13). Заметим, что с помощью тех же рассуждений можно было бы доказать эквивалентность (7) и (13).

Теорема доказана.

Видно, что условия на функцию φ в теореме Миранды довольно стеснительны. Поэтому представляет интерес вопрос о широте класса функций, удовлетворяющим этим условиям. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. *Пусть $\varphi(n)$ — функция класса $\Omega^{m,\lambda}$ $(m \geqslant 2)$, удовлетворяющая условию замкнутости* (2). *Тогда для достаточно больших значений постоянной C функция $\varphi + C$ удовлетворяет условиям теоремы существования К. Миранды. Если $\varphi > 0$ и $\mu < 1$, то условиям теоремы Миранды удовлетворяет функция $C\varphi$, где C — достаточно большая постоянная.*

Доказательство. Условие замкнутости для функций $\varphi + C$ и $C\varphi$ тривиально выполняется. Поэтому достаточно подобрать C так, чтобы выполнялось условие (9).

Разделив обе части равенства (12) на $B = B_1 (B_0 + B_1)^{\frac{\mu}{1-\mu}}$, получаем

$$\left(\frac{M}{B}\right)^{1-\mu} = \frac{1}{\overline{Q}} \left(\frac{B_0 \overline{Q} + B_1}{B_0 + B_1}\right)^{\mu}. \tag{17}$$

Поскольку по определению $\overline{Q} < 1$, то из (17) находим

$$\overline{Q} < \left(\frac{B}{M}\right)^{1-\mu}. \tag{18}$$

Как следует из неравенств (9) и (18), для того чтобы функция φ удовлетворяла условиям теоремы Миранда, достаточно выполнения неравенства

$$\frac{m}{M} \geqslant \left(\frac{B}{M}\right)^{1-\mu}. \tag{19}$$

Следовательно, для функции вида $\varphi + C$ должно выполняться условие $\frac{m + C}{(M + C)^{\mu}} \geqslant B^{1-\mu}$, которое, очевидно, справедливо при достаточно больших C и $\mu < 1$. В случае $\mu = 1$ постоянная $B^{1-\mu}$ равна $B_0 + B_1$, что меньше единицы, как было установлено в доказательстве следствия 3. Поэтому при достаточно больших C последнее неравенство справедливо для всех $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

В случае функции вида $C\varphi$ условиям теоремы на основании (19) удовлетворяют такие C, для которых $C^{1-\mu} \geqslant B^{1-\mu} M^{\mu}/m$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Miranda C. Su un problema di geometria differentiale in grande per gli ovaloidi, Ann. Mat. Pura ed Appl. 1970, vol. 87, p. 237—269.
2. Miranda C. Aggiunde ed errata corrige alla memoria „Su un problema di geometria differentiale in grande per gli ovaloidi".—«Ann. Mat. Pura ed Appl». 1971, vol. 88 p. 349—355.

Поступила 19 апреля 1977 г.

УДК 513

А. И. Медяник

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

К. Миранда указал новый подход к доказательству теорем существования для замкнутых выпуклых поверхностей [1]. Формулировка его теоремы существования приведена также в [2]. Особенность этого подхода заключается в том, что в уравнение, которому удовлетворяют главные радиусы кривизны искомой поверхности, вводится неизвестный постоянный вектор, связанный с этой поверхностью.

Наряду с теоремами существования в работе [1] получены также теоремы единственности. Причем последние доказаны с помощью первых, а поэтому при тех же, что и теоремы существования, условиях. В настоящей статье теоремы единственности для регулярных замкнутых выпуклых поверхностей устанавливаются независимо от теорем существования.

В дальнейшем рассматривается вопрос о единственности поверхности S, главные радиусы кривизны которой R_1 и R_2 $(R_1 \geqslant R_2 > 0)$ в точке с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ удовлетворяют уравнению

$$f(R_1R_2,\ R_1+R_2,\ \boldsymbol{n})+\boldsymbol{cn}=\varphi(\boldsymbol{n}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, соответствующий поверхности S, а функция f является положительно однородной первой степени относительно компонент x_1, x_2, x_3 единичного вектора $\boldsymbol{n}$.

Наличие в (1) вектора $\boldsymbol{c}$, зависящего от поверхности, не позволяет непосредственно применять теоремы А. Д. Александрова о равенстве двух поверхностей, доставляющих функции f в соответствующих точках одни и те же значения. Чтобы это стало возможным, необходимо из уравнения (1) получить другое уравнение, не содержащее вектора $\boldsymbol{c}$. Получение такого уравнения и является предметом настоящего исследования.

Следует заметить, что не всегда вектор $\boldsymbol{c}$ входит в (1) по существу. Например, если функция f — четная по $\boldsymbol{n}$, то разность $\varphi - \boldsymbol{cn}$ также должна быть таковой. А поскольку скалярное произведение $\boldsymbol{cn}$ является нечетной функцией $\boldsymbol{n}$, то в указанном случае вектор $\boldsymbol{c}$ фактически в уравнение не входит.

Пусть $H(\boldsymbol{n})$ — опорная функция поверхности S. Как известно, произведение и сумма главных радиусов кривизны поверхности S через функцию $H(x_1, x_2, x_3)$ выражаются следующим образом:

$$R_1R_2=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}(H_{ii}H_{jj}-H_{ij}^2),\quad R_1+R_2=\sum_{i=1}^{3}H_{ii}, \tag{2}$$

где $H_{ks}=\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_k\,\partial x_s}$.

Обозначим $\psi(x_1, x_2, x_3)$ функцию $f(R_1R_2, R_1+R_2, \boldsymbol{n})$ после подстановки в нее выражений для R_1R_2 и R_1+R_2 из (2). Кроме того, введем функцию

$$F(R_1, R_2, \boldsymbol{n}) = \sum_{i,\, j=1}^{2} \left(R_i R_j \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} - 2R_i \frac{\partial f}{\partial R_i} \right) + \lambda f, \tag{3}$$

где λ — некоторая постоянная.

Теорема 1. *Пусть S_1 и S_2 — поверхности класса C^4, удовлетворяющие уравнению (1) при постоянных векторах $\boldsymbol{c}_1$ и $\boldsymbol{c}_2$ соответственно. Пусть ψ_i — аналогичная ψ функция для поверхности S_i $(i=1, 2)$. Если $f \in C^5$, $\frac{\partial F}{\partial R_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial R_2} > 0$ и*

$$\Delta(\psi_1 - \psi_2) + \lambda(\psi_1 - \psi_2) = 0, \tag{4}$$

где Δ — оператор Лапласа; λ — постоянная, то поверхности S_1 и S_2 равны и параллельно расположены.

Доказательство. Введем на единичной сфере координаты u, v, связанные с x_1, x_2, x_3 следующими формулами: $x_1 = \frac{2u}{1+u^2+v^2}$, $x_2 = \frac{2v}{1+u^2+v^2}$, $x_3 = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$. В этих координатах оператор Лапласа — Бельтрами на сфере $\widetilde{\Delta}$ имеет вид $\widetilde{\Delta} = \frac{(1+u^2+v^2)^2}{4} \times \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$. Применяя оператор $\widetilde{\Delta}$ к левой части уравнения (1), получаем

$$\widetilde{\Delta}\varphi = \Delta\psi - 2\boldsymbol{c}\boldsymbol{n} - 2\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \sum_{i,\, j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{5}$$

Учитывая, что функция f — положительно однородная первой степени относительно x_i, а R_1R_2 и R_1+R_2 являются однородными функциями x_i степени -2 и -1 соответственно, находим

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = f - \sum_{i=1}^{2} R_i \frac{\partial f}{\partial R_i}, \quad \sum_{i,\, j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,\, j=1}^{2} R_i R_j \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j}. \tag{6}$$

Подставляя в уравнение (5) выражения для обеих сумм из формулы (6), имеем

$$\widetilde{\Delta}\varphi = \Delta\psi - 2(f + \boldsymbol{c}\boldsymbol{n}) + \sum_{i,\, j=1}^{2} \left(2R_i \frac{\partial f}{\partial R_i} - R_i R_j \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} \right). \tag{7}$$

На основании (4) и (7) заключаем, что функция $F(R_1, R_2, \boldsymbol{n})$, определяемая равенством (3), в точках поверхностей S_1 и S_2 с параллельными внешними нормалями принимает одни и те же значения. Кроме того, $F \in C^3$. Следовательно, по теореме единственности А. Д. Александрова, распространенной на неаналитический случай А. В. Погореловым [3, с. 525—533], поверхности S_1 и S_2 совмещаются параллельным переносом. Теорема доказана.

Теорема 2. *Теорема 1 остается справедливой, если функция f принадлежит классу C^3 и является однородной функцией степени k относительно переменных R_1 и R_2 при $\lambda \neq k(3-k)$.*

Утверждение этой теоремы вытекает из того, что при указанных условиях функция $F(R_1, R_2, \boldsymbol{n})$ приводится к виду $F(R_1, R_2, \boldsymbol{n}) = k(k-1)f - 2kf + \lambda f = [\lambda + k(k-3)]f$, т. е. с точностью до постоянной совпадает с f.

В заключение отметим, что функцию f можно восстановить по функции F, решив дифференциальное уравнение (3), а именно:

$$f = \frac{v^{1+\alpha/2}}{1-\alpha}\left[v^{1-\alpha}\int \frac{F(uv, v, \boldsymbol{n})}{v^{3-\alpha/2}}\,dv - \int \frac{F(uv, v, \boldsymbol{n})}{v^{2+\alpha/2}}\,dv\right] + $$
$$+ f_1(u)\,v^{1+\alpha/2} + f_2(u)\,v^{2-\alpha/2}, \quad \alpha \neq 1;$$
$$f = v^{3/2}\left[(\ln v)\int \frac{F(uv, v, \boldsymbol{n})}{v^{5/2}}\,dv - \int \frac{F(uv, v, \boldsymbol{n})\ln v}{v^{5/2}}\,dv\right] +$$
$$+ f_1(u)\,v^{3/2} + f_2(u)\,v^{3/2}\ln v, \quad \alpha = 1,$$

где $u = \dfrac{R_1}{R_2}$ — параметр; $v = R_2$; $\alpha = 1 - \sqrt{9-4\lambda}$, $f_1(u)$ и $f_2(u)$ — произвольные функции.

Список литературы

1. Miranda C. Su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi. Ann. Mat. Pura ed Appl., vol. 87 (1970). p. 237—269.
2. Медяник А. И. Об одной теореме К. Миранды.— См. статью настоящего сборника.
3. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 760 с.

Поступила 16 мая 1977 г.

УДК 513

А. Д. Милка

ОЦЕНКИ РАЗМЕРОВ КРИВЫХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ

1. В работе [1] рассмотрены замкнутые гладкие кусочно регулярные плоские кривые с кривизной, по модулю не превосходящей $K > 0$ и доказана следующая теорема.

Каждая кривая данного класса с длиной L заключается в круг, радиус R которого имеет оценку

$$R \leqslant L/4 - (\pi - 2)/2K. \tag{1}$$

В [2] этот результат перенесен на плоские кривые с удельной кривизной, не большей K. В настоящей заметке указанная теорема обобщается по размерности. Устанавливается, что замкнутая кривая в E^n длины L с удельной кривизной $\leqslant K$ помещается в шар, для радиуса R которого справедливо неравенство (1). Кроме того, для случая плоских кривых доказывается двойственное предложение.

Замкнутая выпуклая кривая длины L с удельной кривизной $\geqslant K > 0$ охватывает окружность, радиус R которой имеет оценку

$$R \geqslant \frac{1}{K}\left(1 - \cos\frac{LK}{4}\right). \tag{2}$$

2. Выражение «удельная кривизна кривой $\leqslant K$ ($\geqslant K$)» означает следующее: для каждой дуги этой кривой выполняется неравенство $\omega(s) \leqslant Ks$ ($\omega(s) \geqslant Ks$), где s — длина дуги; $\omega(s)$ — ее вариация поворота в пространстве. Таким образом, мы рассматриваем кривые с ограниченной вариацией поворота в E^n. По поводу определений и общих свойств подобных кривых см. работу [3]. Ряд свойств кривых, удельная кривизна которых ограничена, содержится в [4]. Некоторые из них мы сформулируем.

Пусть C — выпуклая кривая с вариацией поворота $\leqslant \pi/2$. Если при нетривиальной изометрической деформации этой кривой в кривую $\tilde{C}$ вариации поворотов дуг не возрастают, то замыкающая хорда C по длине увеличивается, а углы C с хордой уменьшаются. Если далее C — дуга окружности, S — сфера того же радиуса, касающаяся $\tilde{C}$ в ее конце Q, то $\tilde{C} \setminus Q$ располагается вне S.

Замкнутая кривая с кривизной $\leqslant K$ имеет длину $\geqslant 2\pi/K$.

Через каждую точку замкнутой выпуклой кривой с кривизной $\geqslant K$ в плоскости проходит окружность радиуса $1/K$, охватывающая эту кривую.

3. Докажем теорему (1) для E^n. Пусть C — замкнутая кривая длины L с удельной кривизной $\leqslant K$; S — сфера наименьшего радиуса, охватывающая C; O — центр, R — радиус этой сферы. Найдется множество $\{A, B, \ldots\} \subset C \cap S$ из не менее двух и не более $n+1$ точек, выпуклая оболочка которых содержит «внутри» центр O. Будем считать, что этих точек $n+1$ (это не нарушает общности доказательства) и что они циклически упорядочены на кривой C. Тогда точки подразделяют C на дуги $\{A\breve{}B, \ldots\}$, также составляющие циклическую последовательность.

Построим сферу $S(A')$ с центром в A', с радиусом $1/K$, касающуюся сферы S в A и имеющую с S общую внешнюю нормаль в этой точке. В окрестности A кривая C не имеет точек внутри $S(A')$, следовательно, $A' \in [O, A)$. Можно принять, что $A' \in (O, A)$, если $A' \equiv O$, то $R = 1/K$, и неравенство (1) справедливо в силу $L \geqslant 2\pi/K$. Аналогично вводятся сферы $S(B')$, ... Очевидно, симплекс $\Delta = \Delta A'B' \ldots$ содержит внутри точку O.

Пусть OAB — меньший π плоский угол, ограниченный лучами OA и OB; $\tilde{A}\tilde{B}$ ($\tilde{A} \in S(A')$, $\tilde{B} \in S(B')$) — принадлежащая этому углу общая внешняя касательная к $S(A')$, $S(B')$. Рассмотрим выпуклую кривую $\tilde{A}B \equiv A\check{}\tilde{A} \cup \tilde{A}\tilde{B} \cup \tilde{B}\check{}B$, где $A\check{}\tilde{A} \subset S(A')$ и $\tilde{B}\check{}B \subset S(B')$ — дуги окрестностей на соответствующих сферах, расположенные в OAB. Так как лучи OA, OB начинаются внутри Δ и направлены в сферические изображения соответствующих вершин этого симплекса, то $|A\check{}\tilde{A}|$, $|\tilde{B}\check{}B| \leqslant \pi/2K$.

Пусть τ_A, τ_B — гиперплоскости, проведенные соответственно через A', B' перпендикулярно отрезку $A'B'$; H — слой между этими плоскостями. Ясно, что $\tilde{A} \in \tau_A$, $\tilde{B} \in \tau_B$. Отметим на C дугу $A\check{}A''$, налегающую в окрестности A на $A\check{}B$, для которой $|A\check{}A''| = |A\check{}\tilde{A}|$. Эта дуга, не имея точек внутри $S(A')$, располагается по одну сторону от H. Аналогично для точки B вводится дуга $B\check{}B'' \subset C$, находящаяся от H по одну сторону, такая, что $|B\check{}B''| = |B\check{}\tilde{B}|$.

При этом получаем $\tilde{A}B = A\check{}A'' \cup A''\check{}B'' \cup B''\check{}B$, $|A''\check{}B''| \geqslant |\tilde{A}\tilde{B}|$ и, следовательно, $|A\check{}B| \geqslant |\tilde{A}B|$.

Заменим дугу $A\check{}B \subset C$ дугой $\tilde{A}B$. Аналогичную операцию, построив соответствующие плоские кривые, осуществим для каждой из дуг $\{A\check{}B, \ldots\}$. Тем самым получим новую замкнутую кривую C^*. Дуги $\{\tilde{A}B, \ldots\}$ этой кривой принадлежат соответственно плоским углам $\{OAB, \ldots\}$, представляющим в объединении некоторый конус V.

Угол Φ при вершине O конуса V не меньше 2π, поскольку точки $\{A, B, \ldots\}$ не помещаются строго внутри полусферы сферы S. Допустим, что этот угол больше 2π. Рассмотрим грань $OAB \subset V$. Если φ — угол этой грани, то строим угол OA_tB_t с величиной $t\varphi\,(0 < t < 1)$, ограниченный лучами OA_t и OB_t, где $|OA_t| = |OB_t| = R$, и отмечаем точки $A_t' \in (OA_t)$, $B_t' \in (OB_t)$, отстоящие от A_t, B_t соответственно на расстояниях $1/K$. В угле OA_tB_t проводим линию $A_t\tilde{B}_t$, определяемую так же, как и $\tilde{A}B$, составленную из дуг окружностей радиуса $1/K$ с центрами в A_t', B_t' и прямолинейного отрезка — общей внешней касательной к этим окружностям. Очевидно, $|A_t\tilde{B}_t| < |\tilde{A}B|$.

Рассматривая развертку конуса V, вырежем угол OAB и вклеим на его место угол OA_tB_t, соблюдая правило $A_t \to A$, $B_t \to B$. Дуга $\tilde{A}B \subset C^*$ при этом заменяется на $A_t\tilde{B}_t$. Повторяя приведенное построение для каждой из граней V и соответствующей ей дуги C^*, получим новый конус — развертку V_t с отмеченной на нем кривой C_t^*, в которую переходит C^*. При надлежащем значении t — его мы и считаем выбранным — полный угол при вершине O конуса V_t равен 2π. Этот конус можно представлять склеенным реально и уложенным на всю двумерную плоскость. В последнем случае C_t^* имеет простое строение. Эта кривая — граница выпуклой оболочки совокупности окружностей с радиусами $1/K$, касающихся изнутри окружности, радиус которой равен R. Причем выпуклая оболочка точек касания $\{A_t, B_t, \dots\}$ содержит внутри точку O, а длина C_t^* не более длины C^*.

Длина C_t^* оценивается снизу. Она не меньше величины $2\pi/K + T$, где T — периметр выпуклого многоугольника $A_t'B_t' \dots A_t'$, вписанного в окружность радиуса $(R - 1/K)$ и охватывающего центр O этой окружности. Элементарно показывается, что $T \geqslant 4(R - 1/K)$. Таким образом, $L \geqslant 2\pi/K + 4(R - 1/K)$, откуда и следует неравенство (1). Попутно нами по существу разобран и случай $\Phi = 2\pi$.

4. Установим утверждение (2). Пусть C — замкнутая выпуклая кривая с длиной L и удельной кривизной $\geqslant K$. Пусть A, B — точки, разделяющие C на дуги с равной длиной; M — средина отрезка AB. Точки A, B выбираются таким способом, что в них существуют параллельные опорные прямые к кривой C. Пусть $P \in C$ — произвольно взятая точка. Оценим снизу расстояние $|MP|$.

Рассмотрим дугу $A\overset{\smile}{}B \subset C$, содержащую P. Пусть $A\overset{\smile}{}B^*$ — кривая, симметричная $A\overset{\smile}{}B$ относительно точки M и $C^* \equiv A\overset{\smile}{}B \cup A\overset{\smile}{}B^*$. Выпуклая кривая C^* имеет длину L и удельную кривизну $\geqslant K$. Построим две симметричные относительно M окружности с радиусами $1/K$, проходящие через точку P и симметричную ей точку и содержащие внутри кривую C^*. Дуги этих окружностей с концами в точках пересечения окружностей составляют выпуклую луночку, охватывающую C^*, следовательно, имеющую длину $L^* \geqslant L$. Пусть O — центр окружности, проходящей через P. Тогда из неравенства треугольника $|MP| \geqslant |OP| - |OM|$. Имеем $|OP| = \frac{1}{K}$, $|OM| = \frac{1}{K}\cos\frac{L^*K}{4} \leqslant \frac{1}{K}\cos\frac{LK}{4}$. Следовательно, $|MP| \geqslant \frac{1}{K}\left(1 - \cos\frac{LK}{4}\right)$, что и доказывает неравенство (2). Заметим, что $L^*K,\ LK \leqslant 2\pi$.

Список литературы

1. H. H. Johnson. An application of the maximum principle to the geometry of plane curves.— «Proc. Amer. Math. Soc», 1974, vol. 44, p. 432—435.
2. G. D. Chakerian, H. H. Johnson and A. Vogt. A geometric inequality for plane curves with restricted curvature.— "Proc. Amer. Math. Soc.", 57(1976), p. 122—126.
3. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969.
4. А. Д. Милка. Об одной теореме Шура — Шмидта.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 8. Харьков, 1970, с. 95—102.

Поступила 12 мая 1977 г.

УДК 513

В. И. Михайловский, М. Шеркузиев

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕИЗГИБАЕМОСТИ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ЗАКРЕПЛЕННЫХ ВДОЛЬ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ ТОЧЕК

Пусть F — произвольная поверхность; g — линия на этой поверхности; P — произвольная точка пространства. Поверхность F закреплена вдоль кривой g относительно точки P, если в процессе деформации поверхности F расстояния от точек кривой g до точки P не изменяются.

В этой работе исследованы бесконечно малые изгибания второго порядка развертывающихся поверхностей, закрепленных вдоль кривой, лежащей на поверхности, относительно двух точек. Доказана аналитическая неизгибаемость рассматриваемых поверхностей в указанном классе деформаций.

Теорема. *Пусть Φ — регулярная, не содержащая плоских областей и особых точек, развертывающаяся поверхность, которую можно разбить прямолинейными образующими на полосы, каждая из которых представляет собой либо цилиндрическую поверхность, либо коническую, либо поверхность касательных некоторой пространственной кривой. Пусть g — регулярная кривая, пересекающая каждую прямолинейную образующую поверхности Φ только в одной точке. Если такую поверхность закрепить вдоль кривой g относительно двух произвольных точек пространства, то она станет аналитически неизгибаемой.*

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что развертывающаяся поверхность Φ в рассматриваемом классе деформаций обладает жесткостью порядка не выше второго, так как из этого уже, как известно [1], следует аналитическая неизгибаемость поверхности.

Если кривая g не содержит в себе отрезков, которые лежат в плоскостях, проходящих через обе точки закрепления, то развертывающаяся поверхность Φ в рассматриваемом классе деформаций обладает жесткостью первого порядка [2] и, следовательно, аналитически неизгибаема; если же кривая g содержит такие отрезки, то поверхность Φ в рассматриваемом классе деформаций допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания первого порядка. Докажем, что эти изгибания не могут быть продолжены в нетривиальные изгибания второго порядка.

Как известно [1], деформация

$$\boldsymbol{x}^*(s, v, t) = \boldsymbol{x}(s, v) + 2t\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v) + 2t^2\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v) \qquad (1)$$

будет бесконечно малым изгибанием второго порядка поверхности Φ: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s, v)$, если вектор-функции $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ удовлетряют такой системе дифференциальных уравнений:

$$(d\boldsymbol{x},\ d\overset{1}{\boldsymbol{z}}) = 0, \qquad (2) \qquad\qquad (d\boldsymbol{x},\ d\overset{2}{\boldsymbol{z}}) + (d\overset{1}{\boldsymbol{z}},\ d\overset{1}{\boldsymbol{z}}) = 0. \qquad (3)$$

Из этих уравнений следует существование вектор-функций $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{y}}(s, v)$ таких, что

$$d\overset{1}{\boldsymbol{z}} = [\overset{1}{\boldsymbol{y}},\ d\boldsymbol{x}], \qquad (4) \qquad\qquad d\overset{2}{\boldsymbol{z}} = [\overset{2}{\boldsymbol{y}},\ d\boldsymbol{x}] + [\overset{1}{\boldsymbol{y}},\ d\overset{1}{\boldsymbol{z}}], \qquad (5)$$

причем $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{y}}(s, v)$ определяются вектор-функциями $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ однозначно.

