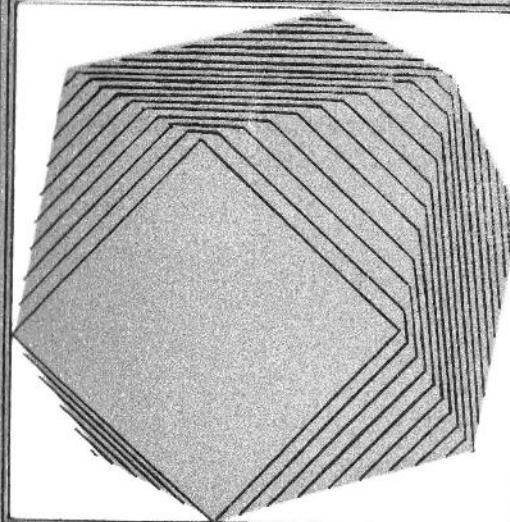


УКРАИНСКИЙ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ
СБОРНИК

выпуск **20**



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УКРАИНСКИЙ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ
СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
тематический
научный
сборник

ВЫПУСК 20

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВІДА ШКОЛА»
1977

Сборник подготовлен редакционной коллегией
при Харьковском государственном университете

Редакционная коллегия:

Я. П. Бланк (зам. отв. ред.), Д. З. Гордовский,
Н. И. Кованцов, Е. А. Косачевская, А. С. Лейбин (отв.
секр.), А. Д. Милка, В. И. Михайловский, А. В. По-
горелов (отв. ред.), Е. П. Сенькин, Н. С. Синюков,
В. Н. Скрыдлов, М. А. Улановский.

Адрес редакционной коллегии:

310077, Харьков, пл. Дзержинского, 4, Харьковский
университет, механико-математический факультет.
Тел. 40-17-24.

Украинский геометрический сборник. Респ. межвед.
темат. науч. сборник. Вып. 19. Х., «Вища школа», Изд-во
при Харьк. ун-те, 1977.

142,5 с. Списки лит. в конце статей.

В сборнике помещены статьи, посвященные вопросам
геометрии «в целом», а также относящиеся к геометрии
обобщенных пространств, к геометрии неголономных мно-
гообразий, линейчатой геометрии, геометрии тканей.

Сборник предназначен для научных работников мате-
матических специальностей.

Редакция естественнонаучной литературы
И. о. зав. редакцией Н. Н. Сорокун

у 20203-493
М226(04)-77 376-77

(C) Издательское объединение «Вища школа», 1977.

ОБ УКЛОНЕНИИ ГРАФИКОВ СФЕРИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Пусть F — полная выпуклая гиперповерхность в евклидовом пространстве R^k , $k \geq 2$; $M(F)$ — замкнутое выпуклое множество, границей которого служит F . Расстоянием по Хаусдорфу, не исключая априори значения ∞ , называют

$$\rho_1(F_1, F_2) = \inf \{ \varepsilon : U_\varepsilon(F_1) \supset F_2, U_\varepsilon(F_2) \supset F_1 \}. \quad (1)$$

Здесь $U_\varepsilon(F)$ есть ε -окрестность F . Для компактных F_1, F_2

$$\rho_1(F_1, F_2) = \sup_{|n|=1} |H_1(n) - H_2(n)|, \quad (2)$$

где $H_i(n)$ — опорная функция для F_i . Если F_1, F_2 некомпактны и, несмотря на это, $\rho_1(F_1, F_2) < \infty$, то совокупность внешних нормалей у F_1, F_2 общая. Если F_1, F_2 — параллельные гиперплоскости, то предполагается согласованный выбор полупространств $M(F_1)$ и $M(F_2)$, и равенство (2) также справедливо.

Графиком сферического отображения для F называют множество $\Gamma(F) \subset R^{2k}$, определяемое равенством

$$\Gamma(F) = \{(x, n) : x \in F, |n| = 1, \forall x' \in M \langle x' - x, n \rangle \leq 0\}. \quad (3)$$

Уклонением графиков сферических отображений называют величину

$$\rho_2(F_1, F_2) = \rho_1(\Gamma(F_1), \Gamma(F_2)). \quad (4)$$

2. В работе [1] для гладких выпуклых гиперповерхностей F_1, F_2 с $\rho_1(F_1, F_2) > 1/2$ показано, что

$$\rho_2(F_1, F_2) \leq 2 \sqrt{\rho_1(F_1, F_2)}. \quad (5)$$

В теореме 1 мы несколько усиливаем этот результат. Поясним простую конструкцию, которая позволяет это сделать. Будем считать, что $\rho_1(F_1, F_2) < 1$. Каждой точке $(x_1, n_1) \in \Gamma(F_1)$ сопоставим точку $y = x_1 + n_1 \in R^k$

$$(x_1, n_1) \mapsto y. \quad (6)$$

Точки y заполнят выпуклую гиперповерхность F_1^1 , параллельную F_1 . Каждой точке $y \in F_1^1$ сопоставим ее проекцию x_2 на F_3 и нормаль $n_2 = \frac{y - x_2}{|y - x_2|}$ к F_2

$$y \mapsto (x_2, n_2). \quad (7)$$

Обозначим через $\varphi : \Gamma(F_1) \rightarrow \Gamma(F_2)$ суперпозицию отображений (6) и (7).

Теорема 1. Для общих полных выпуклых гиперповерхностей F_1, F_2 с $\rho_1(F_1, F_2) < 1$ при любом $p \in \Gamma(F_1)$

$$|p - \varphi(p)| \leq 2\sqrt{\rho_1(F_1, F_2)}. \quad (8)$$

Отсюда следует оценка (5) с ослаблением ограничения на ρ_1 и снятием требования гладкости. Отметим свойства, вытекающие из дополнительного условия гладкости.

Теорема 2. Если F_1, F_2 имели гладкость C^r , то при $r \geq 1$ отображения (6), (7) порождают отображения $F_1 \rightarrow F_1^1 \rightarrow F_2$, φ . При $r \geq 2$ все эти отображения суть C^{r-1} -диффеоморфизмы. При $r = 1$ это — гомеоморфизмы. При $r = 0$ отображение $F_1 \rightarrow F_1^1$, вообще говоря, не определено, но φ остается гомеоморфизмом.

3. Кроме того, мы дадим наилучшую оценку ρ_2 при $\rho_1 \leq \varepsilon$.

Начнем с примера.

Рассмотрим на плоскости R^2 замкнутые выпуклые кривые Φ_1, Φ_2 . В качестве Φ_1 берем дважды покрытый отрезок OM на начальной части положительной полуоси Ox (рис. 1). В качестве Φ_2 берем

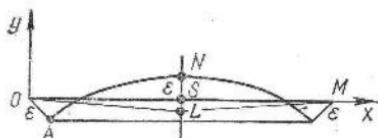


Рис. 1.

выпуклый «сегмент» с горизонтальным основанием AB , у которого выпуклая гладкая дуга ANB симметрична относительно вертикальной прямой NS . При этом размеры Φ_1 , форма и положение Φ_2 подбираются так, что $OA = NS = BM = \varepsilon$, а форма дуги $\gamma = AN$ специ-

ализирована таким образом, что все точки $(x, n(x)) \in \Gamma(\Phi_2)$ при $x \in \gamma$ находятся на постоянном расстоянии $\Delta(\varepsilon)$ от точки $(O, n_0) \in \Gamma(\Phi_1)$. Существование и выпуклость такой кривой будут доказаны.

Мы покажем, что среди всех выпуклых фигур F_1, F_2 при $\rho_1(F_1, F_2) \leq \varepsilon$ наибольшее значение ρ_2 достигается, в частности, на фигурах Φ_1, Φ_2 . Вырожденность фигуры Φ_1 не имеет значения. Не меняя ρ_1 и ρ_2 , можно заменить дважды покрытый отрезок Φ_1 узким треугольником OML (рис. 1). В пространстве R^k , $k > 2$, значение $\max \rho_2$ при $\rho_1 \leq \varepsilon$ остается тем же. Примеры достижения $\max \rho_2$ дают цилиндры, построенные на фигурах Φ_1, Φ_2 .

Поясним, как именно строится кривая γ . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(x^2 + y^2 + 2 - \Delta) dy = \sqrt{4 - (x^2 + y^2 + 2 - \Delta)^2} dx, \quad (9)$$

внедомо определенное в кольце

$$\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq \Delta^2. \quad (10)$$

Значение параметра Δ берем в интервале $\varepsilon < \Delta < \sqrt{\varepsilon^2 + 4}$.

Рассмотрим на рис. 2 интегральную кривую уравнения (9), которая проходит через точку N с координатами $(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, \varepsilon)$, и подберем параметр $\Delta(\varepsilon)$ так, чтобы эта кривая коснулась окружности $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$. Пусть A — точка касания. Участок AN интегральной кривой и будет кривой γ . Теперь можно формулировать результат.

Теорема 3. В классе полных выпуклых гиперповерхностей F_1, F_2 в R^k , $k \geq 2$, с $\rho_1(F_1, F_2) \leq \varepsilon$

$$\max \rho_2(F_1, F_2) = \Delta(\varepsilon), \quad (11)$$

где $\Delta(\varepsilon)$ — упомянутое выше значение параметра.

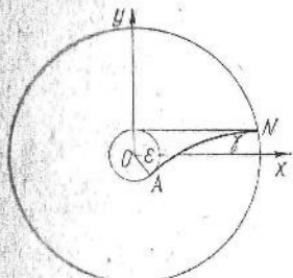


Рис. 2.

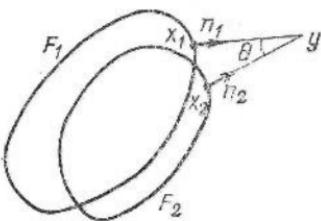


Рис. 3.

Теорема 3 при малых ε дает оценку ρ_2 заметно более сильную, чем (5), так как при малых ε

$$\Delta(\varepsilon) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (12)$$

4. Переидем к доказательству теоремы 1. Зададимся числом $\alpha > \varepsilon > \rho_1(F_1, F_2)$. Каждой точке $p = (x_1, n_1) \in \Gamma(F_1)$ сопоставляем $y = x_1 + \alpha n_1$. Точки y заполняют равноотстоящую от F_1 поверхность F_1^* . Точка y лежит вне F_2 и потому однозначно проектируется в точку $x_2 \in F_2$. Обозначим

$$n_2 = \frac{y - x_2}{|y - x_2|}, \quad \beta = |y - x_2|, \quad \theta = \langle n_1, n_2 \rangle, \quad (13)$$

$$q = (x_2, n_2) \in \Gamma(F_2), \quad \varphi_\alpha(p) = q.$$

Чтобы оценить расстояние

$$|p - q| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (n_1 - n_2)^2}, \quad (14)$$

сделаем несколько замечаний. Если поместить начало координат в точку y (рис. 3), то будем иметь

$$H_1(n_1) = -\alpha, \quad H_1(n_2) \geq -\alpha \cos \theta, \quad H_2(n_1) \geq -\beta \cos \theta, \quad H_2(n_2) = -\beta.$$

Поэтому вытекающие из (2) неравенства

$$H_2(n_1) - H_1(n_1) \leq \varepsilon, \quad H_1(n_2) - H_2(n_2) \leq \varepsilon$$

дают

$$\alpha - \beta \cos \theta \leq \varepsilon, \quad \beta - \alpha \cos \theta \leq \varepsilon. \quad (15)$$

Первое из (15) вместе с $\alpha > \varepsilon$ влечет

$$\cos \theta > 0. \quad (16)$$

С учетом второго из (15) имеем

$$1 - \frac{\varepsilon}{\alpha} \leq \cos \theta \leq 1. \quad (17)$$

Кроме того, из $0 \leq \cos \theta \leq 1$ и (15) следует

$$|\beta - \alpha \cos \theta| \leq \varepsilon, \quad (18)$$

так как $\beta - \alpha \cos \theta \geq \beta \cos \theta - \alpha \geq -\varepsilon$.

Теперь имеем

$$|p - q| = \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + (\beta - \alpha \cos \theta)^2 + (2 - 2 \cos \theta)} \leq \\ \leq \sqrt{\alpha^2 \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2\right) + \varepsilon^2 + 2 - 2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)} = \sqrt{2\varepsilon \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}. \quad (19)$$

Выберем α так, чтобы $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \min$. Для этого положим $\alpha = 1$.

Это дает $|p - \varphi_1(p)| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$ и доказывает теорему 1.

5. При доказательстве теоремы 2 удобна следующая лемма.

Лемма. Пусть F — полная выпуклая гиперповерхность в R^k , $k \geq 2$, и $\Gamma(F) \subset R^{2k}$ есть вложение класса C^r ($r \geq 0$). Тогда отображение $f: \Gamma(F) \times (0, \infty) \rightarrow R^k$, задаваемое правилом $f(x, n(\alpha)) = x + \alpha n$, тоже есть C^r -вложение.

Что f — отображение класса C^r , очевидно. Остается проверить, что f есть вложение. Пусть $(x, n, \alpha) \in \Gamma(F) \times (0, \infty)$, $(x', n', \alpha') \in \Gamma(F) \times (0, \infty)$. Тогда из $\langle x' - x, n \rangle \leq 0$ и $\langle x - x', n' \rangle \leq 0$ следует $\langle x - x', \alpha n - \alpha' n' \rangle \geq 0$. Учитывая это, имеем

$$|f(x, n, \alpha) - f(x', n', \alpha')|^2 = (x + \alpha n - x' - \alpha' n')^2 \geq (x - x')^2 + \\ + (\alpha n - \alpha' n')^2 = (x - x')^2 + \alpha \alpha' (n - n')^2 + \\ + (\alpha - \alpha')^2 \geq \min\{1, \alpha \alpha'\} \cdot [(x - x')^2 + (n - n')^2 + (\alpha - \alpha')^2],$$

и лемма доказана.

В условиях леммы вне $M(F)$ расстояние до $M(F)$ есть C^r -гладкая функция. Если ввести на $\Gamma(F_2)$ функцию $\beta(x_2, n_2)$ условием

$$\rho(f(x_2, n_2, \beta), M(F_1)) = 1,$$

то, ввиду $\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = \langle n_1, n_2 \rangle \geq 1 - \varepsilon > 0$, функция β тоже будет класса C^r .

Поэтому в условиях теоремы 2 в сквозном отображении $\Gamma(F_1) \rightarrow F_1^1 \rightarrow \Gamma(F_2)$ оба отображения являются C^r -диффеоморфизмами

(гомеоморфизмами при $r = 0$). Для завершения доказательства теоремы 2 заметим, что если F имела класс C^r , то при $r \geq 2$, $F \rightarrow \Gamma(F)$ есть C^{r-1} -диффеоморфизм, при $r = 1$ -гомеоморфизм, и при $r = 0$ само $\Gamma(F)$ есть C^0 многообразие.

Замечание. Об особенностях отображения по нормалям, возникающих в точках с бесконечными кривизнами, см. [2].

6. Существование и выпуклость кривой γ . Изучим поведение интегральных кривых уравнения (9), идущих через точки N с координатами $(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, \varepsilon)$ при фиксированном ε и разных $\Delta \in (\varepsilon, \sqrt{\varepsilon^2 + 4})$. Уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + y^2 + 2 - \Delta^2}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2 + 2 - \Delta^2)^2}} = f(x, y, \Delta). \quad (20)$$

Искомые кривые допускают явное задание $x = x(y, \Delta)$ на некотором участке $y \in (a(\Delta), \varepsilon)$.

При $\Delta_1 < \Delta_2$ имеем

$$f(x, y, \Delta_1) > f(x, y, \Delta_2); \quad (21)$$

кроме того, $\lim_{y \nearrow \varepsilon} x(y, \Delta_1) < \lim_{y \nearrow \varepsilon} x(y, \Delta_2)$, и так как $x(\varepsilon, \Delta_1) < x(\varepsilon, \Delta_2)$, то

$$x(y, \Delta_1) < x(y, \Delta_2), \quad (22)$$

т. е. семейство этих кривых монотонно по Δ .

Если $\Delta_3 = (\varepsilon^2 + \min(\varepsilon^2, 2))^{1/2}$, то $0 < x(y, \Delta_3) < \varepsilon$, а из (20) вытекает, что при $x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2$ будет $\frac{dx}{dy}(y, \Delta_3) \geq 0$. Значит, при $\Delta = \Delta_3$ наша кривая пересекает дугу $x = \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}$ в некоторой точке (x_0, y_0) , причем, не умоляя общности, можно считать, что $x(y, \Delta_3) > \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}$ при $y \in (y_0, \varepsilon]$.

Покажем, что при $\Delta = \Delta_4 = \left(\varepsilon^2 + 2 + \frac{2y_0}{\varepsilon}\right)^{1/2}$ наша кривая не пересекает дугу $x = \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}$. Так как $\Delta_4 > \Delta_3$, то согласно (22) при $y \in (y_0, \varepsilon]$ имеем $x(y, \Delta_4) > x(y, \Delta_3) > \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}$. Предположив же, что для некоторого $y_1 \in [-\varepsilon, y_0] \setminus (y_0, \Delta_4) = \sqrt{\varepsilon^2 - y_1^2}$ и $x(y_1, \Delta_4) > \sqrt{\varepsilon^2 - y^2}$ при $y > y_1$, приходим к противоречию, так как

$$\frac{dx}{dy}(y, \Delta_4) \Big|_{y=y_1} < -\frac{y_0}{x_0} < \frac{d\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}{dy} \Big|_{y=y_1}.$$

Ввиду монотонности (22) существует поэтому единственное $\Delta(\varepsilon)$, при котором интегральная кривая $x(y, \Delta(\varepsilon))$ касается окружности $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ в некоторой точке A .

Если двигаться вдоль интегральной кривой $\gamma = NA$ по натуральному параметру s , то в точках, где $\frac{d(x^2 + y^2)}{ds} = 0$, будет $\frac{d^2(x^2 + y^2)}{ds^2} = 2$. Поэтому точка A , где достигается $\min(x^2 + y^2)$,

есть единственная точка стационарности для $x^2 + y^2$, т. е. $x^2 + y^2$ на участке NA монотонно убывает. Поэтому монотонно поворачивается и касательная к кривой, так как $\frac{dx}{dy} = \psi(x^2 + y^2)$, причем $\psi' > 0$. Поэтому γ выпукла в одну сторону, в какую именно — легко определяется по знаку кривизны в точке N .

7. Дифференциальное уравнение (9) было составлено именно так, чтобы для кривых Φ_1, Φ_2 точка $(0, n_0) \in \Gamma(\Phi_1)$ была на постоянном расстоянии $\rho_2 = \Delta(\varepsilon)$ от любой точки $(x, n(x)) \in \Gamma(\Phi_2)$, $x \in \gamma$.

Нетрудно проверить, что $\rho_2(\Phi_1, \Phi_2) = \Delta(\varepsilon)$. Поэтому из построенного примера следует, что при $\rho_1(F_1, F_2) \leq \varepsilon$

$$\sup \rho_2(F_1, F_2) \geq \Delta(\varepsilon). \quad (23)$$

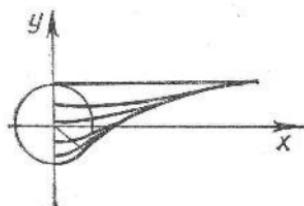


Рис. 4.

Для завершения доказательства теоремы 3 достаточно показать, что при $\rho_1(F_1, F_2) \leq \varepsilon$ для всякой точки $p \in \Gamma(F_1)$ существует точка $q \in \Gamma(F_2)$, для которой $|p - q| \leq \Delta(\varepsilon)$. Из симметрии ролей F_1 и F_2 следует $\rho_2(F_1, F_2) \leq \Delta(\varepsilon)$, что вместе с (23) дает нужное равенство.

8. Построим на плоскости R^2 семейство кривых K_λ , $0 < \lambda < \infty$, так что каждая кривая K_λ состоит из выходящего из N куска интегральной кривой γ , гладко продолженного дугой полуокружности

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = \rho^2((0, \lambda), \gamma), \quad x \geq 0,$$

где $\rho((0, \lambda), \gamma)$ — евклидово расстояние на плоскости от центра $(0, \lambda)$ этой полуокружности до кривой γ . Если $\lambda = \infty$, то в качестве K_∞ берем горизонтальный открытый отрезок с началом в точке $(0, \varepsilon)$ и концом в точке $(\sqrt{\Delta(\varepsilon)^2 - \varepsilon^2}, \varepsilon)$. Вид семейства K_λ изображен на рис. 4.

Через W_λ обозначим гиперповерхность в R^k , образованную вращением K_λ вокруг оси y , считаемой в R^k осью последней координаты, т. е.

$$(u_1, \dots, u_k) \in W_\lambda \Leftrightarrow \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} u_i^2}, u_k \right) \in K_\lambda.$$

Если $k = 2$, то W_λ состоит из кривой K_λ и ее отражения в оси O_y .

Отметим следующие свойства семейства W_λ .

1) Каждая гиперповерхность W_λ является C^1 -гладкой. Это позволяет говорить о единичных нормалях $n(x)$ к W_λ в точках $x \in W_\lambda$. Считаем, что $n(x)$ непрерывно зависит от x и при $|x| \rightarrow \Delta(\varepsilon)$ $n(x) \rightarrow (0, \dots, 0, 1) = e_k$.

2) Для всех $x \in W_\lambda$ $\sqrt{x^2 + (n(x) - e_k)^2} \leq \Delta(\varepsilon)$.

3) При $x \in W_\lambda$ $\langle x, e_k \rangle \leq \varepsilon$.

3) $\bigcup W_\lambda \supset U, (0)$.

(3) Гиперповерхность W_λ непрерывно зависит от λ .
Вудем считать оси в R^k выбранными так, что интересующая нас точка $p \in \Gamma(F_1)$ есть точка $(0, e_k)$. Положим $\mu = \sup \lambda$, для которых $0 < \lambda \leq \infty$ и $W_\lambda \cap M(F_2) \neq \emptyset$. Пусть $v \in W_\mu \cap M(F_2)$. Если

$$\langle v, e_k \rangle = \varepsilon, \text{ то } q = (v, e_k) \in \Gamma(F_2), \text{ и } |p - q| = \sqrt{v^2 + (e_k - e_k)^2} \leq \Delta(\varepsilon).$$

Если же $\langle v, e_k \rangle \neq \varepsilon$, то $\langle v, e_k \rangle < \varepsilon$. Пусть $n(v)$ есть нормаль к W_μ в точке v . Тогда $q = (v, n(v)) \in \Gamma(F_2)$, $|p - q| = \sqrt{v^2 + (n(v) - e_k)^2} < \Delta(\varepsilon)$, и теорема 3 доказана.

10. Проверим асимптотическое равенство (12). Из теорем 1 и 3 вытекает, что при $\varepsilon < 1$ будет $x^2 + y^2 + 2 - \Delta^2(\varepsilon) > 0 + 2 - 2\sqrt{1} = 0$. Поэтому уравнение (9) можно переписать в виде

$$y' = \sqrt{4(x^2 + y^2 + 2 - \Delta^2(\varepsilon))^{-2} - 1}. \quad (24)$$

При $\varepsilon \searrow 0$ имеем асимптотическое равенство

$$\Delta(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad y = O(\varepsilon), \quad x = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

и уравнение (24) принимает вид

$$y' = \sqrt{\Delta^2 - x^2 + O(\varepsilon^2)} = \sqrt{\Delta^2 - x^2} + \frac{O(\varepsilon^2)}{\sqrt{\Delta^2 - x^2}},$$

причем равномерно (по x и ε)

$$\left| \frac{(y' - \sqrt{\Delta^2 - x^2}) \sqrt{\Delta^2 - x^2}}{\varepsilon^2} \right| < C < \infty.$$

Пусть (x_A, y_A) — координаты точки A , а (x_N, y_N) — точки N . При малых ε

$$x_A = O(\varepsilon^{3/2}), \quad y_A = -\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Из определения точки N

$$y_N = \varepsilon, \quad x_N = \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} = \Delta + \frac{O(\varepsilon^2)}{\Delta} = \Delta + O(\varepsilon).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon - y_A &= \int_{x_A}^{x_N} y' dx = \int_{x_A}^{x_N} \sqrt{\Delta^2 - x^2} dx + O(\varepsilon^2) \int_{x_A}^{x_N} \frac{dx}{\sqrt{\Delta^2 - x^2}} = \\ &= \int_0^\Delta \sqrt{\Delta^2 - x^2} dx + O(\varepsilon^2) + x_A O(\sqrt{\varepsilon}) + (\Delta - x_N) O(\varepsilon) = \\ &= \frac{\pi}{4} \Delta^2 + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

т. е.

$$2\varepsilon + O(\varepsilon^2) = \frac{\pi}{4} \Delta^2,$$

что дает

$$\Delta(\varepsilon) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} V\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перевозчиков А. Г. Уклонение графиков сферических изображений. — В сб.: Применение функционального анализа в теории приближений, Калинин, 1974, вып. 4, с. 84—91.
2. Hartman P., Wintner A. On pieces of convex surfaces. — "Amer. J. Math". 1953, vol. 75, № 3, p. 477—487.

Поступила 4 марта 1976 г.

ТЕОРЕМЫ О ПОКРЫТИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Пусть F — некоторое замкнутое выпуклое ограниченое множество на плоскости. В настоящей статье рассматриваются задачи о покрытии фигуры F меньшими гомотетичными и подобными ей фигурами.

Сначала рассмотрим задачу о минимальном числе $b(F)$ меньших гомотетичных F фигур, которыми можно покрыть всю фигуру F . Для n -мерных выпуклых ограниченных замкнутых тел V в евклидовом пространстве задача была поставлена И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом и для $n = 2$ полностью ими решена [1]. Они показали, что если F не параллелограмм, то $b(F) = 3$, а в случае параллелограмма $b(F) = 4$. Другое доказательство этого утверждения получено В. Г. Болтянским [2], который показал эквивалентность задач о покрытии и освещении всей границы тела V минимальным числом параллельных пучков лучей [3]. Мы дадим новое решение задачи нахождения числа $b(F)$, основанное на следующем результате П. С. Солтана [4]: если $c'(V)$ — наименьшее число точечных источников света, которыми можно осветить извне всю границу тела V , то $c'(V) = b(V)$ или для $n = 2$ $c'(F) = b(F)$.

Хорду фигуры F будем называть максимальной, если любая хорда, параллельная ей, не больше ее, и строго максимальной, если любая параллельная ей хорда меньше ее. Очевидно, существует максимальная хорда любого направления.

Теорема 1. Число $b(F) \geq 2$.

Действительно, если $b(F) < 2$, то найдется максимальная хорда фигуры F , которая полностью покрывается одной из меньших гомотетичных фигур, что невозможно.

Теорема 2. Если F не является параллелограммом, то $b(F) = 3$.

Доказательство. Напомним, что точка A границы γ

фигуры F освещается извне точечным источником O , если луч OA содержит внутренние точки фигуры F . Пусть A — гладкая точка границы γ , принадлежащая ее наибольшему прямолинейному отрезку A_1A_2 (если γ не содержит прямолинейных отрезков, то точки A , A_1 и A_2 совпадают). Через A проведем опорную прямую a фигуры F . Пусть b — параллельная a и отличная от нее опорная прямая F , и $b \cap F = B_1B_2$ (отрезок B_1B_2 может вырождаться в точку). Считаем, что рассматриваемые точки расположены на границе γ в следующем порядке: A_1, A_2, B_2, B_1 .

Пусть C_1C_2 — максимальная хорда, параллельная a (точка C_1 принадлежит дуге $A_2A_1B_1$). Вообще говоря, C_1C_2 может совпадать с A_1A_2 . Поскольку F не является параллелограммом, то существует хорда $D_1D_2 \parallel a$ (точка D_1 лежит на той же дуге, что и C_1) такая, что $B_1B_2 < D_1D_2 < C_1C_2$.

Пусть O_1 — точка пересечения прямых C_1D_1 и C_2D_2 . Очевидно, точечный источник O_1 освещает дугу $\gamma_1 = D_1B_1B_2D_2$. По построению B_1A_2, B_2A_1 — строго максимальные хорды. В полу平面ности π_1 , определяемой прямой B_1A_2 и содержащей точки D_1 и C_1 , на дуге B_1D_1 возьмем точку D , отличную от концов B_1 и D_1 . По построению D расположена между параллельными прямыми b и C_1C_2 , а следовательно, и между b и a . Поэтому в полу平面ности π_1 прямая B_1D пересекает прямую C_1C_2 вне отрезка C_1C_2 , а прямую a в некоторой точке D_a вне отрезка A_1A_2 .

В π_1 на прямой B_1D вне отрезка B_1D_a возьмем точку O_2 . Дуга $DD_1C_1A_1A_2 = \gamma_2$, за исключением концов D и A_2 , находится внутри треугольника $O_2B_1A_2$. Поэтому дуга γ_2 (исключая ее концы) освещается источником O_2 . По построению дуги γ_1 и γ_2 перекрываются по дуге D_1D . Аналогично строим треугольник $O_3B_2A_1$ и получаем, что дуга γ_3 освещается источником O_3 . Но дуги γ_l ($l = 1, 2, 3$) перекрываются, покрывая γ , т. е. три источника O_l ($l = 1, 2, 3$) освещают γ . Таким образом, $c'(F) \leq 3$, следовательно, по теореме П. С. Солтана и $b(F) \leq 3$. Но по теореме 1 $b(F) > 2$, значит, $b(F) = 3$.