Чтобы доказать, что в рассматриваемом классе деформаций поверхность обладает жесткостью второго порядка, достаточно доказать [1], что из системы (4), (5) при ограничениях, которые налагаются на функции $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ этим классом деформаций, следует $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v) = \text{const}$,

Для того чтобы $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ были изгибающими полями поверхности Φ, закрепленной вдоль кривой g $(v = v(s),\ s_0 \leqslant s \leqslant s_1)$ относительно двух точек P_1 и P_2, необходимо и достаточно, чтобы $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ были решениями системы (2), (3) и вдоль кривой g, т. е. для всех s из промежутка $[s_0, s_1]$, удовлетворяли таким условиям:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}(s,\ v(s)) - \boldsymbol{r}_1,\ \overset{1}{\boldsymbol{z}}(s,\ v(s))) &= 0,\\ (\boldsymbol{x}(s,\ v(s)) - \boldsymbol{r}_2,\ \overset{1}{\boldsymbol{z}}(s,\ v(s))) &= 0;\end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}(s,\ v(s)) - \boldsymbol{r}_1,\ \overset{2}{\boldsymbol{z}}(s,\ v(s))) + \overset{1}{\boldsymbol{z}}{}^2(s,\ v(s)) &= 0,\\ (\boldsymbol{x}(s,\ v(s)) - \boldsymbol{r}_2,\ \overset{2}{\boldsymbol{z}}(s,\ v(s))) + \overset{1}{\boldsymbol{z}}{}^2(s,\ v(s)) &= 0,\end{aligned} \qquad (7)$$

где $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы соответственно точек P_1 и P_2. Система уравнений (7) равносильна такой системе:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}(s,\ v(s)) - \boldsymbol{r}_1,\ \overset{2}{\boldsymbol{z}}(s,\ v(s))) + \overset{1}{\boldsymbol{z}}{}^2(s,\ v(s)) &= 0,\\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,\ \overset{2}{\boldsymbol{z}}(s,\ v(s))) = 0, \quad s_0 \leqslant s &\leqslant s_1.\end{aligned} \qquad (8)$$

Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что все точки кривой g лежат в плоскости, проходящей через обе точки закрепления P_1 и P_2. Для упрощения вычислений в дальнейшем будем предполагать, что в пространстве выбрана прямоугольная система координат, начало которой совпадает с точкой закрепления P_1; одна из координатных плоскостей совпадает с плоскостью кривой g, а за орты координатных осей приняты векторы $\boldsymbol{i} =$

$= P_1P_2$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k} = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$, причем $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ лежат в плоскости кривой g. В так выбранной системе координат радиус-вектор $\boldsymbol{x}(s, v(s))$ произвольной точки кривой g можно представить в виде $\boldsymbol{x}(s, v(s)) = \rho_1(s)\boldsymbol{i} + \rho_2(s)\boldsymbol{j}$. Тогда систему (8) можно записать так:

$$(\boldsymbol{j}, \overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v(s))) + \frac{\overset{1}{z}{}^2(s, v(s))}{\rho_2(s)} = 0, \quad (\boldsymbol{i}, \overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v(s))) = 0. \tag{9}$$

Поскольку эти уравнения должны выполняться при всех s из промежутка $[s_0, s_1]$, то для всех таких s будут выполняться равенства $(\boldsymbol{j}, d\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v(s))) + d\left(\frac{\overset{1}{z}{}^2(s, v(s))}{\rho_2(s)}\right) = 0$, $(\boldsymbol{i}, d\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v(s))) = 0$, которые получаются дифференцированием равенств (9). Умножая полученные равенства соответственно на $d\rho_2(s)$, $d\rho_1(s)$ и складывая, получаем $(d\boldsymbol{x}(s, v(s)), d\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v(s))) + d\rho_2(s)\, d\left(\frac{\overset{1}{z}{}^2(s, v(s))}{\rho_2(s)}\right) = 0$. Если сюда вместо произведения $(d\boldsymbol{x}, d\overset{2}{\boldsymbol{z}})$ подставить его выражение из равенства (3), найдем $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v(s)) = \rho_2(s)\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. Но из (6) в выбранной системе координат следует, что вектор $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v(s))$ параллелен вектору $\boldsymbol{k}$. Тогда последнее равенство запишем так:

$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v(s)) = \lambda_0\rho_2(s)\boldsymbol{k}, \tag{10}$$

где λ_0 — произвольная постоянная. Таким образом, для того чтобы $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ были изгибающими полями поверхности, закрепленной вдоль кривой g относительно точек P_1 и P_2, необходимо, чтобы поле $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ вдоль кривой g удовлетворяло как условиям (6), так и равенству (10).

Поскольку рассматриваемую развертывающуюся поверхность можно разбить ее прямолинейными образующими на полосы, каждая из которых представляет собой либо цилиндрическую, либо коническую поверхность, либо поверхность касательных пространственной кривой, то для упрощения выкладок доказательство сформулированной теоремы проведем для каждой из перечисленных поверхностей в отдельности.

Пусть Φ — цилиндрическая поверхность и $\boldsymbol{x}(s, v) = \rho(s) + v\boldsymbol{e}$, $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ — ее регулярная параметризация, $\boldsymbol{e}$ — направляющий вектор прямолинейных образующих, а $\rho = \rho(s)$ — естественная параметризация направляющей кривой поверхности Φ.

При изучении бесконечно малых изгибаний первого порядка цилиндрической поверхности, закрепленной вдоль кривой g относительно двух точек P_1 и P_2, для случая, когда кривая g лежит в плоскости, проходящей через обе точки закрепления, в работе поле вращения $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v)$ и изгибающее поле $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ получены в виде

$$\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v) = \int_{s_0}^{s} A(\sigma)\, \boldsymbol{t}(\sigma)\, d\sigma - A(s)\, v\boldsymbol{e} + \overset{1}{\boldsymbol{c}},$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v) = \left[\int_{s_0}^{s} A(\sigma)\, \boldsymbol{t}(\sigma)\, d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \rho(s) + v\boldsymbol{e}\right] - \\ - \int_{s_0}^{s} A(\sigma)\, [\boldsymbol{t}(\sigma),\ \rho(\sigma)]\, d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{D}},$$

где $A(s)$ — произвольная функция от s, а $\overset{1}{\boldsymbol{c}}$ и $\overset{1}{\boldsymbol{D}}$ — произвольные постоянные векторы, удовлетворяющие условиям $(\overset{1}{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{k}) = 0$, $[\overset{1}{\boldsymbol{D}}, \boldsymbol{k}] = 0$; другими словами, эти выражения для полей есть решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям (6).

Не ограничивая общности, будем считать, что за направляющую поверхности Φ принята кривая g; тогда уравнение кривой g в криволинейных координатах запишется так: $v = v(s) = 0$. Поскольку вектор-функция $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ вдоль кривой g должна удовлетворять условию (10), для всех s из промежутка $[s_0, s_1]$ должно выполняться равенство

$$\left[\int_{s_0}^{s} A(\sigma)\, \boldsymbol{t}(\sigma)\, d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \rho(s)\right] - \int_{s_0}^{s} A(\sigma)\, [\boldsymbol{t}(\sigma),\ \rho(\sigma)]\, d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{D}} = \lambda_0 \rho_2(s)\, \boldsymbol{k}. \tag{11}$$

Дифференцируя это равенство по s, найдем

$$\left[\int_{s_0}^{s} A(\sigma)\, \boldsymbol{t}(\sigma)\, d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \boldsymbol{t}(s)\right] = \lambda_0 \rho_2'(s)\, \boldsymbol{k}. \tag{12}$$

Если в это уравнение вместо вектор-функции $\boldsymbol{t}(s)$ и постоянного вектора $\overset{1}{\boldsymbol{c}}$ подставить их выражения из равенств $\boldsymbol{t}(s) = \rho'(s) = \rho_1'(s)\, \boldsymbol{i} + \rho_2'(s)\, \boldsymbol{j}$, $\overset{1}{\boldsymbol{c}} = c_1 \boldsymbol{i} + c_2 \boldsymbol{j}$, то для определения функции $A(s)$ получим интегральное уравнение $\rho_2'(s)\left(\int_{s_0}^{s} A(\sigma) \times \right.$ $\left. \times \rho_1'(\sigma)\, d\sigma + c_1\right) - \rho_1'(s)\left(\int_{s_0}^{s} A(\sigma)\, \rho_2'(\sigma)\, d\sigma + c_2\right) = \lambda_0 \rho_2'(s)$. Разделив обе его части на $\rho_2'(s) \neq 0$ и продифференцировав по s, получим $\left(\frac{\rho_1'(s)}{\rho_2'(s)}\right)' \left(\int_{s_0}^{s} A(\sigma)\, \rho_2'(\sigma)\, d\sigma + c_2\right) = 0$. Отсюда, поскольку предполагается, что Φ не содержит плоских областей и поэтому $\left(\frac{\rho_1'(s)}{\rho_2'(s)}\right) \not\equiv 0$, для всех $s \in [s_0, s_1]$ следует: $\int\limits_{s_0}^{s} A(\sigma)\rho_2'(\sigma)\,d\sigma + c_2 = 0$. Из этого интегрального уравнения находим $A(s) \equiv 0$, $c_2 = 0$. Тогда из уравнений (12) и (11) соответственно получаем $c_1 = \lambda_0$, $\overset{1}{\boldsymbol{D}} = 0$.

Таким образом, для цилиндрической поверхности Φ из уравнений (4, 5) следует, что $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v) = \lambda_0 \boldsymbol{i} = \text{const}$, $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v) = [\lambda_0 \boldsymbol{i}, \boldsymbol{x}(s, v)]$. Это означает, что цилиндрическая поверхность Φ в рассматриваемом классе деформаций обладает жесткостью второго порядка и, следовательно, аналитически неизгибаема. Тривиальные изгибания ее сводятся к вращательным движениям поверхности как твердого тела с угловой скоростью λ_0 вокруг оси, проходящей через точки закрепления P_1 и P_2.

Пусть Φ — коническая поверхность и $\boldsymbol{x}(s, v) = \boldsymbol{x}^0 + \rho(s)\cdot v$, $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$, $v > 0$ — ее регулярная параметризация; $\boldsymbol{x}^0$ — радиус-вектор вершины поверхности. Не ограничивая общности, можно считать, что кривая g задана уравнением $v = v(s) = 1$. Поскольку предполагается, что кривая g плоская и лежит в координатной плоскости, определяемой векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, радиус-вектор $\boldsymbol{x}^0 + \rho(s)$ ее произвольной точки можно представить в виде

$$\boldsymbol{x}(s, 1) = \boldsymbol{x}^0 + \rho(s) = \rho_1(s)\boldsymbol{i} + \rho_2(s)\boldsymbol{j}. \tag{13}$$

Пусть в выбранной системе координат $\boldsymbol{x}^0 = x_1^0\boldsymbol{i} + x_2^0\boldsymbol{j} + x_3^0\boldsymbol{k}$. Тогда для поверхности Φ поле вращения $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v)$ и изгибающее поле $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$, найденные из уравнения (4) и удовлетворяющие условиям (6), можно представить в виде

$$\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v) = \frac{B(s)}{v}\rho(s) - \int\limits_{s_0}^{s} B'(\sigma)\rho(\sigma)\,d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{c}},$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v) = v\Big[-\int\limits_{s_0}^{s} B'(\sigma)\rho(\sigma)\,d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \rho(s)\Big] +$$

$$+ \int\limits_{s_0}^{s} B(\sigma)\,[\rho(\sigma),\ \rho'(\sigma)]\,d\sigma + [\overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \boldsymbol{x}^0] + \overset{1}{\boldsymbol{D}},$$

где $B(s)$ — произвольная функция от s, а $\overset{1}{\boldsymbol{c}}$ и $\overset{1}{\boldsymbol{D}}$ — некоторые постоянные векторы.

Для определения $B(s)$ воспользуемся тем, что поле $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$ должно удовлетворять равенству (10). Имеем

$$\Big[-\int\limits_{s_0}^{s} B'(\sigma)\rho(\sigma)\,d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \rho(s)\Big] + \int\limits_{s_0}^{s} B(\sigma)\,[\rho(\sigma),\ \rho'(\sigma)]\,d\sigma +$$

$$+ [\overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \boldsymbol{x}^0] + \overset{1}{\boldsymbol{D}} = \lambda_0\rho_2(s)\,\boldsymbol{k}. \tag{14}$$

Продифференцировав это равенство по s, получим

$$\left[-\int_{s_0}^{s} B'(\sigma)\rho(\sigma)\,d\sigma + B(s)\rho(s) + \overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \ \frac{\rho'(s)}{\rho_2(s)}\right] = \lambda_0 \boldsymbol{k}. \tag{15}$$

Учитывая (13), а также отсутствие на Φ плоских областей, равенство (15) после дифференцирования можно привести к виду

$$\left[-\int_{s_0}^{s} B'(\sigma)\rho(\sigma)\,d\sigma + B(s)\rho(s) + \overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \boldsymbol{i}\right] = 0. \tag{16}$$

Дифференцируя это равенство по s, находим $B(s)[\rho'(s), \boldsymbol{i}] = 0$. Отсюда, учитывая, что $[\rho'(s), \boldsymbol{i}] \neq 0$, получаем $B(s) = 0$. Тогда из равенств (16), (15) и (14) найдем $\overset{1}{\boldsymbol{c}} = \lambda_0 \boldsymbol{i}$, $\overset{1}{\boldsymbol{D}} = 0$.

Таким образом, из (4), (5) для конической поверхности Φ получаем $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v) = \lambda_0 \boldsymbol{i} = \text{const}$, $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v) = [\lambda_0 \boldsymbol{i}, \boldsymbol{x}(s, v)]$. Это означает, что коническая поверхность Φ в рассматриваемом классе деформаций обладает жесткостью второго порядка и поэтому аналитически неизгибаема.

Предположим теперь, что Φ — поверхность касательных к пространственной кривой и

$$\boldsymbol{x}(s, v) = \rho(s) + v\boldsymbol{t}(s),\ \ s_0 \leqslant s \leqslant s_1,\ \ v > 0 \tag{17}$$

— ее регулярная параметризация, $\rho = \rho(s)$ — естественная параметризация ребра возврата поверхности, $\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\rho}{ds}$. Пусть плоская кривая g на поверхности Φ задана уравнением $v = v(s)$, $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$. Тогда радиус-вектор ее произвольной точки $\rho(s) + v(s)\boldsymbol{t}(s)$ в выбранной системе координат можно представить в виде

$$\rho(s) + v(s)\boldsymbol{t}(s) = \rho_1(s)\boldsymbol{i} + \rho_2(s)\boldsymbol{j}. \tag{18}$$

Для поверхности Φ, заданной уравнением (17), поле вращения $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v)$ и изгибающее поле $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v)$, найденные из (4) и удовлетворяющие условиям (6), можно записать так:

$$\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s, v) = \frac{B(s)\,\boldsymbol{t}(s)}{v} + \int_{s_0}^{s} \left\{ \frac{1 + v'(\sigma)}{v^2(\sigma)} B(\sigma) - \left(\frac{B(\sigma)}{v(\sigma)}\right)' \right\} \boldsymbol{t}(\sigma)\,d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{c}},$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s, v) = \left[\int_{s_0}^{s} \left\{ \frac{1 + v'(\sigma)}{v^2(\sigma)} B(\sigma) - \left(\frac{B(\sigma)}{v(\sigma)}\right)' \right\} \boldsymbol{t}(\sigma)\,d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \rho(s) + v\boldsymbol{t}(s)\right] +$$

$$+ \int_{s_0}^{s} B(\sigma)\boldsymbol{k}(\sigma)[\boldsymbol{t}(\sigma)],\ \boldsymbol{n}(\sigma)]\,d\sigma + \int_{s_0}^{s} \left\{ \frac{1 + v'(\sigma)}{v^2(\sigma)} B(\sigma) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{B(\sigma)}{v(\sigma)}\right)' \right\} [\rho(\sigma),\ \boldsymbol{t}(\sigma)]\,d\sigma + \overset{1}{\boldsymbol{D}}, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{k}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$ — соответственно кривизна и главная нормаль ребра возврата поверхности Φ; $B(s)$ — произвольная функция от s, $\overset{1}{\boldsymbol{D}}$ — некоторые постоянные векторы.

Для определения функции $B(s)$ подставим в (10) выражение (19) для $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s,\ v)$ и полученное равенство продифференцируем по s, учитывая равенство (18):

$$\left[\int_{s_0}^{s}\left\{\frac{1+v'(\sigma)}{v^2(\sigma)}B(\sigma)-\left(\frac{B(\sigma)}{v(\sigma)}\right)'\right\}\boldsymbol{t}(\sigma)\,d\sigma+\frac{B(s)}{v(s)}\boldsymbol{t}(s)+\overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \frac{\rho_1'(s)\,\boldsymbol{i}+\rho_2'(s)\,\boldsymbol{j}}{\rho_2'(s)}\right]=\lambda_0\boldsymbol{k}. \qquad (20)$$

Поскольку поверхность Φ не содержит плоских областей, и поэтому $\left(\frac{\rho_1'(s)}{\rho_2'(s)}\right)'\neq 0$, результат дифференцирования равенства (20) по s можно записать в виде

$$\left[\int_{s_0}^{s}\left\{\frac{1+v'(\sigma)}{v^2(\sigma)}B(\sigma)-\left(\frac{B(\sigma)}{v(\sigma)}\right)'\right.\boldsymbol{t}(\sigma)\,d\sigma+\frac{B(s)}{v(s)}\boldsymbol{t}(s)+\overset{1}{\boldsymbol{c}},\ \boldsymbol{i}\right]=0.$$

Из этого уравнения находим $B(s)=0$, $\overset{1}{\boldsymbol{c}}=c_1\boldsymbol{i}$. Тогда из (20) и равенства (10), в которое подставлено выражение (19) для поля $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s,\ v)$, найдем $\overset{1}{\boldsymbol{c}}=\lambda_0\boldsymbol{i}$, $\overset{1}{\boldsymbol{D}}=0$.

Таким образом, поле вращения примет вид $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s,\ v)=\lambda_0\boldsymbol{i}$, а изгибающее поле — вид $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(s,\ v)=[\lambda_0\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{x}(s,\ v)]$, т. е. для поверхности касательных к пространственной кривой в рассматриваемом классе деформаций из уравнений (4), (5) следует, что $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s,\ v)=$ const, а это означает, что поверхность касательных в таком классе деформаций обладает жесткостью второго порядка, следовательно, аналитически неизгибаема.

Итак, теорема доказана отдельно для цилиндрической, конической поверхностей и для поверхности касательных. Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно принять во внимание то, что рассматриваемую в теореме развертывающуюся поверхность можно разбить прямолинейными образующими на полосы, каждая из которых является одной из перечисленных поверхностей, и при этом воспользоваться непрерывностью поля вращения $\overset{1}{\boldsymbol{y}}(s,\ v)$ на регулярной поверхности.

Список литературы

1. Ефимов Н. В. Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости.— «Успехи мат. наук», 1952, т. VIII, вып. 5(51), с. 215—224.
2. Михайловский В. И., Утеулиев Ж. Бесконечно малые изгибания кусочно-регулярных развертывающихся поверхностей, закрепленных вдоль кривой на поверхности относительно двух точек.—«Изв. АН КазССР», сер. физ.-мат., № 5, 1976, с. 26—32.

Поступила 26 февраля 1977 г.

УДК 513

В. Р. Наринян

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, НЕСУЩИХ ГОЛОНОМНУЮ ДВУХКОМПОНЕНТНУЮ ОРТОГОНАЛЬНУЮ СОПРЯЖЕННУЮ СИСТЕМУ КОНИЧЕСКОГО ТИПА

1. Пусть V_{n-1} — гиперповерхность евклидова пространства R^n; x — ее произвольная точка; T_x — ее касательная плоскость в точке $\boldsymbol{x}$. Два направления на этой поверхности, определяемые дифференциалами d_1 и d_2, называются сопряженными, если $d_1(d_2\boldsymbol{x}) \in T_x$. Два многомерных направления $\Delta_p(\boldsymbol{x})$ и $\Delta_q(\boldsymbol{x})$ соответственно размерностей p и q, выходящих из точки $\boldsymbol{x}$ и принадлежащих плоскости T_x, называются сопряженными, если этим свойством обладает каждая пара одномерных направлений, принадлежащих соответственно $\Delta_p(\boldsymbol{x})$ и $\Delta_q(\boldsymbol{x})$. Распределения Δ_p и Δ_q размерностей соответственно p и q образуют сопряженную систему $S(p, q)$, если $\Delta_p \cap \Delta_q = \boldsymbol{x}$, $p+q=n-1$ и Δ_p, Δ_q являются сопряженными на гиперповерхности V_{n-1}.

Сопряженные системы с многомерными компонентами изучены В. В. Рыжковым [1], М. А. Акивисом [2, 3]. В настоящей работе рассматриваются гиперповерхности, несущие двухкомпонентную ортогональную сопряженную систему специального типа, называемого коническим. При этом предполагается, что $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$.

2. Пусть гиперповерхность V_{n-1} евклидова пространства R^n несет голономную двухкомпонентную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$. Это означает, что в каждой точке $\boldsymbol{x} \in V_{n-1}$ существует пара ортогональных и сопряженных направлений Δ_p и Δ_q соответственно размерностей p и q, $p+q=n-1$, принадлежащих касательной плоскости T_x, и что распределения Δ_p и Δ_q голономны на V_{n-1}.

Присоединим к рассматриваемой гиперповерхности V_{n-1} подвижный репер, у которого начало совпадает с текущей точкой $\boldsymbol{x}$ гиперповерхности; векторы $\boldsymbol{e}_a$ $(a = 1, 2, \ldots, p)$ принадлежат p-мерному направлению Δ_p; $\boldsymbol{e}_i$ $(i = p+1, \ldots, n-1)$ — q-мерному направлению Δ_q; $\boldsymbol{e}_n$ — единичный вектор нормали к V_{n-1}. Всюду в дальнейшем будем считать, что $a, b, c = 1, 2, \ldots, p$; $i, j, k = p+1, \ldots, n-1$; $J, K, L = 1, 2, \ldots, n$.

Скалярные произведения

$$(\boldsymbol{e}_J \boldsymbol{e}_K) = g_{JK} \qquad (1)$$

образуют метрический тензор пространства R^n. Уравнения инфинитезимальных перемещений репера запишутся в виде

$$d\boldsymbol{x} = \omega^J \boldsymbol{e}_J, \quad d\boldsymbol{e}_J = \omega_J^K \boldsymbol{e}_K, \qquad (2)$$

где формы Пфаффа ω^J, ω_J^K удовлетворяют уравнениям структуры пространства R^n: $d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J$, $d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K$.
Кроме того, они удовлетворяют уравнениям Пфаффа

$$dg_{JK} = g_{JL}\omega_K^L + g_{LK}\omega_J^L, \qquad (3)$$

которые получаются при дифференцировании соотношений (1).

Так как $d\boldsymbol{x} \in T_x$, то

$$\omega^n = 0. \qquad (4)$$

Дифференцируя уравнения (4) внешним образом и развертывая полученные соотношения по базисным формам ω^a и ω^i, найдем $\omega_a^n = a_{ab}\omega^b + a_{ai}\omega^i$, $\omega_i^n = a_{ia}\omega^a + a_{ij}\omega^j$, где $a_{ab} = a_{ba}$, $a_{ai} = a_{ia}$, $a_{ij} = a_{ji}$. Из сопряженности направлений Δ_p и Δ_q на V_{n-1} следует, что коэффициенты $a_{ai} = 0$, следовательно, формы ω_a^n и ω_i^n принимают вид

$$\omega_a^n = a_{ab}\omega^b \, (a), \quad \omega_i^n = a_{ij}\omega^j \, (b). \qquad (5)$$

Поскольку направления Δ_p и Δ_q ортогональны, $(\boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_i) = g_{ai} = 0$, из (3) получаем

$$g_{ab}\omega_i^b + g_{ij}\omega_a^j = 0. \qquad (6)$$

Так как при фиксированных главных параметрах — при неподвижной точке x — ортогональные сопряженные направления Δ_p и Δ_q остаются неподвижными, формы ω_a^i не должны зависеть от дифференциалов вторичных параметров, и поэтому их можно записать в виде

$$\omega_a^i = l_{ab}^i \omega^b + l_{ak}^i \omega^k. \qquad (7)$$

Из условий голономности распределений Δ_p и Δ_q, определяемых системами уравнений Пфаффа соответственно $\omega^i = 0$ и $\omega^a = 0$, вытекает, что

$$l_{ab}^i = l_{ba}^i; \quad g_{ij} l_{ak}^j = g_{kj} l_{ai}^j. \qquad (8)$$

Уравнения (4), (5), (7), (8) определяют гиперповерхность V_n, несущую голономную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$.