Пусть теперь фигура F , отличная от параллелограмма, покрыта тремя фигурами F_i ($i = 1, 2, 3$), меньшими F и ей гомотетичными. Пусть O_i — центр гомотетии фигуры F_i , а $0 < k_i < 1$ — ее коэффициент гомотетии. Соединив отрезками прямых центры гомотетий O_i , получим треугольник $O_1O_2O_3$, который назовем треугольником центров гомотетий.

Теорема 3. *Если фигура F покрывается F_i ($i = 1, 2, 3$), то F находится внутри треугольника центров гомотетий.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда в полу平面ности, определяемой, например, прямой O_1O_2 , не содержащей треугольник центров, будет расположена часть F' фигуры F (возможно, $F' = F$). К F' проводим (наиболее удаленную) опорную прямую $a \parallel O_1O_2$. Пусть точка $A = a \cap F'$. Тогда на каждом из лучей O_iA за точкой A нет точек F , т. е. точка A не может покрываться F_i . Полученное противоречие доказывает теорему.

Помещая центры гомотетий в вершины треугольника, легко проверить, что любой треугольник покрывается тремя гомотетичными ему треугольниками, коэффициенты гомотетий которых равны $2/3$. Существуют и другие выпуклые фигуры, покрывающиеся тремя гомотетическими им фигурами, коэффициенты гомотетий которых также равны $2/3$.

Справедлива следующая

Теорема 4. Любая выпуклая фигура F не покрывается тремя ей гомотетичными фигурами F_i ($i = 1, 2, 3$), коэффициенты гомотетий которых меньше $2/3$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть F покрывается F_i . Тогда по теореме 3 F находится внутри треугольника центров гомотетий $O_1O_2O_3$. Пусть T_i — треугольник, получающийся из $\triangle O_1O_2O_3$ при гомотетии с центром O_i и коэффициентом гомотетии $k_i = \frac{2}{3}$. Точка O пересечения медиан $\triangle O_1O_2O_3$ принадлежит всем T_i : она лежит на той стороне T_i , которая не содержит вершину O_i . Поэтому, если $O \in F$, то при $k_i < \frac{2}{3}$ ($i = 1, 2, 3$) она не покрывается F_i , что и требовалось доказать. Если точка O не $\in F$, то либо ни один из отрезков O_iO не пересекает F , либо хотя бы один из них пересекает F .

В первом случае, очевидно, одна из фигур F_i не покрывает ни одной точки F при $k_i < \frac{2}{3}$ и, значит, по теореме 1 фигура F не покрывается F_i ($i = 1, 2, 3$). Во втором случае на луче O_iO , пересекающем F , найдется такая точка $A \in O_iO \cap F$, что на отрезке AO не будет точек фигуры F . Очевидно, точка A не покрывается фигурой F_i . А так как точка A по построению не принадлежит треугольнику T_j ($j \neq i$), то она при $k_j < \frac{2}{3}$ не покрывается также и фигурой F_j . Теорема доказана.

Следует заметить, что пользуясь понятием треугольника центров гомотетий, доказательство этой теоремы сразу же следует из леммы Шпернера [5, с. 200].

Теорема 5. Любая выпуклая центрально-симметричная фигура не покрывается тремя ей гомотетичными фигурами, коэффициенты гомотетий которых меньше $3/4$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма. Пусть центрально-симметричный шестиугольник Q вписан в треугольник Δ так, что на каждой стороне Δ имеются две вершины Q . Тогда найдется такая сторона Q , длина которой не превосходит $\frac{1}{3}$ длины содержащей ее стороны треугольника Δ .

Доказательство. Пусть A_i ($i = 1, 2, 3$) — вершины треугольника Δ . Обозначим a_i длину стороны шестиугольника Q , принадлежащей стороне A_jA_k ($i \neq j, k$), Δ_i ($i = 1, 2, 3$) — треуголь-

ник при вершине A_i , отсекаемый шестиугольником Q . Пусть p , p_i ($i = 1, 2, 3$) — периметры треугольников Δ , Δ_i . Так как Q — центрально-симметричный шестиугольник, то треугольники Δ и Δ_i ($i = 1, 2, 3$) подобны. Значит,

$$\frac{p_1}{p} = \frac{a_1}{A_2 A_3}, \quad \frac{p_2}{p} = \frac{a_2}{A_1 A_3}, \quad \frac{p_3}{p} = \frac{a_3}{A_1 A_2}.$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$\frac{p_1 + p_2 + p_3}{p} = \frac{a_1}{A_2 A_3} + \frac{a_2}{A_1 A_3} + \frac{a_3}{A_1 A_2}.$$

Левая часть последнего равенства равна 1 в силу центральной симметрии Q . Следовательно, в правой части найдется слагаемое, не превосходящее $\frac{1}{3}$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5¹. Если F — параллелограмм, то утверждение теоремы очевидно. Пусть F не является параллелограммом. По теореме 2 F покрывается тремя меньшими гомотетичными ей фигурами F_i ($i = 1, 2, 3$). Покажем, что хотя бы один из коэффициентов гомотетии не меньше $\frac{3}{4}$.

Так как три фигуры F_i покрывают границу F , то существуют три точки A, B, C , каждая из которых принадлежит границе F и двум фигурам покрытия: $A \in F_1 \cap F_2$, $B \in F_1 \cap F_3$, $C \in F_2 \cap F_3$. Проведем опорные прямые a, b, c фигуры F соответственно в точках A, B, C . Прямые a, b, c попарно пересекаются, образуя треугольник $O'_1 O'_2 O'_3$ (опорные прямые a и b , например, пересекаются потому, что отрезок $AB \subset F_1$ не является максимальной хордой фигуры F). Считаем $A \in O'_1 O'_2$, $B \in O'_1 O'_3$, $C \in O'_2 O'_3$.

Пусть ω_1 — пересечение не содержащих $\Delta O'_1 O'_2 O'_3$ полуплоскостей, определяемых прямыми $O'_1 O'_2$ и $O'_1 O'_3$. Аналогично определим ω_2 и ω_3 . Легко заметить, что центр гомотетии каждой из фигур F_i ($i = 1, 2, 3$) принадлежит одному из множеств ω_j ($j = 1, 2, 3$), причем каждое ω_j содержит только один из центров. Пусть для определенности центр гомотетии O_i фигуры F_i лежит в ω_i . Построим содержащий фигуру F шестиугольник Q , противоположные стороны которого параллельны сторонам $\Delta O'_1 O'_2 O'_3$. Так как F — центрально-симметричная фигура, то Q также имеет центр симметрии.

По доказанной выше лемме найдется такая сторона Q , длина которой не превосходит одной трети длины содержащей ее стороны $\Delta O'_1 O'_2 O'_3$. Для определенности будем считать, что утверждение леммы выполняется для стороны $D_1 D_2$ шестиугольника Q , являющейся частью стороны $O'_1 O'_2$ $\Delta O'_1 O'_2 O'_3$ (точки на опорной прямой фигуры F в точке A расположены в следующем порядке: O'_1, D_2, A, D_1, O'_2). Таким образом

$$D_1 D_2 \leq \frac{1}{3} O'_1 O'_2. \quad (1)$$

¹ Идея доказательства принадлежит А. И. Медянику.

Обозначим $b' \in D_1$ опорную прямую F , параллельную b , а $c' \in D_2$ — опорную прямую F , параллельную c . Пусть прямая O_1A пересекает прямую $O'_1O'_3$ в точке \bar{O}_1 , а прямую b' в точке A_1 . Аналогично, пусть прямая O_2A пересекает прямую $O'_2O'_3$ в точке \bar{O}_2 , а прямую c' в точке A_2 . Так как F находится внутри Q , а точка A принадлежит F_1 и F_2 , то

$$k_i \geq \frac{O_i A}{\bar{O}_i A_i} \geq \frac{\bar{O}_i A}{\bar{O}_i A_i} = \bar{k}_i \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Треугольники $\bar{O}_i O'_i A$ и $A_i D_i A$ подобны. Поэтому

$$\bar{k}_i = \frac{O'_i A}{\bar{O}'_i D_i} \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Предположим, что $\bar{k}_2 > \bar{k}_1$. Тогда

$$\begin{aligned} O'_1 O'_2 &= O'_1 A + O'_2 A = \bar{k}_1 O'_1 D_1 + \bar{k}_2 O'_2 D_2 \leq \bar{k}_2 (O'_1 D_1 + \\ &+ O'_2 D_2) = \bar{k}_2 (O'_1 O'_2 + D_1 D_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно,

$$\bar{k}_2 \geq \frac{O'_1 O'_2}{O'_1 O'_2 + D_1 D_2} = \frac{1}{1 + \frac{D_1 D_2}{O'_1 O'_2}}. \quad (5)$$

На основании неравенств (1) и (5) заключаем, что $\bar{k}_2 \geq \frac{3}{4}$, после чего из неравенства (2) получаем $k_2 \geq \frac{3}{4}$, что и требовалось доказать.

Выясним еще, для каких фигур $k_i = \frac{3}{4}$ ($i = 1, 2, 3$). Для этого достаточно проследить, при каких условиях неравенства (1—5) превращаются в равенства. Во-первых, из неравенства (1) и доказательства леммы заключаем, что $k_i = \frac{3}{4}$ ($i = 1, 2, 3$) только при $D_1 D_2 = \frac{1}{3} O'_1 O'_2$ и выполнении аналогичных равенств для двух других сторон $\triangle O'_1 O'_2 O'_3$, т. е. когда периметр шестиугольника Q равен $\frac{2}{3}$ периметра $\triangle O'_1 O'_2 O'_3$. Во-вторых, из неравенств (2) получаем, что точка O_i ($i = 1, 2$) должна совпадать с точкой \bar{O}_i , т. е. центры гомотетий O_1 и O_2 лежат на прямых, содержащих стороны $\triangle O'_1 O'_2 O'_3$. А так как указанное построение можно провести и для двух других сторон Q , принадлежащих сторонам $\triangle O'_1 O'_2 O'_3$, то равенство всех коэффициентов гомотетии $\frac{3}{4}$ возможно только в том случае, когда O_i совпадает с O'_i ($i = 1, 2, 3$).

Значит, весь отрезок $D_1 D_2 \subset F$, так как в противном случае отрезок фигуры F , содержащей точку A , имел бы длину меньшую $\frac{1}{3}$ стороны $O'_1 O'_2$, что противоречит условию покрытия F фигурами F_i ($i = 1, 2, 3$). Аналогично устанавливается, что стороны Q ,

принадлежащие сторонам O'_1O_3 и O'_2O_3' , также принадлежат фигуре F .
Из выпуклости F вытекает, что F совпадает с Q . Поскольку в рассматриваемом случае периметр Q составляет $\frac{2}{3}$ периметра $O'_1O'_2O_3'$, то Q обладает следующим свойством: каждая сторона параллельна не пересекающей ее диагонали Q . Таким образом, имеет место следующая

Теорема 6. Пусть центрально-симметричная фигура F покрывается тремя меньшими гомотетичными ей фигурами F_i с коэффициентами гомотетии $k_i (i = 1, 2, 3)$. Все три коэффициента гомотетии $k_i = \frac{3}{4}$ тогда и только тогда, когда F — центрально-симметричный шестиугольник, каждая сторона которого параллельна не пересекающей ее диагонали этого шестиугольника.

Пусть фигура F покрывается гомотетичными фигурами $F_i, i = 1, 2 \dots n$ с коэффициентами $0 < k_i < 1$. Определим число k^n , $n > 2$ так, что 1) если $k_i \leq k^n$, причем хотя бы для одного k_i имеет место строгое неравенство, то F не покрывается $F_i, i = 1 \dots n$; 2) если каждый из $k_i = k^n$, то существует n фигур F_i , которые покрывают F . Очевидно, число k^n существует при любом $n > 2$, причем $k^{n+1} < k^n$.

Теорема 7. Если F — треугольник, то справедливы равенства: а) $k^3 = \frac{2}{3}$, б) $k^4 = \frac{4}{7}$, в) $k^5 = \frac{8}{15}$, г) $k^6 = \frac{1}{2}$.

Доказательство. а) Утверждение вытекает из доказательства теоремы 4.

б) Очевидно, $k^4 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, так как $k^4 < k^3 = \frac{2}{3}$, и четыре F_i с $k_i = \frac{1}{2}$ не покрывают F . Пусть F покрыт четырьмя гомотетичными треугольниками $F_i (i = 1, 2, 3, 4)$. По условию $k_i < 1$, поэтому вершины F принадлежат трем различным покрывающим треугольникам, например, $F_i (i = 1, 2, 3)$, причем $\frac{1}{2} < k_i < \frac{2}{3} (i = 1, 2, 3)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $F_i = F \cap F_i$. При этом вершины F являются центрами гомотетий для $F_i (i = 1, 2, 3)$. Пусть $\bar{F} = F \setminus \bigcup_{i=1}^3 F_i$. Так как $k_i > \frac{1}{2} (i = 1, 2, 3)$, то \bar{F} — треугольник, гомотетичный F . Легко найти, что его коэффициент гомотетии \bar{k} удовлетворяет равенству

$$\bar{k} = k_1 + k_2 + k_3 - 2. \quad (6)$$

Из неравенства $k_i < \frac{2}{3} (i = 1, 2, 3)$ и равенства (6) вытекает, что $\bar{k} < 0$. Значит, F_4 покрывает \bar{F} , если стороны \bar{F} являются средними линиями F_4 , т. е. $\bar{k} = -\frac{1}{2}k_4$. Таким образом, получили

$$k_1 + k_2 + k_3 + \frac{1}{2}k_4 - 2 = 0. \quad (7)$$

Из соотношения (7) следует, что $k^4 = \frac{4}{7}$.

в) Несложно видеть, что $\frac{1}{2} < k^5 < \frac{4}{7}$. Так же, как и при доказательстве утверждения б), строим треугольник, средние линии которого являются сторонами треугольника \bar{F} , непокрытого F_i ($i=1, 2, 3$). На основании (7) его коэффициент гомотетии удовлетворяет равенству

$$k_1 + k_2 + k_3 + \frac{1}{2}k - 2 = 0. \quad (8)$$

По условию \bar{F} покрыт треугольниками F_4 и F_5 , гомотетичными F . Ни один из них не покрывает всех вершин \bar{F} , поэтому пусть F_4 покрывает две вершины \bar{F} , а другой — одну вершину. Исходя из этого легко получаем соотношение

$$k = k_4 + \frac{1}{2}k_5. \quad (9)$$

Подставляем (9) в (8): $k_1 + k_2 + k_3 + \frac{1}{2}k_4 + \frac{1}{4}k_5 - 2 = 0$. Отсюда $k^5 = \frac{8}{15}$.

г) Легко проверить, что треугольник F покрывается шестью F_i ($i=1 \dots 6$) с $k_i = \frac{1}{2}$. Если коэффициенты F_i взять меньше $\frac{1}{2}$, то они не покрывают F , так как любые три из F_i не покрывают даже периметра треугольника, стороны которого являются средними линиями F . Значит, $k^6 = \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Заметим, что $k^7 = \frac{5}{11}$. Это можно доказать, пользуясь равенством $k = \alpha + \beta + \gamma - 2$, где k — коэффициент гомотетии треугольника \bar{F} , стороны которого принадлежат прямым, отсекающим от F при его вершинах гомотетичные ему треугольники с коэффициентами α, β, γ и вытекающим из него следствием: для того чтобы \bar{F} вырождался в точку, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha + \beta + \gamma = 2$.

Теперь фигуру F будем покрывать меньшими и подобными фигурами. Наименьшее число таких фигур обозначим через $\pi(F)$. Коэффициенты подобия покрывающих фигур могут сколь угодно мало отличаться от 1.

В [6] И. М. Яглом по этому поводу сообщает следующие результаты: для любой фигуры F число $\pi(F) \leq 3$, по имеются такие фигуры, для которых $\pi(F) = 2$, например, неравносторонний треугольник, и ставит задачу — выяснить, когда $\pi(F) = 2$. Мы сейчас получим условия, при которых $\pi(F) = 2$.

Любая хорда H разбивает фигуру F на две части F' и F'' . Пусть каждую из них движениями [7, с. 89] можно поместить

внутри F , при этом $H \subset F'$ находится внутри, например, хорды $H' \subset F$, а $H \subset F''$ — внутри хорды $H'' \subset F$. Возможно, $H' = H''$. С фигуре с такими хордами будем говорить, что у нее существует (по крайней мере одна) пара хорд, обладающих свойством (С).

Теорема 8. Тогда и только тогда $\pi(F) = 2$, когда у F существует хотя бы одна пара хорд, обладающая свойством (С).

Доказательство. 1. Пусть у F существует одна пара или несколько пар хорд со свойством (С). Тогда F можно поместить внутрь объединения двух экземпляров F . С центром в точке $O_1 \in H$ и коэффициентом $0 < k_i < 1$ ($i = 1, 2$) строим F_i ($i = 1, 2$), замотетичные соответствующим экземплярам F такие, что $F_1 \cup F_2 \supset F$. По условию сделать это возможно, т. е. F_1 и F_2 — меньшие и подобные F , покрывают F , или $\pi(F) = 2$, так как $\pi(F) \neq 1$.

2. Пусть теперь $\pi(F) = 2$, т. е. F_1 и F_2 , меньшие и подобные F , покрывают F . Тогда их пересечение $F_1 \cap F_2$ содержит, как минимум, хорду $H \subset F$, т. е. у F_i ($i = 1, 2$) существует хорда не меньшая H . Это те хорды, которые покрывают H . Тогда им подобные хорды у F будут больше H . По условию $F_1 \cup F_2 \supset F$, поэтому объединение двух экземпляров F , каждый из которых содержит внутри соответствующую F_i , содержит внутри исходную фигуру F , а следовательно, F' и F'' лежат внутри соответствующего экземпляра F . Таким образом, у F существует хотя бы одна пара хорд со свойством (С). Теорема доказана.

Следствия. 1. Для фигур постоянной ширины $\pi(F) \neq 2$, но $\pi(F) = 3$.

2. Если у параллелограмма $F = ABCD$, например, $\frac{1}{2}AD < AB < AD$, то $\pi(F) = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гохберг И. Ц., Маркус А. С. Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными. — «Изв. Молдавск. филиала АН СССР», 1960, № 10(76), с. 87—90.
2. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М., «Наука», 1965. 108 с.
3. Болтянский В. Г. Задача об освещении границы выпуклого тела. — «Изв. Молдавск. филиала АН СССР», 1960, № 10(76), с. 77—84.
4. Солтап П. С. К задачам о покрытии и освещении выпуклых тел. — «Изв. АН Молдавск. ССР», 1968, № 1, с. 49—57.
5. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. М., Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. 212 с.
6. Яглом И. М. О комбинаторной геометрии. М., «Знание», 1971. Сер. «Математика, кибернетика», № 8. 27 с.
7. Энциклопедия элементарной математики. В 5-ти кн. Кн. 4, Геометрия. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 538 с.

Поступила 12 апреля 1976 г.

К ГЕОМЕТРИИ ПФАФФОВЫХ И МОНЖЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Настоящая заметка состоит из двух параграфов. В первом мы рассматриваем следующий вопрос. Как известно, среди интегральных кривых монжева уравнения выделяются замечательные классы кривых: линии кривизны двух типов, геодезические двух типов, асимптотические и характеристические линии. Уравнение Пфаффа представляет частный случай уравнения Монжа, именно тот, когда уравнение Монжа линейно относительно дифференциалов. Все перечисленные классы кривых, кроме характеристических линий, содержатся и в множестве интегральных кривых пфаффова уравнения. Как обстоит дело с характеристическими линиями в случае уравнения Пфаффа?

Второй параграф посвящен вопросу о двух типах геодезических линий пфаффова уравнения — геодезических «прямейших» и геодезических «кратчайших». Д. М. Синцов доказал [2], что в то время как геодезические «прямейшие» образуют множество, зависящее от трех произвольных постоянных, геодезические «кратчайшие» в случае, когда условие интегрируемости не выполнено, образуют четырехпараметрическое множество. Д. М. Синцов подробно исследовал случай пфаффова уравнения $dy - z dx = 0$, к которому, как известно, приводится любое неинтегрируемое уравнение Пфаффа соответствующим точечным преобразованием. Однако при этом была допущена вычислительная ошибка, устраниению которой и посвящен этот параграф.

1. Дифференциальное уравнение Пфаффа

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (1)$$

представляет собою частный случай уравнения Монжа

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0 \quad (2)$$

однородного относительно дифференциалов, именно тот, когда Ω линейно относительно дифференциалов.

Уравнение (2) подчиняет точке x, y, z конус Монжа

$$\Omega(x, y, z, X-x, Y-y, Z-z) = 0, \quad (3)$$

который в случае (1) вырождается в плоскость

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0. \quad (4)$$

С уравнением Монжа (2) связана интеграционная задача: отыскать поверхности, в каждой точке которых касательная плоскость касается соответствующего конуса Монжа. Эти поверхности удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, уравнению Монжа в полных дифференциалах соответствует уравнение в частных производных первого порядка и обратно.

Переход от уравнения Монжа (2) к уравнению (5) осуществляется следующим образом.

Так как нормаль к конусу Монжа совпадает с нормалью к интегральной поверхности (5), выполняется уравнение

$$\frac{\Omega_{x'}}{p} = \frac{\Omega_{y'}}{q} = \frac{\Omega_{z'}}{-1}. \quad (6)$$

Изключив $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ из этих двух уравнений и из уравнения

$$\Omega\left(x, y, z, \frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'} 1\right) = 0, \quad (2')$$

приходим к уравнению (5).

Переход от уравнения (5) к уравнению (2) осуществляется путем исключения p , q из уравнения (5) и уравнений

$$px' + qy' - z' = 0, \quad (7)$$

$$x'F_q - y'F_p = 0. \quad (8)$$

Как известно, характеристики уравнения (5) определяются из системы

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}. \quad (9)$$

Они же являются интегральными кривыми уравнения Монжа (2), обладающими следующим характеризующим их свойством. Касательные плоскости π , π' к конусу Монжа, проведенные в двух бесконечно близких точках A , A' характеристики, пересекаются по прямой, касательной в A к плоской кривой C , лежащей в плоскости π и образованной точками, служащими вершинами конусов Монжа касательных к π .

В работе (1) было доказано, что характеристические линии уравнения Монжа определяются уравнением (2) и уравнением

$$\begin{vmatrix} \Omega_x \Omega_{x'} (\Omega_{x'})' \\ \Omega_y \Omega_{y'} (\Omega_{y'})' \\ \Omega_z \Omega_{z'} (\Omega_{z'})' \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим случай пфаффова уравнения, как частный случай монжева, линейного относительно дифференциалов

$$\Omega = P_{dx} + Q_{dy} + R_{dz}. \quad (11)$$

Здесь

$$\Omega_{x'} = P, \quad \Omega_{y'} = Q, \quad \Omega_{z'} = R. \quad (12)$$

Уравнение (10) принимает вид

$$\begin{vmatrix} P_x x' + Q_x y' + R_x z' & P & P' \\ P_y x' + Q_y y' + R_y z' & Q & Q' \\ P_z x' + Q_z y' + R_z z' & R & R' \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Умножим третью строку на z' и прибавим к ней первую строку, умноженную на x' и вторую — умноженную на y' , получим

$$\begin{vmatrix} P_x x' + Q_{xy}' + R_x z' & P & P' \\ P_y x' + Q_{yy}' + R_y z' & Q & Q' \\ P_{x'} + Q_{y'} + R_{z'} & R & P' x' + Q' y' + R' z' \end{vmatrix} = 0, \quad (13')$$

или

$$(P' x' + Q' y' + R' z') \begin{vmatrix} P & y' (P_y - Q_x) + z' (P_z - R_x) \\ Q & x' (Q_x - P_y) + z' (Q_z - R_y) \end{vmatrix} = 0. \quad (13'')$$

Первый сомножитель обращается в нуль лишь для асимптотических линий.

Следовательно,

$$(P_x + Q_{y'}) (Q_x - P_y) + z' [P(Q_z - R_y) - Q(P_z - R_x)] = 0, \quad (13''')$$

или, заменив $P_{x'} + Q_{y'}$ на $-R_{z'}$ и сократив на z'

$$R(Q_x - P_y) + Q(R_x - P_z) + P(Q_z - R_y) \equiv G = 0. \quad (14)$$

Следовательно, в случае пфаффова уравнения, т. е. монжева уравнения линейного относительно дифференциалов системы (2), (10), определяющая характеристические линии, сводится к уравнению Пфаффа (1) и условию интегрируемости $G = 0$. Таким образом, о характеристических линиях уравнения Пфаффа можно говорить лишь, когда выполнено условие интегрируемости и в этом случае любая интегральная кривая уравнения Пфаффа может считаться характеристической линией (подобно тому как на сфере или плоскости любая кривая есть линия кривизны).

Рассмотрим, к чему приводит в этом случае Монжева уравнения, линейного относительно дифференциалов, описанный переход.

В этом случае уравнения (6) принимают вид

$$\frac{P}{p} = \frac{Q}{q} = \frac{R}{-1}, \quad (6')$$

т. е. вместо одного уравнения в частных производных первого порядка мы приходим к системе из двух линейных уравнений в частных производных первого порядка

$$P + pR = 0, \quad Q + qR = 0.$$

Эта система совместна лишь при выполнении условия $G = 0$. Действительно, из

$$p_y = q_x$$

следует

$$\left(\frac{P}{R}\right)_y + \left(\frac{P}{R}\right)_z \frac{P}{Q} = \left(\frac{P}{Q}\right)_x + \left(\frac{Q}{R}\right)_z \frac{Q}{R},$$

т. е.

$$G = 0.$$

Рассмотрим случай линейного уравнения в частных производных первого порядка:

$$F(x, y, z, p, q) = X(x, y, z)p + Y(x, y, z)q + Z(x, y, z) = 0 \quad (15)$$

и применим к нему описанный переход.

В этом случае уравнение (8) принимает вид

$$x'Y - y'X = 0. \quad (16)$$

В силу (16) из уравнений (15) и (7) следует

$$\frac{X(x, y, z)}{x'} = \frac{Y(x, y, z)}{y'} = \frac{Z(x, y, z)}{-z'}, \quad (16')$$

приходим к системе из двух уравнений Пфаффа:

$$z'X + x'Z = 0, \quad z'Y + y'Z = 0$$

и конус Монжа вырождается в прямую — ось Монжа.

В то время, как в случае нелинейного уравнения в частных производных первого порядка (5) множество характеристических линий зависит от трех параметров и образует комплекс кривых, у линейного уравнения в частных производных первого порядка характеристики определяются уравнениями (16') и образуют двухпараметрическое множество — конгруэнцию кривых.

2. В работе [2] Д. М. Синцов исследует интегральные кривые пфаффова уравнения

$$dy - z dx = 0. \quad (17)$$

К этому уравнению можно привести надлежащим преобразованием любое неинтегрируемое пфаффово уравнение. Д. М. Синцов проинтегрировал оба типа геодезических линий — «примейшие» и «кратчайшие» и показал, что первые образуют трехпараметрическое множество и, следовательно, все геодезические «примейшие», проходящие через произвольную точку, образуют поверхность, а вторые зависят от четырех произвольных постоянных, так что произвольную регулярную точку A можно соединить «кратчайшей» с любой другой точкой B из ее окрестности.

Однако при отыскании геодезических «кратчайших» была допущена вычислительная ошибка, для устранения которой мы проводим заново требуемые выкладки.

Отыскание геодезических «кратчайших» уравнения (17) сводится к решению вариационной задачи

$$\int [1 + \mu(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \lambda(y' - zx')] dz = \min.$$

Соответствующие уравнения Эйлера:

$$\frac{d}{ds} (2\mu x' - \lambda z) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d}{ds} (2\mu y' + \lambda) = 0, \quad (19)$$

$$\lambda x' + \frac{d}{ds} (2\mu z') = 0. \quad (20)$$

К ним надо присоединить уравнение (17) и

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \quad (21)$$

Из (18), (19), (20) следует

$$\begin{aligned} 2\mu x'' + 2\mu' x' - \lambda z' &= 0, \\ 2\mu y'' + 2\mu' y' + \lambda' &= 0, \\ 2\mu z'' + 2\mu' z' + \lambda x' &= 0. \end{aligned}$$

Если эти уравнения умножить на x' , y' , z' соответственно и сложить, получим в силу (17) и (21)

$$2\mu' = 0,$$

следовательно, μ — постоянная.