Продифференцируем внешним образом систему уравнений (5):

$$[\nabla a_{ab} + (a_{ij} l^i_{ab} - a^c_a g_{ij} l^i_{cb})\,\omega^j] \wedge \omega^b + (a_{ij} l^i_{ak} - a^c_a g_{ij} l^i_{ck})\,\omega^j \wedge \omega^k = 0,$$

$$[\nabla a_{ij} + (a_{ik} l^k_{aj} - a^c_a g_{ik} l^k_{cj})\,\omega^a] \wedge \omega^j + (a_{ij} l^j_{ab} - a^c_a g_{ij} l^j_{cb})\,\omega^a \wedge \omega^b = 0,$$

где $\nabla a_{ab} = da_{ab} - a_{ac}\omega^c_b - a_{cb}\omega^c_a$, $\nabla a_{ij} = da_{ij} - a_{ik}\omega^k_j - a_{kj}\omega^k_i$; $a^c_a = g^{cb}a_{ab}$, g^{cb} — контравариантные компоненты тензора g_{ab}. Приравнивая нулю коэффициенты при независимых произведениях $\omega^j \wedge \omega^k$ в первой подсистеме полученной системы и коэффициенты при произведениях $\omega^a \wedge \omega^b$ во второй, имея в виду (8), получаем

$$a_{ij} l^j_{ak} = a_{kj} l^j_{ai}, \quad a^c_a l^j_{cb} = a^c_b l^j_{ca}. \tag{9}$$

3. Пусть V_p — p-мерная поверхность сопряженной системы $S(p, q)$, принадлежащая q-параметрическому семейству, определяемому на V_{n-1} системой уравнений $\omega^i = 0$; V_q — q-мерная поверхность, определяемая системой $\omega^a = 0$. Распределение Δ_p (и Δ_q соответственно) образует вдоль $V_q (V_p)$ тангенциально вырожденную гиперповерхность ранга $q(p)$ с p-мерными (q-мерными) плоскими образующими [2].

Голономную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$ на гиперповерхности V_{n-1} назовем системой конического типа, если семейства плоскостей Δ_p вдоль V_q и Δq вдоль V_p образуют $(n-1)$-мерные конусы соответственно с $(p-1)$- и $(q-1)$-мерными вершинами.

Теорема 1. *Для того чтобы голономная ортогональная сопряженная система $S(p, q)$ была системой конического типа, необходимо и достаточно, чтобы*

$$l^i_{ab} = -l^i g_{ab}, \quad l^i_{ak} = l_a \delta^i_k \tag{10}$$

(здесь δ^i_k — символ Кронекера).

Доказательство. Рассмотрим плоскость F_1, принадлежащую Δ_p и определяемую уравнением $1 + l_a y^a = 0$, и плоскость F_2, принадлежащую Δ_q и определяемую уравнением $1 + l_i y^i = 0$. Не уменьшая общности рассуждений, можно предположить, что векторы $\boldsymbol{e}_a$ репера не параллельны плоскости F_1, а векторы $\boldsymbol{e}_i$ не параллельны плоскости F_2. В таком случае $l_a \neq 0$ и $l_i \neq 0$. Точки пересечения прямой $\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{e}_a$ с плоскостью F_1 и прямой $\boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{e}_i$ с плоскостью F_2 найдутся соответственно в виде $P_a = \boldsymbol{x} - \frac{1}{l_a}\boldsymbol{e}_a$, $P_i = \boldsymbol{x} - \frac{1}{l_i}\boldsymbol{e}_i$. Дифференцируя эти уравнения с учетом $\omega^a = 0$ и $\omega^i = 0$, записываем

$$dP_a = \frac{1}{l_a}(l_a\omega^i - \omega^i_a)\boldsymbol{e}_i + \frac{1}{l_a^2}(dl_a - l_b\omega^b_a)\,\boldsymbol{e}_a + \frac{l_b}{l_a}\omega^b_a (P_b - P_a), \tag{11}$$

$$dP_i = \frac{1}{l_i}(l_i\omega^a - \omega^a_i)\,\boldsymbol{e}_a + \frac{1}{l_i^2}(dl_i - l_k\omega^k_i)\,\boldsymbol{e}_i + \frac{l_k}{l_i}\omega^k_i (P_k - P_i).$$

Необходимость. Предположим, что семейство плоскостей вдоль поверхности V_q образует конус, вершиной которого слу плоскость F_1, а семейство плоскостей Δ_q вдоль V_p — конус с шиной F_2. Тогда из условий неподвижности этих плоскостей и (11) получим $\omega_a^i = l_a\omega^i \pmod{\omega^a}$, $\omega_i^a = l_i\omega^a \pmod{\omega^i}$, $dl_a = l_b\omega_a^b \times \pmod{\omega^a}$, $dl_i = l_k\,\omega_i^k \pmod{\omega^i}$. Из этих соотношений и (6), (7) следует, что

$$\omega_a^i = -l^i g_{ab}\omega^b + l_a\omega^i. \qquad (1$$

Достаточность. Пусть теперь выполнены условия (10). Тог имеют место соотношения (12). Дифференцируя их внешним об зом, найдем

$$(\nabla l_a + l_a l_b\omega^b)\wedge\omega^i - g_{ab}(\nabla l^i + l^i l_j\omega^j)\wedge\omega^b + a_{ab}a_j^i\omega^b\wedge\omega^j = 0, \qquad (1$$

где $\nabla l_a = dl_a - l_b\omega_a^b$, $\nabla l^i = dl^i + l^j\omega_j^i$, $a_j^i = g^{ik}a_{kj}$ и g^{ik} — контравари антные компоненты тензора g_{ij}. Из (13) следует, что

$$\nabla l_a = l_{ab}\omega^b\ (a), \quad \nabla l^i = l_k^i\omega^k\ (б). \qquad (1$$

Подставляя эти разложения в (13), получим соотношения

$$(l_{ab} + l_a l_b)\,g_{ij} + (l_{ij} + l_i l_j)\,g_{ab} + a_{ab}a_{ij} = 0, \qquad (1$$

где $l_{ij} = g_{ik}l_j^k$. Из (12) следует, что фокусной поверхностью пло костей Δ_p вдоль V_q является плоскость F_1, а фокусной повер ностью плоскостей Δ_q вдоль V_p — плоскость F_2. Но из (14), (1 и (11) следует, что плоскости F_1 и F_2 неподвижны соответствен вдоль поверхностей V_q и V_p, т. е. сопряженная система $S(p, q)$ является системой конического типа.

4. Гиперповерхность V_{n-1}, являющаяся огибающей q-параметри ческого семейства гиперсфер, называется p-каналовой гиперповер ностью ($p = n - q - 1$). Она несет p-мерные сферические образую щие V_p. В работе В. И. Ведерникова [4] доказано, что гиперпо верхность V_{n-1} является p-каналовой в том и только в том случае, когда ее асимптотический тензор a_{JK} имеет p-кратное собственно значение.

Теорема 2. *Если гиперповерхность V_{n-1} несет голономную двухкомпонентную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$ конического типа, то она является либо p-каналовой, либо q-каналовой, либо дважды каналовой гиперповерхностью.*

Доказательство. Пусть V_{n-1} несет голономную ортого нальную сопряженную систему $S(p, q)$ конического типа. Тогда на ней выполняются соотношения (15). Докажем следующее: из (15) вытекает, что либо $a_{ab} = ag_{ab}$, либо $a_{ij} = \tilde{a}g_{ij}$, либо эти условия выполняются совместно.

Действительно, пусть $a_{ij} \neq \tilde{a}g_{ij}$, тогда тензоры g_{ij} и a_{ij} одно временно можно привести к диагональному виду: $g_{ij} = \delta_{ij}$ и a_{ij} =

$a_i\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), и при этом среди собственных значений a_i тензора a_{ij} хотя бы два будут различны. Пусть, например, $a_{p+1} \neq a_{p+2}$. Тогда, записывая (15) для $i=j=p+1$ и $i=j=p+2$, получим $l_{ab}+l_al_b+(l_{p+1\,p+1}+l^2_{p+1})g_{ab}+a_{p+1}a_{ab}=0$, $l_{ab}+l_al_b+(l_{p+2\,p+2}+l^2_{p+2})g_{ab}+a_{p+2}a_{ab}=0$. Так как $a_{p+1}-a_{p+2}\neq 0$, отсюда следует, что

$$a_{ab}=\frac{l_{p+2\,p+2}-l_{p+1\,p+1}+l^2_{p+2}-l^2_{p+1}}{a_{p+1}-a_{p+2}}g_{ab}, \text{ т. е. } a_{ab}=ag_{ab}.$$

Если же на гиперповерхности V_{n-1} будет $a_{ab}\neq ag_{ab}$, то с помощью соотношений (15) докажем, что $a_{ij}=\tilde{a}g_{ij}$. В силу указанного выше результата работы [4] отсюда следует справедливость доказываемой теоремы.

Для определенности будем считать далее, что рассматриваемая гиперповерхность V_{n-1} является p-каналовой. Рассмотрим ее p-мерную сферическую образующую V_p. Она принадлежит $(p+1)$-мерной плоскости E_{p+1}, определяемой точкой $\boldsymbol{x}$ и векторами $\boldsymbol{e}_a$ и $\boldsymbol{e}^*=-l^i\boldsymbol{e}_i+a\boldsymbol{e}_n$. Для такой поверхности $a_{ab}=ag_{ab}$, откуда $da=(a_{ij}-ag_{ij})l^i\omega^j$.

Теорема 3. *Плоскости $E_{p+1}=[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}^*]$, содержащие p-мерные сферические образующие V_p гиперповерхности V_{n-1}, несущей голономную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$ конического типа, образуют связку с p-мерной осью E_p.*

Доказательство. Так как на рассматриваемой гиперповерхности $a_{ab}=ag_{ab}$, то из (15) найдем

$$l_{ab}+l_al_b=bg_{ab}\ (a),\quad l_{ij}+l_il_j+aa_{ij}=-bg_{ij}\ (б). \tag{16}$$

Продолжая уравнения (14, a), получим

$$\nabla l_{ab}\wedge\omega^b+(b-\tilde{l})l_ig_{ab}\omega^i\wedge\omega^b+(l+a^2)l_bg_{ac}\omega^b\wedge\omega^c=0, \tag{17}$$

где $\nabla l_{ab}=dl_{ab}-l_{ac}\omega^c_b-l_{cb}\omega^c_a$, $\tilde{l}=l_al^a$, $l=l_il^i$. Но из (16, a) следует $\nabla l_{ab}=g_{ab}\,db+[2l_al_bl_c-b(g_{ac}l_b+g_{bc}l_a)]\,\omega^c$.
Подставляя эти выражения в (17), найдем

$$db=-(a^2+b+l)\,l_a\omega^a+(\tilde{l}-b)\,l_i\omega^i. \tag{18}$$

Плоскости $E_{p+1}=[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}^*]$, содержащие сферы V_p, образуют конгруэнцию, зависящую от q параметров. Найдем уравнение фокусной поверхности этих плоскостей. Пусть $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+z^a\boldsymbol{e}_a+z_*\boldsymbol{e}^*$ — произвольная точка этой плоскости; тогда точки ее фокусной поверхности определяются условием $d\boldsymbol{z}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,E_{p+1})$, откуда $[(1+l_az^a)\delta^i_j-z_*(l^i_j+l_jl^i+aa^i_j)]\,\omega^j=0$.

Используя (16, б), получим $(1+l_az^a+bz_*)\,\omega^i=0$. Отсюда следует, что уравнение фокусной поверхности на E_{p+1} имеет вид

$$1+l_az^a+bz_*=0, \tag{19}$$

т. е. она является p-мерной плоскостью. Обозначим ее через E_p.

Докажем теперь, что p-мерная плоскость (18) остается неподвижной при перемещении точки $\boldsymbol{x}$ по поверхности V_{n-1}. Эта плоскость определяется точками $P_a = \boldsymbol{x} - \frac{1}{l_a}\boldsymbol{e}_a$, $P^* = \boldsymbol{x} - \frac{1}{b}\boldsymbol{e}^*$. Подсчитывая дифференциалы этих точек, в силу (14), (16), (18) получи

$$dP_a = l_b\left(\frac{1}{l_a}\omega_a^b - \omega_a^b\right)(P_b - P_a) + \frac{b}{l_a}g_{ab}\omega^b(P^* - P_a),$$
$$dP^* = \frac{l_a}{b}\left[l^a l_j\omega^j - (a^2 + b + l)\,\omega^a\right](P_a - P^*),$$

что доказывает неподвижность плоскости (19) и теорему.

Заметим, что величина b, входящая в уравнения (16), является инвариантом. При доказательстве теоремы 3, а также всюду в п. 4—6 предполагается, что $b \neq 0$. Случай $b = 0$ приводит к поверхностям вращения, рассмотренным в п. 7.

Найдем еще дифференциалы величин $\tilde{l}$ и l, которые определены выше. В силу (14) и (16) получим $d\tilde{l} = 2(b - \tilde{l})\,l_a\omega^a$, $dl = -2[(b + l)\,l_j + l^i a_{ij}]\,\omega^j$.

5. Изучим теперь строение поверхностей V_q, принадлежащих второму семейству сопряженной системы $S(p, q)$.

Теорема 4. *Пусть гиперповерхность V_{n-1} несет голономную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$ конического типа, V_p — ее сферические образующие. Тогда поверхности V_q, принадлежащие второму семейству поверхностей сопряженной системы $S(p, q)$, имеют коразмерность два и каждая из них принадлежит $(q+1)$-мерной сфере S_{q+1}. Центры этих сфер описывают p-мерную плоскость.*

Доказательство. Записывая уравнения инфинитезимальных перемещений репера (2) при условии $\omega^a = 0$, получим

$$d\boldsymbol{x} = \omega^i\boldsymbol{e}_i, \quad d\boldsymbol{e}_i = \omega_i^j\boldsymbol{e}_j + g_{ij}\omega^j\boldsymbol{e}_* + \omega_i^n\boldsymbol{e}_n,$$
$$d\boldsymbol{e}_* = -\tilde{\boldsymbol{e}}\omega^i\boldsymbol{e}_i, \quad d\boldsymbol{e}_n = \omega_n^i\boldsymbol{e}_i, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{e}_* = -l^a\boldsymbol{e}_a$. Отсюда следует, что каждая поверхность V^q принадлежит плоскости $E_{q+2} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_*, \boldsymbol{e}_n]$, т. е. имеет коразмерность два. Более того, она лежит на $(q+1)$-мерной сфере S_{q+1}, принадлежащей плоскости E_{q+2}, с центром в точке

$$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{x} + \frac{1}{l}\boldsymbol{e}_*. \tag{21}$$

Радиус этой сферы равен $l^{-1/2}$. Легко проверяется, что точка $\boldsymbol{y}_0$ принадлежит плоскости E_p, определяемой уравнением (19). С другой стороны, подсчитывая дифференциал точки $\boldsymbol{y}_0$, получим, что эта точка описывает p-мерную поверхность. Следовательно, эта поверхность совпадает с плоскостью E_p.

Из соотношений (20) следует также, что поле нормальных векторов $\boldsymbol{e}_*$ и $\boldsymbol{e}_n$ вдоль каждой поверхности V_q параллельно в нормаль ом расслоении, определяемом этой поверхностью в содержащем ее пространстве E_{q+2} [5].

Теорема 5. *Пусть гиперповерхность V_{n-1} несет голономную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$ конического типа и V_p — ее сферические образующие. Тогда плоскости $E_{q+1} = [x, e_i, e_*, e_n]$, содгржащие поверхности V_q, зависят от $p-1$ параметров и образуют связку с $(q+1)$-мерной осью E_{q+1}. При этом ось связки E_{q+1} вполне ортогональна плоскости E_p.*

Доказательство. Так как $dx = \omega^a e_a + \omega^i e_i$ и

$$de_i = \omega_i^j e_j + g_{ij}\omega^j e_* + \omega_i^n e_n + l_i \omega^a e_a,$$
$$de_* = (l^i l_a \omega^a - \tilde{l}\omega^i) e_i - a l_a \omega^a e_n - b\omega^a e_a,$$
$$de_n = \omega_n^i e_i - a\omega^a e_a,$$

то при $\omega^a = -l^a\theta$ плоскость E_{q+2} остается неподвижной, и поэтому она зависит от $p-1$ параметров. Докажем, что конгруэнция, образованная плоскостями E_{q+2}, представляет собой связку с $(q+1)$-мерной вершиной. В самом деле, пусть $z = x + z^i e_i + z^* e_* + z^n e_n$ — произвольная точка плоскости E_{q+2}. Подсчитывая дифференциал dz, из условий $dz \equiv 0 \pmod{E_{q+2}}$ получим, что уравнение фокусной поверхности плоскости E_{q+2} имеет вид

$$1 + l_i z^i - bz^* - az^n = 0. \tag{22}$$

Поэтому фокусная поверхность представляет собой $(q+1)$-мерную плоскость, принадлежащую плоскости E_{q+2}. Обозначим ее через E_{q+1}. В силу (22) произвольную точку плоскости E_{q+1} можно представить в виде

$$z = x + \frac{1}{a} e_n + z^i \tilde{e}_i + z^* \tilde{e}_*, \tag{23}$$

где $\tilde{e}_i = e_i + \frac{1}{a} e_n$; $\tilde{e}_* = e_* - \frac{b}{a} e_n$ — линейно независимые векторы. Проверка показывает, что $d\left(x + \frac{1}{a} e_n\right) = \left(\delta_j^i - \frac{1}{a} a_j^i\right)\omega^j \tilde{e}_i$, $d\tilde{e}_i = \left(\omega_i^j - \frac{1}{a} l_i a_k^j \omega^k\right)\tilde{e}_j + g_{ij}\omega^j \tilde{e}_*$, $d\tilde{e}_* = \left(\frac{b}{a} a_j^i \omega^j + l^i l_b \omega^b - \tilde{l}\omega^i\right)\tilde{e}_i - l_b \omega^b \tilde{e}_*$. Последнее доказывает неподвижность плоскости E_{q+1}.

Теперь докажем, что плоскость E_{q+1} вполне ортогональна плоскости E_p. Из (19) следует, что произвольную точку плоскости E_p можно представить в виде $z = x - \frac{1}{b} e^* + z^a \tilde{e}_a$, где $\tilde{e}_a = e_a - \frac{1}{b} l_a e^*$. Отсюда и из (23) следует, что плоскости E_{q+1} и E_p пересекаются в точке

$$z_0 = x - \frac{1}{b} e^* - \frac{a^2 + b + l}{b^2 + (a^2 + l)\tilde{l}} l^a \tilde{e}_a, \tag{24}$$

которая также является неподвижной. Векторы $\tilde{e}_a$ параллельны плоскости E_p, а векторы $\tilde{e}_i$ и $\tilde{e}_*$ параллельны плоскости E_{q+1}.

Проверка показывает, что $(\tilde{e}_a \tilde{e}_i) = 0$ и $(\tilde{e}_a \tilde{e}_*) = 0$, откуда и следует полная ортогональность плоскостей E_{q+1} и E_p.

Теорема 6. *Все сферы S_{q+1}, содержащие поверхности V_q гиперповерхности V_{n-1}, описанной в теореме 4, проходят через неподвижную сферу S_q размерности q и образуют p-связку Σ_p.*

Доказательство. Пусть S_q есть q-мерная сфера, являющаяся пересечением сферы S_{q+1} с плоскостью E_{q+1}; тогда центром сферы S_q будет точка $\boldsymbol{z}_0$, определяемая из (24). Центр сферы S_{q+1} находится в точке y_0, определяемой соотношением (21), которое можно переписать в виде

$$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{x} - \frac{1}{b} e^* - \frac{1}{\tilde{l}} l^a \tilde{e}_a.$$

Радиус сферы S_{q+1} равен $l^{-1/2}$. Поэтому радиус сферы S_q найдем по формуле $r = \sqrt{\frac{1}{\tilde{l}} - (\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{z}_0)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + 2b + \tilde{l} - l}{b^2 + (a^2 + l)\tilde{l}}}$. Подсчитывая дифференциал радиуса r, получим $dr = 0$, т. е. $r = \mathrm{const}$. А это означает неподвижность сферы S_q, откуда и следует утверждение теоремы.

6. Докажем теперь существование гиперповерхностей V_{n-1}, несущих голономную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$ конического типа. Согласно теореме 2, такие поверхности являются либо p-каналовыми, либо q-каналовыми, либо дважды каналовыми. Будем предполагать, что они p-каналовые. Такие поверхности, как показано выше, определяются следующей системой уравнений Пфаффа: $\omega^n = 0$, $\omega_a^n = a g_{ab} \omega^b$, $\omega_i^n = a_{ij} \omega^j$, $\omega_a^i = -l^i g_{ab} \omega^b + l_a \omega^i$, $\nabla g_{ab} = 0$, $\nabla g_{ij} = 0$, $\nabla l_a = (b g_{ab} - l_a l_b)\, \omega^b$, $\nabla l_i = -(b g_{ij} + l_i l_j + a a_{ij})\, \omega^j$, $da = (a_{ij} - a g_{ij})\, l^i \omega^j$, $db = -(a^2 + b + l)\, l_a \omega^a + (\tilde{l} - b) l_i \omega^i$, где $\tilde{l} = l_a l^a$, $l = l_i l^i$. Внешнее дифференцирование этой системы дает только следующие квадратичные уравнения: $[\nabla a_{ij} + (a_{ij} - a g_{ij})\, l_a \omega^a] \wedge \omega^j = 0$.

Исследуем эту систему уравнений, применяя критерий Картана [6]. Количество независимых форм, входящих в эту систему, равно $r = \frac{q(q+1)}{2}$. Количество входящих в нее независимых уравнений — ее первый характер — равно $s_1 = q$. Легко определяются и остальные ее характеры: $s_2 = q - 1, \ldots, s_q = 1$; при этом $r = s_1 + s_2 + \cdots + s_q$. Число Картана для этой системы будет равно $Q = s_1 + 2s_2 + \cdots + q s_q = \frac{q(q+1)(q+2)}{6}$.

Теперь определим число параметров, от которых зависит наиболее общий q-мерный интегральный элемент этой системы. Для этого развернем ее по базисным формам ω^i, применяя лемму Картана: $\nabla a_{ij} + (a_{ij} - a g_{ij})\, l_a \omega^a = a_{ijk} \omega^k$. Так как коэффициенты, входящие в правые части этих уравнений, должны быть симметричны по всем индексам, то их число будет равно $N = \frac{q(q+1)(q+2)}{6}$.

…довательно, $Q = N$, критерий Картана удовлетворен, и система …дится в инволюции. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Гиперповерхности V_{n-1}, несущие голономную орто…альную сопряженную систему $S(p,\ q)$ конического типа …мерными сферическими образующими, существуют, и произвол … существования равен одной функции q аргументов.*

Теперь можно дать полное конструктивное описание гиперпо…хности V_{n-1}, несущей голономную ортогональную сопряженную …тему $S(p,\ q)$ конического типа с p-мерными сферическими обра…ющими (где $p+q+1=n$, $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$). Возьмем в простран… R^n две вполне ортогональные плоскости E_p и E_{q+1}, пересекаю…ся в точке O, и в плоскости E_{q+1} сферу S_q с центром в O. …смотрим множество всех $(q+1)$-мерных сфер, проходящих …рез S_q. Оно представляет собой p-параметрическую связку Σ_p. …оскость E_{q+1} принадлежит этой связке. Зададим в плоскости … произвольную q-мерную поверхность V_q^0, не пересекающую …феру S_q (произвол ее задания — одна функция q аргументов). …рез каждую точку поверхности V_q^0 проведем p-мерную сферу S_p, …лне ортогональную всем сферам S_{q+1} связки Σ_p. Геометрическое …сто этих сфер S_p и будет представлять собой искомую гиперпо…хность V_{n-1}. Она, таким образом, гомеоморфна прямому произ…дению $V_q^0 \times S_p$. Если поверхность V_q^0 будет связной и полной … E_{q+1}, то V_{n-1} будет связной и полной в R^n. Если же V_q^0 целиком …жит вне или внутри сферы S_q и гомеоморфна сфере S_q, то гипер…верхность V_{n-1} гомеоморфна тору $S_q \times S_p$.