Из (18), (19) следует

$$\begin{aligned} 2\mu x' - \lambda z &= C_1, \\ 2\mu y' + \lambda &= C_2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (17) и (21) находим значения $\frac{dx}{ds} = \frac{C'_1 + C'_2 z}{1 + z^2}$,

$\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - \frac{(C'_1 + C'_2 z)^2}{1 + z^2}}$, где положено $C_1 = 2\mu C'_1$, $C_2 = 2\mu C'_2$.

Таким образом, уравнения геодезических кратчайших

$$x = \int \frac{(C'_1 + C'_2 z) dz}{(1 + z^2) \sqrt{1 - \frac{(C'_1 + C'_2 z)^2}{1 + z^2}}} + C_3,$$

$$y = \int \frac{(C'_1 + C'_2 z) z dz}{(1 + z^2) \sqrt{1 - \frac{(C'_1 + C'_2 z)^2}{1 + z^2}}} + C_4.$$

Полученные уравнения отличаются от приведенных в работе [2], тем не менее окончательный вывод [2] верен: геодезические «кратчайшие» действительно зависят от четырех существенных постоянных (C'_1 , C'_2 , C_3 , C_4) в отличие от геодезических «прямейших», содержащих лишь три произвольные постоянные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаенко М. А. О характеристиках монжевых уравнений.—«Вестн. Харьк. ун-та», 1965, т. 31, с. 101—110.
2. Синцов Д. М. Studien über das System der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$.—«Зап. Харк. мат. т-ва», 1932, т. V, с. 97—129.

Поступила 27 сентября 1976 г.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СЛУЧАЕ ОДНОЙ ОЦЕНКИ ОБЪЕМА РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

1. В работе [4] была получена оценка объема t -мерного риманова многообразия M через нижнюю границу $\mu > 0$ его секционных кривизн и объем вполне геодезического n -мерного подмногообразия N :

$$\text{vol}_t M \leq \omega_n \frac{\text{vol}_n N}{\omega_n} \mu^{\frac{n-t}{2}},$$

где ω_k — объем единичной k -мерной сферы S^k . При $n = 1$ там же был полностью рассмотрен случай равенства. В настоящей заметке исследуется случай равенства при произвольном n . Очевидно, можно считать $\mu = 1$.

Теорема. Пусть M — полное связное t -мерное риманово многообразие, $t \geq 2$, секционные кривизны которого $K_s \geq 1$; N — вполне геодезическое n -мерное подмногообразие и

$$\text{vol}_t M = \omega_t \frac{\text{vol}_n N}{\omega_n}. \quad (1)$$

Тогда M и N — пространства постоянной кривизны 1.

Доказательство теоремы составляет п. 3 заметки.

2. Классификация полных пространств постоянной положительной кривизны дана в [1]. Там же по существу классифицированы и пары (M, N) таких пространств, где N — вполне геодезическое подмногообразие M . Известно, что каждому t -мерному полному связному риманову многообразию M постоянной положительной кривизны соответствует конечная группа $G(M)$ ортогональных преобразований, действующая без неподвижных точек на S^m , так что M есть пространство орбит этого действия. Группа $G(M)$ изоморфна фундаментальной группе M .

Следствие. Пусть в условиях теоремы $n \geq 2$. Тогда $G(N) = G(M)$, в частности, фундаментальные группы M и N изоморфны.

Доказательство. Докажем сначала, что гомоморфизм фундаментальных групп $i_*: \pi_1(N, p) \rightarrow \pi_1(M, p)$, индуцированный включением $i: N \hookrightarrow M$, есть мономорфизм. Пусть $\rho: S^m \rightarrow M$ универсальное риманово накрытие, $\gamma: [0, 1] \rightarrow N$, $\gamma(0) = \gamma(1) = \bar{p}$, такая петля в N , что петля $i \circ \gamma$ стягивается в M . Тогда $i \circ \gamma$ поднимается с помощью ρ в некоторую петлю $\tilde{\gamma}$ в S^m , лежащую в компоненте связности \tilde{N} полного прообраза $\rho^{-1} \circ i(N)$. Поскольку M и N — пространства кривизны 1, причем N вполне геодезическое подмногообразие M , а накрытие ρ изометрично, то \tilde{N} есть некоторая экваториальная сфера в S^m , в частности \tilde{N} односвязна,

так как $n \geq 2$. Поэтому γ стягивается в \tilde{N} , а значит $i \circ \gamma$ стягивается в $i(N)$. Теперь мы можем считать, что $G(N)$ — подгруппа $G(M)$.

Так как M — пространство постоянной кривизны 1, то число $\omega_m/\text{vol } M$ целое и является порядком группы $G(M)$. Тогда, в силу равенства (1), порядки групп $G(N)$ и $G(M)$ совпадают. Поскольку $G(N) \subset G(M)$, то $G(N) = G(M)$.

Замечание 1. Верно и обратное утверждение: если M, N — полные связные пространства постоянной кривизны 1, причем N — вполне геодезическое подмногообразие M , и $G(N) = G(M)$, то справедливо равенство (1).

Замечание 2. Отметим следующие частные случаи.

1. Если в условиях теоремы хотя бы одно из чисел m, n — четное, то непременно либо $M = S^m$, $N = S^n$, либо M и N изометричны, соответственно, вещественным проективным пространствам $P^m R$, $P^n R$. Это следует из того, что четномерное пространство постоянной кривизны 1 изометрично либо S^m , либо $P^m R$.

2. Если в условиях теоремы $n = 1$, то M изометрично некоторому линзовому пространству, причем $G(M) = Z_k$, где $k = \omega_m/\text{vol } M$. Это доказано в [4].

3. Доказательство теоремы. Случай $n = 1$ рассмотрен в [4], поэтому считаем, что $n \geq 2$. Ниже будет построено накрытие $S^n \rightarrow N$, которое окажется изометрическим. Введением нормальных координат с базой N устанавливается локальная изометрия M и S^n . Доказательство разбито на ряд лемм. Обозначения те же, что в [4].

Пусть Q — фокальное множество отображения \exp_N . На расслоении \tilde{N}^\perp единичных нормалей над N введем функции $t: \tilde{N}^\perp \rightarrow R$, $t(v) = \sup \{\tau > 0 : \rho(\exp_{N\tau} v, N) = \tau\}$ и $s: \tilde{N}^\perp \rightarrow R$, $s(v) = \inf \{\tau > 0 : \tau v \in Q\}$.

Рассмотрим множества $\Omega = \{\tau v : 0 < \tau < t(v), v \in \tilde{N}^\perp\}$, $\Omega^* = \{\tau v : 0 < \tau < s(v), v \in \tilde{N}^\perp\}$. Из условия на кривизны $K_\sigma \geq 1$ следует, что

$$\Omega \subset \Omega^* \subset \left\{ v \in N^\perp : |v| < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Доказательство следующей простой леммы почти дословно повторяет доказательство леммы 1 [4] и поэтому опускается.

Лемма 1. Пусть $v \in \Omega^*$, $w \in \Omega^*$, $v \neq w$. Тогда $\exp_N v \neq \exp_N w$.

Лемма 2. Существует точка $q \in M$ такая, что $\rho(q, N) = \frac{\pi}{2}$. Далее, если γ — любая кратчайшая между q и N , то вдоль γ для любого вектора $Y \neq 0$, $Y \perp \gamma$ кривизна по двумерному направлению (γ, Y)

$$K(\gamma, Y) = 1. \quad (2)$$

Доказательство. Обозначим $J(v)$ — якобиан отражения в точке $v \in N^\perp$. В [4] доказано, что для $v \in \Omega$

$$|J(v)| \leq \sin^{m-n-1} |v| \cos^n |v| \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{vol } M = \int_{\Omega} |J(v)| dv &\leq \int_{\Omega} \sin^{m-n-1} |v| \cos^n |v| dv \leq \int_{\substack{\{v \in N^\perp : |v| < \frac{\pi}{2}\}}} \sin^{m-n-1} |v| \times \\ &\times \cos^n |v| dv = \omega_m \frac{\text{vol } N}{\omega_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое утверждение леммы теперь следует из (1) и (4). Далее, невыполнение (2) влечет строгое неравенство в (3), а значит и в (4), что противоречит (1).

Лемма 3. Пусть $p \in N$, $q \in M$, $\rho(q, p) = \rho(q, N) = \frac{\pi}{2}$ и $[0, 1] \rightarrow M$ кратчайшая, $\gamma(0) = p$, $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = q$. Обозначим через Π_γ параллельный перенос вдоль γ , $\Pi_\gamma: M_p \rightarrow M_q$, рассмотрим в M_q подпространство E , натянутое на $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $\Pi_\gamma N_p$. Тогда

- a) для любой точки $p' \in N$, $\rho(p', q) = \frac{\pi}{2}$;
- б) если $\gamma': [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$ кратчайшая, $\gamma'(0) = p'$, $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = q$, то $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) \in E$.

Доказательство. По выбору точки $q_0(p', q) \geq \frac{\pi}{2}$. Перенесем теперь параллельно вдоль кратчайшей в N , соединяющей точки p и p' вектор $\gamma(0)$, обозначая $\gamma_t(0)$ результат переноса $\gamma(0)$ на дугу длины t . Поскольку N вполне геодезическое подмногообразие, то $\gamma_t(0) \in N^\perp$. Построим поверхность $\Phi(t, \tau) = \exp_N(\tau \gamma_t(0))$. Из леммы 2 следует, что $\Omega^* = \left\{ v \in N^\perp : |v| < \frac{\pi}{2} \right\}$ [2, с. 279], а из леммы 1 — что $\Phi(t', \tau') \neq \Phi(t'', \tau'')$ при $0 < \tau' < \tau'' < \frac{\pi}{2}$, $t' \neq t''$. Обозначим $Y(t, \tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(t, \tau)$, $X(t, \tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \tau)$. Тогда, очевидно, $|Y(t, \tau)| \equiv 1$, а из (2) и того, что $\gamma(0)$ переносится вдоль N параллельно, следует, что

$$|X(t, \tau)| = \cos \tau, \quad Y(t, \tau) \perp X(t, \tau).$$

Поэтому поверхность Φ локально изометрична единичной сфере S^3 , $\Phi\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = q$ и $\rho(p', q) = \frac{\pi}{2}$. Пункт а) леммы доказан.

Допустим теперь, что $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) \notin E$ для некоторой точки $p' \in N$.

Тогда ортогональная E составляющая вектора $\dot{\gamma}'\left(\frac{\pi}{2}\right)z \neq 0$. Означим $z' = \frac{\Pi_{\gamma}^{-1}z}{|z|}$. Рассмотрим кривую $c:(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$:

$$c(s) = \exp_N \left[\frac{\pi}{2} (\dot{\gamma}(0) \cos s + z' \sin s) \right].$$

В силу (2) векторное поле, параллельное z' вдоль геодезической γ , совпадает по направлению с полем вдоль γ , касательным к геодезической вариации $\Gamma(\tau, s) = \exp_N \left[\tau \frac{\pi}{2} (\dot{\gamma}(0) \cos s + z' \sin s) \right]$. Поэтому вектор $0 \neq \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(1, 0) = \dot{c}(0) \in M_q$ параллелен z и $\langle \dot{c}(0), \dot{\gamma}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \rangle \neq 0$. А тогда существует $s_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ такое, что $\rho(c(s_0), N) < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, найдется $w \in \Omega^*$, $\exp_N w = c(s_0)$. С другой стороны, $v = \frac{\pi}{2} (\dot{\gamma}(0) \cos s_0 + z' \sin s_0) \in \bar{\Omega}^*$ и $\exp_N v = \exp_N w$, что противоречит лемме 1. Это доказывает пункт б).

Пусть $v \in \tilde{N}^\perp$, причем $\exp_N \frac{\pi}{2} v = q$. Определим отображение некоторой окрестности U точки $p = \pi(v)$ ($\pi: N^\perp \rightarrow N$ проекция) $\Pi^v: U \rightarrow S^n \in E$ следующим образом:

$$\Pi^v(p') = \Pi_\gamma(T_{pp'}v), \quad p' \in U,$$

где $T_{pp'}$ — параллельный перенос вдоль кратчайшей в N , соединяющей точки p и p' , $\gamma: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$, $\gamma(t) = \exp_{p'}(tT_{pp'}v)$. В силу единственности геодезической, проходящей через точку в заданном направлении, Π^v взаимооднозначно. Легко видеть, что Π^v — вложение для достаточно малой окрестности U . Тогда множество

$$L = \left\{ z \in S^n \in E : \exists v \in \tilde{N}^\perp, \exp_N \frac{\pi}{2} v = q, z = -\Pi^v \circ \pi(v) \right\}$$

открыто в S^n . Но L замкнуто в S^n . Действительно, если $z_k \in L$, $z_k \rightarrow z$, то $p_k = \exp_q \left(-\frac{\pi}{2} z_k \right) \in N$, геодезические $\gamma_k = \exp_q(-tz_k)$ сходятся к $\gamma = \exp_q(-tz)$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $\gamma_k \left(\frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \dot{\gamma} \left(\frac{\pi}{2} \right) \in \tilde{N}^\perp$, и для $v = -\dot{\gamma} \left(\frac{\pi}{2} \right) z = \Pi^v \circ \pi(v)$. Поскольку $L \neq \emptyset$, то $L = S^n$ и определено отображение $\Psi: S^n \rightarrow N$ $\Psi(z) = \pi(v)$, являющееся накрытием.

Лемма 4. Отображение $\Psi: S^n \rightarrow N$ есть изометрическое накрытие.

Доказательство. Достаточно показать, что для $z \in S^n \subset E$, $y \in S_z^n$

$$|d\Psi_z(y)| = |y|.$$

Следовательно, что $\Psi(z) = \exp_q\left(-\frac{\pi}{2}z\right)$. Поэтому

$$d\Psi_z(y) = d\exp_q\left(-\frac{\pi}{2}z\right)\left(\frac{\pi}{2}y\right) = Y\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

так что $Y(t)$ — поле Якоби вдоль геодезической $\gamma(t) = \exp_q(-tz)$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $Y(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = y$ [3, с. 151]. В силу (2)

$$Y(t) = \sin t \tilde{Y}(t),$$

так что $\tilde{Y}(t)$ — параллельное вдоль γ , поле, $\tilde{Y}(0) = y$. Поэтому

$$|d\Psi_z(y)| = \left|Y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |y|.$$

На леммы 4 следует, что N — пространство постоянной кривизны 1. Учитывая локальную изометрию N и $S^n \subset S^m$ и рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2 [4], получаем, что M — пространство постоянной кривизны 1. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уилл J. A. Spaces of constant curvature. — Mc Graw-Hill Co, 1967, p. 87—100.
2. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. М., «Мир», 1967. 330 с.
3. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в центре. М., «Мир», 1971. 343 с.
4. Пуцко С. В. Одна экстремальная теорема римановой геометрии. — «Мат. заметки», 1976, т. 19, вып. 5, с. 795—804.

Поступила 20 января 1976 г.

БИЭРМИТОВЫ ПРЯМЫЕ НАД ТЕНЗОРНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ТЕЛ

I. Проективные прямые.

Хорошо известно, что проективные прямые P_1 , $P_1(i)$, $P_1(i, j)$ и $P_1(i, j, l)$ над полем \mathbf{R} вещественных чисел, над полем $\mathbf{C} = \mathbf{R}(i)$ комплексных чисел, над телом $\mathbf{R}(i, j)$ кватернионов и над альтернативным телом $\mathbf{R}(i, j, l)$ октав можно рассматривать соответственно* как конформную прямую C_1 , конформную плоскость C_3 и конформные пространства C_4 и C_8 , и что их можно интерпретировать точками абсолютов плоскости Лобачевского 1S_2 и пространств Лобачевского 1S_3 , 1S_5 и 1S_9 . При этом группы проективных преобразований прямых изоморфны группам конформных преобразований конформных прямой, плоскости и пространств и группам движений плоскости и пространств Лобачевского [1, с. 598, 682].

* Слово «соответственно» подразумевается во всех дальнейших перечислениях.

Переходя от поля $R(i)$ и тел $R(i, j)$ и $R(i, j, l)$ к их тензорным произведениям с полем $R(i)$ — алгебре $R(i, I)$ бикомплексных чисел, алгебре $R(i, j, I)$ бикватернионов и алгебре $R(i, j, l, I)$ биоктав и определяя проективные прямые $P_1(i, I)$, $P_1(i, j, I)$ и $P_1(i, j, l, I)$ над этими алгебрами, точно таким же образом мы покажем, что эти прямые можно рассматривать как комплексную конформную плоскость $C_2(i)$ и комплексные конформные пространства $C_4(i)$ и $C_8(i)$, которые можно интерпретировать точками абсолютов комплексных эллиптических пространств $S_3(i)$, $S_5(i)$ и $S_9(i)$. При этом группы проективных преобразований бикомплексной, бикватернионной и биоктавной проективных прямых изоморфны группам конформных преобразований комплексных конформных плоскости и пространств и группам движений комплексных эллиптических пространств.

С другой стороны, определяя проективную прямую $P_1(i, j, l, J)$ над тензорным произведением двух тел $R(i, j)$ — алгеброй $R(i, j, I, J)$ кватеркватернионов, изоморфной алгебре R_4 вещественных 4-матриц [1, с. 449], из общей теории проективных пространств над алгебрами R_n n -матриц мы получим, что кватеркватернионная проективная прямая интерпретируется в виде многообразия 3-плоскостей вещественного проективного 7-пространства P_7 , причем группа проективных преобразований кватеркватернионной проективной прямой изоморфна группе коллинеаций пространства P_7 [1, с. 675]. Эти факты можно записать так:

$$\begin{aligned} P_1 &= C_1 = {}^1S_2, \\ P_1(i) &= C_2 = {}^1S_3, \\ P_1(i, j) &= C_4 = {}^1S_5, \\ P_1(i, j, l) &= C_8 = {}^1S_9, \\ P_1(i, I) &= C_2(i) = S_3(i), \\ P_1(i, j, I) &= C_4(i) = S_5(i), \\ P_1(i, j, l, I) &= C_8(i) = S_9(i), \\ P_1(i, j, l, J) &= P_7. \end{aligned}$$

Всякие четыре точки проективных прямых обладают проективными инвариантами, совпадающими в первых семи случаях с конформными инвариантами точек конформных пространств, определяемыми двойными отношениями этих точек, а в последнем случае — с проективными инвариантами 3-плоскостей пространства P_7 . Число этих инвариантов равно единице для прямой P_1 , двум для прямых $P_1(i)$, $P_1(i, j)$ и $P_1(i, j, l)$ и четырем для прямых $P_1(i, I)$, $P_1(i, j, I)$, $P_1(i, j, l, I)$ и $P_1(i, j, l, J)$. В первых семи случаях эти инварианты совпадают также со стационарными расстояниями прямых пространств 1S_2 , 1S_3 , 1S_5 , 1S_9 , $S_3(i)$, $S_5(i)$ и $S_9(i)$, определяемых парами точек их абсолютов, изображающих пары точек конформных пространств.

Заменяя тела в тензорных произведениях тел алгебрами, имеющими те же комплексные формы, что и данные тела, мы определим проективные прямые над алгеброй $R(e)$ двойных чисел, алгеб-

антикватернионов, алгеброй $R(i, j, e)$ антиоктав, алгеброй $R(e, E)$ дидвойных чисел, алгебрами $R(i, j, E)$ и $R(i, j, l, E)$ дикватернионов и диантикватернионов алгебрами $R(i, j, l, E)$ и $R(i, j, e, E)$ диоктав и диантиоктав и алгеброй $R(i, j, I, E)$ антикватернионов. Эти прямые обозначим, соответственно, $P_1(e)$, $P_1(l, e)$, $P_1(i, j, e)$, $P_1(e, E)$, $P_1(i, j, E)$, $P_1(i, e, E)$, $P_1(i, l, I, E)$, $P_1(i, j, e, E)$ и $P_1(i, j, I, E)$; они допускают аналитические интерпретации в первых восьми случаях в виде псевдоевклидовых пространств и абсолютов гиперболических пространств, а в последнем случае — в виде многообразия прямых кватернионной проективной плоскости, что можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1(e) &= {}^1C_2 = {}^2S_3, \\ P_1(i, e) &= {}^1C_4 = {}^3S_5, \\ P_1(i, j, e) &= {}^4C_8 = {}^5S_9, \\ P_1(e, E) &= {}^1C_2(e) = {}^2S_3(e), \\ P_1(i, j, E) &= C_4(e) = {}^1S_5(e), \\ P_1(i, e, E) &= {}^2C_4(e) = {}^3S_5(e), \\ P_1(i, j, l, E) &= C_8(e) = {}^1S_9(e), \\ P_1(i, j, e, E) &= {}^4C_8(e) = {}^5S_9(e), \\ P_1(i, j, I, E) &= P_2(i, j). \end{aligned}$$

2. Эллиптические прямые.

Максимальные компактные подгруппы групп проективных прямых являются группами движений вещественной эллиптической прямой S_1 , эрмитовых эллиптических прямых: комплексной прямой $\tilde{S}_1(i)$, кватернионной прямой $\bar{S}_1(i, j)$, октавной прямой $S_1(i, j, I)$ и биэрмитовых эллиптических прямых: бикомплексной прямой $\tilde{\tilde{S}}(i, I)$, бикватернионной прямой $\tilde{\tilde{S}}_1(i, j, I)$, биоктавной прямой $\tilde{\tilde{S}}_1(i, j, l, I)$ и кватеркватернионной прямой $\tilde{\tilde{S}}_1(i, j, I, J)$ [1, с. 622, 683, 684]. С другой стороны, максимальные компактные подгруппы групп движений плоскости 1S_2 и пространств 1S_3 , 1S_5 , 1S_9 , $S_3(i)$, $S_5(i)$, $S_9(i)$ и P_7 являются группами движений вещественных эллиптических прямой S_1 , плоскости S_3 и пространств S_4 , S_8 , S_5 , S_9 и S_7 .

Эти же подгруппы можно определить как подгруппы групп проективных преобразований прямых, перестановочных с абсолютным поляритетом, имеющим вид ' $x = -x^{-1}$ для прямой S_1 , ' $x = -\bar{x}^{-1}$ для прямых $\bar{S}_1(i)$, $\bar{S}_1(i, j)$ и $\bar{S}_1(i, j, l)$ и, если мы обозначим переход к сопряженным элементам в обоих сомножителях тензорных произведений тел через $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$, имеющим вид ' $x = -\bar{x}^{-1}$, для прямых $\tilde{S}_1(i, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, l, I)$ и $\tilde{S}_1(i, j, I, J)$. Поляритеты определены относительно пары мнимых точек $x^2 = -1$ прямой P_1 , мнимой эрмитовой квадрики $xx = -1$ прямых $P_1(i)$, $P_1(i, j)$, $P_1(i, j, l)$ и мнимой биэрмитовой квадрики

$\tilde{\bar{x}}_{xx} = -1$ прямых $P_1(i, I)$, $P_1(i, j, I)$ и $P_1(i, j, l, I)$. Обозначения $\bar{S}_1(i, \dots)$ и $\tilde{S}_1(i, \dots, I, \dots)$ связаны с уравнениями соответственных эрмитовых и биэрмитовых квадрик, а названия этих прямых объясняются названиями квадрик.

Изометричность прямых $\bar{S}_1(i)$, $\bar{S}_1(i, j)$ и $\bar{S}_1(i, j, l)$ сферам в евклидовых пространствах R_3 , R_5 и R_9 хорошо известна [1, с. 630, 683]. Отсюда следует, что прямые $\bar{S}_1(i)$, $\bar{S}_1(i, j)$ и $\bar{S}_1(i, j, l)$ с отождествленными парами полярно сопряженных точек изометричны плоскости S_2 и пространствам S_4 и S_8 . Поэтому пары полярно сопряженных точек прямых $\bar{S}_1(i)$, $\bar{S}_1(i, j)$ и $\bar{S}_1(i, j, l)$ изображаются точками плоскости S_2 и пространств S_4 и S_8 и полярными им, соответственно, прямыми плоскости S_2 , 3-плоскостями пространства S_4 и 7-плоскостями пространства S_8 .

Точки прямых $\tilde{S}_1(i, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, I)$ и $\tilde{S}_1(i, j, l, I)$, как и точки прямых $P_1(i, I)$, $P_1(i, j, I)$ и $P_1(i, j, l, I)$, изображаются точками абсолютов пространств $S_3(i)$, $S_5(i)$ и $S_9(i)$, которые в данном случае совпадают с мнимыми абсолютами эллиптических пространств S_3 , S_5 и S_9 . При этом полярные преобразования прямых $\tilde{S}_1(i, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, I)$ и $\tilde{S}_1(i, j, l, I)$ изображаются переходами от точек мнимых абсолютов пространств S_3 , S_5 и S_9 к мимо сопряженным точкам тех же абсолютов. Но каждая пара мимо сопряженных точек мнимого абсолюта вещественного эллиптического пространства определяет вещественную прямую этого пространства. Поэтому пары полярно сопряженных точек прямых $\tilde{S}_1(i, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, I)$ и $\tilde{S}_1(i, j, l, I)$ изображаются прямыми пространств S_3 , S_5 и S_9 и полярными им, соответственно, прямыми пространства S_3 , 3-плоскостями пространства S_5 и 7-плоскостями пространства S_9 .

Точки прямой $\tilde{S}_1(i, j, I, J)$ изображаются 3-плоскостями пространства S_7 [1, с. 677], при этом пары полярно сопряженных точек прямой $\tilde{S}_1(i, j, I, J)$ изображаются парами взаимно-полярных 3-плоскостей пространства S_7 . Полученные результаты можно записать так:

$\frac{S_1}{\bar{S}_1(i) = S_2}$	точка + точка,
$\frac{S_4}{\bar{S}_1(i, j) = S_4}$	точка + прямая,
$\frac{S_8}{\bar{S}_1(i, j, l) = S_8}$	точка + 3-плоскость,
$\frac{S_3}{\tilde{S}_1(i, I) = S_3}$	точка + 7-плоскость,
$\frac{S_5}{\tilde{S}_1(i, j, I) = S_5}$	прямая + прямая,
$\frac{S_9}{\tilde{S}_1(i, j, l, I) = S_9}$	прямая + 3-плоскость,
$\frac{S_7}{\tilde{S}_1(i, j, I, J) = S_7}$	прямая + 7-плоскость,
	3-плоскость + 3-плоскость.

Таким образом, пары полярно сопряженных точек эрмитовых эллиптических прямых над тензорным произведением тел размерностей p и q ($p, q = 1, 2, 4, 8$) изображаются парами взаимно полярных $(p-1)$ -плоскостей и $(q-1)$ -плоскостей вещественного эллиптического $(p+q-1)$ -пространства S_{p+q-1} . Из определения этих интерпретаций видно, что группы движений эрмитовых эллиптических прямых изоморфны группам движений вещественных эллиптических пространств.

Всякие две точки эллиптической прямой обладают метрическими инвариантами, совпадающими с проективными инвариантами этих точек и точек, полученных из них абсолютными поляритетами. Число этих инвариантов таково: один для прямых S_1 , $S_1(i)$, $S_1(i, j)$, $S_1(i, j, l)$, два для прямых $\tilde{S}_1(i, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, I)$ и $\tilde{S}_1(i, l, l, I)$ и четыре для прямой $\tilde{S}_1(i, j, I, J)$. Эти инварианты совпадают со стационарными расстояниями прямых и 3-плоскостей пространств S_{p+q-1} , изображающих эти прямые. Заменяя в тензорных произведениях тел алгебрами, имеющими те же комплексные формы, что и эти тела, мы определим эрмитовы и би-эрмитовы эллиптические прямые над алгебрами $R(e)$, $R(i, e)$, $R(i, E)$, $R(e, E)$, $R(i, j, E)$, $R(i, e, E)$, $R(i, j, l, E)$, $R(i, j, e, E)$, $R(i, j, I, E)$ и $R(i, e, I, E)$ (алгебры $R(i, E)$ и $R(i, e, I, E)$ изоморфны алгебрам $R(i, I)$ и $R(i, j, I, J)$). Эти прямые, которые мы обозначим $\bar{S}_1(e)$, $\bar{S}_1(i, e)$, $\bar{S}_1(i, j, e)$, $\tilde{S}_1(i, E)$, $\bar{S}_1(e, E)$, $\tilde{S}_1(i, j, E)$, $\tilde{S}(i, e, E)$, $\tilde{S}_1(i, j, l, E)$, $\tilde{S}_1(i, j, e, E)$, $\tilde{S}_1(i, j, I, E)$ и $\tilde{S}_1(i, e, I, E)$, допускают аналогичные интерпретации. Пары полярно сопряженных точек прямых изображаются парами взаимно полярных точек, прямых, 3-плоскостей и 7-плоскостей гиперболических пространств и пар прямых кватернионного симплектического пространства [2], соответствующих друг другу в абсолютной нуль-системе этого пространства. Полученные результаты можно выразить в таком виде:

$\bar{S}_1(e) = {}^1S_2$	точка + гиперболическая прямая,
$\bar{S}_1(i, e) = {}^2S_4$	точка + гиперболическая 3-плоскость индекса 1 или 2,
$\tilde{S}_1(i, j, e) = {}^4S_8$	точка + гиперболическая 7-плоскость индекса 3 или 4,
$\tilde{S}_1(i, E) = {}^1S_3$	эллиптическая прямая + гиперболическая прямая,
$\tilde{S}_1(e, E) = {}^2S_3$	гиперболическая прямая + гиперболическая прямая,
$\tilde{S}_1(i, j, E) = {}^1S_5$	эллиптическая прямая + гиперболическая 3-плоскость индекса 1,

- $\tilde{\bar{S}}_1(i, e, E) = {}^3S_5$ гиперболическая прямая + гиперболическая 3-плоскость индекса 2,
 $\tilde{\bar{S}}_1(i, j, l, E) = {}^1S_9$ эллиптическая прямая + гиперболическая 7-плоскость индекса 1,
 $\tilde{\bar{S}}_1(i, j, e, E) = {}^5S_9$ гиперболическая прямая + гиперболическая 7-плоскость индекса 4,
 $\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I, E) = \tilde{\bar{S}}_{p_3}(i, j)$ кватернионная прямая + кватернионная прямая
 $\tilde{\bar{S}}_1(i, e, I, E) = {}^4S_7$ гиперболическая 3-плоскость индекса 2 +
 + гиперболическая 3-плоскость индекса 2.

3. Гиперболические прямые.

Вещественную гиперболическую прямую 1S_1 , эрмитовы гиперболические прямые над телами ${}^1\bar{S}_1(i)$, ${}^1\bar{S}_1(i, j)$ и ${}^1\bar{S}_1(i, j, l)$ и биэрмитовы гиперболические прямые над тензорными произведениями тел, которые обозначим ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, I)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, l, I)$, ${}^1\check{\bar{S}}_1(i, j, I, J)$, можно определить как проективные прямые над этими телами или тензорными произведениями, в которых определены абсолютные поляритеты, приводимые к виду ' $x = x^{-1}$ ' для прямой ' S_1 ', ' $x = \bar{x}^{-1}$ ', для прямых ' $\bar{S}_1(i)$ ', ' $\bar{S}_1(j)$ ', ' $\bar{S}_1(i, l)$ ' и ' $x = \tilde{\bar{x}}^{-1}$ ', для прямых ' $\tilde{\bar{S}}_1(i, I)$ ', ' $\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I)$ ', ' $\tilde{\bar{S}}_1(i, j, l, I)$ ', ' $\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I, J)$ '. Эти поляритеты определены относительно пары точек $x^2 = 1$ прямой P_1 , эрмитовой квадрики $xx = -1$ прямых $P_1(i)$, $P_1(i, j)$, $P_1(i, j, l)$ и биэрмитовой квадрики $xx = -1$ прямых $P_1(i, I)$, $P_1(i, j, I)$, $P_1(i, j, l, I)$ и $P_1(i, j, I, J)$.

Так же, как в случае прямых $\bar{S}_1(i)$, $\bar{S}_1(i, j)$ и $\bar{S}_1(i, j, l)$, доказывается изометричность прямых ${}^1\bar{S}_1(i)$, ${}^1\bar{S}_1(i, j)$ и ${}^1\bar{S}_1(i, j, l)$ сферам мнимого радиуса в псевдоевклидовых пространствах 1R_3 , 1R_5 [1, с. 630] и 1R_9 . Отсюда следует, что прямые ${}^1\bar{S}_1(i)$, ${}^1\bar{S}_1(i, j)$ и ${}^1\bar{S}_1(i, j, l)$ с отождествленными парами полярно сопряженных точек изометричны плоскости 1S_2 и пространствам 1S_4 и 1S_8 . Поэтому пары полярно сопряженных точек прямых ${}^1\bar{S}_1(i)$, ${}^1\bar{S}_1(i, j)$, ${}^1\bar{S}_1(i, j, l)$ изображаются точками плоскости 1S_2 и пространств 1S_4 и 1S_8 и полярными им эллиптическими прямыми плоскости 1S_2 , эллиптическими 3-плоскостями пространства 1S_4 и эллиптическими 7-плоскостями пространства 1S_8 .

Так же, как в случае прямых $\tilde{\bar{S}}_1(i, I)$, $\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I)$ и $\tilde{\bar{S}}_1(i, j, l, I)$, показывается, что пары полярно сопряженных точек прямых ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, I)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I)$ и ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, l, I)$ изображаются эллиптическими прямыми пространств 2S_3 , 2S_5 и 2S_9 и полярными им, соответственно, эллиптическими прямыми пространства 2S_3 , эллип-

тическими 3-плоскостями пространства 2S_5 и эллиптическими 7-плоскостями пространства 2S_9 .

Так же, как в случае прямой $\tilde{S}_1(i, j, I, J)$, показывается, что точки прямой ${}^1\tilde{S}_1(i, j, I, J)$ изображаются эллиптическими 3-плоскостями пространства 4S_7 , при этом пары полярно сопряженных точек прямой ${}^1\tilde{S}_1(i, j, I, J)$ изображаются парами взаимно полярных эллиптических 3-плоскостей пространства 4S_7 . Полученные результаты выглядят так:

1S_1	точка + точка,
${}^1\bar{S}_1(i) = {}^1S_2$	точка + эллиптическая прямая,
${}^1\bar{S}_1(i, j) = {}^1S_4$	точка + эллиптическая 3-плоскость,
${}^1\bar{S}_1(i, j, l) = {}^1S_8$	точка + эллиптическая 7-плоскость,
${}^1\bar{S}_1(i, I) = {}^2S_3$	эллиптическая прямая + эллиптическая прямая,
${}^1\tilde{S}_1(i, j, I) = {}^2S_5$	эллиптическая прямая + эллиптическая 3-плоскость,
${}^1\tilde{S}_1(i, j, l, I) = {}^2S_9$	эллиптическая прямая + эллиптическая 7-плоскость,
${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I, J) = {}^4S_7$	эллиптическая 3-плоскость + эллиптическая 3-плоскость.

Таким образом, пары полярно сопряженных точек эрмитовых гиперболических прямых над тензорным произведением тел размерностей p и q ($p, q = 1, 2, 4, 8$) изображаются парами взаимно полярных эллиптических $(p - 1)$ -плоскостей и $(q - 1)$ -плоскостей гиперболического $(p + q - 1)$ -пространства ${}^qS_{p+q-1}$.

Всякие две точки гиперболической прямой обладают метрическими инвариантами, совпадающими с проективными инвариантами этих точек и точек, получаемых из них абсолютными поляритетами. Число этих инвариантов: один для прямых 1S_1 , ${}^1\bar{S}_1(i)$, ${}^1\bar{S}_1(i, j)$ и ${}^1\tilde{S}_1(i, j, l)$, два для прямых ${}^1\tilde{S}_1(i, I)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, l, I)$ и четыре для прямой ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I, J)$. Эти инварианты совпадают со стационарными расстояниями прямых и 3-плоскостей и 7-плоскостей пространств ${}^qS_{p+q-1}$, изображающих эти прямые.

4. Евклидовы прямые.

Предельным переходом из эллиптических прямых S_1 , $\bar{S}_1(i)$, $\bar{S}_1(l, j)$, $\bar{S}_1(i, j, l)$, $\tilde{S}_1(i, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, l, I)$, $\tilde{S}_1(i, j, I, J)$ и гиперболических прямых 1S_1 , ${}^1\bar{S}_1(i)$, ${}^1\bar{S}_1(i, j)$, ${}^1S_1(i, j, l)$, ${}^1\tilde{S}_1(i, I)$, ${}^1\tilde{S}_1(i, j, I)$ и ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, j, I, J)$ получим вещественную евклидову прямую R_1 , эрмитовы евклидовы прямые $\tilde{R}_1(i)$,

$\bar{R}_1(i, j)$, $\bar{R}_1(i, j, l)$ и биэрмитовы евклидовы прямые $\tilde{R}_1(i, l)$,
 $\tilde{R}_1(i, j, I)$, $\tilde{R}_1(i, j, l, I)$ и $\tilde{R}_1(i, j, I, J)$.

Предельным переходом из соответствующих им вещественных пространств получим евклидову прямую R_1 , евклидову плоскость R_2 , евклидовы пространства R_4 и R_8 и квазиэллиптические пространства S_3^1 , S_5^1 , S_9^1 и S_7^3 [3, с. 285]. Предельным переходом из интерпретаций п. 2 и 3 получим интерпретации евклидовых прямых над телами и тензорными произведениями тел в виде евклидовых пространств и эллиптических прямых и 3-плоскостей квазиэллиптических пространств, которые можно выразить в таком виде:

R_1	точка,
$\bar{R}_1(i) = R_2$	точка,
$\bar{R}_1(i, j) = R_4$	точка,
$\bar{R}_1(i, j, l) = R_8$	точка,
$\tilde{R}_1(i, l) = S_3^1$	эллиптическая прямая,
$\tilde{R}(i, j, l) = S_5^1$	эллиптическая прямая,
$\tilde{R}_1(i, j, l, I) = S_9^1$	эллиптическая прямая,
$\tilde{R}_1(i, j, I, J) = S_7^3$	эллиптическая 3-плоскость.

Заметим также, что предельным переходом из проективных и эллиптических прямых над тензорными произведениями тел и над алгебрами, имеющими те же комплексные формы, что и эти тензорные произведения, мы получим проективные и эллиптические прямые над квазипростыми алгебрами [4]. Интерпретации проективных прямых над этими алгебрами, аналогичные интерпретации п. 1, мы получили в [5, с. 173]. Аналогично интерпретациям п. 2 можно получить также интерпретации эллиптических прямых над этими алгебрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М., «Мир», 1955. 744 с.
2. Румянцева Л. В. Кватернионная симплектическая геометрия.—«Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу», 1963, вып. 12, с. 281—314.
3. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., «Мир», 1969. 547 с.
4. Квазипростые алгебры, квазиматрицы и спинорные представления квазиневклидовых движений.—«Изв. вузов, сер. математика», 1969, № 4, с. 62—73. Авт.: Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский, Т. Г. Орловская и др.
5. Дробно-линейные преобразования йордановых алгебр.—«Изв. вузов, сер. математика», 1974, № 5, с. 169—184. Авт.: Б. А. Розенфельд, Р. П. Выпавина, И. И. Колокольцева и др.

Поступила 15 декабря 1975 г.

О ДИАМЕТРАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ И ПЛОСКОСТЯХ КОСОЙ СИММЕТРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА E^m

Пусть F_n есть $(m-1)$ -мерная алгебраическая поверхность порядка n в m -мерном евклидовом пространстве E^m с координатным базисом e_1, \dots, e_m . Если несобственная точка $U_\infty (u_1 : \dots : u_m : 0)$ либо не принадлежит F_n , либо является ее обыкновенной точкой, то полярная плоскость P_u точки U_∞ относительно поверхности F_n называется диаметральной плоскостью D_u поверхности, сопряженной направлению вектора $u = (u_1, \dots, u_m)$; в случае $U_\infty \in F_n$ плоскость D_u — асимптотическая плоскость поверхности F_n . Если же точка U_∞ является кратной точкой F_n , уравнение ее полярной плоскости может определять некоторую плоскость $\alpha_u \neq D_u$ [1] — вырожденную диаметральную плоскость; геометрическая интерпретация этой плоскости приведена в работе [2]. В 1^а настоящей статьи изучается структура множества плоскостей $P_u = D_u$ (или α_u), причем обобщаются отдельные результаты работ [1, 3].

Плоскость P_u может быть плоскостью симметрии поверхности F_n по направлению симметрии u ; случай, когда поверхность F_n симметрична относительно α_u , рассмотрен в работе [4]. В [5] рассматривается поверхность F_n , имеющая бесконечное множество (б. м.) плоскостей косой (в частности, ортогональной) симметрии; в 2^о данной статьи — строение поверхности F_n , определяемое ее б. м. плоскостями симметрии, выясняется полностью.

1°. Диаметральные плоскости

1. Уравнение поверхности F_n запишем так:

$$\varphi_n(\mathbf{x}) + \varphi_{n-1}(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

где φ_n, φ_{n-1} — формы степени n и $n-1$ относительно координат вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$; степень многочлена θ не превосходит $n-2$. Положим

$$\varphi_n = \prod_{k=1}^t \psi_r^{\sigma_k}, \quad \varphi_{n-1} = \zeta_n \prod_{k=1}^t \psi_r^{\tau_k}.$$

Формы ψ_r степени $r_k \geq 1$ имеют кратности σ_k (или $\tau_k \geq 0$), $\psi_r = 1$, форма ζ_n имеет степень

$$n' = n - \sum_{k=1}^t r_k \tau_k - 1.$$

Уравнение полярной плоскости точки u_∞ имеет вид

$$\omega(u) [\omega_1(u) \sum_{i=1}^m A_i(u) x_i + C(u)] = 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{u}) &= \prod_{k=1}^t \psi_{r_k}^{s_k}(\mathbf{u}), \quad \omega_1(\mathbf{u}) = \prod_{k=1}^t \psi_{r_k}^{\sigma_k - s_k - 1}(\mathbf{u}), \\ s_k &= \min(\sigma_k - 1, \tau_k), \\ A_i(\mathbf{u}) &= \sum_{k=1}^t \sigma_k \frac{\partial \psi_{r_k}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \prod_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^t \psi_{r_k}^{-1}(\mathbf{u}), \\ C(\mathbf{u}) &= \zeta_{n'}(\mathbf{u}) \prod_{k=1}^t \psi_{r_k}^{\tau_k - s_k}(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

Отбросив в левой части уравнения (2) множитель $\omega(\mathbf{u})$, получим при $C(\mathbf{u}) \neq 0$ уравнение либо плоскости D_u , если $\omega(\mathbf{u}) \neq 0$, либо плоскости α_u , если $\omega(\mathbf{u}) = 0$. Обозначим через R множество всех векторов $\mathbf{x} \neq 0$, для которых плоскости P_x совпадают с плоскостью P_u , т. е.

$$\frac{A_1(\mathbf{x})}{A_1(\mathbf{u})} = \dots = \frac{A_m(\mathbf{x})}{A_m(\mathbf{u})} = \frac{C(\mathbf{x})}{C(\mathbf{u})} \quad (3)$$

(здесь все коллинеарные векторы заменяются одним их представителем). Если

$$n_0 = \sum_{k=1}^t r_k - 1$$

и R конечно, то по обобщенной теореме Безу [6, с. 268] R имеет размерность

$$r \leq r_0 = n_0^{m-1}. \quad (4)$$

Таким образом, плоскость $P_u = D_u$ (или α_u), сопряжена в общем r_0 направлениям.

Оценка (4) справедлива и для множества S всех ненулевых решений системы

$$A_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

если оно конечно. Поэтому конечное число несобственных кратных точек поверхности F_n не больше r_0 .

Пусть, например, в E^4 вектор $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$ и поверхность F_n задается уравнением

$$\left(\sum_{i=1}^4 x_i^3 \right)^s + \sum_{i=1}^4 a_i x_i = c \quad (n = 3s).$$

Тогда система (3) принимает вид

$$x_1^2 - x_j^2 = 0 \quad (j = 2, 3, 4).$$

Множество $\{\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1\}$ определяет $r_0 = 8$ неколлинеарных векторов, которые составляют R ; оценка (4) является точной.

2. При ортогональном базисе e_1, \dots, e_m вектор u задает главное направление поверхности F_n , если

$$\frac{A_1(u)}{u_1} = \dots = \frac{A_m(u)}{u_m}. \quad (5)$$

Плоскость P_u , сопряженная главному направлению, также называется главной.

Для каждого вектора $u \in S$ (п. 1) не существует определенной собственной плоскости P_u . Если все пинтулевые решения системы (5) составляют множество H , а нормальные векторы всех главных диаметральных плоскостей P_u — множество H_p , то

$$H = H_p \cup S.$$

При конечном H положим

$$N = \dim H, N_p = \dim H_p.$$

В работе [7] установлено, что

$$N \leq \sum_{i=1}^m n_0^{m-i}.$$

Следовательно,

$$N_p \leq \sum_{i=1}^m n_0^{m-i} - r \quad (6)$$

или, при $r = r_0$,

$$N_p \leq \sum_{j=2}^m n_0^{m-j}.$$

Оценка (6) достигается, в частности, на поверхности

$$x_1 x_2 x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c$$

пространства E^3 , инвариантной относительно группы симметрий правильного симплекса. Здесь $n_0 = 2, r = 3 < r_0 = 4; H_p = \{1, \pm 1, \pm 1\}, S = \{e_1, e_2, e_3\}, N_p = 4 < N = 7$ (ср. п. 3⁰ [7]).

3. В п. 6⁰ [2] дано следующее определение: h -плоскость Π^h ($0 < h \leq m-2$) называется фундаментальной h -плотностью поверхности F_n , если через нее проходят все диаметральные плоскости D_u ; при этом рассмотрен случай несобственной Π^h . Считая фундаментальную Π^h собственной, совместим ее с координатной h -плоскостью $\Pi^h(e_1, \dots, e_h)$. Тогда при $i \leq h$ все $A_i(x) \equiv C(x) \equiv 0$ и при $i > h$ не все $A_i(x) \equiv 0$; в уравнении (1)

$$\varphi_{n-1} \equiv 0, \varphi_n(x) = \varphi_n(x_{h+1}, \dots, x_m). \quad (7)$$

Поэтому, если $\{\alpha_u\} \neq \emptyset$, все плоскости α_u проходят через Π^h . В случае

$$\tau_k < \sigma_k \quad (k = 1, \dots, t)$$

имеет место и обратное предложение — характеристический признак фундаментальной h -плоскости: если все плоскости α_u поверхности

F_n проходят через одну h -плоскость, то она является фундаментальной h -плоскостью этой поверхности.

Действительно, пусть все α_u проходят через $\Pi^h(e_1, \dots, e_h)$. Тогда формы

$$\varphi_{r_k} = \varphi_{r_k}(x_{k+1}, \dots, x_m)$$

и, следовательно, каждая $D_u \parallel \Pi^h$. При этом форма $\zeta_{n'}(\mathbf{x}) \not\equiv \text{const} \neq 0$. В самом деле, если $\zeta_{n'} \equiv \text{const}$, то $n' = 0$ и справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^t r_k (\sigma_k - \tau_k) = 1.$$

Отсюда $r_k = \sigma_k - \tau_k = 1$; $k = 1, \dots, n$. Поэтому φ_n состоит из n -кратной линейной формы. Все диаметральные плоскости поверхности F_n параллельны [7]; фундаментальная $(m-2)$ -плоскость является несобственной.

Так как плоскости $\alpha_u \in \Pi^h$, то для любого вектора $\mathbf{u} \in S$, асимптотического относительно конуса $\omega(\mathbf{x}) = 0$, получаем $\zeta_{n'}(\mathbf{u}) = 0$. Но $\omega(\mathbf{x})$ и $\zeta_{n'}(\mathbf{x})$ не имеют общих компонент; поэтому форма $\zeta_{n'} \equiv 0$, все плоскости D_u проходят через Π^h .

На основании (7) общее уравнение (1) поверхности F_n , которая имеет собственную фундаментальную h -плоскость, можно записать так:

$$\varphi_n(z_{k+1}, \dots, z_m) + \theta'(z) = 0,$$

где вектор $z = (z_1, \dots, z_m)$ есть некоторая линейная функция вектора \mathbf{x} , $\deg \theta' \leq n-2$.

4. Если вектор \mathbf{u} сопряжен вектору $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ относительно поверхности F_n , то

$$\omega(\mathbf{v}) \omega_1(\mathbf{v}) \sum_{i=1}^m A_i(\mathbf{v}) u_i = 0. \quad (8)$$

При $\sigma_k = s_k + 1$ (п. 1) множитель $\omega_1(\mathbf{v}) = 1$. Две плоскости P_u и P_v называются взаимно сопряженными относительно поверхности F_n , если каждая из них параллельна вектору, сопряженному другой.

Каждый вектор пространства E^m сопряжен любому вектору множества, состоящего из S (п. 1) и асимптотических векторов приводимого конуса

$$\omega(\mathbf{x}) \omega_1(\mathbf{x}) = 0,$$

число различных компонент $\varphi_{r_k}(\mathbf{x})$ которого равно числу индексов $k | \sigma_k > 1$; векторы этого множества самосопряжены, некоторые асимптотические векторы конуса могут находиться в S .

Пусть W состоит из S и асимптотических векторов конуса $\omega_\perp(\mathbf{x}) = 0$; в случае $\omega_1 \equiv \text{const}$ множество $W = S$. Плоскость $P_u \in W$ либо не определена, если $C(\mathbf{u}) = 0$, либо совпадает с несобственной плоскостью, если $C(\mathbf{u}) \neq 0$; при $C(\mathbf{u}) = 0$ любая плоскость E^n сопряжена вектору \mathbf{u} . Значит, если векторы \mathbf{u}, \mathbf{v} принадлежат

если $C(\mathbf{u}) = C(\mathbf{v}) = 0$, произвольные две плоскости пространства E^m , параллельные соответственно \mathbf{u} , \mathbf{v} , будут взаимно сопряженными; векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} задают две такие $(m-2)$ -параметрические связки плоскостей с несобственными центрами U_∞ и V_∞ , что каждая плоскость одной связки взаимно сопряжена с произвольной плоскостью другой.

6. Пусть базис e_1, \dots, e_m ортогонален. Асимптотический вектор $\mathbf{u} \in W$ поверхности F_n параллелен сопряженной ему плоскости P_u (см. п. 3^o [2]). Поэтому

$$\sum_{i=1}^m A_i(\mathbf{u}) u_i = 0.$$

Следовательно, самосопряженность вектора \mathbf{u} относительно поверхности F_n есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы он был ее асимптотическим вектором.

Если взаимно ортогональные векторы \mathbf{u} , \mathbf{v} принадлежат множеству H (п. 2), то из (5) и равенства

$$\sum_{i=1}^m u_i v_i = 0$$

находим

$$\sum_{i=1}^m A_i(\mathbf{u}) v_i = 0.$$

Согласно (8), вектор \mathbf{v} сопряжен \mathbf{u} . Аналогично проверяем, что \mathbf{u} сопряжен \mathbf{v} ; векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} являются взаимно сопряженными, что позволяет во многих случаях упростить уравнение поверхности F_n , имеющей попарно ортогональные главные направления. Для этого базис пространства E^m надо выбрать так, чтобы векторы e_1, \dots, e_j ($2 \leq j \leq m$) принадлежали множеству H .

2^o. Поверхность F_n с бесконечным множеством плоскостей симметрии

6. Пусть неприводимая и нецилиндрическая поверхность F_n имеет б. м. плоскостей косой (в частности, ортогональной) симметрии, которому соответствует б. м. A векторов — направлений симметрии (коллинеарные векторы не различаем). Отразив вектор $\mathbf{a} \in A$ относительно всех плоскостей симметрии, получим орбиту $B \subset A$, определяемую вектором \mathbf{a} . Возьмем бесконечные орбиты B_i ($i = 1, 2, \dots$). Положим

$$B_0 = \bigcup_i B_i, \quad B_0 \subset A.$$

Рассмотрим некоторую орбиту $B \in \{B_i\}$. На единичной сфере, диаметрально противоположные точки которой отождествлены, построим сферическое изображение орбиты B . Так как оно имеет предельную точку (но не обязательно ее содержит), то в B существуют

различные взаимно не сопряженные векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} , угол φ между которыми сколь угодно мал; векторам \mathbf{u} , \mathbf{v} сопряжены различные плоскости симметрии α , β соответственно.

Пересечем поверхность F_n 2-плоскостью Π_0^2 , параллельной векторам \mathbf{u} и \mathbf{v} , по кривой C_k порядка $k | 2 < k < n$ (если здесь идет речь о пересечении h -плоскости Π^h , $2 < h < m - 1$ с поверхностью F_n , то предполагается, что $\Pi^h \not\in F_n$ и $\Pi^h \cap F_n \neq \emptyset$ в E^m). Кривая C_k симметрична относительно прямых

$$p = \Pi_0^2 \cap \alpha, q = \Pi_0^2 \cap \beta$$

по направлениям симметрии \mathbf{u} , \mathbf{v} . Если $p \parallel q$, то C_k состоит из парабол с общей симметрией [5, п. 2⁰] (у них общие оси симметрии и соответствующие направления). Множество осей симметрии C_k бесконечно.

Пусть $p \not\parallel q$, $Q = p \cap q$. Тогда кривая C_k имеет б. м. осей симметрии с общей точкой Q . Действительно, зададим кривую C_k в 2-плоскости Π_0^2 уравнением

$$f_k(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = 0, \quad (9)$$

где $f_k(\mathbf{x})$ — форма степени k относительно координат вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\deg g(\mathbf{x}) < k - 1$. Если $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, то числа $v_1 - u_1$, $v_2 - u_2$ являются бесконечно малыми.

Предположим, что \mathbf{u} и \mathbf{v} — асимптотические векторы кривой C_k . Выберем $e_1 \parallel p$, $e_2 \parallel \mathbf{u}$ при начале координат Q ; уравнения $v_2 x_1 - v_1 x_2 = 0$ ($v_1 \neq 0$), $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ задают направление \mathbf{v} и прямую q соответственно. При этом уравнение (9) инвариантно относительно замены x_2 на $(-x_2)$ при неизменной переменной x_1 и

$$f_k(\mathbf{x}) = x_1^s (v_2 x_1 - v_1 x_2)^s [a_3 x_2^{k-2s} + d(x)], \quad s \geq 1, \quad a_3 \neq 0;$$

форма $d(\mathbf{x})$ содержит только произведения степеней переменных x_1 , x_2 (поскольку $f_k(\mathbf{u}) = 0$, то $f_k(\mathbf{x})$ члена x_2^k не имеет).

Так как поверхность F_n неприводима, то $\alpha \not\in F_n$; 2-плоскость Π_0^2 можно выбрать так, что $p \not\in C_k$. Тогда x_2 входит в уравнение (9) только в четной степени. Следовательно, число $k - s$ четно.

Если $v_2 \neq 0$, то и $k - 2s$ четно; это значит, что числа k , s четны. Форма $f_k(\mathbf{x})$ содержит член

$$x_1^{2s-1} x_2^{k-2s+1},$$

что невозможно.

Таким образом, $v_2 = 0$ и прямая $p \parallel \mathbf{v}$ задает s -асимптотическое направление кривой C_k . Поэтому прямая q также задает s -асимптотическое направление C_k :

$$f_k(\mathbf{x}) = (-v_1 x_1 x_2)^s (a_1 x_1 + a_2 x_2)^s [a'_3 x_2^{k-3s} + d'(\mathbf{x})], \quad a_1 a'_3 \neq 0.$$

Следовательно, число $k - 2s$ четно; $f_k(\mathbf{x})$ не содержит $s a_1^{s-1} a_2 a'_3 \times (-v_1)^s x_1^{2s-1} x_2^{k-2s+1}$.

Итак, $a_2 = 0$, $q \parallel u$; векторы u и v являются взаимно сопряженными, что исключается.

Зададим теперь в Π_0^2 прямоугольную систему координат с началом 0 , причем ни одна из прямых p , q не совпадает с осью координат. Поскольку u , v — неасимптотические векторы кривой C_k , то оси симметрии p , q — диаметры C_k . Их уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_k(u)}{\partial u_1} x_1 + \frac{\partial f_k(u)}{\partial u_2} x_2 &= 0, \\ \frac{\partial f_k(v)}{\partial v_1} x_1 + \frac{\partial f_k(v)}{\partial v_2} x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Так как $(\hat{u}, \hat{v}) = \varepsilon$, то число

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_k(v)}{\partial v_1} - \frac{\partial f_k(u)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_k(v)}{\partial v_2} - \frac{\partial f_k(u)}{\partial u_2}\end{aligned}$$

является сколь угодно малым. Поэтому острый (p, q) также сколь угодно мал. Отразив последовательно оси симметрии кривой C_k по соответствующим направлениям симметрии, получим больше k осей симметрии C_k . При этом их б. м. [9]; C_k является либо центральной коникой ($k = 2$), либо распадается на центральные коники с общей симметрией (в общем действительные и мнимые, $k > 2$). В эллиптическом случае каждый вектор Π_0^2 принадлежит B ; в гиперболическом случае исключение составляют только два вектора, которые задают асимптотические направления кривой C_k (значит, и поверхности F_n).

Пусть γ -плоскость Π^γ есть фиксированная линейная оболочка B . Поскольку B является орбитой в B_0 , то каждый вектор B принадлежит такой 2-плоскости, все векторы которой (за исключением, может быть, двух) входят в B .

Следовательно, Π^γ является суммой таких 2-плоскостей, что каждая 2-плоскость, параллельная любой 2-плоскости этой суммы, пересекает поверхность F_n по коникам с общей симметрией.

7. Если вектор $u \in B$ задает неасимптотическое направление поверхности F_n ($\varphi_n(u) \neq 0$, п. 1), то ему сопряжена плоскость симметрий, которая является диаметральной плоскостью D_u . Все плоскости симметрии поверхности F_n , определяемые орбитой B , принадлежат $\{D_u\}$. При этом число n четно и произвольная γ -плоскость, параллельная Π^γ , пересекает поверхность F_n по $(\gamma - 1)$ -квадрикам с общей симметрией.