7. Рассмотрим отдельно случай, когда $l_a = 0$, $l_i \neq 0$. Тогда …скости распределения Δ_p остаются параллельными вдоль поверх…сти V_q; такую сопряженную систему $S(p,\ q)$ назовем системой …ническо-цилиндрического типа. В этом случае формы ω_a^i прини…ют вид

$$\omega_a^i = -l^i g_{ab}\omega^b. \qquad (25)$$

… (15) найдем $a_{ab} = a g_{ab}$, $l_{ij} + l_i l_j = a a_{ij}$. Отсюда и из (25) сле…т, что поверхность V_p является p-мерной сферой. Она принад…жит своей соприкасающейся плоскости, определенной точкой $\boldsymbol{x}$ … векторами $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}^* = -l^i\boldsymbol{e}_i + a\boldsymbol{e}_n$. Центром сферы V_p является точка

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \frac{1}{l_i l^i + a^2}\,\boldsymbol{e}^*. \qquad (26)$$

Теперь покажем, что центры сфер V_p описывают q-мерную …оскость. Из (26) получим $d\boldsymbol{y} = \omega^i \boldsymbol{f}_i$, $d\boldsymbol{f}_i = \Theta_i^j \boldsymbol{f}_j$, где $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{e}_i + m_i \boldsymbol{e}^*$, … $\dfrac{l_i}{l_i l^i + a^2}$, $\theta_i^j = \omega_i^j + \dfrac{1}{a}\, l^j \omega_i^n$, откуда видно, что поверхность, …сываемая точкой $\boldsymbol{y}$, является плоскостью размерности q.

Из соотношений $(\boldsymbol{e}_a \boldsymbol{f}_i) = 0$, $(\boldsymbol{e}^* \boldsymbol{f}_i) = 0$, которые легко проверя…ся непосредственно, следует, что $(p+1)$-мерная плоскость, определяемая векторами e_a, $e^* = -l^i e_i + a e_n$ и содержащая сферу вполне ортогональна q-мерной плоскости центров, определяемой векторами f_i. Отсюда вытекает

Теорема 8. *Если гиперповерхность V_{n-1} несет голономную ортогональную сопряженную систему $S(p, q)$ конически-цилиндрического типа, то она является гиперповерхностью вращения, для которой V_p являются параллелями, V_q — меридианами, а осью вращения служит q-мерная плоскость, описываемая точкой* (...)

Заметим, что гиперповерхность V_{n-1}, несущая голономную ортогональную сопряженную систему конического типа, описанная в п. ..., не может быть получена из поверхности вращения с помощью конформного преобразования, как это может показаться на первый взгляд.

Далее рассмотрим случай, когда $l_a = 0$ и $l_i = 0$, т. е. когда плоскости распределений Δ_p и Δ_q соответственно вдоль поверхностей V_q и V_p остаются параллельными. Такую сопряженную систему $S(p, q)$ назовем системой цилиндрического типа. В этом случае из (15) следует, что $a_{ab} a_{ij} = 0$, откуда заключаем, что на V_{n-1} либо $a_{ab} = 0$, либо $a_{ij} = 0$, либо эти условия выполняются совместно.

Условие $a_{ab} = 0$ означает, что поверхности V_p, на которые расслаивается гиперповерхность V_{n-1}, представляют собой p-мерные плоскости, а сама V_{n-1} есть цилиндр ранга q с p-мерными образующими. Условие $a_{ij} = 0$ имеет аналогичный смысл. Если же выполняются оба, то V_{n-1} есть гиперплоскость, на которой поверхности V_p и V_q образуют два ортогональных между собой семейства параллельных плоскостей размерностей p и q.

Автор выражает свою благодарность профессору М. А. Акивису за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Рыжков В. В. Сопряженные системы на многомерных поверхностях. — «Тр. Моск. мат. о-ва», 1958, т. 7, с. 179—226.
2. Акивис М. А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем. — «Тр. геометр. семинара», 1966, т. 1, с. 7—31.
3. Акивис М. А. Фокальные образы поверхностей ранга r. — «Изв. высш. учеб. заведений. Математика», 1957, № 1, с. 9—19.
4. Ведерников В. И. Поверхности, огибающие семейство гиперсфер. — «Изв. высш. учеб. заведений. Математика», 1957, № 1, с. 89—97.
5. Chen Bang — Jen. Geometry of submanifolds. — „Pure and Appl. Math.", № 22, N.-Y., 1973.
6. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М., Гостехиздат, 1948, 4...

Поступила 25 января 197...

УДК 513

М. А. Николаенко

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И МНОГООБРАЗИЕ ПФАФФА

В работе [1, § 1] показано, что в неголономной линейной дифференциальной геометрии Пфаффова многообразия характеристических линий не существует.

Г. Дарбу и Д. М. Синцов [2, 3] указали, что можно прийти к уравнению Пфаффа

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{1}$$

отыскивая направления dx, dy, dz, ортогональные к направлениям δx, δy, δz кривых конгруэнции, определяемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\delta x}{P} = \frac{\delta y}{Q} = \frac{\delta z}{R}. \tag{2}$$

Так как кривые конгруэнции суть характеристические кривые линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0, \tag{3}$$

небезынтересным было бы рассмотреть такого рода связь между дифференциальным уравнением (3) и Пфаффовым (1).

1. Условие ортогональности направлений линейных элементов dx, dy, dz интегральных кривых некоего множества направлениям δx, δy, δz характеристических линий уравнения (3), определяемых (2), следующее:

$$d\boldsymbol{r}\,\delta\boldsymbol{r} = dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0. \tag{4}$$

Заменяя в (4) δx через λP из (2) приходим к уравнению Пфаффа (1). Оно выражает условие перпендикулярности нормали $N(P, Q, R)$ в некоторой точке $O(x, y, z)$ плоскости $\pi: \sum P(X-x) = 0$, в которой лежат касательные $d\boldsymbol{r}(dx, dy, dz)$ к множеству интегральных кривых, проходящих через взятую точку системы точка — плоскость. Таким образом, интегральные кривые уравнения Пфаффа (1) ортогональны к характеристическим линиям линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

2. Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{5}$$

геометрически подчиняет каждой точке пространства «конус Монжа», образующие которого ортогональны нормалям $(p, q - 1)$ интегральных поверхностей (5), проходящих через его вершину $O(x, y, z)$.

Если дифференциальное уравнение (5) линейно относительно p, q, его можно записать в виде (3): $Pp + Qq + (-1)R = 0$.

Нормали $(p, q, -1)$ к его интегральным поверхностям, проходящим через точку $O(x, y, z)$, образуют плоскость π, и «конус Монжа» вырождается в прямую — «ось Монжа» [4]:

$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{R}, \quad (6)$$

где P, Q, R — проекции ее направляющего вектора.

«Ось Монжа» служит касательной к характеристическим линиям линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (3) и перпендикулярна к плоскости π*.

Таким образом, «ось Монжа» (6) и нормаль $N(P, Q, R)$ системы точка — плоскость представляют одну и ту же прямую, перпендикулярную к плоскости π.

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (3) и Пфаффово уравнение (1) определяют общий вектор $\theta(P, Q, R)$, выражающий совпадение «оси Монжа» и нормали $N(P, Q, R)$. Вектор θ перпендикулярен к плоскости π, в которой лежат и проходят через точку ее $O(x, y, z)$ нормали $(p, q, -1)$ к интегральным поверхностям и касательные $dr(dx, dy, dz)$ к интегральным кривым системы точка — плоскость.

Характеристические же кривые линейного дифференциального уравнения в частных производных (3) являются огибающими векторов $\theta(P, Q, R)$ — «осей Монжа» и нормалей Пфаффова многообразия.

Список литературы

1. Бланк Я. П., Николаенко М. А. К геометрии Пфаффова и Монжева многообразий. — В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 20. Харьков, 1977, с. 18—23.
2. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométrique du calcul infinitésimal. P. II, Paris, Gauthier—Villars, 1915, p. 579.
3. Синцов Д. М. О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. — Наукові записки науково-дослідних математичних кафедр України. Держ. вид. України, 1928, т. 3, с. 107—147.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964. 830 с.

Поступила 25 февраля 1977 г.

---

* Превращение «конуса Монжа» в ось и появление плоскости π детально рассмотрены в дипломной работе В. Трапуевой (1971 г.).

ДК 513.73

М. О. Рахула

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ИММЕРСИИ И СУБМЕРСИИ

Одной из самых замечательных глав математики является алгебраическая теория инвариантов, связанная с именами Якоби, Гаусса, Гессе, Кели и Гильберта. В современной дифференциальной геометрии методы этой теории становятся применимыми благодаря развитию теории касательных структур и связностей высших порядков. Большой интерес представляет схема получения алгебраическими методами дифференциальных инвариантов отображений одних многообразий в другие. В случае иммерсии этой схемой охватывается геометрия погруженных многообразий, а в случае субмерсии создается новая двойственная теория расслоений.

В данной работе изучается пара отображений $V_n \xrightarrow{F} V_{n+r} \xrightarrow{\Phi} V_r$, где F — иммерсия и Φ — субмерсия в случае, когда многообразие V_{n+r} локально евклидово.

Для индексов примем следующее соглашение: малые латинские $i, j, k, l, p, q, \dots$ пробегают значения $1, 2, \dots, n$; заглавные латинские $I, J, K, L, P, \dots$ — значения $1, 2, \dots, n+r$; греческие $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots$ — значения $n+1, \dots, n+r$. Все функции предполагаются дифференцируемыми.

§ 1. Ортогональные инварианты иммерсии

1. Дана иммерсия

$$F: V_n \to V_{n+r} \tag{1.1}$$

размерности многообразий V_n и V_{n+r} соответственно n и $n+r$. Рассмотрим на V_n две локальные карты (U_1, φ_1) и $(\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1)$ с непустым пересечением $U_1 \cap \tilde{U}_1$ и на V_{n+r} две локальные карты (U_2, φ_2) и $(\tilde{U}_2, \tilde{\varphi}_2)$ такие, что $\tilde{U}_2 \supset F(U_1)$ и $\tilde{U}_2 \supset F(\tilde{U}_1)$. Окрестности $A = \varphi_1(U_1 \cap \tilde{U}_2)$ и $\tilde{A} = \tilde{\varphi}_1(U_1 \cap \tilde{U}_2)$ n-мерного числового пространства, окрестности $B = \varphi_2(U_2 \cap \tilde{U}_2)$ и $\tilde{B} = \tilde{\varphi}_2(\tilde{U}_2 \cap \tilde{U}_2)$ $(n+r)$-мерного числового пространства и отображения $a = \tilde{\varphi}_1\varphi_1^{-1}$, $b = \tilde{\varphi}_2\varphi_2^{-1}$, $f = \varphi_2 F \varphi_1^{-1}$ и $\tilde{f} = \tilde{\varphi}_2 F \tilde{\varphi}_1^{-1}$ образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ \tilde{A} \arrow[r, "\tilde{f}"] & \tilde{B} \end{tikzcd} . \tag{1.2}$$

Пусть отображения a, b, f и $\tilde{f}$ заданы в координатах уравнениями

$$\begin{aligned} &\tilde{t}^i = a^i(t^j), \quad u^I = f^I(t^i), \\ &\tilde{u}^I = b^I(u^J), \quad \tilde{u}^I = \tilde{f}^I(\tilde{t}^i). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Частные производные функций, стоящих справа, обозначим соответственно $\{a^i_j,\ a^i_{jk},\ a^i_{jkl}, \dots\}$, $\{f^I_i,\ f^I_{ij},\ f^I_{ijk}, \dots\}$, $b^I_J, b^I_{JK}, b^I_{JKL}, \dots$ $\{\tilde{f}^I_i,\ \tilde{f}^I_{ij}, \tilde{f}^I_{ijk}, \dots\}$. Так как многообразие V_{n+r} локально евклидово, то отображение b является евклидовым движением. Это налагает на частные производные функций (b^I) условия

$$b^I_{JK} = b^I_{JKL} = \cdots = 0, \quad b^K_I b^K_J = \delta_{IJ}. \tag{1.4}$$

Коммутативная диаграмма (1.2) связывает частные производные функций (1.3) соотношениями

$$\tilde{f}^I_J a^j_i = b^I_J f^J_i, \ \ \tilde{f}^I_{kl} a^k_i a^l_j + \tilde{f}^I_k a^k_{ij} = b^I_J f^J_{ij}, \quad \tilde{f}^I_{pqs} a^p_i a^q_j a^s_k + 3\tilde{f}^I_{pq} a^p_{(ij} a^q_{k)} + $$
$$+ \tilde{f}^I_p a^p_{ijk} = b^I_J f^J_{ijk}, \tag{1.5}$$

. . . .

Определение 1. Ортогональным инвариантом иммерсии f называется любая функция $I(f)$, зависящая от частных производных функций (f^I), которая не изменяется при переходе от f к $\tilde{f}$.

Отыскание ортогональных инвариантов иммерсии F по существу сводится к получению соотношений вида $I(\tilde{f}) = I(f)$ путем исключения из соотношений (1.5) величин a и b.

2. Касательный функтор T сопоставляет, как известно, каждому многообразию V его касательное расслоение TV (первый этаж) и каждому отображению $\varphi: V \to V'$ касательное отображение $T\varphi: TV \to TV'$ (дифференциал). Повторное применение функтора T поднимает на второй и следующие этажи. При этом коммутативные диаграммы типа (1.2) также поднимаются с этажа на этаж. Следующие рассуждения проводятся на уровне второго этажа.

Введем в окрестности T^2U_1 второго этажа T^2V_n и в окрестности T^2U_2 второго этажа T^2V_{n+r} соответственно локальные координаты [1]: $(t^i,\ t^i_1,\ t^i_2,\ t^i_{12})$ и $(u^I,\ u^I_1,\ u^I_2,\ u^I_{12})$. Тогда второе касательное отображение T^2f определится системой

$$u^I = f^I(t^i), \quad u^I_1 = f^I_i t^i_1, \quad u^I_2 = f^I_i t^i_2, \quad u^I_{12} = f^I_{ij} t^i_1 t^j_2 + f^I_i t^i_{12}. \tag{1.6}$$

Аналогичные координаты (с тильдой) введем в окрестностях $T^2\tilde{U}_1$ и $T^2\tilde{U}_2$ и представим касательное отображение $T^2\tilde{f}$ подобной системой (ее не выписываем). Отображение T^2a определится системой $\tilde{t}^i = a^i(t^j)$, $\tilde{t}^i_1 = a^i_j t^j_1$, $\tilde{t}^i_2 = a^i_j t^j_2$, $\tilde{t}^i_{12} = a^i_{jk} t^j_1 t^k_2 + a^i_j t^j_{12}$, а T^2b — системой $\tilde{u}^I = b^I(u^J)$, $\tilde{u}^I_1 = b^I_J u^J_1$, $\tilde{u}^I_2 = b^I_J u^J_2$, $\tilde{u}^I_{12} = b^I_J u^J_{12}$, из которой следует, что каждая совокупность (u^I_1), (u^I_2) и (u^I_{12}) определяет самостоятельный вектор, причем скалярные произведения этих векторов являются инвариантами относительно преобразований b (например, $\tilde{u}^I_1 \tilde{u}^I_2 = u^I_1 u^I_2$).

Рассмотрим инвариант

$$I_1 = u^I_1 u^I_2. \tag{1.7}$$

как скалярная функция на T^2V_{n+r}, он может быть перенесен с помощью T^2F на T^2V_n. Получаем с учетом (1.6) функцию

$$I_1 \circ T^2F = g_{ij}t_1^it_2^j, \tag{1.8}$$

где

$$g_{ij} = f_i^I f_j^I. \tag{1.9}$$

При преобразовании a величины (1.9) преобразуются как компоненты дважды ковариантного тензора: $\tilde{g}_{kl}a_i^ka_j^l = g_{ij}$. Кроме того, матрица (g_{ij}) невырожденная, это можно показать, опираясь на то, что F — иммерсия. Тем самым на многообразии V_n и на его образе $F(V_n)$ определяется метрический тензор. Матрицу, обратную матрице (g_{ij}), будем обозначать через (g^{ij}).

Таким же образом переносятся с T^2V_{n+r} на T^2V_n инварианты

$$I_2 = u_1^Iu_{12}^I, \quad I_3 = u_{12}^Iu_{12}^I. \tag{1.10}$$

Однако после подстановки (1.6) коэффициенты в выражениях $I_2 \circ T^2F$ и $I_3 \circ T^2F$ не являются коэффициентами тензоров, как это было в (1.8). Поэтому воспользуемся символами Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = f_l^I f_{ij}^I g^{lk}, \tag{1.11}$$

преобразующимися по известному закону

$$a_l^k\Gamma_{ij}^l = \tilde{\Gamma}_{pq}^k a_i^p a_j^q + a_{ij}^k, \tag{1.12}$$

и заменим в T^2U_1 координаты t_{12}^i координатами

$$T_{12}^i = t_{12}^i + \Gamma_{jk}^i t_1^j t_2^k, \tag{1.13}$$

которые преобразуются как координаты вектора:

$$\tilde{T}_{12}^i = a_j^i T_{12}^j. \tag{1.14}$$

После этого разложение (1.6) для u_{12}^I примет вид

$$u_{12}^I = F_{ij}^I t_1^i t_2^j + f_i^I T_{12}^i, \tag{1.15}$$

где

$$F_{ij}^I = f_{ij}^I - f_k^I\Gamma_{ij}^k. \tag{1.16}$$

Величины (1.16) преобразуются по закону

$$\tilde{F}_{kl}^I a_i^k a_j^l = b_J^I F_{ij}^J. \tag{1.17}$$

Осуществляя теперь подстановку с помощью (1.6) и (1.15), получаем инварианты $I_2 \circ T^2F = g_{ij}t_1^iT_{12}^j$, $I_3 \circ T^2F = g_{ij}T_{12}^iT_{12}^j + F_{ij}^IF_{kl}^It_1^it_2^jt_1^kt_2^l$, причем оба слагаемых последнего выражения являются инвариантами.

Кроме метрического тензора (g_{ij}) на многообразии V_n и на его образе $F(V_n)$ возникает четырежды ковариантный тензор

$$F_{ij}^IF_{kl}^I = f_{ij}^If_{kl}^I - g_{pq}\Gamma_{ij}^p\Gamma_{kl}^q. \tag{1.18}$$

Метрическая теория второй дифференциальной окрестности на-груженного многообразия $F(V_n)$ строится целиком с помощью метрического тензора (1.9), связности (1.11), объекта (1.16) и тензора (1.18). Объект (F^I_{ij}) известен в теории многомерных поверхностей под названием (не совсем удачным) аффинора кривизны [2, с. 93]. Формулой $R^l_{ijk} = -2F^I_{s[i}F^I_{j]k}g^{sl}$ определяется тензор римановой кривизны. Одним из основных объектов является аффинор $F^I = (F^I_{ik}g^{kj})$, где индекс I считается фиксированным. Для каждого значения I имеем аффинор (относительно a); след произведения ν таких аффиноров $\operatorname{tr} F^{I_1}F^{I_2} \dots F^{I_\nu}$ определяет ν раз контравариантный тензор относительно b. Вопрос об отыскании совместных ортогональных инвариантов этих тензоров находится в рамках чисто алгебраической теории инвариантов [3, 4]. Одним из таких инвариантов является так называемая скалярная кривизна $R = R^i_{ijk}g^{jk} = \operatorname{tr} F^I F^I - \operatorname{tr} F^I \cdot \operatorname{tr} F^I$. Величины $(\operatorname{tr} F^I)$ являются компонентами вектора средней кривизны.

Если $F(V_n)$ имеет ортонормированное оснащение, определяемое локально в U_2 величинами (e^I_α), преобразующимися по закону $\tilde{e}^I_\alpha = b^I_J e^J_\alpha$, то объект (1.16) представится в виде $F^I_{ij} = e^I_\alpha h^\alpha_{ij}$. Появятся компоненты (h^α_{ij}), определяющие при любом значении α дважды ковариантный тензор относительно a. В случае гиперповерхности $(r = 1)$ это — коэффициенты второй квадратичной формы. Из (1.16) следует обычная формула Гаусса $f^I_{ij} = f^I_k\Gamma^k_{ij} + e^I_\alpha h^\alpha_{ij}$. Величины (1.18) примут вид $h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kl}$, откуда, в частности, следует связь между компонентами тензора кривизны и коэффициентами второй квадратичной формы.

Примечание. Все это находится в рамках схемы, предложенной в работе [1, § 4] в случае, когда $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$. При этом величины (H^α_{ij}) совпадают с величинами (1.16).

3. Подобные рассуждения проводятся и на следующих этажах. Так, на третьем этаже наряду с символами Кристофелля (1.11) вводятся величины $\Gamma^l_{ijk} = f^I_s f^I_{ijk} g^{sl}$, преобразующиеся по закону $a^i_p \Gamma^p_{jkl} = \tilde{\Gamma}^i_{pqs} a^p_j a^q_k a^s_l + 3\tilde{\Gamma}^i_{pq} a^p_{(j} a^q_{kl)} + a^i_{jkl}$ (связность третьего порядка). Наряду с объектом (1.16) определяются величины $F^I_{ijk} = f^I_{ijk} - 3F^I_{s(i}\Gamma^s_{jk)} - f^I_l \Gamma^l_{ijk}$, преобразующиеся по закону $\tilde{F}^I_{pqs} a^p_i a^q_j a^s_k = b^I_J F^J_{ijk}$. В T^3U_1 предполагаются заданными естественные координаты $(t^i$, t^i_1, t^i_2, t^i_{12}, t^i_3, t^i_{13}, t^i_{23}, $t^i_{123})$, а в T^3U — естественные координаты $(u^I$, u^I_1, u^I_2, u^I_{12}, u^I_3, u^I_{13}, u^I_{23}, $u^I_{123})$. Если (t^i_{12}) заменить координатами (1.13), а (t^i_{13}) и (t^i_{23}) — аналогичными координатами (T^i_{13}) и (T^i_{23}), то величины (u^I_{12}), а также (u^I_{13}) и (u^I_{23}) представятся как (1.15). Величины же (t^i_{123}) следует заменить координатами $T^i_{123} = t^i_{123} +$

$+ 3\Gamma^{i}_{jk}t^{j}_{(12}t^{k}_{3)} + \Gamma^{i}_{jkl}t^{j}_{1}t^{k}_{2}t^{l}_{3}$, после чего получим разложение $u^{I}_{123} = F^{I}_{ijk}t^{i}_{1}t^{j}_{2}t^{k}_{3} + 3F^{I}_{ij}T^{i}_{(12}t^{j}_{3)} + f^{I}_{i}T^{i}_{123}$. Здесь для удобства записи у величин t и T предполагается симметрия по нижним индексам. Последнее разложение, как и разложение (1.15), отличается тем, что в нем появляются векторные слагаемые. Инварианты $I_4 = u^{I}_{1}u^{I}_{123}$, $I_5 = u^{I}_{12}u^{I}_{123}$, $I_6 = u^{I}_{123}u^{I}_{123}$, которые добавятся к инвариантам (1.7) и (1.10), переносятся с T^3V_{n+r} на T^3V_n в виде $I_4 \circ T^3F = g_{ij}t^{i}_{1}T^{j}_{123}$,

$$I_5 \circ T^3F = g_{ij}T^{i}_{123}T^{j}_{123} + 3F^{I}_{il}F^{I}_{kl}t^{i}_{1}t^{j}_{2}T^{k}_{(12}t^{l}_{3)} + F^{I}_{pq}F^{I}_{ijk}t^{p}_{1}t^{q}_{2}t^{i}_{1}t^{j}_{2}t^{k}_{3},$$

$$I_6 \circ T^3F = g_{ij}T^{i}_{123}T^{j}_{123} + 9F^{I}_{ij}F^{I}_{kl}T^{i}_{(12}t^{j}_{3)}T^{k}_{(12}t^{l}_{3)} + 6F^{I}_{pq}F^{I}_{ijk}T^{p}_{(12}t^{q}_{3)}t^{i}_{1}t^{j}_{2}t^{k}_{3} +$$
$$+ F^{I}_{ijk}F^{I}_{pqs}t^{i}_{1}t^{j}_{2}t^{k}_{3}t^{p}_{1}t^{q}_{2}t^{s}_{3}.$$ Не будем перечислять других инвариантов вида $u^{I}_{13}u^{I}_{123}$. К тензорам (1.9) и (1.18) добавятся еще два ковариантных тензора валентности 5 и 6: $(F^{I}_{pq}F^{I}_{ijk})$ и $(F^{I}_{pqs}F^{I}_{ijk})$.

Пример. Пусть кривая $F(V_1)$ расположена в k-мерной евклидовой плоскости $(n = 1, \quad k \leqslant r + 1)$. Введем обозначения $a_{ij} = f^{I}_{(i)}f^{I}_{(j)}$, где $f^{I}_{(i)}$ — i-тая производная функции $f^{I}(t)$. Можно показать инвариантность отношений

$$a_{11} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}^{1/3} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}^{1/6} : \cdots : \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}^{1/N},$$

где $N = \frac{k(k+1)}{2}$. Отсюда без традиционных формул Френе получаются $k - 1$ инвариантов кривой — кривизны всех порядков.