Действительно, так как орбита B состоит из неасимптотических векторов поверхности F_n , то 2-плоскость, параллельная $\Pi_0^2 \in \Pi^\gamma$, пересекает F_n по кривой C_n порядка n . Но C_n состоит из коник (п. 6); поэтому число n четно, $n = 2s$.

При $\gamma > 2$ возьмем такое бесконечное подмножество орбиты B , линейная оболочка которого представляет собой $(\gamma - 1)$ -плоскость

$\Pi^{\gamma-1}$. Если $\gamma > 3$, то предположим, что произвольная $(\gamma - 1)$ -плоскость, параллельная $\Pi^{\gamma-1}$, пересекает поверхность F_n по $(\gamma - 2)$ -квадрикам. Считая $\Pi^{\gamma-1}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\gamma-1}) \parallel \Pi^{\gamma-1}$, уравнение (1) поверхности F_n можно записать так:

$$[\xi(x_1, \dots, x_{\gamma-1}) + \eta(x_\gamma, \dots, x_m)]^s + \nu(x_\gamma, \dots, x_m) = 0, \quad (10)$$

где $\gamma > 2$, $\deg \xi = 2$, $\deg \eta \leq 2$, $\deg \nu \leq n$. В п. 6 доказано, что существует 2-плоскость $\Pi_1^2 \in \Pi^{\gamma-1}$, которая содержит б. м. векторов B ; Π_1^2 пересекает $\Pi^{\gamma-1}$ по прямой. Пусть эта прямая параллельна $\mathbf{e}_{\gamma-1}$, а вектор $\mathbf{e}_\gamma \parallel \Pi_1^2$. Тогда уравнение (10) допускает вид:

$$\begin{aligned} & [\zeta(x_{\gamma-1}, x_\gamma) + \chi(x_1, \dots, x_{\gamma-2}, x_{\gamma+1}, \dots, \\ & x_m)]^s + \delta(x_1, \dots, x_{\gamma-2}, x_{\gamma+1}, \dots, x_m) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\deg \zeta = 2$, $\deg \chi \leq 2$, $\deg \delta \leq n$. Так как B состоит из неасимптотических векторов нецилиндрической поверхности F_n , то в (10) квадратичный многочлен ξ содержит слагаемое $c_1 x_{\gamma-1}^t$ ($c_1 \neq 0$, $t = 1$ или 2), многочлен η имеет слагаемое $c_2 x_\gamma^l$, $l \leq 2$. Следовательно, при $s \geq 1$ уравнение (10) в развернутом виде содержит слагаемое

$$sc_1^{s-1} c_2 x_{\gamma-1}^{(s-1)t} x_\gamma^l$$

(при $s = 1$ число $n = 2$). Других членов, содержащих произведение переменных $x_{\gamma-1}^{(s-1)t}$ и x_γ^l с ненулевым коэффициентом, в уравнении (10) нет. Так как уравнения (10) и (11) совпадают, то $c_1 x_{\gamma-1}^t$ и $c_2 x_\gamma^l$ входят в ζ . Поскольку χ и δ не содержат x_γ , то $c_2 l \neq 0$; многочлен ν не зависит от x_γ . Значит, γ -плоскость $\Pi^{\gamma-1}$ пересекает поверхность F_n по $(\gamma - 1)$ -квадрикам (действительным и, может быть, мнимым). Все векторы $\Pi^{\gamma-1}$, кроме асимптотических векторов поверхности F_n , принадлежат орбите B .

8. Пусть μ -плоскость Π^μ и μ_i -плоскости Π^{μ_i} ($i = 1, 2, \dots$) — фиксированные линейные оболочки множеств B_μ и B_i соответственно, причем

$$\varphi_n(\mathbf{u}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in B_0.$$

Тогда на основании п. 7

$$\Pi^\mu = \bigoplus_i \Pi^{\mu_i} \quad (i = 1, \dots, \lambda \leq \left[\frac{\mu}{2} \right]).$$

Если μ_i -плоскости Π^{μ_i} ($i = 1, \dots, \lambda$) взять в качестве координатных, то общее уравнение поверхности F_n ($n = 2s$) можно записать так:

$$F(\xi_1, \dots, \xi_\lambda, x_{\mu_\lambda+1}, \dots, x_m) = 0, \quad (12)$$

где

$$\xi_1(x_1, \dots, x_{\mu_1}), \dots, \xi_\lambda(x_{\mu_{\lambda-1}+1}, \dots, x_{\mu_\lambda})$$

— квадратичные многочлены, а F — многочлен относительно всех своих аргументов, имеющий степень s относительно

($1 \leq j < \lambda$); любая μ_j -плоскость $\Pi_1^{\mu_j} \parallel \Pi^{\mu_j}$ пересекает F_n по $(\mu_j - 1)$ -квадрикам, уравнение каждой из которых в $\Pi_1^{\mu_j}$ имеет вид

$$\xi_j = c \quad (1 \leq j < \lambda).$$

В частности, если $\lambda = 1$, $\mu = m$, поверхность F_n сама является квадрикой.

Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям векторов орбит B_i ($i = 1, \dots, \lambda$) являются диаметральными плоскостями $(m - \mu_i)$ -цилиндров второго порядка $\xi_i = 0$ соответственно; эти диаметральные плоскости сопряжены своим направлениям симметрии.

И наоборот, если поверхность F_n четного порядка p задается уравнением типа (12), то диаметральные плоскости $(m - \mu_i)$ -цилиндров $\xi_i = 0$ являются плоскостями симметрии поверхности F_n , принадлежащими ее множеству диаметральных плоскостей.

9. Пусть вектор $u \in B$ задает асимптотическое направление поверхности F_n , $\varphi_n(u) = 0$; координатная γ -плоскость $\Pi^\gamma(e_1, \dots, e_\gamma)$ параллельна Π^1 (фиксированной линейной оболочке B , п. 6). Тогда соответствующие плоскости симметрии поверхности F_n уже не принадлежат $\{D_u\}$.

Если произвольная γ -плоскость, параллельная Π^1 , не пересекает поверхность F_n по $(\gamma - 1)$ -квадрикам, то число $\gamma \geq 2$ и уравнение F_n допускает вид

$$[\xi(x_{\gamma+1}, \dots, x_m) x_1 \dots x_\gamma + \eta(x_{\gamma+1}, \dots, x_m)]^s \zeta(x_{\gamma+1}, \dots, x_m) + \omega(x_{\gamma+1}, \dots, x_m) = 0, \quad (13)$$

где ξ, η, ζ, ω — многочлены относительно $x_{\gamma+1}, \dots, x_m$, причем ζ не содержит s -кратного непостоянного множителя, $s \leq n$.

Доказательство этого предложения можно провести методом полной математической индукции по размерности γ (как в п. 7); ограничимся рассмотрением случая $\gamma = 3$ (при $\gamma = 2$ любая 2-плоскость, параллельная Π^2 , пересекает поверхность F_n по коникам, п. 6). Согласно п. 6, $\Pi^3 = \Pi_1^2 + \Pi_2^2$; все векторы 2-плоскостей Π_1^2 и Π_2^2 принадлежат орбите B (за исключением, может быть, не более четырех векторов, асимптотических для сечений). Пересечем поверхность F_n 3-плоскостью $\Pi_1^3 \parallel \Pi^3$. При $\Pi^2(e_1, e_2) \parallel \Pi_1^2, \Pi^2(e_2, e_3) \parallel \Pi_2^2$ уравнение 2-поверхности $F^2 = \Pi_1^3 \cap F_n$ в Π_1^3 принимает вид

$$\{(a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 + a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6) [\psi(x_3) + a_7] + \omega(x_3)\}^s \rho(x_3) + \delta(x_3) = 0. \quad (14)$$

Поскольку 2-плоскость Π_2^2 (как и Π_1^2) пересекает F_n по коникам (п. 6), то это уравнение можно переписать так:

$$\{(b_1 x_2^2 + b_2 x_2 x_3 + b_3 x_3^2 + b_4 x_2 + b_5 x_3 + b_6) [\psi'(x_1) + b_7] + \omega'(x_1)\}^s \rho'(x_1) + \delta'(x_1) = 0. \quad (15)$$

Здесь ν , ω , ρ , δ и ν' , ω' , ρ' , δ' — многочлены относительно x_3 и x_1 соответственно; свободный член каждого из многочленов ν , ν' равен 0, а многочлены ρ и ρ' не содержат s -кратного непостоянного множителя.

Из уравнений (14) и (15) следует, что

$$\rho\rho' \equiv \text{const.}$$

Многочлен $\nu \not\equiv \text{const.}$ Действительно, если $\nu \equiv \text{const.}$, то, согласно (15), $\deg \omega \leq 2$. Так как $\deg \delta \leq 2s$, то $n = 2s$. При этом Π_1^2 и Π_2^2 не задают 2-асимптотические направления поверхности F_n , что исключается.

Сравнивая теперь (14) и (15), находим

$$a_3 = b_1 = 0,$$

$$a_2 x_1 x_2 \nu = b_2 x_2 x_3 \nu'$$

или

$$\frac{a_2 x_1}{\nu'} = \frac{b_2 x_3}{\nu} = c,$$

где число $c \neq 0$. В самом деле, при $c = 0$ коэффициент $a_2 = b_2 = 0$. Следовательно, $a_5 = 0$; уравнение (14) определяет цилиндрическую 2-поверхность, образующая которой параллельна e_2 .

Таким образом,

$$\nu = \frac{b_2}{c} x_3, \quad \nu' = \frac{a_2}{c} x_1.$$

Поэтому

$$a_1 = b_3 = 0.$$

В 2-плоскости $\Pi_3^2 \parallel \Pi_1^2$ поверхность F_n содержит коники, уравнения которых в Π_3^2 имеют вид

$$a_2 x_1 x_2 + a_4 x_1 + a_5 x_2 = c_i. \quad (16)$$

Если вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0, \dots, 0) \in B$, то в Π_3^2 коники (16) симметричны по направлению \mathbf{u} относительно прямой

$$u_2 x_1 + u_1 x_2 + \frac{1}{a_2} (a_4 u_1 + a_5 u_2) = 0, \quad a_2 \neq 0. \quad (17)$$

В 3-плоскости Π_1^3 это уравнение задает 2-плоскость симметрии F^2 по направлению симметрии \mathbf{u} .

Так как коники (16) являются центральными, то их оси симметрии проходят через одну точку. Следовательно, при всех возможных u_1, u_2 уравнение (17) определяет в Π_1^3 множество 2-плоскостей симметрии F^2 с общей прямой, параллельной вектору e_3 . Совместим эту прямую с осью x_3 . Тогда

$$a_4 = a_5 = 0. \quad (18)$$

Уравнение (15) содержит степени членов

$$\frac{a_2 b_6}{c} x_1, \quad b_2 b_7 x_2 x_3 \quad (a_2 b_2 \neq 0).$$

значит, с учетом (18)

$$b_6 = b_7 = 0.$$

Поэтому

$$a_6 = 0, \quad \omega \delta \equiv \text{const}.$$

Таким образом, случай $\gamma = 3$ рассмотрен полностью.

Если $m = \gamma$, то при ортогональном базисе e_1, \dots, e_m поверхность (13) инвариантна относительно группы симметрий правильного симплекса.

10. Пусть μ -плоскость Π^μ и μ_i -плоскости Π^{μ_i} ($i = 1, 2, \dots$) — фиксированные линейные оболочки множеств B_0 и B_i соответственно; каждая μ_i -плоскость $\Pi_1^{\mu_i} \parallel \Pi^{\mu_i} \in \{\Pi^{\mu_i}\}$ не пересекает поверхность F_n по $(\mu_i - 1)$ -квадрикам и

$$\varphi_n(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in B_0.$$

Тогда, на основании п. 9,

$$\Pi^\mu = \bigoplus_i \Pi^{\mu_i} \left(i = 1, \dots, \lambda \leq \left[\frac{\mu}{3} \right] \right).$$

Если μ_i -плоскости Π^{μ_i} ($i = 1, \dots, \lambda$) взять в качестве координатных, то при определенном выборе начала координат и

$$\zeta_1 = x_1 x_2 \dots x_{\mu_1}, \dots, \zeta_\lambda = x_{\mu_{\lambda-1}+1} x_{\mu_{\lambda-1}+2} \dots x_{\mu_\lambda}$$

общее уравнение поверхности F_n можно записать так:

$$F(\zeta_1, \dots, \zeta_\lambda, x_{\mu_\lambda+1}, \dots, x_m) = 0,$$

где F — многочлен относительно всех своих аргументов; любая μ_j -плоскость $\Pi_1^{\mu_j} \parallel \Pi^{\mu_j}$ ($1 \leq j \leq \lambda$) пересекает поверхность F_n по $(\mu_j - 1)$ -поверхностям, уравнение каждой из которых в $\Pi_1^{\mu_j}$ имеет вид

$$\zeta_j = c \quad (1 \leq j \leq \lambda).$$

Возьмем, например, поверхность F_{18} пространства E^{20} , задаваемую уравнением

$$(x_1^2 - 2x_2^2 + x_3 - 1)^9 + (x_4^2 - x_5^2)^9 - (3x_6^2 + x_7)^7 x_8 x_9 x_{10} + 5(x_{11} x_{12} x_{13} x_{14})^4 + x_{15} x_{16} x_{17} x_{18} x_{19} x_{20} = c.$$

Множество всех направлений симметрии содержит бесконечные орбиты B_i ($i = 1, \dots, 6$); $\Pi^3(e_1, e_2, e_3)$, $\Pi^2(e_4, e_5)$, $\Pi^2(e_6, e_7)$, $\Pi^3(e_8, e_9, e_{10})$, $\Pi^4(e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14})$, $\Pi^6(e_{15}, \dots, e_{20})$ — их линейные оболочки соответственно. Плоскости симметрии, определяемые орбитами B_1 и B_2 , принадлежат множеству диаметральных плоскостей поверхности F_{18} (п. 7). Векторы орбит B_3 , B_4 , B_5 , B_6 задают ее асимптотические направления, поэтому соответствующие плоскости симметрии в указанное множество уже не входят.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosina B. A. Nuovi risultati nella teoria diametrale delle superficie algebriche.— "Ann. Univ. Ferrara", sez. VII (N. S.), 1955—1956—(1957), № 5, p. 103—116.
2. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. О диаметральных плоскостях алгебраической поверхности в пространстве E^n .— «Укр. геометр. сб.», 1974, вып. 15, с. 54—59.
3. Rosina B. A. Sulla teoria diametrale delle superficie algebriche.— "Bull. Soc. roy. sci. Liège" 1962, An. 31, № 3, 4, p. 146—167.
4. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. К случаю вырождения уравнения диаметральной плоскости симметричной поверхности в E^n .— «Укр. геометр. сб.», 1975, вып. 16, с. 58—62.
5. Игнатенко В. Ф. Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии в пространстве E^n .— «Диф. геометр. многообразий фигур», Калининград, 1976, вып. 7, с. 19—21.
6. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии.— М., «Наука», 1972, 530 с.
7. Игнатенко В. Ф. К оценке числа главных диаметральных плоскостей алгебраической поверхности пространства E^n .— «Укр. геометр. сб.», 1971, вып. 11, с. 31—35.
8. Rosina B. A. Sulle curve algebriche piane con infiniti assi di simmetria obliqua (in particolare ortogonale).— "Ann. Univ. Ferrara", 1970, sez. 7, vol. 15, № 10, p. 153—159.
9. Rosina B. A. Sulla simmetria obliqua ed ortogonale delle curve algebriche piane.— "Ann. Univ. Ferrara", 1975, sez. 7, vol. 20, p. 69—98.

Поступила 24 августа 1976 г.

**ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА
С ДВУМЯ СЕТЯМИ ПЕРЕНОСА**

1°. Как известно, параметрические уравнения поверхности с двумя сетями переноса в пространстве E^3 можно записать так:

$$x = \varphi(u) + \psi(v), \quad y = \psi(u) + \varphi(v), \quad z = \chi(u) + \chi(v), \quad (1)$$

где

$$\varphi(x) = \int \frac{x \, dx}{F_y}, \quad \psi(x) = \int \frac{y \, dx}{F_y}, \quad \chi(x) = \int \frac{dx}{F_y}$$

есть абелевы интегралы,

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

— уравнение кривой четвертого порядка. Все алгебраические поверхности с двумя сетями переноса получены в работах [1, 2]. Среди них содержится, с точностью до аффинного преобразования, только одна поверхность наивысшего порядка, равного шести. В [2] эта поверхность пропущена; в работе [1] установлено, что для нее кривая (2) задается уравнением

$$(y - x^2)^2 + 2\epsilon xy(y - x^2) + y^3 = 0, \quad (\epsilon = \pm 1).$$

Уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{3}(u^3 + v^3), \\y &= \frac{1}{2}(u^4 + v^4) + \frac{1}{5}(u^5 + v^5), \\z &= u + v.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(1+z)y &= (1+z)\left(\frac{z^5}{5} + \frac{z^4}{2}\right) - (z^3 + \\&+ 2z^2)\left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - x\right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - x\right)^2.\end{aligned}$$

Поверхность симметрична относительно точки $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, 1\right)$. Поместив в нее начало координат и заменив y на

$$-x + y - \frac{1}{2}z,$$

получим

$$z^6 - \frac{15}{4}z^4 - 15xz^3 - 45x^2 + 45yz + \frac{65}{4} = 0. \quad (3)$$

2°. В работе [3] Ф. Энгель поставил проблему нахождения всех поверхностей переноса относительно двух плоскостей. Поверхность переноса относительно конечной плоскости проективно эквивалентна обычной поверхности переноса. Полное решение этой проблемы содержится в работе [4]. Поверхность переноса относительно двух плоскостей может быть как алгебраической, так и трансцендентной; наивысший порядок алгебраической поверхности равен шести. Имеются две такие поверхности шестого порядка. Рассмотрим одну из них [4]:

$$x_1^4x_2x_4 = \alpha \left(x_1^2x_3x_4^3 + x_1^4x_3^2 - \frac{1}{5}x_4^6 \right) + \beta x_1^3(2x_1^2x_3 + x_4^3).$$

Эта поверхность является поверхностью переноса относительно плоскостей $x_1 = 0$, $x_4 = 0$. Перейдем к неоднородным координатам $x = x_3$, $y = x_2$, $z = x_4$, $x_1 = 1$:

$$yz = \alpha \left(xz^3 + x^2 - \frac{1}{5}z^6 \right) + \beta(2x + z^3). \quad (4)$$

Подвернем поверхность (4) невырожденному аффинному преобразованию, заменив x , y , z на

$$3x + \frac{3}{4}z + \frac{\sqrt{13}}{2}\epsilon, -\frac{45}{2}x - 45y - \frac{45}{16}z, z$$

соответственно. Тогда при

$$\alpha = -5, \beta = \frac{5\sqrt{13}}{2}\epsilon, (\epsilon = \pm 1)$$

преобразованная поверхность (4) совпадает с поверхностью (3). Следовательно, поверхность (3) является поверхностью переноса

относительно двух плоскостей — несобственной плоскости и плоскости $z = 0$.

Замечание. Каждая алгебраическая поверхность переноса может быть образована при помощи пучка параллельных плоскостей и биективного ему однопараметрического семейства цилиндров второго порядка. Для поверхности (3), например, пучку $z = \lambda$ соответствует семейство цилиндров

$$45x^2 + 15\lambda^3x - 45\lambda y - \lambda^6 + \frac{15}{4}\lambda^4 - \frac{65}{4} = 0.$$

При этом конструктивные свойства алгебраических поверхностей переноса, указанные в [5, 6], имеют место и для поверхности (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E i s l a n d J. On a certain class of algebraic translation-surfaces.— "Amer. J. of Math". 1907, v. 29, p. 363—386.
2. G a m b i e r B. Surfaces de translation de Sophus Lie.— "Comptes rendus", 1920, vol. 170, p. 1370—1374.
3. E n g e l F. Zur Theorie der Translationsflächen.— "Rend. Circ. matem. di Palermo", 1935, Bd. 59, S. 164—168.
4. Б л а н к Я. П. Решение проблемы Энгеля о поверхностях переноса.— «Зап. ин-та мат. и мех. ХГУ и Харьк. мат. об-ва», 1948, сер. 4, т. 19, с. 121—140.
5. И г н а т е н к о В. Ф. Некоторые конструктивные свойства алгебраических поверхностей переноса.— «Укр. геометр. сб.», Вып. 18, Харьков, 1975, с. 59—65.
6. И г н а т е н к о В. Ф. О конструктивных свойствах алгебраических поверхностей, в частности, поверхностей переноса.— «Укр. геометр. сб.», вып. 19, Харьков, 1976, с. 33—36.

Поступила 24 июля 1976 г.

ИНФЛЕКЦИОННО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ ПРЯМЫХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим гиперболическое пространство H_3 , которое интерпретируется как внутренняя область овальной поверхности второго порядка (абсолюта), заданной в трехмерном проективном пространстве P_3 . Абсолют как поверхность бесконечно удаленных точек есть специфический элемент пространства. Вместе с тем в общем проективном пространстве естественно выделяются четверки инфlectionных центров на каждом луче комплекса [1].

Поставим задачу изучить строение комплексов прямых гиперболического пространства, у которых простые или кратные инфlectionные центры являются бесконечно удаленными.

Комплексы в гиперболическом пространстве, каждый луч которых содержит по крайней мере один бесконечно удаленный инфlectionный центр, назовем инфlectionно параболическими. Такие комплексы представляют собой естественную экстраполяцию финиковских комплексов в евклидовом пространстве, у которых все цилиндры вырождаются в плоскости [2]. Если совокупность положений инфlectionного центра является поверхностью, то конус лучей комплекса, имеющий вершиной этот центр, вырождается в плоский пучок [1]. Следовательно, комплекс распадается в двупараметрическое семейство параболических пучков. Наличие параболических пучков и объясняет его название.

Инфlectionно-параболические комплексы будем обозначать C^h . Естественная следующая классификация инфlectionно-параболических комплексов.

1. Комплексы с одним простым бесконечно удаленным инфlectionным центром на каждом луче (комплексы класса C_1^h).
2. Комплексы с одним двойным бесконечно удаленным инфlectionным центром на каждом луче (комплексы класса C_2^h).
3. Комплексы с одним тройным бесконечно удаленным инфlectionным центром на каждом луче (комплексы класса C_3^h).
4. Комплексы с четырехкратным бесконечно удаленным инфlectionным центром на каждом луче (комплексы класса C_4^h).
5. Комплексы с одним двойным и одним простым бесконечно удаленным инфlectionными центрами на каждом луче (комплексы класса C_{21}^h).
6. Комплексы с двумя двойными бесконечно удаленными инфlectionными центрами на каждом луче (комплексы класса C_{22}^h).
7. Комплексы с одним тройным и одним простым бесконечно удаленным инфlectionными центрами на каждом луче (комплексы класса C_{31}^h).
8. Комплексы с двумя простыми бесконечно удаленными инфlectionными центрами на каждом луче (комплексы класса C_{11}^h).

Наша задача будет состоять в том, чтобы выяснить существование каждого класса, широту класса и строение комплексов с точностью до указания способа их построения.

Для решения этих задач подвижный репер, определяемый четырьмя аналитическими точками A, A_1, A_2, A_3 , выберем так: точки A, A_3 помещаются на абсолют, точки A_1, A_2 — на прямую пересечения плоскостей, касательных к абсолюту в точках A, A_3 . Точки A_1 и A_2 полярно сопряжены относительно абсолюта. Координаты вершин A, A_1, A_2, A_3 пронормированы: $A_1^2 = A_2^2 = 1$, $AA_3 = -R^2$. (Если M — произвольная точка абсолюта, то уравнение абсолюта можно записать $M^2 = 0$. Полярную форму для двух точек K, N будем записывать в виде KN). Уравнения структуры гиперболического пространства H_3 имеют вид

$$\begin{aligned} D\omega_{\alpha}^{\beta} &= [\omega_{\alpha}^1 \omega_{\gamma}^{\beta}], \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3), \\ \omega_0^1 - \omega_1^2 R^2 &= 0, \quad \omega_0^2 - R^2 \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^1 - R^2 \omega_1^0 = 0, \\ \omega_3^2 - R^2 \omega_2^0 &= 0, \quad \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^0 = \omega_0^3 = 0, \\ \omega_1^1 = \omega_2^2 &= 0, \quad \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть в H_3 задан комплекс, текущий луч которого совмещен с ребром AA_3 репера.

Уравнение, определяющее первую дифференциальную окрестность луча, представим в виде

$$\omega^2 = a\omega_3^2 + b\omega^1 + k\omega_3^1. \quad (2)$$

Репер канонизируем так, чтобы вершине A_3 в нормальной корреляции соответствовала плоскость AA_3A_1 , а вершине A — плоскость $AA_3, A_1 — kA_2$. В таком случае $a = 1, b = 0$.

Уравнения комплекса в окрестности второго порядка относительно выбранного репера имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_3^2 + k\omega_3^1, \\ k\omega_1^2 - 2\omega_0^0 &= p\omega_3^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^1, \\ \omega_1^2 &= \alpha\omega_3^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^1, \\ dk - 2k\omega_0^0 - \omega_1^2 &= \beta\omega_3^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^1. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом репере инфлексионные центры определяются уравнением

$$\begin{aligned} qt^4 + 2t^3(q - \gamma) + t^2(r + 2\alpha k + q - 4\gamma) + \\ + 2t(r - \beta k + \alpha k - \gamma) + r + pk^2 - 2\beta k = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

1. Комплексы C_1^h

Пусть точка A_3 совпадает с простым инфлексионным центром на каждом луче комплекса. Тогда из (4)

$$q = 0, \quad \gamma \neq 0. \quad (5)$$

Допишем уравнения комплекса C_1^h в третьей дифференциальной окрестности

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_3^2 + k\omega_3^1, \quad -2\omega_0^0 + k\omega_1^2 = p\omega_3^2 + \alpha\omega_1^1 + \beta\omega_3^1, \\ \omega_1^2 &= \alpha\omega_3^2 + \gamma\omega_3^1, \quad dk - 2k\omega_0^0 - \omega_1^2 = \beta\omega_3^2 + \gamma\omega_1^1 + r\omega_3^1, \\ d\mu + (\beta - kp + \alpha k^2 + 2\alpha) \omega_1^2 - \frac{k}{R^2} \omega_1^1 - p\omega_0^0 - \beta\omega_3^2 &= \\ = x_1\omega_3^2 + x_2\omega_1^1 + x_3\omega_3^1, \quad d\alpha + (\gamma - k\alpha) \omega_1^2 + \alpha\omega_0^0 &= \\ x_2\omega_3^2 + x_4\omega_1^1 + x_5\omega_3^1, \quad d\beta + \frac{2}{R^2} \omega_1^1 + (r - k\beta + \gamma k^2 + \gamma + \alpha k) \omega_1^2 - & \\ - \frac{k}{R^2} \omega_3^2 - p\omega_3^2 - \beta\omega_0^0 &= x_3\omega_3^2 + x_5\omega_1^1 + x_6\omega_3^1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} d\gamma + \frac{1}{R^2} \omega_3^2 + \frac{\alpha\gamma}{2} \omega_1^1 - \left[\alpha^2 + \alpha\beta + \frac{\gamma(k\alpha - p)}{2} + x_5 \right] \omega_3^2 &= x_7\omega_3^1, \\ dr - 3r\omega_0^0 + \frac{2k}{R^2} \omega_1^1 - \frac{2k^2 + 1}{R^2} \omega_3^2 - x_6\omega_3^2 + (r - k\beta + \gamma k^2 + & \\ + \gamma + \alpha k) \omega_3^2 - x_7\omega_1^1 - (\gamma k - \beta) \omega_1^2 &= x_8\omega_3^1, \quad x_4 = \alpha^2 - \frac{1}{R^2}. \end{aligned}$$

Система (6) в инволюции, и ее решение существует с произволом в две функции двух аргументов. С таким произволом и существует класс комплексов C_1^h .

При условии (5) конгруэнция

$$\omega_3^1 = 0, \quad (7)$$

принадлежащая комплексу, голономная.

Комплекс C_1^h расслаивается в однопараметрическое семейство таких конгруэнций. Фокусы конгруэнции (7) совпадают с точками $F_1 = A_3$, $F_2 = A - A_3$.

Из равенств

$$\begin{aligned} dA_3 &= \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3, \quad dF_2 = \omega^1 (A_1 - \alpha A_3) + \\ &+ \omega_3^2 (\alpha k - p) A_3 + \omega_0^0 F_2 \end{aligned}$$

заключаем, что вторая фокальная поверхность касается плоскости AA_3A_1 , соответствующей точке A_3 в нормальной корреляции, а первая — вырождается в кривую.

Следовательно, лучи комплекса описывают плоские пучки, центры которых лежат на кривой абсолюта, а носителями являются фокальные плоскости конгруэнции (7). Прямая A_3P описывает конгруэнцию. (Точка $P = (\gamma - \alpha k) A_3 - \gamma A + k A_1$ — характеристическая точка двупараметрического семейства плоскостей AA_3A_1).