§ 2. Ортогональные инварианты субмерсии

4. В этом параграфе рассматривается двойственная картина на кокасательных расслоениях применительно к субмерсии

$$\Phi : V_{n+r} \to V_r, \tag{2.1}$$

где многообразие V_{n+r} снова, но в другой роли, предполагается локально евклидовым. Пусть при этом V_{n+r} расслаивается на диффеоморфные между собой слои — n-мерные поверхности. Роль базы расслоения играет многообразие V_r.

Начнем с рассмотрения диаграммы

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\ \tilde{B} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \tilde{C} \end{tikzcd}, \tag{2.2}$$

считая, что на U_{n+r} взяты локальные карты (U_2, φ_2) и $(\tilde{U}_2, \tilde{\varphi}_2)$ с непустым пересечением $U_2 \cap \tilde{U}_2$ на V_r взяты локальные карты (U_3, φ_3) и $(\tilde{U}_3, \tilde{\varphi}_3)$ такие, что $U_3 \supset \Phi(U_2)$ и $\tilde{U}_3 \supset \Phi(\tilde{U}_2)$, и что введены обозначения: $B = \varphi_2(U_2 \cap \tilde{U}_2)$, $\tilde{B} = \tilde{\varphi}_2(U_2 \cap \tilde{U}_2)$, $C = \varphi_3(U_3 \cap \tilde{U}_3)$, $\tilde{C} = \tilde{\varphi}_3(U_3 \cap \tilde{U}_3)$, $b = \tilde{\varphi}_2\varphi_2^{-1}$, $c = \tilde{\varphi}_3\varphi_3^{-1}$, $\varphi = \varphi_3\Phi\varphi_2^{-1}$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_3\Phi\tilde{\varphi}_2^{-1}$.

Зададим отображения b, c, φ, $\tilde{\varphi}$ в координатах уравнениями

$$\tilde{u}^I = b^I(u^J),\ s^\alpha = \varphi^\alpha(u^I),$$
$$\tilde{s}^\alpha = c^\alpha(s^\beta),\ \tilde{s}^\alpha = \tilde{\varphi}^\alpha(\tilde{u}^I) \tag{2.3}$$

и обозначим частные производные функций, стоящих справа, соответственно $\{b^I_J,\ b^I_{JK},\ b^I_{JKL},\ \ldots\}$, $\{\varphi^\alpha_I,\ \varphi^\alpha_{IJ},\ \varphi^\alpha_{IJK},\ \ldots\}$,

$$\{c^\alpha_\beta,\ c^\alpha_{\beta\gamma},\ c^\alpha_{\lambda\mu\nu},\ \ldots\},\ \{\tilde{\varphi}^\alpha_I,\ \tilde{\varphi}^\alpha_{IJ},\ \tilde{\varphi}^\alpha_{IJK},\ \ldots\}.$$

Выпишем соотношения, которые связывают эти частные производные, учитывая условия (1.4):

$$\tilde{\varphi}^\alpha_J b^J_I = c^\alpha_\beta \varphi^\beta_I,$$
$$\tilde{\varphi}^\alpha_{KL} b^K_I b^L_J = c^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\gamma_J\varphi^\gamma_J + c^\alpha_\beta\varphi^\beta_{IJ}, \tag{2.4}$$
$$\tilde{\varphi}^\alpha_{PQS} b^P_I b^Q_J b^S_K = c^\alpha_{\lambda\mu\nu}\varphi^\lambda_I\varphi^\mu_J\varphi^\nu_K + 3c^\alpha_{\lambda\mu}\varphi^\lambda_{(IJ}\varphi^\mu_{K)} + c^\alpha_\lambda\varphi^\lambda_{IJK},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Определение 2. Ортогональным инвариантом субмерсии Φ называется любая функция $J(\varphi)$, зависящая от частных производных функций (φ^α), которая не изменяется при переходе от φ к $\tilde{\varphi}$.

Отыскание ортогональных инвариантов субмерсии Φ по сути сводится к получению соотношений вида $J(\varphi) = J(\tilde{\varphi})$ путем исключения из соотношений (2.4) величин b и c.

5. Как известно, касательное отображение $T\Phi$, переводя TV_{n+r} в TV_r, переносит касательные векторы с V_{n+r} на V_r, а кокасательное отображение $\overset{*}{T}\Phi$, переводя кокасательное расслоение $\overset{*}{T}V_r$ в кокасательное расслоение $\overset{*}{T}V_{n+r}$, переносит ковекторы, наоборот, с V_r на V_{n+r}. Если при этом ковектор с естественными координатами $(s^\alpha,\ s^1_\alpha)$ на U_3 отображается в ковектор с естественными координатами $(u^I,\ u^1_I)$ на U_2, то $s^\alpha = \varphi^\alpha(u^I)$ [см. (2.3)] и

$$u^1_I = s^1_\alpha\varphi^\alpha_I. \tag{2.5}$$

На окрестностях $\tilde{U}_3$ и $\tilde{U}_2$ отображение $\overset{*}{T}\Phi$ определяется уравнениями $\tilde{s}^\alpha = \tilde{\varphi}^\alpha(\tilde{u}^I)$ из (2.3) и $\tilde{u}^1_I = \tilde{s}^1_\alpha\tilde{\varphi}^\alpha_I$. Точнее, этими уравнениями определяются отображения $\overset{*}{T}\varphi$ и $\overset{*}{T}\tilde{\varphi}$. Далее, заметим, что уравнениями

$$\tilde{u}^1_J b^J_I = u^1_I,\quad \tilde{s}^1_\beta c^\beta_\alpha = s^1_\alpha \tag{2.6}$$

определяются отображения $\overset{*}{T}b$ и $\overset{*}{T}c$.

…торое кокасательное отображение $\overset{*}{T}{}^2\Phi$ определяется на ок…ностях TU_3 и TU_2 уравнениями

$$u_I^2 = s_\alpha^2 \varphi_I^\alpha + s_\alpha^{12} \varphi_{IJ}^\alpha u_1^J,$$
$$u_I^{12} = s_\alpha^{12} \varphi_I^\alpha. \qquad (2.7)$$

…и этом предполагается, что ковектор с естественными координа…и $(s^\alpha,\ s_1^\alpha,\ s_\alpha^2,\ s_\alpha^{12})$ отображается в ковектор с естественными …динатами $(u^I,\ u_1^I,\ u_I^2,\ u_I^{12})$, причем $s^\alpha = \varphi^\alpha(u^I)$ и $s_1^\alpha = \varphi_I^\alpha u_1^I$. …внениями (2.7), можно сказать, определяется отображение $\overset{*}{T}{}^2\varphi$. …нения для $\overset{*}{T}{}^2\tilde{\varphi}$ аналогичны и мы их не приводим. Отображение … определяется уравнениями

$$\tilde{u}_J^2 b_I^J = u_I^2, \quad \tilde{u}_J^{12} b_I^J = u_I^{12},$$

…тображение $\overset{*}{T}{}^2 c$ — уравнениями

$$\tilde{s}_\beta^2 c_\alpha^\beta + \tilde{s}_\beta^{12} c_{\alpha\gamma}^\beta s_1^\gamma = s_\alpha^2, \quad \tilde{s}_\beta^{12} c_\alpha^\beta = s_\alpha^{12}. \qquad (2.8)$$

Переходим к вычислению инвариантов. Из (2.6) и (2.8) следует, … величины (u_I^1), (u_I^2) и (u_I^{12}) определяют три ковектора …осительно преобразований b. Поэтому функции

$$J_1 = u_I^1 u_I^{12}, \quad J_2 = u_I^1 u_I^2, \quad J_3 = u_I^2 u_I^2 \qquad (2.9)$$

…ются ортогональными инвариантами (инварианты $u_I^1 u_I^1$ и др. …ими однотипны, их рассматривать не будем). Из них самый …стой J_1, так как он сразу приводится к виду $J_1 \circ \overset{*}{T}{}^2\Phi = s_\alpha^1 s_\beta^{12} g^{\alpha\beta}$, где

$$g^{\alpha\beta} = \varphi_I^\alpha \varphi_I^\beta. \qquad (2.10)$$

…и преобразовании c величины (2.10) преобразуются как компо…ты дважды контравариантного слоевого тензора: $\tilde{g}^{\alpha\beta} = c_\lambda^\alpha c_\mu^\beta g^{\lambda\mu}$. …жно показать, что матрица $(g^{\alpha\beta})$ не вырождена, так как Φ — …мерсия. Обратную матрицу обозначим через $(g_{\alpha\beta})$. Как видим, …ор $(g^{\alpha\beta})$ отвечает в упомянутой двойственности тензору (g_{ij}) … (1.9)].

Дальнейшие рассуждения повторяют в своей логической по…довательности цепочку (1.11) — (1.17), в чем заключается …вная идея этой статьи.

Воспользуемся величинами

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = -g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} \varphi_{IJ}^\gamma \varphi_I^\lambda \varphi_J^\mu, \qquad (2.11)$$

…образующимися по закону

$$c_\lambda^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda = \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\alpha c_\beta^\lambda c_\gamma^\mu + c_{\beta\gamma}^\alpha \qquad (2.12)$$

(это проверяется непосредственно) с тем, чтобы величины (s^2_α) заменить величинами

$$S^2_\alpha = s^2_\alpha - s^{12}_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} s^\beta_1, \tag{2.1}$$

которые при c преобразуются как компоненты ковектора:

$$\widetilde{S}^2_\beta c^\beta_\alpha = S^2_\alpha. \tag{2.1}$$

Тогда разложение (2.7) для u^2_I примет вид

$$u^2_I = S^2_\alpha \varphi^\alpha_I + s^{12}_\alpha \Phi^\alpha_{IJ} u^J_1, \tag{2.1}$$

где

$$\Phi^\alpha_{IJ} = \varphi^\alpha_{IJ} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \varphi^\beta_I \varphi^\gamma_J. \tag{2.1}$$

Величины (2.16) преобразуются по закону

$$\widetilde{\Phi}^\alpha_{KL} b^K_I b^L_J = c^\alpha_\beta \Phi^\beta_{IJ}. \tag{2.1}$$

Повторяем, каждая формула (2.11)—(2.17) двойственна соответствующей формуле (1.11)—(1.17).

Дальнейшая подстановка с помощью (2.5) и (2.15) приводит инварианты J_2 и J_3 (2.9) к виду

$$J_2 \circ \overset{*}{T}{}^2\Phi = s^1_\alpha S^2_\beta g^{\alpha\beta} + s^1_\alpha s^{12}_\beta \varphi^\alpha_I \Phi^\beta_{IJ} u^J_1, \quad J_3 \circ \overset{*}{T}{}^2\Phi = S^2_\alpha S^2_\beta g^{\alpha\beta} + \\ + 2S^2_\alpha s^{12}_\beta \varphi^\alpha_I \Phi^\beta_{IJ} u^J_1 + s^{12}_\alpha s^{12}_\beta \Phi^\alpha_{IJ} \Phi^\beta_{IK} u^J_1 u^K_1.$$

Коэффициентами в этих разложениях, кроме величин $g^{\alpha\beta}$, являются выражения

$$\varphi^\alpha_I \Phi^\beta_{IJ} u^J_1, \quad \Phi^\alpha_{IK} \Phi^\beta_{KJ} u^I_1 u^J_1. \tag{2.1}$$

При любой фиксации величин (u^I_1) ими определяются два дважды контравариантных слоевых тензора относительно c. В сочетании с тензором $(g_{\alpha\beta})$ выражения (2.18) определяют на многообразии V_{n+r} одну линейную и одну квадратичную форму:

$$\Phi_1 = g_{\alpha\beta} \varphi^\alpha_I \Phi^\beta_{IJ} u^J_1, \quad \Phi_2 = g_{\alpha\beta} \Phi^\alpha_{IK} \Phi^\beta_{KJ} u^I_1 u^J_1. \tag{2.1}$$

Формуле (1.18) двойственна формула $\Phi^\alpha_{IJ} \Phi^\beta_{IJ} = \varphi^\alpha_{IJ} \varphi^\beta_{IJ} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\beta_{\rho\sigma} g^{\lambda\rho} g^{\mu\sigma}$; ею определяется дважды контравариантный слоевой тензор относительно c.

Примечание. Все это также находится в рамках схемы, предложенной в работе [1, § 4,] в случае, когда $\Gamma^i_{jk} = 0$. При этом величины (H^α_{ij}) совпадают с величинами (2.16).

6. На третьем и следующих этажах проводятся аналогичные рассуждения. Пусть, например, при отображении $\overset{*}{T}{}^3\Phi$ ковектор с координатами $(s^\alpha, s^\alpha_1, s^\alpha_2, s^\alpha_{12}, s^3_\alpha, s^{13}_\alpha, s^{23}_\alpha, s^{123}_\alpha)$ переходит в ков

с координатами (u^I, u^I_1, u^I_2, u^I_{12}, u^3_I, u^{13}_I, u^{23}_I, u^{123}_I). Самым существенным из уравнений перехода будет уравнение

$$u^3_I = s^3_\alpha \varphi^\alpha_I + s^{13}_\alpha \varphi^\alpha_{IJ} u^J_I + s^{23}_\alpha \varphi^\alpha_{IJ} u^J_2 + s^{123}_\alpha (\varphi^\alpha_{IJ} u^J_{12} + \varphi^\alpha_{IJK} u^J_1 u^K_2). \quad (2.20)$$

Это разложение, однако, не приводит инварианты к желаемому виду. Поэтому надо ввести величины $\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\mu\nu} = -g_{\lambda\rho} g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} \overset{\alpha}{\varphi}_{IJK} \overset{\rho}{\varphi}_I \overset{\sigma}{\varphi}_J \overset{\tau}{\varphi}_K$, преобразующиеся по закону $\overset{*}{\tilde{\Gamma}}{}^\alpha_{\rho\sigma\tau} c^\rho_\lambda c^\sigma_\mu c^\tau_\nu + c^\alpha_{\lambda\mu\nu} = 3c^\alpha_{\beta(\lambda} \Gamma^\beta_{\mu\nu)} + c^\alpha_\beta \Gamma^\beta_{\lambda\mu\nu}$, и с их помощью определить величины $\Gamma^\alpha_{\lambda\mu\nu} = \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}$, которые преобразуются по такому закону: $c^\alpha_\gamma \Gamma^\gamma_{\lambda\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\alpha_{\rho\sigma\tau} c^\rho_\lambda c^\sigma_\mu c^\tau_\nu + 3\tilde{\Gamma}^\alpha_{\rho\sigma} c^\rho_{(\lambda} c^\sigma_{\mu\nu)} + c^\alpha_{\lambda\mu\nu}$.

После этого вводятся новые координаты

$$S^{13}_\alpha = s^{13}_\alpha - s^{123}_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} s^\beta_2, \quad S^{23}_\alpha = s^{23}_\alpha - s^{123}_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} s^\beta_1, \quad S^3_\alpha = s^3_\alpha - s^{13}_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} s^\beta_1 - \\ - s^{23}_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} s^\beta_2 - s^{123}_\gamma (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} s^\beta_{12} + \Gamma^\gamma_{\alpha\lambda\mu} s^\lambda_1 s^\mu_2)$$

и величины $\Phi^\alpha_{IJK} = \overset{\alpha}{\varphi}_{IJK} + 3\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \overset{\beta}{\varphi}_{(IJ} \overset{\gamma}{\varphi}_{K)} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu\nu} \overset{\lambda}{\varphi}_I \overset{\mu}{\varphi}_J \overset{\nu}{\varphi}_K$, эти координаты преобразуются при c как компоненты трех ковекторов, а величины — по закону $\tilde{\Phi}^\alpha_{PQS} b^P_I b^Q_J b^S_K = c^\alpha_\beta \Phi^\beta_{IJK}$. В результате разложение (2.20) принимает вид $u^3_I = S^3_\alpha \varphi^\alpha_I + S^{13}_\alpha \Phi^\alpha_{IJ} u^J_1 + S^{23}_\alpha \Phi^\alpha_{IJ} u^J_2 + S^{123}_\alpha (\Phi^\alpha_{IJ} u^J_{12} + \Phi^\alpha_{IJK} u^J_1 u^K_2)$.

Теперь инвариант $I_4 = u^3_I u^3_I$ приводится к сумме инвариантов с тензорными коэффициентами относительно преобразования c, среди которых $\varphi^\alpha_K \Phi^\beta_{KIJ} u^I_1 u^J_2$, $\Phi^\alpha_{IL} \Phi^\beta_{LJK} u^I_1 u^J_1 u^K_2$, $\Phi^\alpha_{IJK} \Phi^\beta_{IPQ} u^J_1 u^K_2 u^P_1 u^Q_2$. К формам (2.19) добавятся еще формы $\Phi_3 = g_{\alpha\beta} \varphi^\alpha_I \Phi^\beta_{IJK} u^J_1 u^K_2$, $\Phi_4 = g_{\alpha\beta} \Phi^\alpha_{IJ} \Phi^\beta_{IPQ} u^J_1 u^P_1 u^Q_2$, $\Phi_5 = g_{\alpha\beta} \Phi^\alpha_{IJK} \Phi^\beta_{IPQ} u^J_1 u^K_2 u^P_1 u^Q_2$.

Изучение геометрических свойств этих объектов выходит за рамки этой статьи. Ограничимся лишь одним примером.

Пример. Пусть $n = r = 1$. Верхний индекс у производных $\{\varphi_I, \varphi_{IJ}, \ldots\}$ будем опускать. Рассмотрим матрицы порядка 2 $A = (\varphi_I \varphi_J)$ и $B = (\varphi_{IJ})$ и введем величины $S = \operatorname{tr} A$ — квадрат градиента функции φ, $M = \operatorname{tr} B$ — лапласиан, $L = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2 B - \operatorname{tr} B^2)$ — гессиан, $T = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B - \operatorname{tr} AB$. Тогда $LS - MT = \operatorname{tr} AB^2 - \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B^2$.

Величинами S, M, L, T исчерпываются инварианты второй дифференциальной окрестности относительно b. При изменении параметризации семейства кривых, т. е. при преобразовании c эти величины преобразуются так: $\tilde{M} = c'M + c''S$, $\tilde{S} = (c')^2 S$, $\tilde{L} = (c')^2 L + c'c''T$, $\tilde{T} = (c')^3 T$. Отсюда получим два абсолютных инварианта — $\frac{T}{S^{3/2}}$ и $\frac{LS - MT}{S^2}$. Первый определяет кривизну кривой в рассматриваемой точке. В этом случае тензор (2.10) имеет единственную компоненту, равную S. Величина (2.11) также единственна и равна $\Gamma_{22}^2 = -\frac{\operatorname{tr} AB}{\operatorname{tr}^2 A}$. Матрица (Φ_{IJ}) имеет вид $B + \Gamma_{22}^2 A$.

Список литературы

1. Рахула М. О. Инфинитезимальная связность в расслоении.— В кн.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Вып. 8. М., 1976, с. [illegible]–184.
2. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II. М., ИЛ. 1948. 348 с.
3. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., ГИТТЛ, 1948. 408 с.
4. Дьедонне Ж., Керрол Дж. Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. М., «Мир», 1974. 210 с.

Поступила 19 апреля 1977 г.

УДК 513.73

М. Р. Роговой

О СОПРЯЖЕННЫХ И БИСОПРЯЖЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ V_n^{n-1} В E_n

1. Предварительные сведения

Рассмотрим в евклидовом пространстве E_n распределение (A, α), где A — точка пространства, α — гиперплоскость, инцидентная точке A.

Отнесем это распределение к реперу $R(A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \dots \boldsymbol{e}_n)$, где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ — орты в гиперплоскости α; $\boldsymbol{e}_n$ — единичный вектор, ортогональный гиперплоскости α.

Инфинитезимальное перемещение репера R определяется уравнениями

$$dA = \omega^I \boldsymbol{e}_I, \quad d\boldsymbol{e}_I = \omega_I^K \boldsymbol{e}_K, \tag{1}$$

$$\omega_I^K = -\omega_K^I. \tag{2}$$

Формы ω_I^K удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_I^K = \omega_I^J \wedge \omega_J^K. \tag{3}$$

Основная система дифференциальных уравнений распределения

$$\omega_i^n = \Gamma_{ik}^n \omega^k. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем индексы пробегают следующие значения: $I, J, K, \ldots = 1, 2, \ldots, n$; $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1$.

Для перемещения точки A в гиперплоскости α выполняется уравнение

$$\omega^n = 0. \tag{5}$$

Если условие полной интегрируемости этого уравнения не выполняется, т. е.

$$\Gamma^n_{ij} \neq \Gamma^n_{ji} \qquad (i \neq j), \tag{6}$$

множество интегральных кривых уравнения (5), инцидентных точке A, называют неголономной гиперповерхностью.

2. Сопряженные направления

Свойства сопряженных направлений на многомерных поверхностях изучались В. В. Рыжковым [1] и М. А. Акивисом [2], а на неголономных поверхностях — в работах [3, 5].

На голономной поверхности сопряженность обладает свойством инволютивности: если одно направление сопряжено другому направлению, то и другое направление сопряжено первому направлению.

На неголономной поверхности этого свойства нет. Поэтому вводим следующее

Определение. *Направление dA называется сопряженным направлению δA на неголономной гиперповерхности, если направление $d\delta A$ принадлежит гиперплоскости α, т. е.*

$$d\delta A \equiv 0\,(\alpha). \tag{7}$$

Пользуясь формулами (1) и принимая во внимание уравнение (5), находим

$$\delta A = \omega^k(\delta) e_k, \quad d\delta A = (d\omega^k(\delta) + \omega^j(\delta)\,\omega^k_j(d))\,A + \omega^i(\delta)\,\omega^n_i(d)\, e_n; \tag{8}$$

и условие сопряженности (7) направления dA направлению δA принимает следующий вид:

$$\omega^i(\delta)\,\omega^n_i(d) = 0, \tag{9}$$

а если воспользоваться уравнениями (4),

$$\Gamma^n_{ij}\,\omega^i(\delta)\,\omega^j(d) = 0. \tag{10}$$

Из условия (10) следует, что данному фиксированному направлению δA на неголономной гиперповерхности соответствует сопряженная $(n-2)$-плоскость: любое направление dA, принадлежащее этой $(n-2)$-плоскости, сопряжено направлению δA. В координатах x^j относительно репера уравнение этой $(n-2)$-плоскости запишется так:

$$\Gamma^n_{ij}\omega^i(\delta)x^j = 0. \tag{11}$$

Отметим, что в силу условий (6) условие (10) не будет выполняться, если поменять местами направления δA и dA; это означает, что свойство инволютивности сопряженных направлений, которое имеет место для голономной гиперповерхности, здесь не соблюдается.

На неголономной гиперповерхности существуют самосопряженные направления; уравнение, которому они удовлетворяют, мы получим, если в уравнении (10) положить $\omega^i(\delta) = \omega^i(d)$:

$$\Gamma^n_{ij}\omega^i(d)\,\omega^j(d) = 0. \tag{12}$$

Это уравнение асимптотического конуса неголономной гиперповерхности. Прямолинейные образующие этого конуса — это асимптотические направления неголономной гиперповерхности [5].

В координатах относительно репера R уравнение асимптотического конуса

$$\Gamma^n_{ij}x^i x^j = 0. \tag{13}$$

3. Ортосопряженные направления

На голономной гиперповерхности существуют ортогональные взаимно сопряженные направления — это направления линий кривизны.

На неголономной гиперповерхности главные направления (направления линий кривизны 1-го рода) взаимно ортогональны, однако они не сопряжены.

В самом деле, главные направления неголономной гиперповерхности определяются уравнениями [4]

$$\left|\frac{1}{2}(\Gamma^n_{ij} + \Gamma^n_{ji}) + \delta^j_i k^{(1)}\right| = 0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}(\Gamma^n_{ij} + \Gamma^n_{ji})\,\omega^j + \delta^j_i k^{(1)}\omega^i = 0. \tag{15}$$

В каноническом репере, где направления орт $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ совпадают с главными направлениями неголономной гиперповерхности и выполняются условия [4]

$$\Gamma^n_{ij} + \Gamma^n_{ji} = 0 \quad (i \neq j), \tag{16}$$

из уравнения (14) следует для главных кривизн первого рода

$$k^{(1)}_i = -\Gamma^n_{ii}, \tag{17}$$

а уравнения (15) принимают вид

$$\omega^1 = \omega^2 = \cdots = \omega^{i-1} = \omega^{i+1} = \cdots = \omega^{n-1} = 0. \tag{18}$$

Из условия сопряженности (10) следует, что главному направлению (18) соответствует сопряженная $(n-2)$-плоскость

$$\Gamma^n_{ij}\omega^j(d) = 0, \tag{19}$$

которая, очевидно, не содержит ни одного главного направления неголономной гиперповерхности. Следовательно, здесь сопряженность главных направлений не имеет места.