Действительно, дифференциал

$$\begin{aligned} d(A_3P) &= \left[(dk - k\omega_0^0 - \gamma\omega_1^1) \frac{\gamma}{k} + \frac{k}{R^2} \omega_3^1 - d\gamma \right] (A_3A) + \\ &+ \omega_3^2 [(k\alpha - \gamma) (A_3A_2) - \gamma (A_2A) + k (A_2A_1)] - \gamma\omega_3^1 (A_1A) + \\ &+ \frac{1}{k} (dk - k\omega_0^0 - \gamma\omega_1^1) [k (A_3A_1) - \gamma (A_3A)] \end{aligned}$$

(здесь через $(A_\alpha A_\beta)$, $(A_3 P)$ обозначены плюккеровы координаты прямых $A_\alpha A_\beta$, $A_3 P$) выражается через две существенные формы ω_3^2 , ω_3^1 . Учитывая (6), легко проверить, что коэффициент при ω_1^1 в первой квадратной скобке правой части равен нулю). Фокусы конгруэнции $\{A_3 P\}$ $F_1 = P + t_1 A_3$, $F_2 = P + t_2 A_3$ определяются уравнениями

$$t \omega_3^2 = 0, \quad \left(\gamma \beta + \gamma \alpha - kx_5 + \frac{k}{R^2} - \alpha \beta k - k \alpha^2 \right) \omega_3^2 + \\ + \left(\gamma r - \frac{\gamma k^3}{2} + 2\gamma^2 + \frac{\gamma^2 k^3}{2} - \gamma k \alpha - kx_7 + \frac{k^3}{R^2} + t \gamma \right) \omega_3^1 =$$

Отсюда

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{k\beta}{2} - r - 2\gamma - \frac{\gamma k^2}{2} + k\alpha + \frac{k}{\gamma} x_7 - \frac{k^2}{\gamma R^2}.$$

Следовательно, первый фокус конгруэнции $\{A_3 P\}$ совпадает с точкой P . Точка P описывает поверхность, касающуюся плоскости $A_3 A_1 A$.

Лучи комплекса образуют пучки прямых, параллельных лучу конгруэнции $\{A_3 P\}$.

Таким образом, чтобы построить комплекс C_1^h , следует взять произвольную конгруэнцию и в одной из ее фокальных плоскостей провести лучок прямых, параллельных соответствующему лучу конгруэнции.

Иными словами, через каждую точку абсолюта следует провести произвольную плоскость и в ней — лучок прямых с центром в указанной точке.

Поскольку положение плоскости, проходящей через точку, определяется двумя параметрами, то теперь эти параметры будут функциями внутренних координат центра пучка. Поэтому класс комплексов C_1^h существует с произволом в две функции двух аргументов.

2. Комплексы C_2^h

Пусть точка A_3 является двойным инфлексионным центром. В таком случае

$$q = \gamma = 0, \quad r + 2\alpha k \neq 0. \quad (8)$$

Уравнения комплекса C_2^h в третьей дифференциальной окрестности имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_3^2 + k \omega_3^1, \quad k \omega_3^2 - 2 \omega_0^0 = p \omega_3^2 + \alpha \omega_3^1 + \beta \omega_3^0, \quad \omega_1^2 = \alpha \omega_3^2, \\ dk - 2k \omega_0^0 - \omega_1^2 &= \beta \omega_3^2 + r \omega_3^1, \quad d\alpha - \frac{2}{R^2} \omega_3^1 + \alpha \omega_0^0 = \\ &= x_2 \omega_3^2 + x_4 \omega_3^1 + x_5 \omega_3^0, \quad dp + \left(\frac{k}{R^2} - \alpha^2 k - \alpha r + \alpha \beta k - \alpha p \right) \omega_3^1 + \\ &+ \left(\alpha^2 k - \frac{k}{R^2} \right) \omega_3^1 - p \omega_0^0 = x_1 \omega_3^2 + x_2 \omega_3^1 + x_3 \omega_3^0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$d\beta - \beta \omega_0^0 = x_3 \omega_3^2 + x_5 \omega^1 + x_6 \omega_3^1, \quad dr + \left(\frac{2k}{R^2} + \frac{3\alpha r}{2} \right) \omega^1 -$$

$$- \left(\frac{2k^2 + 1}{R^2} + \beta^2 + 2\alpha\beta + \frac{3kr\alpha}{2} - \frac{3rp}{2} + x_6 \right) \omega_3^2 = x_7 \omega_3^1,$$

$$x_4 = \frac{1}{R^2} - \alpha^2, \quad x_5 = -\frac{1}{R^2} - \alpha(\alpha + \beta).$$

Система (9) в инволюции и ее решение существует с произволом в одну функцию двух аргументов. С таким произволом существует класс комплексов C_2^h .

При перемещении двойного инфлексионного центра A_3 по абсолюту ребро A_3A_1 репера описывает конгруэнцию, поскольку

$$d(A_3A_1) = \omega_3^2 [(A_2A_1) + \alpha(A_3A_2)] + \frac{\omega_3^1}{R^2}(A_3A) - \omega_0^0(A_3A_1)$$

существенно зависит от двух форм ω_3^2 , ω_3^1 . Фокусы $F_1 = A_3 + t_1 A_1$, $F_2 = A_3 + t_2 A_1$ конгруэнции $\{A_3A_1\}$ определяются уравнениями

$$t\omega_3^1 = 0, \quad (1 + t\alpha)\omega_3^2 = 0.$$

Следовательно, один фокус совпадает с точкой A_3 , а второй — с точкой $\alpha A_3 - A_1$.

Вторая фокальная поверхность конгруэнции $\{A_3A_1\}$ касается плоскости AA_3A_1 .

Если луч конгруэнции огибает на абсолюте фокальную кривую l , то $\omega_3^2 = 0$. Соприкасающаяся плоскость этой кривой, как легко проверить, совпадает со второй фокальной плоскостью конгруэнции $\{A_3A_1\}$.

Таким образом, чтобы построить комплекс C_2^h , следует взять конгруэнцию с заданной одной фокальной поверхностью (абсолют) и через каждую точку этой поверхности в фокальной плоскости, не касающейся этой поверхности, провести пучок прямых. Наоборот, всякий комплекс C_2^h может быть построен таким образом.

Доказательство обратного утверждения аналогично тому, как это сделано для комплекса с двойным инфлексионным центром в проективном пространстве [1].

3. Комплексы C_3^h

Пусть A_3 — тройной инфлексионный центр луча комплекса. Тогда

$$q = \gamma = r + 2ak = 0, \quad \alpha + \beta \neq 0. \quad (10)$$

Комплекс класса C_3^h в третьей дифференциальной окрестности определяется уравнениями

$$\omega^2 = \omega_3^2 + k\omega_3^1, \quad k\omega_1^2 - 2k\omega_0^0 = p\omega_3^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^1, \quad \omega_1^3 = \alpha\omega_3^2,$$

$$\begin{aligned}
2k\omega_0^0 - \omega_1^2 &= \beta\omega_3^2 - 2\alpha k\omega_3^1, \quad dp + \left(\frac{k}{R^2} + \alpha^2 k + \alpha\beta k + \alpha p\right)\omega_3^1 - \\
&- p\omega_0^0 + \left(\alpha^2 k - \frac{k}{R^2}\right)\omega_1^1 = x_1\omega_3^2 + x_2\omega_1^1 + x_3\omega_3^1, \\
d\alpha + \alpha\omega_0^0 - \frac{2}{R^2}\omega_3^1 &= x_2\omega_3^2 + x_4\omega_1^1 + x_5\omega_3^1, \quad d\beta - \beta\omega_0^0 = x_3\omega_3^2 + \\
&+ x_5\omega_1^1 + x_6\omega_3^1, \quad x_4 = \frac{1}{R^2} - \alpha^2, \quad x_5 = -\frac{1}{R^2} - \alpha^2 - \alpha\beta, \quad (11) \\
2kx_2 + x_6 &= -\frac{2k^2 + 1}{R^2} - \beta^2 - 4\alpha\beta - 2\alpha^2 + 2k^2\alpha^2 - 2\alpha kp.
\end{aligned}$$

Система (11) в инволюции, и ее решение существует с произволом в три функции одного аргумента. Следовательно, широта класса комплексов C_3^h — три функции одного аргумента.

Ребро A_3A_1 репера описывает конгруэнцию (как и для комплекса C_2^h) с фокусами A_3 , $\alpha A_3 - A_1$, которая подчинена некоторому условию.

Рассмотрим на абсолюте фокальную кривую, огибаемую лучом A_3A_1 .

Проведем пучок линейных комплексов через четыре бесконечно близкие касательные к фокальной кривой l на абсолюте. Параметры этого пучка определяются равенствами

$$\begin{aligned}
(A_3A_1) &= 0, \quad (A_3A) = 0, \quad (A_1A) + k(A_3A_2) = 0, \\
(A_1A_2) - \alpha(A_3A_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Относительно сопровождающего репера уравнение пучка имеет вид

$$\alpha p^{12} - kp^{10} + \lambda p^{20} - p^{32} = 0,$$

где λ — параметр пучка.

В нуль-системе каждого из этих комплексов точке $F_2 = \alpha A_3 - A_1$ соответствует плоскость $A_3A_1A_2$. Указанное свойство и выделяет конгруэнцию $\{A_3A_1\}$ из класса всех конгруэнций с заданной одной фокальной поверхностью и полностью характеризует эту конгруэнцию. Доказательство аналогично тому, как и в [1].

Таким образом, чтобы построить комплекс C_3^h , следует взять конгруэнцию, отнесенную к абсолюту как одной своей фокальной поверхности, и через каждую точку абсолюта в фокальной плоскости, не касающейся абсолюта, провести пучок прямых.

4. Комплекс C_4^h

Пусть точка A_3 является четырехкратным инфлексионным центром луча комплекса. В таком случае

$$q = \gamma = 2\alpha k + r = \alpha + \beta = 0, \quad (12)$$

$$p \neq 0. \quad (13)$$

Комплекс C_4^h определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\omega^2 &= k\omega_3^1 + \omega_3^2, \quad k\omega_1^2 - 2\omega_0^0 = p\omega_3^2 + \alpha(\omega^1 - \omega_3^1), \\ \omega_1^2 &= \alpha\omega_3^2, \quad dk - 2k\omega_0^0 - \omega_1^2 = -\alpha(\omega_3^2 + 2k\omega_3^1).\end{aligned}\quad (14)$$

Дифференцируем (14) и, используя лемму Картана, найдем

$$\begin{aligned}dp - p\omega_0^0 + \frac{k}{R^2}(\omega_3^1 - \omega^1) + (2\alpha p - k\alpha^2)\omega_3^1 + \alpha^2 k\omega^1 &= \\ = x_1\omega_3^2 + x_2(\omega^1 - \omega_3^1), \quad d\alpha - \frac{2}{R^2}\omega_3^1 + \alpha\omega_0^0 + \alpha^2\omega_3^1 &= \\ = x_2\omega_3^2 + x_3(\omega^1 - \omega_3^1).\end{aligned}\quad (15)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (14) и подставив найденный дифференциал $d\alpha$ из (15), получим

$$x_3 = \frac{1}{R^2} - \alpha^2, \quad x_2 = -\frac{k}{R^2} + \alpha(\alpha k - p).$$

Следовательно, дифференциал $d\alpha$ полностью определен

$$d\alpha + \left[\frac{k}{R^2} - \frac{\alpha(p - \alpha k)}{2} \right] \omega_3^2 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{R^2} \right) (\omega^1 + \omega_3^1) = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя (16), получим

$$p = 0,$$

что противоречит условию (13).

Таким образом, комплекс, у которого бесконечно удаленный инфекционный центр является четырехкратным, не существует.

5. Комплекс C_{21}^h

Пусть вершина A_3 репера является двойным инфекционным центром, а вершина A — простым инфекционным центром. Тогда из уравнения (4) получим

$$q = \gamma = r + pk^2 - 2\beta k = 0, \quad (17)$$

$$r + 2\alpha k \neq 0, \quad r - \beta k - \alpha k \neq 0. \quad (18)$$

Уравнения комплекса C_{21}^h принимают вид

$$\omega^2 = \omega_3^2 + k\omega_3^1, \quad (19_1)$$

$$k\omega_1^2 - 2\omega_0^0 = p\omega_3^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^1, \quad (19_2)$$

$$\omega_1^2 = \alpha\omega_3^2, \quad (19_3)$$

$$dk - 2k\omega_0^0 - \omega_1^2 = \beta\omega_3^2 + (2\beta k - pk^2)\omega_3^1. \quad (19_4)$$

Дифференцируем (19₂) внешним образом и раскрываем по лемме Картана

$$\begin{aligned}dp + \left(\frac{k}{R^2} - \alpha\beta k + \alpha pk^2 + \alpha p - \alpha^2 k \right) \omega_3^1 + \left(\alpha^2 k - \frac{k}{R^2} \right) \omega^1 - p\omega_0^0 &= \\ = x_1\omega_3^2 + x_3\omega^1 + x_5\omega_3^1, \quad d\alpha + \alpha\omega_0^0 - \frac{2}{R^2}\omega_3^1 &= \\ = x_2\omega_3^2 + x_4\omega^1 + x_5\omega_3^1, \quad d\beta - \beta\omega_0^0 = x_3\omega_3^2 + x_5\omega^1 + x_6\omega_3^1.\end{aligned}\quad (20)$$

Дифференцируя (19₃) и принимая во внимание (20), найдем

$$x_4 = \frac{1}{R^2} - \alpha^2, \quad x_5 = -\frac{1}{R^2} - \alpha^2 - \alpha\beta. \quad (21)$$

Продифференцируем теперь (19₄), учитывая (20), (21):

$$\begin{aligned} k^2 x_1 + x_6 - 2kx_3 &= -\frac{2k^2 + 1}{R^2} + \beta^2 + kp(kp - \alpha k^2 - 2\beta - 2\alpha), \\ x_2 &= -\frac{k}{R^2} + \alpha \left(\alpha k + p - \frac{2\beta + \alpha}{k} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Система (19) не в инволюции. В равенстве (20₂) известны все коэффициенты x_2, x_4, x_5 . Запишем (20₂), принимая во внимание (21), (22):

$$d\alpha + \left(\frac{k}{R^2} - \frac{\alpha^2 k + 3\alpha p}{2} + \frac{2\alpha^2 + 2\alpha\beta}{k} \right) \omega_3^2 + \left(\alpha^2 + \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{1}{R^2} \right) \omega_3^1 = 0. \quad (23)$$

Продифференцировав (23), получим

$$\frac{pk - (\alpha + \beta)}{kR^2} - \frac{2\alpha^2(\alpha + \beta)}{k} + \alpha^2 p = 0. \quad (24)$$

Параметры α, β, p — зависят. Если продифференцировать равенство (24) и подставить значения $dp, d\alpha, d\beta, dk$ из (20), (23) при условиях (21), (22), то получим три соотношения между параметрами α, β, p , одно из которых имеет вид

$$\alpha \left[\frac{3(\alpha + \beta) - pk}{R^2} + \alpha^2 (pk - 2\alpha - 2\beta) \right] = 0. \quad (25)$$

Отсюда

- 1) $\alpha = 0, \quad 3\beta - pk \neq 0.$
- 2) $\alpha \neq 0, \quad \frac{3(\alpha + \beta) - pk}{R^2} + \alpha^2 [pk - 2(\alpha + \beta)] = 0.$ (26)

При $\alpha = 0$ условие (24) принимает вид

$$pk - \beta = 0.$$

Но тогда из (17) $r = -\beta k$, и второе неравенство (18) не имеет места. Пусть $\alpha \neq 0$. Сравнивая (25) и (26), получим

$$\alpha + \beta = 0, \quad kp = 0.$$

В таком случае $r + 2ak = 0$, что противоречит условию (18).

Таким образом, комплекс, у которого один двойной и один простой инфлексионные центры являются бесконечно удаленными, не существует.

6. Комплекс C_{22}^h

Пусть точки A, A_3 являются двойными инфлексионными центрами. В таком случае

$$q = r = r - \beta k + ak = pk^2 + r - 2\beta k = 0, \quad (27)$$

$$r + 2ak \neq 0. \quad (28)$$

Из равенств (27)

$$\beta = pk - \alpha, \quad r = pk^2 - 2\alpha k.$$

Уравнения комплексов C_{22}^h принимают вид

$$\begin{aligned}\omega^3 &= \omega_3^2 + k\omega_3^1, \quad k\omega_1^2 - 2\omega_0^0 = p(\omega_3^2 + k\omega_3^1) + \alpha(\omega_1^1 - \omega_3^1), \\ \omega_1^2 &= \alpha\omega_3^2, \quad dk - 2k\omega_0^0 - \omega_1^2 = pk(\omega_3^2 + k\omega_3^1) - \alpha(\omega_3^2 + 2k\omega_3^1).\end{aligned}\quad (29)$$

При продолжении (29) получим

$$\alpha pk = 0.$$

Поскольку $k \neq 0$, то возможны случаи

- 1) $\alpha = 0, p \neq 0$,
- 2) $\alpha \neq 0, p = 0$,
- 3) $\alpha = p = 0$.

При $\alpha = 0$ из (29) получим $\omega_1^2 = 0$. Из этого равенства следует, что базисные формы $\omega_3^2, \omega_1^1, \omega_3^1$ — зависимы, что невозможно. При $p = 0$ получим $r = -2\alpha k$, что противоречит условию (28).

Проверим, нет ли среди комплексов C_{22}^h клиффордовых. Клиффордов комплекс характеризуется тем, что центры луча такого комплекса неопределены. Центры луча комплекса относительно репера $T(AA_1A_2A_3)$ определяются уравнениями

$$t^2(1 + b^2) - (a^2 + k^2) = 0.$$

Следовательно, положив $b = 0$, мы исключили из рассмотрения клиффордовы комплексы.

Относительно произвольного репера уравнение, отделяющее инфлексионные центры, имеет вид (см. [3])

$$\begin{aligned}qt^4 - 2(\gamma + ab - aq)t^3 + (qa^2 - 4a\gamma + r - 2aba + 2\alpha k + \\ + 2b\beta + pb^2)t^2 + 2(ar - a^2\gamma + \beta ba - \beta k + \alpha ka - bkp)t + \\ + ra^2 - 2ak\beta + pk^2 = 0.\end{aligned}\quad (30)$$

Если A, A_3 являются двойными инфлексионными центрами, то имеют место равенства

$$q = \gamma + ab = ra^2 - 2\beta ka + pk^2 = 0,$$

$$ar + \beta ba - \gamma a^2 - \beta k + \alpha ka - bkp = 0, \quad (31)$$

$$r - 4a\gamma - 2\alpha ba + 2ka + 2b\beta + pb^2 \neq 0. \quad (32)$$

Для клиффордова комплекса

$$\begin{aligned}b = \pm i, \quad k = \pm ai, \quad \beta = \pm ip, \quad \alpha = 0, \\ q = 0, \quad \gamma = 0, \quad r = \mp p.\end{aligned}\quad (33)$$

Условия (31), (32) не противоречат (33).

Таким образом, комплекс C_{22}^h может быть только клиффордовым.

Примечание. Для комплексов C_4^h и C_{21}^h условия (33) противоречат условиям (13) и (18). Поэтому комплексы C_4^h, C_{21}^h не могут быть клиффордовыми.

7. Комплекс C_{31}^h

Поместим тройной инфлексионный центр луча комплекса в точку A_3 , а простой инфлексионный центр в точку A . В таком случае

$$q = \gamma = r + 2\alpha k = r + pk^2 - 2\beta k = 0, \quad (34)$$

$$p \neq 0. \quad (35)$$

Уравнения комплекса C_{31}^h принимают вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_3^2 + k\omega_3^1, \quad k\omega_1^2 - 2\omega_0^0 = p\left(\omega_3^2 + \frac{k}{2}\omega_3^1\right) + \alpha(\omega^1 - \omega_3^1), \\ \omega_1^2 &= \alpha\omega_3^2, \end{aligned} \quad (36)$$

$$dk - 2k\omega_0^0 - \omega_1^2 = \frac{pk}{2}\omega_3^2 - \alpha(\omega_3^2 + 2k\omega_3^1).$$

При продолжении (36) получим

$$\begin{aligned} dp - p\omega_0^0 + \left(\frac{k}{R^2} + 2\alpha p + \frac{p^2 k}{4} - \alpha^2 k\right)\omega_3^1 + \frac{\alpha^2 k R^2 - k}{R^2}\omega^1 = \\ = x_1\left(\omega_3^2 + \frac{k}{2}\omega_3^1\right) + x_2(\omega^1 - \omega_3^1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\alpha + \alpha\omega_0^0 + \left(\frac{\alpha p k + \alpha^2 k^2}{2} + \alpha^2 - \frac{k^2 + 4}{2R^2}\right)\omega_3^1 = \\ = x_2\left(\omega_3^2 + \frac{k}{2}\omega_3^1\right) + x_3(\omega^1 - \omega_3^1), \end{aligned} \quad (37)$$

$$x_2 = \alpha^2 k - \frac{k^2}{R^2}, \quad x_3 = \frac{1}{R^2} - \alpha^2; \quad x_1 = \frac{p^2 k - 6\alpha p}{2k}. \quad (38)$$

Следовательно, дифференциалы $d\alpha$, dp полностью определены. Продифференцировав (37) при условиях (38), получим $p = 0$, что противоречит условию (35). Легко проверить, что комплекс C_{31}^h не может быть клиффордовым. Таким образом, комплекс C_{31}^h не существует.

8. Комплексы C_{11}^h

Комплексы C_{11}^h представляют собой геометрический образ, возможный только в гиперболическом пространстве. Очевидно, комплекс C_{11}^h представляет собой квазиспециальный комплекс с двойным расслоением, причем не произвольный квазиспециальный, а тот, у которого поверхности, описываемые центрами плоских пучков, представляют собой две области абсолюта.

Задача, связанная с исследованием квазиспециальных комплексов с двукратным расслоением, остается нерешенной до сих пор. Известны отдельные классы таких комплексов.

1°. Линейные комплексы.

2°. Специальные комплексы касательных к торсу.

3°. Комплексы Н. И. Кованцова.

Комплексы 3° были указаны Н. И. Кованцовым в работе [4]. Каждый из них представляет собой однопараметрическое семейство линейных конгруэнций и строится следующим образом: берутся произвольные линейчатые поверхности с произвольным соотношением между их образующими. Соответствующие образующие принимаются за директрисы линейных конгруэнций. Общая широта класса — семь функций одного аргумента.

Долгое время считалось, что указанное построение дает все квазиспециальные комплексы с двойным расслоением (случай комплексов 2° исключается). Однако сравнительно недавно Н. И. Кованцовым и Е. Н. Ищенко [5] был указан пример квазиспециального комплекса с двойным расслоением, который не охватывается тремя 1° , 2° , 3° .

Система дифференциальных уравнений, определяющая комплекс 3° , имеет вид

$$\begin{aligned}\omega^0 &= \omega_3^2 + k\omega_3^1, \quad k\omega_1^0 - 2\omega_0^0 = p\omega_3^2 + \alpha\omega_1^1 + \beta\omega_3^1, \quad \omega_1^2 = \alpha\omega_3^2 + \gamma\omega_3^1, \\ dk - 2k\omega_0^0 - \omega_1^2 &= \beta\omega_3^2 + \gamma\omega_1^1 + (2\beta k - pk^2)\omega_3^1.\end{aligned}\quad (39)$$

Приведение этой системы в инволюцию связано с непреодолимыми аналитическими трудностями, хотя внешне система (39) несложна.

Подойдем к исследованию комплексов C_{11}^h с другой стороны. Возьмем в качестве абсолюта гиперболического пространства, например эллипсоид, параметрические уравнения которого можно записать в виде

$$x = a \frac{uv + 1}{u + v}, \quad y = b \frac{v - u}{u + v}, \quad z = ic \frac{uv - 1}{u + v}. \quad (40)$$

Пусть

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (41)$$

произвольная плоскость. Найдем линию пересечения плоскости (41) с поверхностью (40). Подставляя (40) в (41), получим

$$Puv + Qu + Rv + S = 0, \quad (42)$$

где

$$P = Aa + icC, \quad Q = D - bB, \quad R = Bb + D, \quad S = Aa - icC.$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием того, чтобы линия на эллипсоиде была плоской, является условие (42).

Пусть $M(u, v)$, $M_1(u_1v_1)$ — две точки на эллипсоиде. Чтобы прямая MM_1 описывала комплекс, необходимо, чтобы между параметрами u, v, u_1, v_1 было установлено некоторое соотношение. Тогда для каждой фиксированной пары значений u, v значения u_1, v_1 будут меняться, и прямая MM_1 будет описывать конус с вершиной M . Наоборот, каждая пара значений u_1, v_1 определит конус с вершиной M_1 . В случае двойного расслоения надо, чтобы соотношения между u, v, u_1, v_1 было таким, чтобы при фиксиру-

вании u_1 , v_1 мы имели соотношение (42), а при фиксировании u , v — соотношение

$$Pu_1v_1 + Qu_1 + Rv_1 + S = 0. \quad (43)$$

Это значит, что искомое соотношение, в частности, имеет вид

$$\begin{aligned} & (a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_1 + a_{13}v_1 + a_{14})uv + (a_{21}u_1v_1 + a_{22}u_1 + \\ & + a_{23}v_1 + a_{24})u + (a_{31}u_1v_1 + a_{32}u_1 + a_{33}v_1 + a_{34})v + \\ & + (a_{41}u_1v_1 + a_{42}u_1 + a_{43}v_1 + a_{44}) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Коэффициенты a_{ij} — произвольные постоянные. Но так как плоскость (41) должна пройти и через точку $M_1(u_1, v_1)$, то

$$a_{11}(uv)^2 + a_{12}u^2v + a_{13}uv^2 + a_{14}uv + a_{21}u^2v + a_{22}u^2 + a_{23}uv + a_{24}u + \\ + a_{31}uv^2 + a_{32}uv + a_{33}v^2 + a_{34}v + a_{41}uv + a_{42}u + a_{43}v + a_{44} = 0.$$

Поскольку u , v — произвольные, то имеют место равенства

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0, \quad a_{12} + a_{21} = 0, \quad a_{13} + a_{31} = 0, \\ a_{24} + a_{42} = 0, \quad a_{43} + a_{34} = 0, \quad a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} = 0. \end{aligned}$$

Соотношение (44) принимает вид

$$\begin{aligned} & (a_{12}u_1 + a_{13}v_1 + a_{14})uv + (a_{23}v_1 - a_{12}u_1v_1 + a_{24})u + \\ & + (a_{32}u_1 - a_{13}u_1v_1 + a_{34})v - [(a_{14} + a_{23} + a_{32})u_1v_1 + \\ & + a_{24}u_1 + a_{34}v_1] = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Итак, равенством (45) определяются некоторые комплексы класса C_{11}^h , широта которого — шесть постоянных. При определенных соотношениях между коэффициентами a_{ij} из этого класса выделяются комплексы, перечисленные в случаях 1°, 2°, 3°.

Легко проверить, что прямая MM_1 описывает линейный комплекс, если

$$a_{23} + a_{32} = 0, \quad a_{14} + a_{41} = 0.$$

Комплекс C_{11}^h будет специальным в том случае, если он представляет собой однопараметрическое семейство плоских полей. Соотношения

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{32} = 0, \quad a_{41} + a_{14} = 0$$

и выделяют из всех комплексов, определяемых равенством (45), специальные комплексы касательных к торсу.

Комплексы Н. И. Кованцова в нашем случае является клиффордовыми комплексами, т. е. комплексами, представляющими собой однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций, директрисами которых являются образующие одного семейства эллипсоида. Соотношение (45) в этом случае может быть таким:

$$\alpha u_1 + \beta u + \gamma u_1 + \delta = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} a_{13} = a_{24} = 0, \quad a_{23} + a_{14} = 0, \\ a_{32} + a_{41} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Условия (46) выделяют из класса комплексов (45) частные
лиффордовы комплексы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, Изд-во КГУ, 1963, 292 с.
2. Фиников С. П. Геометрия комплексов прямых.— «Учен. зап. МГПИ им. В. П. Потемкина», 1940, вып. 1, т. 1, с. 240—321.
3. Ильяшенко В. Я. Безынтегральное представление некоторых классов комплексов в гиперболическом пространстве.— «Укр. геометр. сб.». Вып. 12, Харьков, 1972, с. 65—77.
4. Кованцов Н. И. Квазиспециальные комплексы.— «Мат. сб.», 1957, т. 41, (83) № 3, с. 333—360.
5. Кованцов Н. И., Ищепко Е. Н. О некоторых классах квазиспециальных комплексов с двукратным расслоением.— «Укр. геометр. сб.». Вып. 8, Харьков, 1970, с. 69—75.