В случае голономности, когда $\Gamma^n_{ij} = \Gamma^n_{ji}$, из условия (16) следует $\Gamma^n_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$; уравнение $(n-2)$-плоскости (19) приобретает вид $\omega^i = 0$; т. е. главному направлению (18) сопряжена $(n-2)$-плоскость, определяемая другими $n-2$ главными направлениями голономной гиперплоскости, и эта сопряженность инволютивна.

Возникает вопрос, существуют ли на неголономной гиперповерхности направления, обладающие ортогональными сопряженными им направлениями?

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1. *На неголономной гиперповерхности в общем случае существуют $n-1$ направлений таких, что каждому направлению соответствует ортогональная сопряженная $(n-2)$-плоскость.*

Доказательство. Направлению $\delta A = \omega^j(\delta) e_j$ соответствует сопряженная $(n-2)$-плоскость (11) $\Gamma^n_{ij}\omega^i(\delta) x^j = 0$. Условия ортогональности этой $(n-2)$-плоскости направлению δA, $\frac{\Gamma^n_{ij}\omega^i(\delta)}{\omega^j(\delta)} = -\lambda$, приводят к однородной системе линейных уравнений относительно $\omega^i(\delta)$,

$$(\Gamma^n_{ij} + \delta^j_i \lambda)\,\omega^i(\delta) = 0, \tag{20}$$

где δ^j_i — символ Кронекера.

Величина λ определяется из условия равенства нулю определителя системы уравнений (20),

$$|\Gamma^n_{ij} + \delta^j_i \lambda| = 0; \tag{21}$$

это уравнение $(n-1)$-ой степени относительно λ имеет в общем случае $n-1$ различных корней λ_j и каждому корню система уравнений (20) ставит в соответствие направление

$$\delta_j A = \omega^i(\delta_j)\, e_i, \tag{22}$$

обладающее указанным в теореме свойством.

Эти направления условимся называть ортосопряженными направлениями.

Выясним геометрический смысл величин λ_j. Для этого рассмотрим уравнения, определяющие линии кривизны 2-го рода неголономной гиперповерхности [4]:

$$|\Gamma^n_{ij} + \delta^j_i k^{(2)}| = 0, \tag{23}$$

$$(\Gamma^n{}_j + \delta^j_i k^{(2)})\,\omega^j = 0. \tag{24}$$

Сравнивая уравнения (23) и (20), устанавливаем, что

$$\lambda_j = k^{(2)}_j, \tag{25}$$

т. е. величины λ_j совпадают с главными кривизнами 2-го рода неголономной гиперповерхности. Однако, как следует из сопоставления систем уравнений (24) и (20), ортосопряженные направления не совпадают с линиями кривизны 2-го рода.

С другой стороны, умножая уравнения (20) на ω^j и суммируя по индексу j, находим, что

$$\lambda = -\frac{\Gamma^n_{ij}\,\omega^i\omega^j}{(\omega^i)^2}, \tag{26}$$

т. е. λ — это нормальная кривизна неголономной гиперповерхности в ортосопряженном направлении. Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Нормальные кривизны неголономной гиперповерхности в ортосопряженных направлениях соответственно равны ее главным кривизнам 2-го рода.*

Возникает еще такой вопрос. Каждой $(n-2)$-плоскости, инцидентной точке A и принадлежащей гиперплоскости α, соответствует одномерное сопряженное направление. Существует ли $(n-2)$-плоскость, ортогональная своему сопряженному одномерному направлению?

Нетрудно показать, что любые $n-2$ ортосопряженных направлений определяют $(n-2)$-плоскость, ортогональную своему сопряженному одномерному направлению.

В самом деле, каждому ортосопряженному направлению соответствует ортогональная сопряженная $(n-2)$-плоскость. Одномерное направление, общее этим плоскостям, будет ортогональным $(n-2)$-плоскости, определяемой $n-2$ ортосопряженными направлениями.

4. Бисопряженные направления

Определение. *Одномерное направление, сопряженное $(n-2)$-плоскости, называется бисопряженным одномерному направлению, которому эта $(n-2)$-плоскость сопряжена.*

Одномерному направлению $\delta A = \omega^j(\delta)\,\boldsymbol{e}_j$ соответствует сопряженная $(n-2)$-плоскость $\Gamma^n_{ij}\omega^i(\delta)\,\omega^j(d) = 0$; этой $(n-2)$-плоскости соответствует сопряженное направление $\omega^i(\overline{d})$; оно для любого направления $\omega^i(d)$, принадлежащего $(n-2)$-плоскости (27), удовлетворяет условию

$$\Gamma^n_{ij}\omega^i(d)\,\omega^j(\overline{d}) = 0, \tag{27}$$

или, меняя местами индексы суммирования i и j,

$$\Gamma^n_{ij}\omega^i(\overline{d})\,\omega^j(d) = 0. \tag{28}$$

Сопоставив уравнения (27) и (28), получим условия, которым должно удовлетворять направление $\omega^i(\overline{d})$, бисопряженное направлению $\omega^i(\delta)$:

$$\Gamma^n_{ji}\omega^i(\overline{d}) = \lambda\Gamma^n_{ij}\omega^i(\delta), \tag{29}$$

где λ — произвольный множитель.

Из этой системы уравнений, считая $\omega^i(\delta)$ заданными, однозначно определяется направление $\omega^i(\overline{d})$, бисопряженное направлению $\omega^i(\delta)$, если определитель системы

$$|\Gamma^n_{ji}| \neq 0. \tag{30}$$

Геометрический смысл условия (30) состоит в том, что полная кривизна 2-го рода неголономной гиперповерхности отлична от нуля. Случай, когда полная кривизна 2-го рода неголономной гиперповерхности равна нулю, требует дополнительного исследования.

Выясним, существуют ли направления $\omega^i(\delta)$, обладающие ортогональными бисопряженными направлениями.

С этой целью выразим из системы уравнений (29) формы $\omega^i(\overline{d})$ через формы $\omega^i(\delta)$: $\omega^i(\overline{d}) = \frac{\lambda}{|\Gamma^n_{ij}|} A_{ij}\omega^j(\delta)$, где A_{ij} — миноры $(n-1)$-го порядка матрицы $\| \Gamma^n_{ij} \mid \Gamma^n_{ij} \|$. Условие ортогональности направлений $\omega^i(\delta)$ и $\omega^i(\overline{d})$ $\sum_i \omega^i(\overline{d})\,\omega^i(d) = 0$ приводит к следующему уравнению $A_{ij}\omega^i(\delta)\,\omega^j(\delta) = 0$; это уравнение конической $(n-2)$-поверхности.

Прямолинейные образующие этой конической поверхности обладают ортогональными бисопряженными направлениями.

Список литературы

1. Рыжков В. В. Сопряженные системы на многомерных поверхностях.—«Тр. Моск. мат. о-ва», 1958, т. 7, с. 179—226.
2. Акивис М. А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем.— «Труды геометр. семинара», 1966, т. 1, с. 7—31.
3. Obădeanu. V. Extinderea relatiei de conjugare pe varietătile neolonome. Studii sicercetari mat. Acad. RSR, 20, № 1, 1968, p. 25—30.
4. Роговой М. Р. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в n-мерном пространстве.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 5—6, Харьков, 1968, с. 126—138.
5. Роговой М. Р. О сопряженных направлениях на неголономном многообразии V^{n-1}_n в P_n.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 10, Харьков, 1970, с. 50—65.

Поступила 30 декабря 1976 г.

УДК 513.741

В. П. Федотов

О ПОНЯТИЯХ ГРАНИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

§ 1. Остовы и нормальные реперы

1.1 Следуя Ларману [1], i-остовом $\partial_i K$ произвольного множества K в евклидовом пространстве R^n называем совокупность тех точек K, которые не являются центром $(i+1)$-мерного шара, содержащегося в K. Частными случаями остовов являются само $K = \partial_n K$, его граница $\partial K = \partial_{n-1} K$, множество $\partial_e K = \partial_0 K$ его крайних точек. Если K — многогранник, то $\partial_i K$ — объединение всех его замкнутых граней размерности i. Отметим очевидные свойства остовов: $\partial_i \partial_j K = \partial_j \partial_i K = \partial_{\max\{i,\, j\}} K$, $\partial_0 K \subset \partial_1 K \subset \ldots \subset \partial_{n-1} K \subset \subset \partial_n K = K$. Ниже рассматриваются только выпуклые компакты $K \subset R^n$.

1.2. Пусть $\nu_1 = S^{n-1}$. Обозначим $\Gamma^1(K;\ \nu_1) = \{x \in K : \langle x,\ \nu_1\rangle = \max\limits_{y \in K}\langle y,\ \nu_1\rangle\}$. Говорят, что точки $\Gamma^1(K;\ \nu_1)$ имеют нормаль ν_1. Будем называть $\{\nu_1\}$ нормальным репером первого ранга в точках $\Gamma^1(K;\ \nu_1)$. Так как $\Gamma^1(K,\ \nu_1)$ является выпуклым компактом в гиперплоскости $\langle x,\ \nu_1\rangle = \max\limits_{y \in K}\langle y,\ \nu_1\rangle$, то для произвольного единичного вектора $\nu_2 \perp \nu_1$ можно построить множество $\Gamma^1(\Gamma^1(K;\ \nu_1);\ \nu_2)$; обозначим его $\Gamma^2(K;\ \nu_1,\ \nu_2)$. Назовем $\{\nu_1,\ \nu_2\}$ нормальным репером второго ранга в точках $\Gamma_2(K;\ \nu_1,\ \nu_2)$. Аналогично для попарно ортогональных $\nu_1, \ldots, \nu_i$ определим $\Gamma^i(K;\ \nu_1, \ldots, \nu_i) = \Gamma^1(\Gamma^{i-1}(K;\ \nu_1, \ldots, \nu_{i-1});\ \nu_i)$ и будем говорить, что его точки имеют нормальный репер i-ого ранга $\{\nu_1, \ldots, \nu_i\}$. Сами множества $\Gamma^i(K;\ \nu_1, \ldots, \nu_i)$ назовем гранями i-ого ранга. Заметим, что $\Gamma^{i+j}(K;\ \nu_1, \ldots, \nu_{i+j}) = \Gamma^j(\Gamma^i(K;\ \nu_1, \ldots, \nu_i);\ \nu_{i+1}, \ldots, \nu_{i+j})$, т. е. грань грани является гранью, причем ранги складываются. Нормальный репер n-ого ранга назовем полным. Кроме того, введем пустой нормальный репер (нулевого ранга), им по определению обладают все точки $K = \Gamma^0(K)$. Через $\Gamma^i(K)$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ обозначим $\bigcup\limits_{\{\nu_1, \ldots, \nu_i\}} \Gamma^i(K;\ \nu_1, \ldots, \nu_i)$.

1.3. **Теорема.** *Множество $\Gamma^{n-i}(K)$ всех точек выпуклого компакта $K \subset R^n$, имеющих хотя бы один нормальный репер $(n-i)$-ого ранга $(0 \leqslant i \leqslant n)$, совпадает с i-остовом $\partial_i K$.*

1.4. **Лемма.** *Пусть* $\nu \in S^{n-1}$. *Тогда* $\Gamma^1(K_1+K_2;\nu)=\Gamma^1(K_1;\nu)+\Gamma^1(K_2;\nu)$, *где* $+$ *означает сложение Минковского* [3].

Доказательство. Включение $\Gamma^1(K_1+K_2;\nu)\subset\Gamma^1(K_1;\nu)+\Gamma^1(K_2;\nu)$ очевидно. Докажем обратное. Пусть $x\in\Gamma^1(K_1+K_2;\nu)$. Так как $x\in K_1+K_2$, то существуют $x_1\in K_1$ и $x_2\in K_2$ такие, что $x=x_1+x_2$. Докажем, что $x_1\in\Gamma^1(K_1;\nu)$ и $x_2\in\Gamma^1(K_2;\nu)$. Допустим противное. Тогда существуют $x_1^0\in K_1$ и $x_2^0\in K_2$ такие, что $\langle x_1^0,\nu\rangle\geqslant\langle x_1,\nu\rangle$ и $\langle x_2^0,\nu\rangle\geqslant\langle x_2,\nu\rangle$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое. Но тогда $\langle x_1^0+x_2^0,\nu\rangle>\langle x_1+x_2,\nu\rangle=\langle x,\nu\rangle$, т. е. $\langle x,\nu\rangle\neq\max\limits_{y\in K_1+K_2}\langle y,\nu\rangle$, что противоречит $x\in\Gamma^1(K_1+K_2,\nu)$.

1.5. Следствие. *Пусть* $\nu_1,\ldots,\nu_i$ *попарно ортогональны. Тогда* $\Gamma^i(K_1+K_2;\nu_1,\ldots,\nu_i)=\Gamma^i(K_1;\nu_1,\ldots,\nu_i)+\Gamma^i(K_2;\nu_1,\ldots,\nu_i)$.

1.6. Говорим, что нормальный репер $\{\nu_1,\ldots,\nu_i\}$ максимален в точке $x\in K$, если в этой точке не существует никакого нормального репера большего ранга, первые i векторов которого совпадают с $\nu_1,\ldots,\nu_i$ в том же порядке.

1.7. **Лемма.** *Если* $x\in K$ *имеет максимальный нормальный репер* $\{\nu_1,\ldots,\nu_j\}$ *с* $j<n-i$, *то* $x\notin\partial_i K$.

Доказательство. Обозначим через H_j пересечение j гиперплоскостей $\langle x,\nu_k\rangle=\max\limits_{y\in\Gamma^{k-1}(K;\nu_1,\ldots,\nu_{k-1})}\langle y,\nu_k\rangle$. Так как $\{\nu_1,\ldots,\nu_j\}$ не содержится ни в каком нормальном репере большего ранга, то x является относительно внутренней точкой $\Gamma^j(K;\nu_1,\ldots,\nu_j)$, т. е. некоторая окрестность x в H_j содержится в $\Gamma^j(K;\nu_1,\ldots,\nu_j)$. Это означает, что $\Gamma^j(K;\nu_1,\ldots,\nu_j)$ содержит некоторый шар B с центром x, размерность которого $\dim B=\dim H_j=n-j$. Так как $\Gamma^j(K;\nu_1,\ldots,\nu_j)\subset K$, то $B\subset K$. Из $j<n-i$ следует $i<n-j=\dim B$, т. е. x — центр шара размерности больше i, содержащегося в K.

1.8. **Лемма.** *Если* $x\notin\partial_i K$, *то* x *не имеет никакого нормального репера* $(n-i)$*-ого ранга.*

Доказательство. $x\notin\partial_i K$ означает, что существует $(i+1)$-мерный шар $B\subset K$ с центром в x. Допустим, что в x есть нормальный репер $(n-i)$-ого ранга $\{\nu_1,\ldots,\nu_{n-i}\}$. Пусть H_1 — опорная к K гиперплоскость с нормалью ν_1. Так как $x\in H_1$ и является центром симметрии B, то либо $B\subset H_1$, либо B имеет точки с обеих сторон от H_1. Таким образом, $B\subset H_1\cap K=\Gamma^1(K;\nu_1)$. Аналогично, $B\subset\Gamma^2(K;\nu_1,\nu_2)$ и т. д. до $B\subset\Gamma^{n-i}(K,\nu_1,\ldots,\nu_{n-i})$, т. е. B лежит в пересечении $n-i$ попарно ортогональных гиперплоскостей $\langle x,\nu_j\rangle=\max\limits_{y\in\Gamma^{j-1}(K;\nu_1,\ldots,\nu_{j-1})}\langle y,\nu_j\rangle$. Итак, $i+1=\dim B\leqslant\dim\Gamma^{n-i}\times\times(K;\nu_1,\ldots,\nu_{n-i})$. Полученное противоречие доказывает лемму. Сравнение двух последних лемм дает доказательство теоремы.

1.9. Следствие. *Пусть η — ортонормированная $(n \times n)$-матрица; $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — векторы ее строк. Тогда множество $\Gamma^n(K; \eta_1, \ldots, \eta_n)$ состоит из одной крайней точки K.*

Тем самым определено отображение $\Gamma^n_k: O^n \to \partial_0 K$ группы вращений евклидова пространства на множество крайних точек выпуклого компакта $K \subset R^n$.

1.10. Следствие. $\partial_i (K_1 + K_2) \subset \partial_i K_1 + \partial_i K_2$.

1.11. Следствие. *Все максимальные в $x \in K$ нормальные реперы имеют один и тот же ранг.*

1.12. Следствие. *Если в $x \in K$ к K можно провести i линейно независимых опорных гиперплоскостей, то x имеет нормальный репер i-ого ранга.*

§ 2. Максимальное нормальное подпространство в точке

2.1. Линейное подпространство, базисом которого является некоторый нормальный репер в точке x, будем называть нормальным подпространством в x.

Теорема. *Линейная оболочка объединения всех нормальных подпространств в точке x сама является нормальным подпространством, натянутым на любой из максимальных в x нормальных реперов.*

Доказательство. Пусть $\{\eta_1, \ldots, \eta_{n-i}\}$ — максимальный нормальный репер в x, а $\{\nu_1, \ldots, \nu_j\}$ — любой другой нормальный репер в x. Достаточно доказать, что $\nu_1, \ldots \nu_j$ содержатся в подпространстве H с базисом $\eta_1, \ldots, \eta_{n-i}$. Допустим противное. Не теряя общности, считаем, что $\nu_j \notin H$, а остальные векторы этого репера содержатся в H.

Согласно 1.7, x является внутренней точкой некоторого i-мерного шара B, лежащего в K и в подпространстве H^0, ортогонально дополнительном к H. С другой стороны, $x \in \Gamma^{j-i}(K; \nu_1, \ldots, \nu_{j-1})$ и является граничной точкой этого множества, соответствующей нормали ν_j. Так как $\nu_1, \ldots, \nu_{j-1} \in H$, то $\Gamma^{j-1}(K; \nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) \supset B$. Пусть H_{j-1} и H_j — пересечения гиперплоскостей, содержащих x и имеющих нормали $\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}$ и $\nu_1, \ldots, \nu_j$; H_j — гиперплоскость в H_{j-1}. Так как $x \in H_j$ является центром симметрии B, то в плоскости H_{j-1} у B есть точки с обеих сторон от H_j. Последнее невозможно, так как $B \subset \Gamma^{j-i}(K; \nu_1, \ldots, \nu_{j-1})$, а все точки $\Gamma^{j-1}(K; \nu_1, \ldots, \nu_{j-1})$ лежат в H_{j-1} с одной стороны от H_j. Из противоречия следует $\nu_j \in H$, что и доказывает теорему.

2.2. Следствие. *Подпространства, натянутые на различные максимальные нормальные реперы в x, совпадают. Это единственное максимальное нормальное подпространство в x обозначим $M(K, x)$.*

2.3. **Теорема.** *Пусть B — шар некоторой размерности с центром в x, содержащийся в K. Тогда его линейная оболочка $L(B)$ ортогональна подпространству $M(K, x)$.*

Доказательство. Пусть $\{\nu_1, \ldots, \nu_j\}$ — максимальный нормальный репер в x. Тогда $M(K, x) = L(\{\nu_1, \ldots, \nu_j\})$. С другой стороны, как и в 2.1, мы можем доказать, что $B \subset \Gamma^j(K; \nu_1, \ldots, \nu_j)$, откуда $L(B) \subset L(\Gamma^j(K; \nu_1, \ldots, \nu_j))$. Но $L(\Gamma^j(K; \nu_1, \ldots, \nu_j))$ и $L(\{\nu_1, \ldots, \nu_j\})$ взаимно ортогональны, что и доказывает ортогональность $L(B)$ и $M(K, x)$.

2.4. Следствие. *Если B — шар максимальной размерности с центром в x, то $L(B)$ и $M(K, x)$ ортогонально дополняют друг друга. Это следует из теорем* 1.3 *и* 2.3.

§ 3. Нормали окрестности точки

3.1. Пусть $U \subset \partial K$. Его сферическим изображением $\omega(U)$, точнее $\omega(K; U)$, называется множество единичных нормалей к K в точках U. Можно рассматривать $\omega(U)$ как множество нормальных реперов первого ранга в точках U. Такая перефразировка определения допускает в качестве U произвольные подмножества R^n, а не только подмножества ∂K. Кроме того, можно по аналогии рассматривать множества $\omega^j(K; U)$ всех нормальных реперов j-ого ранга в точках U, являющиеся подмножествами многообразий Штифеля.

3.2. Локальным подпространством сферического изображения точки $x \in K$ назовем подпространство $\operatorname{lw}(K, x) = \bigcap\limits_{U \ni x} (L(\omega(K; U)))$.

Здесь пересечение берется по всем окрестностям U точки x.

Локальным нормальным подпространством в x называем подпространство $\operatorname{lm}(K, x) = \bigcap\limits_{U \ni x} (L(\bigcup\limits_{y \in U} M(K, y)))$. Пересечение по всем окрестностям x, а объединение — по всем точкам окрестности.

3.3. **Теорема.** *Только что введенные пространства* $\operatorname{lw}(K, x)$ *и* $\operatorname{lm}(K, x)$ *совпадают.*

3.4. **Лемма.** $\operatorname{lw}(K, x) \subset \operatorname{lm}(K, x)$.

Доказательство. $\operatorname{lw}(K, x) = \bigcap\limits_{U \ni x} (L(\bigcup\limits_{y \in U} (\omega(K; y)))) = \bigcap\limits_{U \ni x} (L(\bigcup\limits_{y \in U} (L(\omega(K; y)))))$. Теперь остается заметить, что $L(\omega(K; y)) \subset M(K, y)$, так как $L(\omega(K; y))$ — линейная оболочка всех нормальных реперов первого ранга, а $M(K, y)$ — всех рангов.

3.5. **Лемма.** *Для всякой точки $x \in K$ существует $\rho < 0$ такое, что $\operatorname{lm}(K, x) = L(\bigcup\limits_{y \in U_\rho} M(K, y))$ и $\operatorname{lw}(K, x) = L(\omega(K; U_\rho))$, где U_ρ — метрическая радиуса ρ окрестность x* (в ∂K, K *или* R^n).

Доказательство. Так как метрические окрестности U_r образуют базу окрестностей в x, то в определениях $\operatorname{lm}(K, x)$ и $\operatorname{lw}(K, x)$ пересечения достаточно брать только по таким окрестностям. Рассмотрим семейство подпространств $E(r) = L(\bigcup\limits_{y \in U_r} M(K, y))$ и функцию $f(r) = \dim E(r)$. Если $r > r'$, то $E(r') \subset E(r)$, т. е. $f(r)$ монотонно не убывает. Так как $f(r)$ принимает конечное число значений, а при $r \to 0^+$ имеет предел $\dim \operatorname{lm}(K, x)$, то $f(r)$ постоянна на некотором интервале $0 \leqslant r \leqslant \rho_m$. На этом интервале $E(r)$ образуют монотонно неубывающее семейство подпространств равной размерности, т. е. эти подпространства совпадают друг с другом, а значит, и с $\operatorname{lm}(K, x)$. Аналогично для $\operatorname{lw}(K, x)$ строится интервал $0 \leqslant r \leqslant \rho_w$ с подобным свойством. Для завершения доказательства остается положить $\rho = \min\{\rho_m, \rho_w\}$.

3.6. Следствие. *Если H — подпространство, ортогональное $\operatorname{lw}(K, x)$, то оно ортогонально $L(\omega(K; y))$ при любом $y \in U_\rho$.* Это означает, что для $y \in \operatorname{int} U_\rho$ плоскость H_y, содержащая y и параллельная H, пересекает U_ρ по множеству той же размерности, что и H, причем y является внутренней относительно H_y точкой пересечения.

3.7. Следствие. *Если $\dim \operatorname{lw}(K, x) = n - i$, $i \neq 0$, то $x \notin d(\partial_{i-1} K)$.*

3.8. **Лемма.** $\operatorname{lw}(K, x) \supset M(K, x)$.