Поступила 28 сентября 1975 г.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В предыдущей работе [1] были найдены комплексы, допускающие (с произволом в одну функцию одного аргумента) расслоение в однопараметрические семейства нормальных конгруэнций, ортогональных к минимальным поверхностям. Дифференциальные уравнения таких комплексов имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1, \quad \omega_1^2 = \beta\omega_3^2, \quad dk = q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 - (q + 2k\beta)\omega_3^2, \\ d\beta + (1 + \beta^2)\omega_3^1 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Произвол, с которым существует комплекс (1), определяется двумя функциями одного аргумента, отыскание комплексов приводится к

$$\lambda_{vv} + \lambda_{00} = 0. \tag{2}$$

В упомянутой работе даны в квадратурах конечные уравнения минимальных поверхностей в форме, отличающей их от уравнений

Нейерштрасса и Щварца [2]. Для каждой функции $\lambda(v, \theta)$, удовлетворяющей уравнению (2), можно найти двупараметрическую единицу минимальных поверхностей, каждая из которых ортогональна к соответствующей нормальной конгруэнции комплекса (1), определенного для этой же функции.

В настоящей статье ставится задача найти все поверхности, ортогональные к нормальным конгруэнциям комплекса (1). Эти поверхности строятся точно так же, как и минимальные поверхности [1], только теперь вместо двух сопряженных гармонических функций $\lambda(v, \theta)$ и $\tau(v, \theta)$ берутся две функции, из которых первая гармоническая, а вторая определяется через нее с помощью вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений

$$\tau_0 = \lambda_v, \quad \tau_v = -\lambda_\theta - f(v) \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v},$$

где $f(v)$ произвольна. Будет показано, что все такие поверхности характеризуются равенством

$$R_1 + R_2 = f(v), \quad (3)$$

в котором R_1, R_2 — главные радиусы кривизны. При $f(v) = 0$ поверхности становятся минимальными. На этом основании поверхности (3) называются обобщением минимальных. Для них будут найдены конечные уравнения в форме, аналогичной той, в которой записаны уравнения минимальных поверхностей в [1]. Одновременно будут выписаны и уравнения, обобщающие уравнения Нейерштрасса.

Уравнение нормальных конгруэнций, расслаивающих комплекс (1), имеет вид

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2. \quad (4)$$

Точка

$$M = A + te_3, \quad (5)$$

описывающая поверхность, ортогональную к конгруэнциям (4), имеет абсциссу, удовлетворяющую уравнению

$$\omega^3 + dt = 0. \quad (6)$$

Продифференцируем (4):

$$[d(a+t) - (q+2k\beta)\omega_3^2, \omega_3^1] = 0. \quad (7)$$

Поскольку в комплексе (1)

$$D(\omega_3^1) = 0, \quad D(-\sqrt{1+\beta^2}\omega_3^2) = 0,$$

то можно положить

$$\omega_3^1 = \frac{dv}{\operatorname{ch} v}, \quad \omega_3^2 = -\frac{d\theta}{\operatorname{ch} v}. \quad (8)$$

В таком случае (см. (1))

$$\beta = -\operatorname{sh} v. \quad (9)$$

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{k}{\operatorname{ch}^2 v}, \quad \tau = \frac{t}{\operatorname{ch}^2 v}. \quad (10)$$

Учитывая (8), (9) и (10), третье уравнение (1) запишем в виде

$$d\lambda = \left(\frac{q}{\operatorname{ch}^3 v} - 2\lambda \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v} \right) dv + \frac{\gamma}{\operatorname{ch}^3 v} d\theta. \quad (11)$$

Равенство (11) позволяет следующим образом представить коэффициенты q и γ :

$$q = \lambda_0 \operatorname{ch}^3 v + 2\lambda \operatorname{sh} v \operatorname{ch}^2 v, \quad \gamma = -\lambda_0 \operatorname{ch}^3 v. \quad (12)$$

Четвертое уравнение (1) при условиях (4) и (6) запишется в виде

$$d\tau = \lambda_0 d\theta + \left(-\lambda_0 - 2\tau \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v} - a \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v} \right) dv.$$

Следовательно,

$$\tau_0 = \lambda_0, \quad \tau_v = -\lambda_0 - 2\tau \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v} - a \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v}. \quad (13)$$

Первое равенство (12) записывается теперь так:

$$q = \tau_0 \operatorname{ch}_v^3 + 2\lambda \operatorname{sh} v \operatorname{ch}^2 v,$$

а потому

$$q + 2k\tau = \tau_0 \operatorname{ch}^3 v.$$

Равенство (7) принимает вид

$$[d(a + 2\tau \operatorname{ch}^2 v), dv] = 0,$$

откуда

$$a + 2\tau \operatorname{ch}^2 v = f(v), \quad (14)$$

$f(v)$ — произвольная функция. Запишем (13), учитя (14):

$$\tau_0 = \lambda_0, \quad \tau_v = -\lambda_0 - f \frac{\operatorname{ch} v}{\operatorname{ch}^3 v}. \quad (15)$$

Эти равенства обобщают условия Коши — Римана. Из (15) находим

$$\begin{aligned} \lambda_{vv} + \lambda_{00} &= 0; \\ \tau_{vv} + \tau_{00} &= -f' \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v} - f \frac{\operatorname{ch}^2 v - 3 \operatorname{sh}^2 v}{\operatorname{ch}^4 v}. \end{aligned} \quad (16)$$

Минимальные поверхности соответствуют случаю

$$f = 0. \quad (17)$$

Положив

$$\tau' = \tau + \int f \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v} dv, \quad (18)$$

приведем (15) к обычным условиям Коши — Римана:

$$\tau'_0 = \lambda_0, \quad \tau'_v = -\lambda_0. \quad (19)$$

Оба уравнения (16), как показывают (19), становятся обычными уравнениями Лапласа.

Как и в [1], убеждаемся в справедливости равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} [(-\operatorname{ch} v \lambda_v + \operatorname{sh} v \lambda) \sin \theta] &= \frac{\partial}{\partial \theta} [\operatorname{ch} v (\lambda_0 \sin \theta - \lambda \cos \theta)], \\ \frac{\partial}{\partial v} [(\operatorname{ch} v \lambda_v - \operatorname{sh} v \lambda) \cos \theta] &= \frac{\partial}{\partial \theta} [\operatorname{ch} v (-\lambda_0 \cos \theta - \lambda \sin \theta)], \quad (20) \\ \frac{\partial}{\partial v} (-\lambda - \lambda_v \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v) &= \frac{\partial}{\partial \theta} [\operatorname{ch} v (-2\tau \operatorname{ch} v + \lambda_0 \operatorname{sh} v) + f(v)]. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения поверхности, ортогональных к лучам компоненты, можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= \int \operatorname{ch} v (\lambda_0 \sin \theta - \lambda \cos \theta) dv + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta + \psi_1(\theta) = \\ &= \int (-\operatorname{ch} v \lambda_v + \operatorname{sh} v \lambda) \sin \theta dv + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta + \psi_1(v), \\ y &= \int \operatorname{ch} v (-\lambda_0 \cos \theta - \lambda \sin \theta) dv - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta + \psi_2(\theta) = \\ &= \int (\operatorname{ch} v \lambda_v - \operatorname{sh} v \lambda) \cos \theta dv - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta + \psi_2(v), \quad (21) \\ z &= \int [\operatorname{ch} v (-2\tau \operatorname{ch} v + \lambda_0 \operatorname{sh} v) + f(v)] dv + \tau \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v + \psi_3(\theta) = \\ &= \int (-\lambda - \lambda_v \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v) dv + \tau \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v + \psi_3(v), \end{aligned}$$

где функции $\psi_i(\theta)$, $\psi_i(v)$ ($i = 1, 2, 3$) определяются однозначно равенствами (21) с точностью до аддитивных постоянных a_i , одинаковых для каждой пары функций ψ_i , ϕ_i с одинаковыми индексами. Постоянные a_1 , a_2 приравняем нулю, выбрав подходящим образом начало координат в плоскости xy . Постоянное a_3 будет параметром, определяющим поверхности (21).

Запишем векторные уравнения поверхности (21) в двух видах:

$$\begin{aligned} r &= \left[\int \operatorname{ch} v (\lambda_0 \sin \theta - \lambda \cos \theta) dv + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta + \psi_1(\theta) \right] i + \\ &+ \left[\int \operatorname{ch} v (-\lambda_0 \cos \theta - \lambda \sin \theta) dv - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta + \psi_2(\theta) \right] j + \\ &+ \left[\int (\operatorname{ch} v (-2\tau \operatorname{ch} v + \lambda_0 \operatorname{sh} v) + f(v)) dv + \tau \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v + \psi_3(\theta) \right] k, \quad (22) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} r &= \left[\int (-\operatorname{ch} v \lambda_v + \operatorname{sh} v \lambda) \sin \theta dv + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta + \psi_1(v) \right] i + \\ &+ \left[\int (\operatorname{ch} v \lambda_v - \operatorname{sh} v \lambda) \cos \theta dv - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta + \psi_2(v) \right] j + \\ &+ \left[\int (-\lambda - \lambda_v \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v) dv + \tau \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v + \psi_3(v) \right] k. \quad (23) \end{aligned}$$

Дифференцируя (22) по v , находим

$$\begin{aligned} r_v &= \left(-\lambda \operatorname{ch} v \cos \theta + \tau \operatorname{sh} v \sin \theta - f \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^2 v} \sin \theta \right) i + \\ &+ \left(-\lambda \operatorname{ch} v \sin \theta - \tau \operatorname{sh} v \cos \theta + f \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^2 v} \cos \theta \right) j + \\ &+ \left(-\tau + f \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v} \right) k, \end{aligned}$$

Дифференцируя (23) по θ , получаем

$$\mathbf{r}_\theta = (\lambda \operatorname{sh} v \sin \theta + \tau \operatorname{ch} v \cos \theta) \mathbf{i} + (-\lambda \operatorname{sh} v \cos \theta + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta) \mathbf{j} - \lambda \mathbf{k}$$

Вектор нормали к поверхности есть

$$N = [(\lambda^2 + \tau^2) \operatorname{ch}^2 v - z] e_3, \quad (24)$$

где

$$e_3 = \operatorname{th} v \mathbf{k} + \frac{1}{\operatorname{ch} v} (\sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j}) \quad (24')$$

есть единичный вектор нормали. Продифференцируем этот вектор

$$e_{3v} = \frac{1}{\operatorname{ch} v} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} v} \mathbf{k} - \operatorname{th} v (\sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j}) \right],$$

$$e_{3\theta} = \frac{1}{\operatorname{ch} v} (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}),$$

а потому

$$E = r_v^2 = (\lambda^2 + \tau^2) \operatorname{ch}^2 v - 2\tau f + \frac{f^2}{\operatorname{ch}^4 v},$$

$$F = \mathbf{r}_v \mathbf{r}_\theta = -\lambda f, \quad M = -\mathbf{r}_v e_{3\theta} = \lambda,$$

$$G = r_\theta^2 = (\lambda^2 + \tau^2) \operatorname{ch}^2 v, \quad N = -\mathbf{r}_\theta e_{3v} = -\tau,$$

$$L = -\mathbf{r}_v e_{3v} = \tau - f \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v}.$$

Отсюда

$$\frac{H}{K} = R_1 + R_2 = -\frac{EN - 2FM + GL}{LN - M^2} = f \frac{\lambda^2 + \tau^2 - \frac{\tau f}{\operatorname{ch}^2 v}}{\lambda^2 + \tau^2 - \frac{\tau f}{\operatorname{ch}^2 v}} = f,$$

что совпадает с (3).

Полная и средняя кривизны поверхности (22) определяются равенствами

$$K = \frac{1}{t^2 + at - k^2}, \quad H = \frac{2t + a}{t^2 + at - k^2}.$$

Отсюда

$$\frac{H}{K} = 2t + a.$$

Если

$$\frac{H}{K} = f(v), \quad (24'')$$

то мы приходим к равенству (14). Таким образом, условие (24'') или, что то же, (3), полностью характеризует поверхности, ортогональные к нормальным конгруэнциям комплекса (1).

При

$$\lambda^2 + \tau^2 - \frac{\tau f}{\operatorname{ch}^2 v} = 0$$

поверхность, как показывает равенство (24), вырождается в линию

Отыскание поверхностей (22), (23) сводится к решению уравнений Лапласа (2). Найдя функцию $\lambda(v, \theta)$, найдем и сопряженную ей функцию $\tau'(v, \theta)$, после чего по формуле (18) найдем и $\tau(v, \theta)$. Функции $\lambda(v, \theta)$ и $\tau(v, \theta)$ следует подставить в уравнения (22) (или в (23)).

Поскольку вектор e_3 не зависит от f , λ , τ , то все поверхности (22) в точках с одинаковыми координатами v, θ имеют параллельные касательные плоскости. Это справедливо, в частности, и для минимальных поверхностей.

Как известно, уравнения минимальных поверхностей в форме Вейерштрасса имеют вид

$$\begin{aligned} x &= R \int (1 - w^2) F(w) dw, \\ y &= R \int i(1 + w^2) F(w) dw; \\ z &= R \int 2wF(w) dw, \end{aligned} \quad (25)$$

где $w = \alpha + i\beta$ — комплексный аргумент; $F(w)$ — произвольная аналитическая функция

$$F(w) = A + iB$$

(A и B — сопряженные гармонические функции), символ R означает, что следует взять действительную часть от правых частей уравнений (25).

Уравнения

$$\begin{aligned} x_1 &= J \int (1 - w^2) F(w) dw, \quad y_1 = J \int i(1 + w^2) F(w) dw; \\ z_1 &= J \int 2wF(w) dw \end{aligned} \quad (26)$$

(знак J указывает на то, что следует взять коэффициент при мнимой единице соответствующей комплексной функции) определяют минимальную поверхность, сопряженную поверхности (25).

Продифференцировав функции (25) и (26), будем иметь соответственно

$$\begin{aligned} x_\alpha &= A(1 - \alpha^2 + \beta^2) + 2B\alpha\beta, \quad x_\beta = -B(1 - \alpha^2 + \beta^2) + 2A\alpha\beta, \\ y_\alpha &= -B(1 + \alpha^2 - \beta^2) - 2A\alpha\beta, \quad y_\beta = -A(1 + \alpha^2 - \beta^2) + 2B\alpha\beta, \\ z_\alpha &= 2A\alpha - 2B\beta, \quad z_\beta = -2B\alpha - 2A\beta, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_{1\alpha} &= B(1 - \alpha^2 + \beta^2) - 2A\alpha\beta, \quad x_{1\beta} = A(1 - \alpha^2 + \beta^2) + 2B\alpha\beta, \\ y_{1\alpha} &= A(1 + \alpha^2 - \beta^2) - 2B\alpha\beta, \quad y_{1\beta} = -B(1 + \alpha^2 - \beta^2) - 2A\alpha\beta, \\ z_{1\alpha} &= 2A\beta + 2B\alpha, \quad z_{1\beta} = 2A\alpha - 2B\beta. \end{aligned} \quad (28)$$

Функции (x, x_1) , (y, y_1) , (z, z_1) представляют собой пары гармонических функций, это и сказывается в том, что для них

$$\begin{aligned} x_\alpha &= x_{1\beta}, \quad x_\beta = -x_{1\alpha}, \\ y_\alpha &= y_{1\beta}, \quad y_\beta = -y_{1\alpha}, \\ z_\alpha &= z_{1\beta}, \quad z_\beta = -z_{1\alpha}. \end{aligned}$$

Уравнения (22) и (23) при $f = 0$ представляют собой также уравнения минимальных поверхностей. Дифференцируя их по v и θ , получим

$$\begin{aligned} x_v &= -\lambda \operatorname{ch} v \cos \theta + \tau \operatorname{sh} v \sin \theta; & x_\theta &= \lambda \operatorname{sh} v \sin \theta + \tau \operatorname{ch} v \cos \theta; \\ y_v &= -\lambda \operatorname{ch} v \sin \theta - \tau \operatorname{sh} v \cos \theta; & y_\theta &= -\lambda \operatorname{sh} v \cos \theta - \tau \operatorname{ch} v \sin \theta; \\ z_v &= -\tau; & z_\theta &= -\lambda. \end{aligned} \quad (29)$$

Для сопряженных минимальных поверхностей имеем

$$\begin{aligned} x_{1v} &= -\lambda \operatorname{sh} v \sin \theta - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta; & x_{1\theta} &= -\lambda \operatorname{ch} v \cos \theta + \tau \operatorname{sh} v \sin \theta; \\ y_{1v} &= \lambda \operatorname{sh} v \cos \theta - \tau \operatorname{ch} v \sin \theta; & y_{1\theta} &= -\lambda \operatorname{ch} v \sin \theta - \tau \operatorname{sh} v \cos \theta; \\ z_{1v} &= \lambda; & z_{1\theta} &= -\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} dX &= x_v dv + x_\theta d\theta + i(x_{1v} dv + x_{1\theta} d\theta); \\ dY &= y_v dv + y_\theta d\theta + i(y_{1v} dv + y_{1\theta} d\theta); \\ dZ &= z_v dv + z_\theta d\theta + i(z_{1v} dv + z_{1\theta} d\theta), \end{aligned} \quad (31)$$

получим

$$dX = -F(T) \operatorname{ch} T dT, \quad dY = iF(T) \operatorname{sh} T dT, \quad dZ = iF(T) dT, \quad (32)$$

где $T = v + i\theta$ — комплексный аргумент, а $F(T) = \lambda + i\tau$ — произвольная аналитическая функция, следовательно, уравнения минимальных поверхностей могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} x &= -R \int F(T) \operatorname{ch} T dT, & y &= R \int iF(T) \operatorname{sh} T dT, \\ z &= R \int iF(T) dT \end{aligned} \quad (33)$$

и соответственно — уравнения сопряженных им поверхностей (см. (30)). Непосредственно видно, что имеет место соотношение

$$(F(T) \operatorname{ch} T)^2 + (iF(T) \operatorname{sh} T)^2 + (iF(T))^2 = 0,$$

справедливое для всех минимальных поверхностей [3].

Обобщим теперь формулу (33) на поверхности, определяемые равенством (3). Для этих поверхностей равенства (29) принимают вид

$$\begin{aligned} x_v &= -\lambda \operatorname{ch} v \cos \theta + \left(\tau - \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} \right) \operatorname{sh} v \sin \theta, \\ x_\theta &= \lambda \operatorname{sh} v \sin \theta + \tau \operatorname{ch} v \cos \theta, \\ y_v &= -\lambda \operatorname{ch} v \sin \theta - \left(\tau - \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} \right) \operatorname{sh} v \cos \theta, \\ y_\theta &= -\lambda \operatorname{sh} v \cos \theta + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta, \\ z_v &= -\tau + \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v}, & z_\theta &= -\lambda. \end{aligned} \quad (34)$$

Если положить

$$\begin{aligned} x_{1v} &= -\lambda \operatorname{sh} v \sin \theta - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta, \\ x_{1\theta} &= -\lambda \operatorname{ch} v \cos \theta + \left(\tau - \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} \right) \operatorname{sh} v \sin \theta, \end{aligned}$$

$$y_{1v} = \lambda \operatorname{sh} v \cos \theta - \tau \operatorname{ch} v \sin \theta, \quad (35)$$

$$y_{1\theta} = -\lambda \operatorname{ch} v \sin \theta - \left(\tau - \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} \right) \operatorname{sh} v \cos \theta,$$

$$z_{1v} = \lambda, \quad z_{1\theta} = -\tau + \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v},$$

то равенства (31) запишутся так:

$$dX = -F(T) \operatorname{ch} T dT + \left(i \operatorname{ch} T \int f \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v} dv \right) dT - \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} \operatorname{sh} v \sin \theta dT, \quad (36)$$

$$dY = iF(T) \operatorname{sh} T dT + \left(\operatorname{sh} T \int f \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v} dv \right) dT + \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} \operatorname{sh} v \cos \theta dT,$$

$$dZ = iF(T) dT + \left(\int f \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch}^3 v} dv \right) dT + \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} dT.$$

Здесь $F(T) = \lambda + i\tau'$ (см. (18)). Формулы (36) обобщают (32). Будем называть поверхность (35) сопряженной поверхности (34). Вектор e_3 является единичным вектором нормали к обеим поверхностям. Коэффициенты форм для сопряженной поверхности есть

$$E_1 = (\lambda^2 + \tau^2) \operatorname{ch}^2 v, \quad F_1 = \lambda f, \quad G_1 = \left(\lambda^2 + \left(\tau - \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} \right)^2 \right) \operatorname{ch}^2 v,$$

$$L_1 = -\lambda, \quad M_1 = \tau - \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v}, \quad N_1 = \lambda.$$

Однако отношение ее средней кривизны к полной

$$\frac{H_1}{K_1} = -\frac{E_1 N_1 - 2F_1 M_1 + G_1 L_1}{L_1 N_1 - M_1^2} = -\frac{\lambda f^2}{\operatorname{ch}^2 v \left(\lambda^2 + \left(\tau - \frac{f}{\operatorname{ch}^2 v} \right)^2 \right)}$$

уже отлично от f . При $f = 0$ получаем $H_1 = 0$, чего и следовало ожидать.

Найдем связь между формулами Вейерштрасса (25) (мы запишем их без символа R) и формулами (32). С этой целью, воспользовавшись уравнениями (27), выпишем координаты единичного вектора нормали к минимальным поверхностям, определяемым этими уравнениями:

$$l = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad m = \frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad n = \frac{-1 + \alpha^2 + \beta^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Сравнивая это с (24'), получаем

$$\frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} v} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad \frac{\cos \theta}{\operatorname{ch} v} = -\frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad \operatorname{th} v = \frac{-1 + \alpha^2 + \beta^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

отсюда

$$v = \ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = -\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta},$$

или

$$\alpha = e^v \sin \theta, \quad \beta = -e^v \cos \theta.$$

Следовательно,

$$w = -ie^T, \quad dw = w dT. \quad (37)$$

Сравним теперь последние формулы (25) и (32), положив
 $F(T) = \lambda + i\tau, \quad F(w) = A + iB.$

Учтя (37), придем к равенствам

$$\begin{aligned} \lambda &= 4\alpha\beta A + 2(\alpha^2 - \beta^2)B; \\ \tau &= -2(\alpha^2 - \beta^2)A + 4\alpha\beta B. \end{aligned} \quad (38)$$

Равенства (37), (38) дают искомую связь. Пользуясь ею, запишем в координатах комплексной переменной w формулы (36)

$$\begin{aligned} dX &= (1 - w^2)F(w)dw + \left(\int f(\xi) \frac{\xi - 1}{(\xi + 1)^3} d\xi \right) \frac{1 - w^2}{w^2} dw + \\ &\quad + 2af(\xi) \frac{\xi - 1}{(\xi + 1)^2} \frac{dw}{w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dY &= i(1 + w^2)F(w)dw - \left(\int f(\xi) \frac{\xi - 1}{(\xi + 1)^3} d\xi \right) \frac{1 + w^2}{w^2} dw + \\ &\quad + 2\beta f(\xi) \frac{\xi - 1}{(\xi + 1)^2} \frac{dw}{w}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$dZ = 2wF(w)dw + 2 \left(\int f(\xi) \frac{\xi - 1}{(\xi + 1)^3} d\xi \right) \frac{dw}{w} + 4f(\xi) \frac{\xi}{(\xi + 1)^2} \frac{dw}{w},$$

где $\xi = \alpha^2 + \beta^2$.

Формулы (39) обобщают формулы Вейерштрасса. Действительные части этих формул определяют поверхности, для которых сумма главных радиусов кривизны есть функция $f(\alpha^2 + \beta^2)$. Когда эта функция тождественно равна нулю, поверхности становятся минимальными (17). Подобным же образом можно записать в более общем виде также и формулы (27, 28).

В [1] показано, что при $v = \text{const}$ центр луча комплекса (1) описывает цилиндр, образующая которого параллельна вектору

$$\mathbf{p} = \frac{-e_1 + \beta e_2}{\sqrt{1 + \beta^2}}.$$

Все такие цилиндры образуют однопараметрическое семейство, параметром которого является переменная v . Цилиндры не зависят от выбора функции $f(v)$. Но в таком случае равенство (3) может быть инвариантно определено в терминах, связанных с указанным семейством цилиндров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кованцов Н. И. Расслоение прямых в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной средней кривизны.—«Укр. геометр. сб.». Вып. 19. Харьков, 1976, с. 65—77.
2. Норден А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956. 260 с.
3. Погорелов А. В. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков, изд-во Харьк. ун-та, 1955. 148 с.

Поступила 21 марта 1974 г.

УДК 513

Л. А. МАСАЛЬЦЕВ

**НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ
ЛАПЛАСИАНА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА
ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ**

В статье рассматриваются гладкие ориентируемые гиперповерхности $n+1$ -мерного сферического пространства и пространства Лобачевского. Тем же методом, что и в [1], мы получаем оценки сверху первого положительного собственного значения оператора Лапласа, действующего на функциях, определенных на гиперповерхности M .

Пусть метрика пространства постоянной кривизны K задана конформно-евклидовыми координатами

$$ds^2 = \Phi^{-2} \sum_{i=1}^{n+1} dx^i{}^2, \quad \Phi = \left(1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^{n+1} x^i{}^2 \right), \quad (1)$$

где $\sum x^i{}^2 = r^2 < -\frac{4}{K}$, если $K < 0$, и $r < \infty$, если $K > 0$. Гиперповерхность M зададим уравнениями $x^i = x^i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n+1$. Ее можно рассматривать одновременно как гиперповерхность евклидова пространства и пространства постоянной кривизны. Условимся обозначать термины, относящиеся к погружению M в евклидово пространство, индексом E , а соответствующие термины, связанные с погружением в пространство постоянной кривизны, без всякого индекса. Введем обозначения: $g_{\alpha\beta, E}$ — метрический тензор, индуцированный погружением в евклидово пространство; ξ_E^i ($i = 1, \dots, n+1$) — вектор единичной нормали к M ; dV_E — элемент объема M . Имеют место формулы

$$\sum_{\rho=1}^{n+1} x_\alpha^\rho x_\beta^\rho = g_{\alpha\beta, E} = \Phi^2 g_{\alpha\beta}, \quad dV_E = \Phi^n dV, \quad g_E^{\alpha\beta} \Phi^2 = g^{\alpha\beta}, \quad (2)$$

$$\xi^i = \Phi \xi_E^i \quad (i = 1, \dots, n+1).$$

Поясним последнее соотношение. Нормаль к гиперповерхности M в пространстве постоянной кривизны определяется из системы уравнений (с точностью до знака)

$$\begin{cases} \xi^i \xi^j G_{ij} = 1, \\ \xi^i x_a^j G_{ij} = 0, \quad a = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

где G_{ij} — метрический тензор пространства постоянной кривизны в конформно-евклидовых координатах. Взяв его выражение из (1), легко убедиться, что функции ξ^i из (2) удовлетворяют системе уравнений (3).

Известное интегральное тождество для ориентируемой гиперповерхности евклидова пространства $\int_M \xi_E^i dV_E = 0$ запишем в виде

$$\int_M \xi^i \Phi^{n-1} dV = 0. \quad (4)$$

Как и в [1], используем вариационный принцип для первого положительного собственного значения $\lambda_1(M)$ лапласиана M

$$\lambda_1(M) \int_M \varphi^2 dV < \int_M (\nabla \varphi)^2 dV \quad (5)$$

при условии, что φ удовлетворяет соотношению $\int_M \varphi dV = 0$. Из (4) следует, что в качестве φ можно взять функции $\xi^i \Phi^{n-1}$ ($i = 1, \dots, n+1$).