Доказательство. Нужно доказать, что максимальный в x нормальный репер содержится в $\operatorname{lw}(K, x)$. Докажем индукцией по j, что каждый нормальный репер j-ого ранга содержится в $\operatorname{lw}(K, x)$, $\nu_1 \in \operatorname{lw}(K, x)$ по определению lw. Пусть $\nu_1, \ldots,$ $\nu_{j-1} \in \operatorname{lw}(K, x)$. Покажем, что $\nu_j \in \operatorname{lw}(K, x)$. Обозначим H ортогональное дополнение к $\operatorname{lw}(K, x)$, а H_x — плоскость, проходящую через x параллельно H. Так как $\nu_1, \ldots, \nu_{j-1} \in \operatorname{lw}(K, x)$, то $\Gamma^{j-1}(K; \nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) \subset H_x$. Согласно 3.6, x — внутренняя относительно H_x точка $H_x \cap K = \Gamma^{j-1}(K; \nu_1, \ldots, \nu_{j-1})$, откуда $\nu_j \perp H_x$, т. е. $\nu_j \in \operatorname{lw}(K, x)$.

3.9. **Лемма.** $\operatorname{lw}(K, x) = \bigcap\limits_{U \ni x} L(\bigcup\limits_{y \in U} \operatorname{lw}(K, y))$.

Доказательство. Применяя 3.5, имеем

$$\operatorname{lw}(K, x) = L(\omega(K; U_\rho(x))) = L(\omega(K; \bigcup_{y \in U_{\rho/2}(x)} U_{\rho/2}\, \omega(K; U_{\rho/2}(y))) =$$

$$= L(\bigcup_{y \in U_{\rho/2}(x)} L(\omega(K; U_{\rho/2}(y)))) = L(\bigcup_{y \in U_{\rho/2}(x)} \operatorname{lw}(K, y)) = \bigcap_{U \ni x} L(\bigcup_{y \in U} \operatorname{lw}(K, y)).$$

3.10. Из 3.8. и 3.9 следует $\operatorname{lw}(K, x) \supset \operatorname{lm}(K, x)$, что дополняет 3.4 до утверждения теоремы.

§ 4. Остовы внешнего параллельного тела

4.1. Внешним параллельным телом множества K называется $K^\rho = K + \rho B$, где B — стандартный единичный шар. K^ρ является объединением всех шаров радиуса ρ с центрами в K.

4.2. **Лемма.** *На K^ρ сферическое изображение липшицево.*

Доказательство. Каждая точка ∂K^ρ имеет единственную нормаль, поэтому сферическое изображение является отображением. Через $\nu(x)$ обозначим нормаль точки $x \in \partial K^\rho$, через $\xi_K(x)$ — проекцию x на K. Имеем $x = \xi_K(x) + \rho\nu(x)$. Аналогично $y = \xi_K(y) + \rho\nu(y)$ для другой точки $y \in \partial K^\rho$. Далее $\nu(x) - \nu(y) = \frac{1}{\rho}((x -$

$-y)-(\xi_K(x)-\xi_K(y)))$, откуда $\|\nu(x)-\nu(y)\| \leqslant \frac{1}{\rho}(\|x-y\|+\|\xi_K(x)-\xi_K(y)\|) \leqslant \frac{1}{\rho}(\|x-y\|+\|x-y\|) = \frac{2}{\rho}\|x-y\|$, что и доказывает липшицевость с постоянной $\frac{2}{\rho}$.

4.3. **Теорема.** *Пусть $x \in \partial K^\rho$. Тогда $x \in \partial_i K^\rho$ в том и только в том случае, когда проекция $\xi_K(x) \in \partial_i K$.*

Доказательство. Пусть $y \notin \partial_i K^\rho$ и B_ρ — $(i+1)$-мерный шар с центром y, содержащийся в K^ρ. Пусть ν — нормаль в y, H_ρ — опорная гиперплоскость. Так как $B_\rho \subset K^\rho$, то B_ρ лежит по одну сторону от гиперплоскости H_ρ. Отсюда и из центральной симметричности B_ρ относительно $y \in H_\rho$ следует $B_\rho \subset H_\rho$, причем H_ρ — единственная опорная гиперплоскость к K^ρ в каждой точке B_ρ. Пусть H — опорная гиперплоскость к K с нормалью ν в точке $\xi_K(y)$, $H = H_\rho - \rho\nu$. Тогда $B = B_\rho - \rho\nu$ — $(i+1)$-мерный шар с центром $\xi_K(y)$, содержащийся в K, так как всякая точка $z \in B$ является проекцией на K некоторой точки из B_ρ, имеющей нормаль ν.

Обратно, пусть $\xi_K(y) \notin \partial_i K$, т. е. существует $(i+1)$-мерный шар $B \subset K$ с центром $\xi_K(y)$. Пусть ν — нормаль в y. Тогда $B+\rho\nu$ — $(i+1)$-мерный шар с центром y, содержащийся в K^ρ, т. е. $y \notin \partial_i K^\rho$.

4.4. Точка $x \in K$ называется i-выступающей, $x \in \exp_i K$, если существует такая опорная к K в x гиперплоскость H, что $\dim(H \cap K) \leqslant i$. Принадлежность точки к $\exp_i K$ является более тонким свойством, нежели к $\partial_i K$. Докажем для него утверждения, аналогичные 4.3.

4.5. **Лемма.** *Если $x \in \exp_i K^\rho$, то проекция $\xi_K(x) \in \exp_i K$.*

Доказательство. Пусть H_ρ — опорная к K^ρ в x гиперплоскость, ν — ее нормаль. Тогда $\Gamma^1(K^\rho; \nu) = K^\rho \cap H_\rho$. Согласно 1.4, $\Gamma^1(K^\rho; \nu) = \Gamma^1(K+\rho B; \nu) = \Gamma^1(K; \nu) + \Gamma^1(\rho B; \nu) = \Gamma^1(K; \nu) + \rho\nu$, откуда $\Gamma^1(K; \nu) = \Gamma^1(K^\rho; \nu) - \rho\nu$. Если обозначить через H опорную к K в $\xi_K(x)$ гиперплоскость $H_\rho - \rho\nu$, то $\dim(K \cap H) = \dim \Gamma^1(K; \nu) = \dim \Gamma^1(K^\rho; \nu) = \dim(K^\rho \cap H_\rho) \leqslant i$.

4.6. **Лемма.** *Если $z \in \exp_i K$, то существует $x \in \exp_i K^\rho$ с проекцией $\xi_K(x) = z$.*

Доказательство. Пусть H — такая опорная гиперплоскость к K в Z, что $\dim(K \cap H) \leqslant i$; ν — нормаль H. Тогда $H_\rho = H + \rho\nu$ — опорная гиперплоскость к K^ρ в $x = z + \rho\nu$. Так как ν — единственная нормаль в x, то $\xi_K(x) = z$. Наконец, $K^\rho \cap H_\rho = \Gamma^1(K^\rho; \quad \nu) = \Gamma^1(K; \quad \nu) + \rho\nu = (K \cap H) + \rho\nu$, откуда $\dim(K^\rho \cap H_\rho) = \dim(K \cap H) \leqslant i$.

§ 5. Размерность сферического изображения

5.1. В случае выпуклого многогранника сферическое изображение i-мерной грани имеет размерность $n-i-1$. Примеры шара и цилиндров показывают, что для гладких тел это не сохраняется.

Однако утверждение остается верным, если рассматривать сферическое изображение не самой точки или грани, а ее окрестности.

5.2. **Лемма.** *Если x — выступающая точка K, A — пересечение K с шаром радиуса r с центром x, то $\omega(A)$ невырождено, т. е. содержит $(n-1)$-мерное подмногообразие.*

Доказательство. Пусть H — опорная гиперплоскость, для которой $H \cap K = \{x\}$. Обозначим $h(y)$ расстояние от точки y до H. Если все члены сходящейся последовательности $\{y_n\}$ лежат в K и $\lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. Поэтому существует $h_0 > 0$ такое, что для гиперплоскости H_h, параллельной H на расстоянии $h \leqslant h_0$ от нее, $H_h \cap K$ содержится в A. Фиксируем h и через H_h^+ обозначим то из полупространств, которое содержит x, а через H_h^- — противоположное. Обозначим $H_h \cap K$ через B, а через C — конус над B с вершиной x. Как конус с компактным основанием, C имеет в x ровно n линейно независимых нормалей, причем $\omega(x)$ содержит все выпуклые комбинации этих нормалей.

Докажем, что $\omega(A)$ содержит все нормали к C в x. Пусть E^+ — внешнее строго опорное к C в x замкнутое полупространство. Покажем сначала, что $E^+ \cap H_h^- \cap K$ пусто. В противном случае нашлась бы точка $y \in E^+ \cap H_h^- \cap K$. Так как $x \in E^+ \cap K$ и $y \in E^+ \cap K$, то и весь отрезок $xy \subset E^+ \cap K$. Но $x \in H_h^+$, а $y \in H_h^-$, поэтому на xy есть точка $z \in H_h$. Множество $E \cap H_h$, если рассматривать его как подмножество гиперплоскости H_h, является в ней гиперплоскостью, строго отделяющей B от z, что противоречит $K \cap H_h = B$, ибо $z \in K$. Итак, $E^+ \cap H_h^- \cap K = \varnothing$, поэтому $E^+ \cap K \subset H_h^-$, откуда $E^+ \cap K \subset A$.

Пусть ν — внешняя нормаль к E. Если $E^+ \cap K \subset E$, то ν — нормаль к K в x. В противном случае $E^+ \cap K$ имеет внутренние точки, и опорная к $E^+ \cap K$ гиперплоскость E' с внешней нормалью ν отлична от E. Пусть $u \in E' \cap K$. Так как в гиперплоскости H_h множества B и $E' \cap H_h$ лежат с разных сторон от $E \cap H_h$, причем второе строго, то $E' \cap K \cap H_h = E' \cap H_h \cap B = \varnothing$. Отсюда $u \notin H_h$, т. е. A имеет нормаль ν в точке u.

5.3. **Теорема.** *Если $x \in \exp_i K$, A — пересечение K с шаром радиуса r с центром x, то $\omega(A)$ содержит $(n-i-1)$-мерное подмногообразие.*

5.4. Лемма 5.2, широко известная геометрам под фольклорным названием «отрезание шапочки», появляется как частный случай теоремы при $i = 0$. Следствием теоремы является положительность соответствующей меры Хаусдорфа сферического изображения. Подобные утверждения доказывал Борисенко А. А. [2].

5.5. **Лемма.** *Пусть $x \in \exp_i K^\rho$, A — пересечение K с шаром радиуса r с центром x. Тогда $\omega(A)$ содержит $(n-i-1)$-мерное подмногообразие.*

Доказательство. Пусть H — опорная к K^ρ в x гиперплоскость, S — линейная оболочка $K^\rho \cap H$, а M — ортогональное дополнение к S в x. Тогда x — выступающая точка $K^\rho \cap M$ и по 5.3 сферическое изображение $A \cap M$ относительно $K^\rho \cap M$, т. е. на сфере S^{n-i-1} пространства M, невырождено, т. е. содержит некоторое $(n-i-1)$-мерное подмногообразие X. Рассмотрим полный прообраз Z подмногообразия X при сферическом изображении и сферическое изображение Y этого Z, но относительно K^ρ, т. е. на S^{n-1}. Докажем, что Y является $(n-i-1)$-мерным подмногообразием S^{n-1}.

Обозначим φ и ψ сферические изображения $Z \to X$ и $Z \to Y$. Заметим, что ∂K^ρ — регулярная поверхность, поэтому $\partial(K^\rho \cap M)$ тоже регулярна и, следовательно, φ и ψ являются отображениями. Пусть $y \in Y$; $\psi^{-1}(y)$ есть пересечение $K^\rho \cap M$ с опорной к K^ρ гиперплоскостью, имеющей нормаль y. Поэтому если $\psi^{-1}(y)$ не сводится к точке, то все точки $\psi^{-1}(y)$ имеют в M одну и ту же нормаль. С другой стороны, в силу единственности опорной гиперплоскости в точках K^ρ, если $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ для каких-либо $z_1, z_2 \in Z$, то и $\psi(z_1) = \psi(z_2)$. Итак, точки Z, имеющие одну и ту же нормаль в одном сферическом изображении, имеют общую нормаль и в другом сферическом изображении. Это дает повод рассмотреть фактор-пространство D, получающееся из многообразия Z отождествлением точек, имеющих одинаковые нормали.

Докажем, что топология, возникающая на D при такой факторизации, хаусдорфова. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — последовательности точек Z, сходящиеся к x и y, причем точки с одинаковыми номерами отождествляются. Это означает, что все отрезки $x_n y_n$ лежат на поверхности, ибо точки x_n и y_n имеют общую нормаль. Фиксируя произвольно z на отрезке xy, замечаем, что $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ с $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, будучи пределом последовательности $(1-\lambda)x_n + \lambda y_n$, лежит на поверхности. Поэтому точки x и y отождествляются при факторизации, т. е. каждая сходящаяся последовательность точек D может иметь только один предел.

Обозначим Φ и Ψ отображения $D \to X$ и $D \to Y$, соответствующие сферическим изображениям φ и ψ. По построению D отображения Φ и Ψ взаимно однозначны. Из леммы А. Д. Александрова [3] о том, что для всякой сходящейся последовательности точек на выпуклой поверхности можно построить сходящуюся последовательность нормалей в этих точках, следует непрерывность Ψ^{-1}. Из 4.2 следует непрерывность ψ, что вместе с хаусдорфовостью топологии D дает непрерывность Ψ. Так как $\partial(K^\rho \cap M)$ регулярна, то $K^\rho \cap M$ является внешним параллельным телом некоторого выпуклого компакта в подпространстве M, что позволяет аналогично показать непрерывность Φ и Φ^{-1}. Итак, X гомеоморфно D, а D гомеоморфно Y, откуда следует гомеоморфность Y $(n-i-1)$-мерному многообразию, что завершает доказательство леммы.

5.6. Лемма 4.6 позволяет свести утверждение 5.3 к только что доказанной лемме. Действительно, пусть $x \in \exp_i K^\rho$ и $z = \xi_K(x) \in \exp_i K$, по 4.6 такое x существует. Тогда по 5.5 сферическое изображение r-окрестности x содержит $(n-i-1)$-мерное подмногообразие. Но при проекции на выпуклую поверхность расстояния не увеличиваются. Поэтому r-окрестность z содержит проекцию r-окрестности x на K; следовательно, сферическое изображение r-окрестности z содержит сферическое изображение r-окрестности x вместе с содержащимся в ней $(n-i-1)$-мерным подмногообразием.

5.7. Несложные примеры (например, поляры пересечений кругов) показывают, что множество выступающих точек может не быть замкнутым. Поэтому о принадлежности самой точки к $\exp_i K$ ничего нельзя утверждать, даже имея информацию о размерности сферического изображения всех окрестностей этой точки. Тем не менее, теорема 5.3 допускает следующее обращение.

5.8. **Теорема.** *Пусть A — открытое подмножество ∂K, и $\omega(A)$ содержит $(n-i-1)$-мерное липшицево подмногообразие сферы. Тогда $A \cap \exp_i K \neq \varnothing$.*

5.9. Прежде всего уточним, что мы называем липшицевым многообразием. Как известно, многообразием называют топологическое пространство, допускающее покрытие координатными окрестностями или картами, так что в общих точках двух карт функции перехода от одной системы координат к другой непрерывны. Если эти функции удовлетворяют условию Липшица, то многообразие называем липшицевым. Так как дифференцируемость является более жестким требованием, чем липшицевость, то любое гладкое многообразие липшицево. С другой стороны, не всякое липшицево многообразие гладко, и не всякое многообразие липшицево. Стандартным образом для липшицевых многообразий можно ввести понятия и доказать утверждения, аналогичные многим известным для топологических и гладких многообразий. В частности, подмножество R^n является липшицевым подмногообразием, если локально является координатной поверхностью некоторой размерности в удачно выбранной карте пространства R^n, причем эта карта липшицево согласована с декартовыми координатами R^n.

5.10. Докажем теперь теорему 5.8. Не теряя общности, можем считать, что подмногообразие $Y \subset S^{n-1} \subset R^n$, о котором идет речь в формулировке теоремы, задано одной картой, т. е. липшицевым гомеоморфизмом $f: X \to Y$, где X — область в R^{n-i-1}. Теорема Асплунда [4] позволяет ограничиться доказательством непустоты $A \cap \partial_i K$. Лемма 4.3 сводит доказательство к случаю, когда вместо K рассматривается его внешнее параллельное тело K^ρ. Напомним, что в силу 4.2 сферическое изображение ω является в этом случае липшицевым отображением. Композицию липшицевых отображений $\omega_0 f^{-1}: R^n \supset \partial K^\rho \to X \subset R^{n-i-1}$ можно продолжить до липшицева отображения $v: R^n \to R^{n-i-1}$, возможно с худшей константой.

Допустим, что $A \cap \partial_i K^\rho = \varnothing$. Тогда прообраз каждой точки Y при сферическом изображении ω содержит некоторый $(i+1)$-мерный шар в A, т. е. $\int\limits_x H^{i+1}(A \cap v^{-1}(x))\, dL^{n-i-1}x > 0$, где L — мера Лебега, а H — мера Хаусдорфа на $K \subset R^n$. Это позволяет применить теорему 3.2.11 из книги [5] Федерера и утверждать, что $\int\limits_A J_v(t)\times$ $\times\, dL^n t = \int\limits_X H^{i+1}(A \cap v^{-1}(x))\, dL^{n-i-1}x$, где через Jv обозначен якобиан отображения v. Так как $A \subset \partial K^\rho$, т. е. $\dim A = n-1$, то $L^n(A) = 0$, откуда $\int\limits_A Jv(t)\, dL^n t = 0$. Противоречие доказывает теорему.

§ 6. Обзор различных определений грани

6.1. Ввиду разнобоя в терминологии перечислим известные способы введения понятия грани и близких понятий и сравним их с данным в 1.2 определением грани i-ого ранга. Так как одно и то же множество может быть гранью i-ого ранга для разных i, введем обозначения m и r для минимального и максимального ранга такой грани.

6.2. Фавар [6], по-видимому, первым классифицировал граничные точки произвольных выпуклых компактов. Число линейно независимых нормалей в некоторой точке он назвал классом этой точки.

6.3. Термин «грань» появляется у Бурбаки [7]. Грань F_x точки $x \in K$ — наибольшее выпуклое множество, содержащееся в K и имеющее x своей относительно внутренней точкой. Размерность p грани F_x называется порядком, а размерность q сопряженной грани на поляре множества K — классом точки x и грани F_x. Определение класса в [7] не вполне корректно, так как неявно опирается на неверное утверждение о симметричности отношения сопряженности граней (см. [8]). По той же причине класс Бурбаки не всегда совпадает с классом Фавара. Всегда $p+q \leqslant n-1$; в случае равенства грань называется регулярной. Из определений 1.2 следует, что $p+r=n$ и $p+q+m \leqslant n$, откуда $q \leqslant r-m$ и $p+q \leqslant n-m$. В частности, если $m \geqslant 2$, то грань не регулярна.

6.4. Асплунд [4] дает определения i-экстремальной и i-выступающей точек. Точку $x \in K$ он называет i-экстремальной, если она не является центром тяжести никакой системы положительных масс, помещенных в $i+2$ аффинно независимые точки K. Множество $\operatorname{ext}_i K$ всех таких точек совпадает с $\partial_i K$, т. е. с объединением всех граней i-ого ранга, или иначе с объединением всех граней первого ранга порядков $p \leqslant i$.

6.5. Грюнбаум [9] называет гранями лишь пересечения множества с опорными гиперплоскостями, т. е. грани первого ранга. Грани граней, т. е. грани второго ранга и выше, называются псевдогранями.

6.6. Особняком стоит определение граней у Альфсена [10]. Гранью он называет совокупность точек, имеющих одно и то же максимальное множество нормалей. В отличие от остальных авторов, в случае выпуклых многогранников Альфсен получает открытые, а не замкнутые грани. В общем случае грани Альфсена не всегда относительно открыты.

6.7. Понятие остовов Лармана [1] совпадает с $\mathrm{ext}_i K$ для выпуклых K, но может использоваться и при отсутствии выпуклости.

Список литературы

1. Larman D. On K-skeleton of a convex body. «Proc. London Math. Soc.», 1973, vol. 25, № 4, p. 668—682.
2. Борисенко А. А. О строении гиперповерхностей с нулевой мерой Хаусдорфа сферического изображения.— В кн.: Укр. геометр. сб. Вып. 12. Харьков, 1972, с. 36—45. (См. «Исправление...» ниже).
3. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. II.— «Мат. сборник», Т. 2 [44], вып. 6, М., 1937, с. 1205—1235.
4. Asplund E. K-extreme point is the limit of K-exposed points.— «Israel J. Math.», vol. 1, № 3, 1968, p. 161—162.
5. Federer H. Geometric measure theory. Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1969. 676 p.
6. Favard J. Sur les corps convexes.— «Journ. Math. pures appl.», 9, № 12, Paris, 1933, p. 219—282.
7. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959. 410 с.
8. Федотов В. П. Изолированные грани выпуклого компакта. «Мат. заметки», т. 22, вып. 5, с. 923—928.
9. Grünbaum B. Convex polytopes.— «Pure and Appl. Math.», vol. 16, London —New York—Sydney, 1967. 320 p.
10. Alfsen E. Compact convex sets and boundary integrals.— «Ergeb. Math.», 57, 1971. 210 p.

Поступила 22 февраля 1977 г.

Исправление к статье А. А. Борисенко «О строении гиперповерхностей с нулевой мерой Хаусдорфа сферического изображения», помещенной в «Украинском геометрическом сборнике», вып. 12, 1972, с. 36—45.

В указанной статье лемма 4 неверна. О сходных ошибках писал H. Wu в работе «The spherical images of convex hypersurfaces», Journ. of Diff. Geom., Tokyo, 1974, 9, № 2, с. 279—290. Поэтому доказательство теоремы 5, опирающееся на лемму 4, неверно. Однако теорема 5 верна и ее справедливость следует из теоремы 3.

Доказательство теоремы 5. Пусть k-мерная хаусдорфова мера сферического изображения полной общей выпуклой гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n равно нулю. По теореме 3 через каждую точку гиперповерхности F проходит i-мерная образующая, где $i \geqslant n-k$. Под i-мерной образующей на поверхности F, проходящей через точку x, мы понимаем связную область на i-мерной плоскости E^i, полностью принадлежащую поверхности, причем точка x является внутренней точкой этой области. Пусть $m = \min i$, взятый по всем точкам поверхности. Пусть X_0 — точка на поверхности, через которую проходит образующая $E^m(x_0)$ минимальной размерности; $P(X_0)$ — одна из опорных гиперплоскостей в точке X_0 и $\dim P(X_0) \cap F = m$. Тогда образующая $P(X_0) \cap F = E^m(X_0)$ совпадает с плоскостью E^m. Допустим, что это не так. Тогда $P(X_0) \cap F = E^m(X_0)$ является выпуклым телом в плоскости E^m, которая содержит образующую. Пусть y_0— граничная точка $E^m(X_0)$, $P(X_0)$ является опорной гиперплоскостью и в точке Y_0. Поэтому $\dim E^i(Y_0) \leqslant m-1$, что противоречит минимальности m. Итак, на гиперповерхности F лежит плоскость E^m, она принадлежит предельному конусу поверхности F, поэтому F является цилиндром с образующей размерности $n-k$.

Выражаю искреннюю благодарность В. П. Федотову, указавшему мне ошибку.

Поступила 15 мая 1977 г.

УДК 513.741

В. П. Федотов

О СУММЕ p-х ПОВЕРХНОСТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

В своем выступлении на Математическом конгрессе 1974 г. в Ванкувере [1] У. Дж. Фаэри коснулся вопросов, связанных с обобщенной проблемой Кристоффеля — Минковского. Отметив сильные результаты А. В. Погорелова [2], он обратил внимание на то, что в случае $2 \leqslant p \leqslant n-2$ исследование проблемы все же еще не завершено. В частности, пока нет ответа на следующий вопрос: всегда ли сумма p-х поверхностных функций двух выпуклых поверхностей является p-й поверхностной функцией выпуклой поверхности? Настоящая заметка содержит результаты из дипломной работы автора (Ленингр. ун-т, 1973 г.), касающиеся исследования именно этого вопроса.

Дадим следующие определения. Будем говорить, что C является p-суммой A и B, и писать $C = A \underset{p}{\#} B$, если $\mu_p(C) = \mu_p(A) + \mu_p(B)$, где μ_p — p-я поверхностная функция. Будем говорить, что C является сильной p-суммой A и B, и писать $C \equiv A \underset{p}{\#} B$, если $V(\underbrace{C, \ldots, C}_{p}, K_{p+1}, \ldots, K_n) = V(A, \ldots, A, K_{p+1}, \ldots, K_n) + V(B, \ldots, B, K_{p+1}, \ldots, K_n)$ при любых $K_{p+1}, \ldots, K_n$, где V — смешанный объем. Заметим прежде всего, что $C = A \underset{p}{\#} B$ следует из $C \equiv A \underset{p}{\#} B$. Более того, в этом случае можно утверждать также, что $\mu(\underbrace{C, \ldots, C}_{p}, K_{p+1}, \ldots, K_{n-1}) = \mu(A, \ldots, A, K_{p+1}, \ldots, K_{n-1}) + \mu(B, \ldots, B, K_{p+1}, \ldots, K_{n-1})$ при любых $K_{p+1}, \ldots, K_{n-1}$, где μ — смешанная поверхностная функция, причем последнее эквивалентно определению p-сумм в сильном смысле.

Корректность определения p-сумм следует из теоремы А. Д. Александрова о единственности выпуклого тела с данной p-й поверхностной функцией [3], т. е. $C = A \underset{p}{\#} B$ единственно, если только оно вообще существует. Суммы Минковского являются 1-суммами, а суммы Бляшке — $(n-1)$-суммами, причем обе — в сильном смысле (о суммах Бляшке см. [4]). Вопрос Фаэри мы можем теперь сформулировать как вопрос о существовании p-сумм при $2 \leqslant p \leqslant n-2$. Ниже будет приведен пример двух множеств, не имеющих p-суммы в сильном смысле. Кроме того, будет показано, что существуют выпуклые многогранники, не имеющие p-суммы в классе многогранников.

§ 2. Некоторые соотношения между смешанными объемами в пространстве и его подпространстве

Так как размерность пространства, в котором рассматривается смешанный объем, равна числу аргументов последнего, то не возникнет никакой путаницы, если объемы и смешанные объемы в пространствах разной размерности обозначать одной и той же буквой V. Буквами ω (с индексами или без них) будут обозначаться отрезки, а через K/H — проекция K вдоль H, т. е. проекция K на ортогональное дополнение к линейной оболочке H.

Из определения смешанных объемов следует, что $nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, w) = V(K_1/w, \ldots, K_{n-1}/w)$, где w — единичный отрезок, а $K_1, \ldots, K_{n-1}$ — произвольные выпуклые множества. Если же длина w отлична от 1, то на нее и надо домножить правую часть последнего равенства; тогда получим $nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, w) = V(w)V(K_1/w, \ldots, K_{n-1}/w)$. Если среди K_i есть еще один или несколько отрезков, то можно последовательно применять эту формулу. Учитывая также, что объем параллелепипеда, натянутого на несколько векторов, равен смешанному объему этих векторов, поделенному на факториал размерности параллелепипеда, получим $C_n^s V(K_1, \ldots, K_s, w_{s+1}, \ldots, w_n) = \frac{V(w_{s+1}, \ldots, w_n)}{(n-s)!} V(K_1/W, \ldots, K_s/W)$, где через W обозначена линейная оболочка векторов $w_{s+1}, \ldots, w_n$. Зафиксируем теперь W, а вместо $w_{s+1}, \ldots, w_n$ будем подставлять всевозможные перестановки ортов $e_1, \ldots, e_{n-s}$ произвольного базиса W. Сложив все такие равенства, получим $C_n^s V(K_1, \ldots, K_s, \underbrace{I^{n-s}, \ldots, I^{n-s}}_{n-s}) = V(I^{n-s})V(K_1/W, \ldots, K_s/W) = V(K_1/W, \ldots, K_s/W)$, где через I^{n-s} обозначен единичный куб $e_1 + \cdots + e_{n-s}$ пространства W. Это равенство и потребуется нам ниже. Оно является частным случаем более общего факта:

Теорема 1. *Пусть выпуклые множества $k_1, \ldots, k_m$ содержатся в некотором m-мерном подпространстве W, а $K_{m+1}, \ldots, K_n$ — произвольные (любой размерности) выпуклые множества в R^n. Тогда $C_n^m V(k_1, \ldots, k_m, K_{m+1}, \ldots, K_n) = V(k_1, \ldots, k_m)V(K_{m+1}/W, \ldots, K_n/W)$.*

Доказательство теоремы следует из разложения, лежащего в определении смешанных объемов, и следующей леммы.

Лемма. *Если* $\dim k = m$ *и* $\dim K = n$, *то* $C_n^m V(\underbrace{k, \ldots, k}_{m}, \underbrace{K, \ldots, K}_{n-m}) = V(k)V(K/k)$.

Доказательство. Обозначим K/k через $k^\perp$, $K/k^\perp$ через k'', $k'' + k^\perp$ через $\tilde{K}$. $V(K + \lambda k) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \lambda^i V(\underbrace{k, \ldots, k}_{i}, \underbrace{K, \ldots, K}_{n-i}) = \sum_{i=0}^{m} C_n^i \lambda^i V(\underbrace{k, \ldots, k}_{i}, \underbrace{K, \ldots, K}_{n-i})$, так как в k нельзя провести $m+1$ независимых отрезков и, следовательно, все смешанные объемы $V(\underbrace{k, \ldots, k}_{i}, \underbrace{K, \ldots, K}_{n-i})$ с $i \geqslant m+1$ обратятся в ноль: $V(\tilde{K} + \lambda k) = V(k^\perp + k'' + \lambda k) = V(k^\perp) \cdot V(k'' + \lambda k)$, поскольку $k^\perp$ и $k'' + \lambda k$ лежат в ортогональных подпространствах; $\frac{V(\tilde{K} + \lambda k)}{\lambda^m} =$

$$= \frac{V(k^{\perp})V(k''+\lambda k)}{\lambda^m} = V(k^{\perp}) \frac{\sum_{i=0}^{m} C_m^i \lambda^i V(\underbrace{k, \ldots, k}_{i}, \underbrace{k'', \ldots, k''}_{m-i})}{\lambda^m} =$$

$= V(k^{\perp})V(k) + V(k^{\perp}) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{C_m^i V(\underbrace{k, \ldots, k}_{i}, \underbrace{k'', \ldots k''}_{m-i})}{\lambda^{m-i}}$. Последнее выражение при $\lambda \to \infty$ имеет предел $V(k^{\perp})V(k)$: $\frac{V(K+\lambda K)}{\lambda^m}=$

$= C_n^m V(\underbrace{k, \ldots, k}_{m}, \underbrace{K, \ldots, K}_{n-m}) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{C_n^i V(\underbrace{k, \ldots, k}_{i}, \underbrace{K, \ldots, K}_{n-i})}{\lambda^{m-i}} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{}$ $\to C_n^m V(\underbrace{k, \ldots, k}_{m}, \underbrace{K, \ldots, K}_{n-m})$. Теперь заметим, что по условию леммы $\dim k = \dim k'' = m$, т. е. размерности того подпространства, в котором они содержатся. Следовательно, существует такое λ_0, что $\lambda_0 k \supset k''$. Тогда $K + \lambda_0 k \supset K + k'' \supset k^{\perp} + k'' = \tilde{K}$, откуда $K + (\lambda_0 + \lambda) k \supset \tilde{K} + \lambda k$ и $V(K + (\lambda_0 + \lambda) k) \geqslant V(\tilde{K} + \lambda k)$. С другой стороны, $\tilde{K} \supset K$, откуда $\tilde{K} + \lambda k \supset K + \lambda k$. Получаем двойное неравенство $V(K + (\lambda_0 + \lambda) k) \geqslant V(\tilde{K} + \lambda k) \geqslant V(K + \lambda k)$, из которого следует равенство пределов $\frac{V(K+\lambda k)}{\lambda^m}$ и $\frac{V(\tilde{K}+\lambda k)}{\lambda^m}$ при $\lambda \to \infty$. Эти пределы вычислены выше; приравняв их, получаем заключение леммы.

§ 3. Некоторые свойства сильных p-сумм

Оставим на время в стороне вопрос о существовании сильных p-сумм и докажем свойства, которыми они обладают, когда существуют.

Теорема 2. *Пусть E — произвольное подпространство R, $\dim E \geqslant p + 1$; P — оператор проектирования на E. Тогда из $C \equiv A \underset{p}{\#} B$ следует, что $P(C) \equiv P(A) \underset{p}{\#} P(B)$.*

Этот факт особенно важен потому, что он дает возможность построить сильную p-сумму в тех случаях, когда она существует. Дело в том, что в $(p+1)$-мерных подпространствах p-суммы известны — там ими являются суммы Бляшке. Тем самым известны проекции сильной p-суммы на все $(p+1)$-мерные подпространства. Рассмотрим теперь произвольное $(p+2)$-мерное подпространство. Так как проекция в любое $(p+1)$-мерное подпространство, содержащееся в выбранном $(p+2)$-мерном, может быть получена последовательным проектированием через него, то для проекции сильной p-суммы в выбранное $(p+2)$-мерное подпространство известны все $(p+1)$-мерные (т. е. обычные) проекции. Следуя изложенному в [3] доказательству леммы Зюсса—Либермана, можно определить и саму проекцию в это $(p+2)$-мерное подпространство. Аналогично определяются проекции на все остальные $(p+2)$-мерные подпространства, затем на все $(p+3)$-мерные и т. д., пока не станет известна сама сильная p-сумма, являющаяся собственной проекцией на единственное n-мерное подпространство R^n.

Прежде чем перейти к доказательству, отметим еще два свойства сильных p-сумм. В тех же обозначениях справедливы равенства $V(P(C)) = V(P(A)) + V(P(B))$ и $S(P(C)) = S(P(A)) + S(P(B))$, где V — объем, а S — площадь поверхности. Эти равенства можно либо вывести из теоремы 2, либо доказать независимо, используя соответственно $V(P(K)) = \frac{C_n^p}{V(U_{n-p})} V(\underbrace{K, \ldots, K}_{p}, \underbrace{U_{n-p}, \ldots, U_{n-p}}_{n-p})$ и

$$S(P(K)) = \frac{(p+1)\, C_n^p}{V(U_{n-p-1})} V(\underbrace{K, \ldots, K}_{p}, U_{p+1}, \underbrace{U_{n-p-1}, \ldots, U_{n-p-1}}_{n-p-1}).$$

Доказательство теоремы 2. Пусть ядро оператора P — некоторое подпространство размерности m; U_m — единичный шар этого подпространства. Тогда по теореме 1 $C_n^m V(\underbrace{K, \ldots. K}_{p}, K_{p+1}, \ldots, K_{n-m},$

$$\underbrace{U_m, \ldots, U_m}_{m}) = V(U_m)\, V(\underbrace{P(K), \ldots, P(K)}_{p}, P(K_{p+1}), \ldots, P(K_{n-m}))$$

при любых $K, K_{p+1}, \ldots, K_{n-m}$. Остается подставить в это равенство вместо K последовательно A, B и C и, сложив первые два из получившихся равенств, воспользоваться определением сильных p-сумм.

§ 4. Пример отсутствия сильной p-суммы.

Для простоты изложения приведем два выпуклых тела A, λB в R^4, которые не имеют сильной 2-суммы, однако пример можно обобщить на произвольные p и n, удовлетворяющие $2 \leqslant p \leqslant n-2$.

В качестве тела A возьмем 16-гранник, задаваемый в декартовых координатах x_1, x_2, x_3, x_4 системой неравенств

$$|x_i| \leqslant 1, \; i = 1, 2, 3, 4,$$
$$|x_1 \pm x_2 \pm x_3| \leqslant 2,$$

а в качестве B — четырехмерный аналог октаэдра, т. е. 16-гранник

$$|x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4| \leqslant 1.$$

Проекция A вдоль оси x_3 — куб, а вдоль оси x_4 — кубооктаэдр. Проекции B вдоль любой оси — октаэдры.

Рассмотрим поведение суммы Бляшке $(1-\lambda)Q - \lambda O$ куба Q и октаэдра O в зависимости от изменения $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Сначала это куб со срезанными вершинами (среди граней которого 6 восьмиугольников и 8 треугольников), затем, при определенном λ — архимедов кубооктаэдр (6 квадратов, 8 треугольников), в дальнейшем — октаэдр со срезанными вершинами (6 квадратов, 8 шестиугольников).

Согласно теореме 2, при образовании сильной 2-суммы 3-мерные проекции подвергаются сложению Бляшке. Поэтому у $A \underset{2}{\#} \lambda B$ при не слишком больших λ проекцией вдоль оси x_3 должен быть куб со срезанными вершинами, а вдоль оси x_4 — октаэдр со срезанными вершинами. Рассмотрим теперь, какой может быть проекция $A \underset{2}{\#} \lambda B$ на плоскость x_1x_2. С одной стороны, она должна быть проекцией куба со срезанными вершинами вдоль оси x_4, т. е. квадратом, а с другой — проекцией октаэдра со срезанными вершинами вдоль x_3, т. е. восьмиугольником. Полученное противоречие показывает, что A и λB не могут иметь сильной 2-суммы.

§ 5. Замечания

По-видимому, описанные в § 4 многогранники A и B не имеют даже обычной 2-суммы. По крайней мере, если она и существует, то не является многогранником.

Действительно, p-я поверхностная функция выпуклого многогранника в R^n представляет собой меру, носителем которой является некоторое $(n-p-1)$-мерное конечное симплициальное подпространство единичной сферы S^{n-1}. Если $n-p>1$, то это подпространство связно. В приведенном примере носители вторых поверхностных функций A и B суть два непересекающихся связных одномерных подпространства сферы S^3. Объединение этих носителей не связно. Следовательно, носитель второй поверхностной функции $A \underset{2}{\#} B$ не может быть носителем второй поверхностной функции никакого выпуклого многогранника в R^4. Значит, $A \underset{2}{\#} B$ либо не существует, либо не многогранник. Заметим, что находящиеся в общем положении два k-мерных подпространства сферы S^{n-1} при $2k \leqslant n-2$ не пересекаются. Поэтому данный пример является не экзотическим, а типичным для случая $\frac{n}{2} \leqslant p \leqslant n-2$.

Очень мало известно о носителях поверхностных функций произвольных выпуклых множеств. По-видимому, они тоже связны при $n-p>1$. Если это будет доказано, то приведенный пример даст отрицательный ответ на вопрос Фаэри.

Автор благодарит В. А. Залгаллера за внимание к работе.

Список литературы

1. Firey W. J. Some open questions op convex surfaces.— «Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974, vol. 1, s. 1», 1975, p. 479—484.
2. Погорелов А. В. Многомерная проблема Минковского. М., «Наука», 1975. 96 с.

3. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел.— «Мат. сборник», 1937, 2 44, № 5, с. 947—972.
4. Firey W. J. Blaschke sums of convex bodies and mixed bodies.— «Proc. Colloq. Convexity, Copenhagen 1965», 1967, p. 97—100.

Поступила 26 сентября 1976 г.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского. Аминов Ю. А. — «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 3—5.

Доказана теорема: преобразование Бианки n-мерное подмногообразие постоянной отрицательной кривизны в $(2n-1)$-мерном евклидовом пространстве переводит в подмногообразие той же постоянной отрицательной кривизны.

Список лит.: 3 назв.

УДК 513

***А*-деформация поверхности трехмерного риманового пространства со стационарными длинами асимптотических линий.** Бесковайная Л. Л. — «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 6—10.

Доказывается утверждение: нетривиальные А-деформации со стационарными длинами асимптотических линий на поверхности отрицательной внешней кривизны трехмерного риманового пространства допускают минимальные поверхности и только они. Выясняется широта произвола вектора смещения. Список лит.: 5 назв.

УДК 513

О радиусе инъективности на поверхностях ограниченной сверху кривизны. Бураго Ю. Д. — «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 10—14.

Доказано, что если двумерное риманово многообразие $\overline{G}$ с краем ∂G гомеоморфно замкнутому кругу и его гауссова кривизна положительна и ограничена сверху числом $K > 0$, а R — максимальное удаление точек G от края ∂G, то при $R < \pi/\sqrt{K}$ для любой точки $p \in G$, удаленной от края на R, экспоненциальное отображение $\exp_p$ инъективно в круге радиуса R, а при $R \geqslant \pi/\sqrt{K}$ существует точка $p \in G$, для которой $\exp_p$ инъективно в круге радиуса $\pi/\sqrt{K}$.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Теорема сравнения для объемов в римановой геометрии. Буяло С. В. — «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 15—21.

Доказаны две теоремы, позволяющие сравнивать якобианы экспоненциальных отображений подмногообразий N, N' римановых пространств M, M' в зависимости от секционных кривизн M, M' и нормальных кривизн N, N'. Попутно восполнен пробел в доказательстве теоремы 1 РЖМат, 1976, 9А644. Список лит. : 6 назв.

УДК 513

К проективной дифференциальной геометрии двумерного распределения в четырехмерном пространстве P. Глова Н. И. — «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 21—30.

Чтобы двумерная поверхность имела огибающую системы оснащающих ее 2-плоскостей, необходимо и достаточно распадение фокусной кривой оснащающей 2-плоскости в каждой точке поверхности. Из интегральных кривых распределения выделяются такие, в каждой точке которых соприкасающаяся 2-плоскость пересекает оснащающую по прямой; класс этих кривых проективно инвариантен и вообще зависит от четырех произвольных постоянных.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

О плоских алгебраических кривых с осями симметрии. Игнатенко В. Ф.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с 31—33.

Пусть циклическая группа $[r]$ симметрий плоскости E^2 задана r прямыми $n_i = 0$, проходящими через начало O. Доказывается, что несферическая образующая алгебры полиномов от x, y, инвариантных относительно $[r]$ при четном $r = 2s$ не может быть задана (так, как в E^m, $m > 2$) в виде суммы r-х степеней нормированных n_i. Эта сумма равна $\rho(x^2 + y^2)^s$, $\rho = \text{const}$.

Список лит.: 10 назв.

УДК 513.81:517.544

О гладкости решений краевых задач теории изгибаний поверхностей рода $p \geqslant 0$. Климентов С. Б.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 34—44.

Исследуются дифференциальные свойства решений различных краевых задач теории изгибаний поверхностей рода $p \geqslant 0$ положительной внешней кривизны в зависимости от дифференциальных свойств исходных данных. Вопросы гладкости решений геометрических задач сводятся к исследованию гладкости решений задачи Римана для системы дифференциальных уравнений на замкнутой римановой поверхности. Список лит: 14 назв.

УДК 513.73

Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности. Кузаконь В. М., Рахула М. О.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 44—50.

Изучается расслоение двумерного локально-евклидова многообразия V_2 на семейство кривых. С каждой точкой V_2 ассоциируется последовательность инвариантных форм первого, второго и высших порядков, алгебраические инварианты которых являются дифференциальными инвариантами семейства. Получены и геометрически истолкованы все инварианты порядка 2 и 3. Список лит.: 2 назв.

УДК 513

К теории лифтов в аффинном расслоении дифференцируемого многообразия Лапковский А. К., Лаптинский В. Н.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 50—55.

Экспоненциальными методами дается представление локальных лифтов в аффинной связности, канонически присоединенной для линейной связности дифференцируемого многообразия. Решается задача сравнения таких лифтов в зависимости от произвола в выборе линейной связности. Список лит.: 11 назв.

УДК 513

О бесконечно малых изгибаниях двумерной поверхности в четырехмерном плоском пространстве. Марков П. Е.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 55—72.

С помощью специального поля бивекторов устанавливается связь изгибающих полей двумерной поверхности в E^4 и M^4 (Минковского) с решениями системы уравнений, определяющей бесконечно малые изгибания поверхности. Результаты применяются к теории изгибаний поверхностей в пространствах постоянной кривизны. Список лит.: 10 назв.

УДК 513

Неустойчивость минимальных конусов в пространстве Лобачевского. Масальцев Л. А.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 72—81.

По методу Дж. Саймонса доказывается неустойчивость минимальных конусов над любым не вполне геодезическим минимальным подмногообразием геодезической сферы пространства Лобачевского H^n при $n \leqslant 7$. Приводится пример локально устойчивого конуса в H^8. Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Об одной теореме К. Миранды. Медяник А. И.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 81—85.

К. Миранда доказал теорему о существовании замкнутой выпуклой поверхности, главные радиусы кривизны которой удовлетворяют уравнению $R_1R_2 + \Phi(R_1 + R_2); R_1R_2, \boldsymbol{n}) + c\boldsymbol{n} = \varphi(\boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{c}$ — неизвестный вектор, связанный с искомой поверхностью (РЖМат, 1972, 1А 1121, 2А 917), причем на φ наложены довольно жесткие условия. В работе исследуется широта класса функций φ, удовлетворяющих этим условиям, и устанавливается связь между условиями разрешимости уравнения Миранды и проблемы Минковского. Список лит.: 2 назв.

УДК 513

Теоремы единственности для регулярных замкнутых выпуклых поверхностей. Медяник А. И.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 86—88.

Найдены условия, при которых сводится к классической проблеме единственности вопрос о равенстве двух замкнутых выпуклых поверхностей, для главных радиусов кривизны которых выражения $f(R_1R_2, R_1 + R_2, \boldsymbol{n}) + c\boldsymbol{n}$ (зависящий от поверхности вектор $\boldsymbol{c}$ введен К. Мирандой) равны во всех их точках с равными внешними нормалями $\boldsymbol{n}$. Список лит.: 3 назв.

УДК 513

Оценки размеров кривых ограниченной кривизны. Милка А. Д.—«Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 88—91.

Оцениваются размеры замкнутых кривых, у которых заданы длины и ограничены удельные кривизны. Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Об аналитической неизгибаемости развертывающихся поверхностей, закрепленных вдоль линии на поверхности относительно двух точек. Михайловский В. И., Шеркузиев М.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 92—99.

Доказано, что регулярная развертывающаяся поверхность Φ, которую прямолинейными образующими можно разбить на части цилиндров конусов или поверхностей, образованных касательными к пространственной кривой, закрепленная относительно двух точек вдоль регулярной кривой, пересекающей все образующие Φ, аналитически неизгибаема. Список лит.: 2 назв.

УДК 513

О гиперповерхностях евклидова пространства, несущих голономную двухкомпонентную ортогональную сопряженную систему конического типа. Наринян В. Р.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 99—102.

Указанные в заголовке гиперповерхности V_{n-1} являются каналовыми. Одно из семейств системы есть q-параметрическое семейство p-мерных сфер S_p, вполне ортогональных неподвижной сфере $S_q (p+q=n-1, \; p, \; q \geqslant 2)$. Второе состоит из q-мерных поверхностей V_q, принадлежащих сферам S_{q+1}, которые проходят через S_q. Поэтому достаточно задать одну V_q; V_{n-1} гомеоморфна $V_q \times S_p$. Список лит.: 6 назв.

УДК 513

Характеристические линии квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка и многообразие Пфаффа. Николаенко М. А. — «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 109—110.

Все характеристики квазилинейного уравнения $Pp+Qq=R$ в каждой точке M пространства касаются одной прямой l. Интегральные кривые соответствующего уравнения Пфаффа $Pdx+Qdy+Rdz=0$ касаются в M плоскости, ортогональной l. Список лит.: 4 назв.

УДК 513.73

Ортогональные инварианты иммерсии и субмерсии. Рахула М. О.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 111—120.

Показано, как с помощью аффинных связностей высших порядков для иммерсии многообразий $V_n \to V_{n+r}$ и их субмерсии $V_{n+r} \to V_r$ (V_{n+r} локально евклидово) отыскание дифференциальных инвариантов сводится к известным алгебраическим методам. Выявлена двойственность соотношений и свойств этих отображений, представляющая интерес в теории расслоений.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513.73

О сопряженных и бисопряженных направлениях неголономного многообразия V_n^{n-1} в E_n. Роговой М. Р.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 120—125.

Доказывается существование на неголономном многообразии V_n^{n-1} ортогональных сопряженных и бисопряженных направлений и изучаются их свойства.

Список лит.: 5 назв.

УДК 513.741

О сумме p-х поверхностных функций. Федотов В. П.— Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 126—131.

Выясняется, всегда ли сумма указанных функций выпуклых тел также является p-й поверхностной функцией выпуклого тела. Определяется p-сумма выпуклых тел и p-сумма в сильном смысле; приводится пример тел, не имеющих последней. Выведена формула для смешанного объема $V(k_1, \ldots, k_m, K_{m+1}, \ldots, K_n)$, когда все тела k_i лежат в m-мерном подпространстве.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513.741

О понятиях грани выпуклого компакта. Федотов В. П.— «Украинский геометрический сборник», вып. 21. Респ. межвед. науч. сборник. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, с. 131—140.

Дан обзор различных классификаций точек и определений граней выпуклого компакта. Введено понятие грани i-го ранга, на которые распадается $(n-i)$-остов. С последовательностью вложенных граней связывается репер из нормалей i-го ранга относительно граней $(i-1)$-го ранга. Полный нормальный репер характеризует крайние точки, что позволяет ввести отображение группы ортогональных матриц на множество крайних точек. Список лит.: 10 назв.