1). Если просуммировать по i неравенство (5), то справа получим сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} \int_M (\nabla \xi^i \Phi^{n-1})^2 dV,$$

вычислением которой и займемся. Используя дифференциальные формулы [2, с. 181], получим

$$(\Phi^{n-1} \xi^i)_\alpha = (n-1) \frac{K}{4} \Phi^{n-2} (r^2)_{\alpha} \xi^i + \Phi^{n-1} (-a_\alpha^\beta x_\beta^i - \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\alpha^k),$$

где $a_{\alpha\beta}$ — матрица второй фундаментальной формы M в пространстве постоянной кривизны; Γ_{kp}^i — символы Кристоффеля метрики (1). Вычисления дают

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \text{ если } i \neq j \neq k, \quad \Gamma_{ii}^p = \frac{Kx^p}{2\Phi}, \quad i \neq p,$$

$$\Gamma_{pi}^i = -\frac{Kx^p}{2\Phi}, \quad i \neq p, \quad \Gamma_{pp}^i = -\frac{Kx^p}{2\Phi}.$$

С учетом этих формул имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\alpha^k &= \sum_{p=1}^{n+1} \Gamma_{pp}^i \xi^p x_\alpha^p + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{n+1} \Gamma_{pi}^i (\xi^p x_\alpha^p + \xi^p x_\alpha^i) = \\ &= \frac{K}{2\Phi} \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{n+1} x^p \xi^p x_\alpha^p - x^i \xi^i x_\alpha^i \right) - \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{n+1} x^p (\xi^p x_\alpha^p + \xi^p x_\alpha^i). \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что

$$\sum_{p \neq i} x^p \xi^p x_\alpha^p + x^i \xi^i x_\alpha^i = x^i \left(\sum_{p=i}^{n+1} \xi^p x_\alpha^p \right) = 0,$$

последнее выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned} \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\alpha^k &= \frac{K}{2\Phi} \left(-2x^i \xi^i x_\alpha^i \right) - \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{n+1} x^p (\xi^p x_\alpha^p + \xi^p x_\alpha^i) = \\ &= -\frac{K}{2\Phi} \sum_{p=1}^{n+1} x^p (\xi^p x_\alpha^p + \xi^p x_\alpha^i). \end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку $\sum_i x_\alpha^i \xi^i = 0$, то после преобразований для S получим выражение

$$\begin{aligned} S &= \int \sum_{i=1}^{n+1} g^{\alpha\beta} \Phi^{2n-2} \left((n-1)^2 \frac{K^2}{16} \Phi^{-2} (e^2)_\alpha (e^2)_\beta \xi^i \xi^i - \right. \\ &\quad \left. - 2(n-1) \frac{K}{4} \Phi^{-1} (e^2)_\alpha \xi^i \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\beta^k + a_\alpha^\beta x_\beta^i a_\beta^\tau x_\tau^i + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2a_a^\sigma x_\alpha^i \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\beta^k + \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\alpha^k \Gamma_{ts}^i \xi^s x_\beta^t \Big) dV.$$

Теперь, пользуясь (2), (6), последовательно вычисляем слагаемые под интегралом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} g^{\alpha\beta} (n-1)^2 \frac{K^2}{16} \Phi^{-2} (r^2)_\alpha (r^2)_\beta \xi^i = (n-1)^2 \frac{K^2}{16} (\nabla r^2)^2, \\ & \sum_{i=1}^{n+1} -g^{\alpha\beta} 2(n-1) \frac{K}{4} \Phi^{-1} (r^2)_\alpha \xi^i \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\beta^k = \\ & = \frac{n-1}{4} K^2 \Phi^{-2} g^{\alpha\beta} (r^2)_\alpha \sum_{i=1}^{n+1} \xi^i \sum_{p=1}^{n+1} x^p (\xi^i x_\beta^p + \xi^p x_\beta^i) = \\ & = \frac{n-1}{4} K^2 g^{\alpha\beta} \left(\sum_{p=1}^{n+1} x^p x_\beta^p \right) (r^2)_\alpha = \frac{n-1}{8} K^2 (\nabla r^2)^2, \\ & \sum_{i=1}^{n+1} g^{\alpha\beta} a_a^\sigma x_\alpha^i a_\beta^\tau x_\tau^i = \Phi^2 \sum_{a=1}^n k_a^2, \end{aligned}$$

где k_a — главные нормальные кривизны M в пространстве постоянной кривизны,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} g^{\alpha\beta} 2a_a^\sigma x_\alpha^i \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\beta^k = a^{\beta\sigma} \left(-\frac{K}{\Phi} \right) \sum_{i=1}^{n+1} x_\alpha^i \sum_{p=1}^{n+1} x^p \times \\ & \times (\xi^i x_\beta^p + \xi^p x_\beta^i) = -\frac{K}{\Phi} a^{\beta\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_\alpha^i x_\beta^i \right) \left(\sum_{p=1}^{n+1} x^p \xi^p \right) = \\ & = -K\Phi \left(\sum_{a=1}^n k_a \right) \left(\sum_{p=1}^{n+1} x^p \xi^p \right); \\ & \sum_{i=1}^{n+1} g^{\alpha\beta} \Gamma_{kp}^i \xi^p x_\alpha^k \Gamma_{ts}^i \xi^s x_\beta^t = \frac{K^2}{4} \Phi^{-2} g^{\alpha\beta} \sum_i \left(\sum_p x^p (\xi^i x_\alpha^p + \xi^p x_\alpha^i) \times \right. \\ & \times \left. \sum_t x^t (\xi^i x_\beta^t + \xi^t x_\beta^i) \right) = \frac{K^2}{4} \Phi^{-2} g^{\alpha\beta} \sum_{p, t} (x^p x_\alpha^p x^t x_\beta^t \Phi^2 + x^p \xi^p x^t \xi^t \Phi^2 g_{\alpha\beta}) = \\ & = \frac{K^2}{16} (\nabla r^2)^2 + \frac{nK^2}{4} \left(\sum_p x^p \xi^p \right)^2. \end{aligned}$$

Подставляя вычисленные значения в подынтегральное выражение для S , получим

$$S = \int_M \Phi^{2n-2} \left\{ \Phi^2 \sum_{a=1}^n k_a^2 - K\Phi \left(\sum_a k_a \right) \left(\sum_p x^p \xi^p \right) + \right.$$

$$+ \frac{K^2}{16} n^2 (\nabla r^2)^2 + \frac{nK^2}{4} \left(\sum x^\mu \xi^\mu \right)^2 \} dV.$$

Обозначим через $h_E(x) = \sum_{\mu=1}^{n+1} \xi_\mu^\mu x^\mu$ опорную функцию гиперповерхности M в точке x . Справедливо тождество

$$(r^2 - h_E^2(x)) = g_E^{\alpha\beta} (r^2)_\alpha (r^2)_\beta = (\nabla r^2)^2 \Phi^{-2}.$$

Выражая отсюда $(\nabla r^2)^2$, подставляем в (7)

$$S = \int_M \Phi^{2n} \left(\sum_{\alpha=1}^n k_\alpha^2 - K h_E(x) \sum_{\alpha=1}^n k_\alpha + \frac{K^2 n^2}{4} r^2 - n(n-1) \frac{K^2}{4} h_E^2(x) \right) dV. \quad (8)$$

Выразим теперь полученную формулу через геометрические величины в соответствующем пространстве постоянной кривизны. Расстояние ρ в метрике соответствующего пространства постоянной кривизны от начала координат до точки с евклидовым расстоянием r равно

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{K}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{K}}{2} r, & K > 0, \\ \frac{2}{\sqrt{-K}} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{-K}}{2} r, & K < 0. \end{cases}$$

Поскольку $h_E(x) < r$, то, выражая r через ρ , получим оценку сверху для S (если $K > 0$):

$$S \leq \int_M \cos^{-4n} \left(\frac{\sqrt{K}}{2} \rho \right) \left(\sum_{\alpha=1}^n k_\alpha^2 + 2n \sqrt{K} |H| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{K}}{2} \rho + K n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\sqrt{K}}{2} \rho \right) dV,$$

где H — средняя кривизна M в соответствующем сферическом пространстве. Вернемся к неравенству (5). Имеем

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M (\xi^i \Phi^{n-1})^2 dV = \int_M \Phi^{2n} dV = \int_M \cos^{-4n} \left(\frac{\sqrt{K}}{2} \rho \right) dV.$$

Таким образом, имеется возможность оценить первое собственное значение оператора Лапласа ориентируемой гиперповерхности сферического пространства через внешнегеометрические величины.

Теорема 1. Пусть M — компактная ориентируемая гиперповерхность сферического пространства кривизны $K > 0$. Тогда

имеет место неравенство для первого собственного значения оператора Лапласа $\lambda_1(M)$:

$$\lambda_1(M) \leq \left\{ \int_M \cos^{-4n} \left(\frac{\sqrt{-K}}{2} \rho \right) dV \right\}^{-1} \int_M \cos^{-4n} \left(\frac{\sqrt{-K}}{2} \rho \right) \times \\ \times \left(\sum_{a=1}^n k_a^2 + 2n \sqrt{-K} |H| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{-K}}{2} \rho + Kn^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\sqrt{-K}}{2} \rho \right) dV, \quad (9)$$

где ρ — расстояние от некоторой фиксированной точки пространства до точки, принадлежащей M ; $n = \dim M$; k_a — главные нормальные кривизны M ; H — средняя кривизна M ; dV — элемент риманова объема M . Аналогичную оценку можно получить для гиперповерхности пространства Лобачевского.

Теорема 2. Пусть M компактная ориентируемая гиперповерхность пространства Лобачевского кривизны $K < 0$. Тогда в обозначениях теоремы 1

$$\lambda_1(M) \leq \left\{ \int_M \operatorname{ch}^{-4n} \left(\frac{\sqrt{-K}}{2} \rho \right) dV \right\}^{-1} \int_M \operatorname{ch}^{-4n} \left(\frac{\sqrt{-K}}{2} \rho \right) \times \\ \times \left(\sum_{a=1}^n k_a^2 + 2n \sqrt{-K} |H| \operatorname{th} \frac{\sqrt{-K}}{2} \rho - Kn^2 \operatorname{th}^2 \frac{\sqrt{-K}}{2} \rho \right) dV.$$

В качестве примера рассмотрим случай $\dim M = 1$, т. е. замкнутую кривую на сфере. Покажем, что если $M = S$ — геодезическая окружность радиуса $\rho < \pi/2\sqrt{-K}$, то неравенство (9) переходит в равенство. Пусть, для удобства, $K = 1$. Тогда $k_a = |H| = k_g$ — геодезическая кривизна окружности радиуса ρ на сфере с линейным элементом $ds^2 = d\rho^2 + \sin^2 \rho d\varphi^2$. Известная формула $k_g = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln G}{\partial \rho}$ дает $k_g = \operatorname{ctg} \rho$. Поэтому правая часть (9) сводится к

$$k_g^2 + 2k_g \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\rho}{2} = \left(\operatorname{ctg} \rho + \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \rho}.$$

С другой стороны, спектр оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ на замкнутой кривой длины L есть последовательность чисел $4\pi^2 m^2 L^{-2}$, $m \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\lambda_1(S) = 4\pi^2 L^{-2} = \sin^{-2} \rho.$$

Таким образом, на геодезической окружности сферы в (9) имеем точное равенство.

В случае, когда M — центрально-симметричная поверхность сферического или пространства Лобачевского, мы получаем более точное неравенство. Поместим начало координат в центр симметрии и возьмем в неравенстве (5) функции $\varphi = \xi^i \Phi^{-1}$ ($i = 1, \dots, n+1$). При суммировании по i левая часть (5) легко вычисляется:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M (\xi^i \Phi^{-1})^2 dV = \operatorname{vol}(M).$$

Изчисление правой части проводится подобно тому, как в доказательстве теоремы 1. Обозначим правую часть через S_1 и приведем окончательный результат:

$$S_1 = \int_M \left(\sum_{a=1}^n k_a^2 - K \left(\sum k_a \right) h_E(x) + \frac{nK^2}{4} h_E^2(x) \right) dV.$$

Воспользовавшись неравенством $h_E(x) \leq r$, получаем оценку сверху для $\lambda_1(M)$, когда M — центрально-симметричная гиперповерхность сферического пространства.

Теорема 3. Пусть M — центрально-симметричная компактная ориентируемая гиперповерхность сферического пространства. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) \leq (\text{vol}(M))^{-1} \int_M \left(\sum_{a=1}^n k_a^2 + 2\sqrt{K} n |H| \operatorname{tg} \frac{\sqrt{K}}{2} \rho + \right. \\ \left. + nK \operatorname{tg}^2 \frac{\sqrt{K}}{2} \rho \right) dV. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичная оценка имеет место, если M — гиперповерхность пространства Лобачевского. Для этого надо заменить в неравенстве (10) K на $-K$, а tg на th . Заметим, что если M — гиперсфера, то в (10) имеет место равенство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Масальцев Л. А. О первом собственном значении лапласиана компактной ориентируемой гиперповерхности евклидова пространства. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 19, Харьков, 1976, с. 104—108.
2. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М., Гостехиздат, 1948. 240 с.

Поступила 20 сентября 1976 г.

**ПРИНЦИП МИНИМУМА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛАПЛАСИАНА
ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

1. Введение

Пусть M — связное компактное ориентируемое риманово многообразие класса C^∞ . Оператор Лапласа $\Delta = d\delta + \delta d$, действующий в пространстве Λ^p гладких внешних дифференциальных форм степени p ($0 < p \leq n$) на многообразии M , расширяется до самосопряженного оператора с дискретным спектром [1, 7]

$$\text{Spec}_p \Delta = \{0 < \lambda_1^p \leq \dots \leq \lambda_n^p \leq \dots \rightarrow +\infty\}.$$

В данной статье используется принцип минимума для мажорирования первого положительного собственного значения λ_1^p оператора Δ в случае, когда M — связная компактная ориентируемая гиперповерхность без края евклидова пространства R^{n+1} . Основной результат состоит в следующем (теоремы 4.3, 4.6. Следствие 4.7).

Пусть M — гладкая компактная связная ориентируемая гиперповерхность евклидова пространства R^{n+1} . Пусть λ_1^p первое положительное собственное значение оператора Лапласа, действующего на p -формах гиперповерхности M . Тогда для

$$1 < p \leq \left[\frac{n}{2} \right]$$

$$\lambda_1^p = \lambda_1^{n-p} \leq p - \frac{\int_M \left\{ (n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 + (n-p) \sum_{i+j} k_i k_j \right\} dV}{n(n-1) \text{vol}(M)},$$

где $\text{vol}(M)$ — риманов объем M ; k_i — i -я главная нормальная

кривизна M ; $\left[\frac{n}{2}\right]$ — целая часть $\frac{n}{2}$, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда M — гиперсфера (в этом случае $\lambda_1^p = p(n-p+1) \frac{1}{R^2}$, где R — радиус гиперсферы, см. (1.2)).

Известно [1], что для компактных ориентируемых многообразий размерности n имеет место двойственность Пуанкаре, т. е. $\text{Spec}_p \Delta = \text{Spec}_{n-p} \Delta$ (поскольку операторы Лапласа и Ходжа коммутируют). Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением случая $p \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Недавно С. Галло и Д. Майер [8] оценили снизу первое положительное собственное значение λ_1^p . Их результат состоит в следующем. Определим симметрический эндоморфизм ρ_m кокасательного пространства $\Lambda_2 T_m^*(M)$ внешних 2-форм в точке $m \in M$ по формуле

$$\langle \rho_m(x^* \wedge y^*), (u^* \wedge v^*) \rangle = \langle R(x, y)v, u \rangle, \quad x, y, u, v \in T_m(M),$$

где R — тензор Римана пространства M . Скажем, что $\rho \geq C$, если для всех $m \in M$, и всех $u \in \Lambda_2 T_m^*(M)$ имеем

$$\langle \rho_m(u), u \rangle \geq C |u|^2.$$

Тогда, если $\rho \geq C > 0$, то для всех p , $1 \leq p \leq n$ справедлива оценка

$$\lambda_1^p \geq \min\{Cp(n-p+1), C(p+1)(n-p)\}. \quad (1.1)$$

В этой же статье по идеи, предложенной Е. Калаби, вычислен спектр лапласиана, действующего на p -формах для единичной евклидовой гиперсферы $S^n \subset R^{n+1}$:

$$\text{Spec}_p \Delta = \left\{ \frac{(k+p)(n-p+k+1)}{(k+n-p)(p+k+1)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \right\}. \quad (1.2)$$

Таким образом, из (1.2) или (1.1) следует, что доказываемое в данной статье неравенство точное.

2. Принцип минимума

Пусть M n -мерное риманово компактное ориентируемое многообразие класса C^∞ без края. В пространстве $\Lambda^p (0 \leq p \leq n)$ гладких внешних дифференциальных p -форм на M рассмотрим две нормы:

$$\|\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle = \int_M (\varphi, \varphi)_x dV,$$

$$\|\varphi\|_1^2 = \|\varphi\|^2 + \|d\varphi\|^2 + \|\delta\varphi\|^2, \quad \varphi \in \Lambda^p.$$

Подробности по поводу определения скалярного произведения в пространстве внешних форм над полем действительных чисел можно найти у Чжэня [6, с. 15] или де Рама [3, с. 164].

Обозначим, соответственно, через L_2^p и $W_2^{1,p}$ пополнения Λ^p в этих нормах до гильбертовых пространств. Известно, что задача о собственные значения

$$\Delta u = \lambda u, \quad u \in W_2^{1,p}$$

имеет дискретное множество собственных значений

$$0 = \lambda_0^p < \dots < \lambda_1^p < \dots ,$$

стремящихся к $+\infty$, а соответствующие им собственные формы φ_k образуют ортонормированный базис в L_2^p и базис в $W_2^{1,p}$, ортогональный по отношению к действующему там скалярному произведению [1].

Лемма 2.1. (Принцип минимума). Первое собственное значение λ_1^p , не равное нулю, есть

$$\lambda_1^p = \inf_{\omega \in H_p^\perp - \{0\}} \frac{\|\delta\omega\|^2 + \|d\omega\|^2}{\|\omega\|^2},$$

где H_p^\perp — ортогональное дополнение пространства гармонических p -форм H_p в $W_2^{1,p}$.

Доказательство. Пусть $a_{k\alpha}$ — проекция ω на $\varphi_{k\alpha}$:

$$a_{k\alpha} = \langle \omega, \varphi_{k\alpha} \rangle, \quad \Delta \varphi_{k\alpha} = \lambda_k^p \varphi_{k\alpha}.$$

Тогда (индекс α учитывает размерность подпространства собственных форм, отвечающих общему значению λ_k^p)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|d\omega - \sum_{k>0} a_{k\alpha} d\varphi_{k\alpha}\|^2 + \|\delta\omega - \sum_{k>0} a_{k\alpha} \delta\varphi_{k\alpha}\|^2 = \\ &= \|d\omega\|^2 - 2 \sum_{k>0} a_{k\alpha} \langle d\omega, d\varphi_{k\alpha} \rangle + \sum_{k>0} a_{k\alpha}^2 \|d\varphi_{k\alpha}\|^2 + \\ &+ \|\delta\omega\|^2 - 2 \sum_{k>0} a_{k\alpha} \langle \delta\omega, \delta\varphi_{k\alpha} \rangle + \sum_{k>0} a_{k\alpha}^2 \|\delta\varphi_{k\alpha}\|^2 = \\ &= \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 - 2 \sum_{k>0} a_{k\alpha} \langle \omega, \Delta \varphi_{k\alpha} \rangle + \\ &+ \sum_{k>0} a_{k\alpha}^2 \langle \varphi_{k\alpha}, \Delta \varphi_{k\alpha} \rangle = \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 - 2 \sum_{k>1} a_{k\alpha} \langle \omega, \varphi_{k\alpha} \rangle \lambda_k^p + \\ &+ \sum_{k>1} a_{k\alpha}^2 \langle \varphi_{k\alpha}, \varphi_{k\alpha} \rangle \lambda_k^p = \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 - \sum_{k>1} a_{k\alpha}^2 \lambda_k^p. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 \geq \sum_{k>1} \lambda_k^p a_{k\alpha}^2 \geq \lambda_1^p \sum_{k>1} a_{k\alpha}^2.$$

Поскольку $\varphi_{k\alpha}$ образуют ортогональный базис $W_2^{1,p}$ и $a_{0\alpha} = \langle \omega, \varphi_{0\alpha} \rangle$, соответствующие $\lambda_0^p = 0$, равны нулю, то

$$\sum_{k>1} a_{k\alpha}^2 = \|\omega\|^2.$$

Поэтому

$$\|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 \geq \lambda_1^p \|\omega\|^2, \quad \omega \in H_p^\perp.$$

Ясно, что равенство достигается только на собственных формах, отвечающих λ_1^p .

Замечание 2.1. В случае $p = 0$ получается известный вариационный принцип [7]

$$\lambda_1 = \inf \|df\|^2 / \|f\|^2, \quad f \in H_0^\perp - \{0\}.$$

Поскольку H_0 состоит из константы, то условие $f \in H_0^\perp$ эквивалентно тому, что $\int_M f dV = 0$.

Замечание 2.2. Подпространство H_p конечномерно

$$H_p = \ker d / \text{Im } d$$

(теорема Ходжа). Его размерность равна p -му числу Бетти многообразия M . Поэтому, например, для многообразий, гомеоморфных n -мерной сфере, принцип минимума выглядит особенно просто: $H_p^\perp = W_2^{1,p}$, ($1 \leq p \leq n-1$).

3. Применение к спектру 1-форм гиперповерхностей евклидова пространства

Пусть M — гладкая гиперповерхность евклидова пространства с метрикой, индуцированной изометрическим погружением $i: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Положим $\omega^{k_1 \dots k_p} = i^*(dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p})$, где i^* — индуцированное отображение кокасательных пространств в точке $m \in M$, $\{x^k\}$ — декартовы координаты евклидова пространства \mathbb{R}^{n+1} .

Лемма 3.1. Формы $\omega^{k_1 \dots k_p} \in T_m^*(M)$ точны.

Утверждение следует из точности форм-прообразов и инвариантности оператора внешнего дифференцирования относительно дифференцируемых отображений [5, с. 112].

Напомним теперь, что в пространстве L_2^p имеет место разложение Ходжа в прямую сумму подпространств

$$L_2^p = H_p \oplus \overline{\text{Im } d} \oplus \overline{\text{Im } \delta},$$

где $\overline{\text{Im } d}$ есть замыкание пространства гладких точных p -форм в метрике L_2^p , а $\overline{\text{Im } \delta}$ — замыкание пространства форм вида $\delta \omega$. Если погружение i достаточно гладкое, то формы $\omega^{k_1 \dots k_p} \in W_2^{1,p}(M)$, и из разложения Ходжа следует, что их можно использовать в качестве мажорант в принципе минимума. Таким образом, мы приходим к следующему основному неравенству, с помощью которого будет получена теорема:

$$\lambda_1^p \|\omega^{k_1 \dots k_p}\|^2 \leq \|\delta \omega^{k_1 \dots k_p}\|^2. \quad (3.1)$$

Дальнейшее изложение ведется для случая 1-форм, формам более высокой степени посвящен следующий пункт.

Лемма 3.2. $\sum_{k=1}^{n+1} \|\delta \omega^k\|^2 = \int_M \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 dV.$

Доказательство. Предварительно напомним дифференциальные формулы для гиперповерхностей евклидова пространства [4, с. 580]:

$$\begin{aligned}\nabla_{\beta} \xi^s &= -a_{\beta}^{\alpha} x_{\alpha}^s, & (1 \leq s \leq n+1), \\ \nabla_{\beta} x_{\alpha}^s &= a_{\beta}^{\alpha} \xi^s,\end{aligned}\quad (3.2)$$

где a_{β}^{α} — второй фундаментальный тензор M ; ξ^s — компоненты вектора нормали. Пусть $\{u^{\alpha}\}$ ($1 \leq \alpha \leq n$) — локальные координаты на M , в них форма ω^k имеет вид [5, с. 99]

$$\omega^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^{\alpha}} du^{\alpha}.$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам ведется суммирование, условимся также частную производную $\frac{\partial x^k}{\partial u^{\alpha}}$ кратко обозначать через x_{α}^k . Вычисляя $\delta \omega^k$ согласно общей формуле [3, с. 171]

$$(\delta \omega)_{k_1 \dots k_p} = -\nabla^i \alpha_{ik_1 \dots k_p},$$

получим, применяя дифференциальную формулу,

$$\delta \omega^k = -\nabla^{\beta} x_{\beta}^k = -a_{\beta}^{\beta} \xi^k.$$

Следовательно,

$$\|\delta \omega^k\|^2 = \int_M (a_{\beta}^{\beta})^2 \xi^k dV;$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \|\delta \omega^k\|^2 = \int_M (a_{\beta}^{\beta})^2 \left(\sum_{k=1}^{n+1} \xi^k \right)^2 dV = \int_M \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 dV,$$

где k_i — i -я главная нормальная кривизна M .

Лемма 3.3. $\sum_{k=1}^{n+1} \|\omega^k\|^2 = n \operatorname{vol}(M).$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \|\omega^k\|^2 &= \sum_{k=1}^{n+1} \int_M x_{\alpha}^k x_{\beta}^k g^{\alpha\beta} dV = \\ &= \int_M \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_{\alpha}^k x_{\beta}^k \right) g^{\alpha\beta} dV = \int_M g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} dV = n \operatorname{vol}(M).\end{aligned}$$

Теперь из основного неравенства (3.1), лемм 3.2, 3.3 следует

Теорема 3.4.

$$\lambda_1^1 < \frac{\int_M \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 dV}{n \operatorname{vol}(M)}. \quad (3.3)$$

Следующая теорема дополняет только что полученный результат.

Теорема 3.5. Если ω^k ($1 \leq k \leq n+1$) собственные формы лапласиана M , отвечающие общему собственному значению $\lambda \neq 0$, то M — гиперсфера.

Доказательство. Имеем для $1 \leq k \leq n+1$,

$$\Delta\omega^k = \lambda\omega^k.$$

Расписывая это равенство по компонентам в кокасательном пространстве в точке m , получим [3, с. 174]

$$(\Delta\omega^k)_a = -\nabla^\beta\nabla_\beta x_a^k - R_{\gamma\alpha}^\beta x_\beta^k = \lambda x_a^k,$$

где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Римана гиперповерхности M . Используя уравнения Гаусса и Кодицци для гиперповерхности евклидова пространства [4, с. 584]

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\gamma\delta}a_{\alpha\alpha} - a_{\gamma\alpha}a_{\delta\alpha}, \quad (3.4)$$

$$\nabla_\lambda a_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha a_{\lambda\beta} \quad (3.5)$$

и деривационные формулы (3.2), получим

$$\begin{aligned} (\Delta\omega^k)_a &= -\nabla^\beta(a_{\beta\alpha}\xi^k) - (a_{\gamma\alpha}^\beta - a_{\alpha\alpha}^\beta a_{\gamma}^\gamma) x_\beta^k = \\ &= -\nabla^\beta(a_{\beta\alpha})\xi^k + a_{\beta\alpha}a_{\gamma\beta}^\gamma x_\gamma^k - a_{\gamma\alpha}^\beta a_{\gamma\beta}^\gamma x_\beta^k + a_{\alpha\alpha}^\beta a_{\gamma}^\gamma x_\beta^k = \\ &= -\nabla_\alpha(a_{\beta\alpha}^\beta)\xi^k + a_{\alpha\alpha}^\beta a_{\gamma}^\gamma x_\beta^k = \lambda x_a^k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Умножая это равенство на ξ^k и суммируя по k от 1 до $n+1$, получим $\nabla_\alpha(a_{\beta\alpha}^\beta) = 0$.

Отсюда следует, что средняя кривизна гиперповерхности постоянна:

$$a_{\beta\alpha}^\beta = nH = \text{const.}$$

Следовательно, равенство (3.6) принимает вид

$$a_{\alpha\alpha}^\beta x_\beta^k = \frac{\lambda}{nH} x_\alpha^k. \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.7) выражает тот факт, что вектор $(x_1^k, \dots, x_n^k) = x^k \in T_m(M)$ является собственным вектором тензора второй фундаментальной формы в точке $m \in M$. Поскольку ранг матрицы $\{x_\alpha^k\}$ равен n , то размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению $\frac{\lambda}{nH}$, равна n . Поэтому у второй фундаментальной формы $a_{\alpha\beta}$ все собственные значения совпадают и равны $\frac{\lambda}{nH}$, поэтому точка m омбилическая. По теореме 5.1 [9, с. 30] M — гиперсфера.

Следствие 3.6. Равенство в (3.3) возможно тогда и только тогда, когда M — гиперсфера.

1. Если M — гиперсфера, то $\lambda_1^1 = n/R^2$, где R — радиус гиперсферы (см. введение).

2. Обратно, равенство в (3.3) влечет равенство в (3.1) ($p = 1$), из которого в свою очередь следует, что ω^k — собственные формы лапласиана M , отвечающие общему собственному значению. По теореме 3.5 M — гиперсфера.

4. Общий случай ($1 \leq p \leq n$)

На протяжении этого пункта мы будем постоянно пользоваться соотношением

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_\alpha^k x_\beta^k = g_{\alpha\beta},$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор M ; $\{x^k\}$ — декартовы координаты в R^{n+1} . Введем также мультииндекс $(k) = (k_1, \dots, k_p)$, где $1 \leq k_i \leq n+1$.

Лемма 4.1.

$$\sum_{(k)} \| \omega^{(k)} \|^2 = n(n-1) \dots (n-p+1) \operatorname{vol}(M).$$

Доказательство. Напомним, что по определению (см. пункт 3) ω^k есть

$$\omega^{(k)} = \sum_{(j_1 < \dots < j_p)} \frac{\partial(x^{k_1} \dots x^{k_p})}{\partial(u^{j_1} \dots u^{j_p})} du^{j_1} \wedge \dots \wedge du^{j_p}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{(k)} \| \omega^{(k)} \|^2 &= \sum_{(k)} \int_M \frac{1}{p!} \sum_{(\beta)} \frac{\partial(x^{k_1} \dots x^{k_p})}{\partial(u^{l_1} \dots u^{l_p})} \times \\ &\quad \times \frac{\partial(x^{k_1} \dots x^{k_p})}{\partial(u^{l_1} \dots u^{l_p})} g_{l_1 l_1} \dots g_{l_p l_p} dV. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выполним сначала суммирование по (k) произведения якобианов, обозначив полученную сумму через A :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(k)} \frac{\partial(x^{k_1} \dots x^{k_p})}{\partial(u^{l_1} \dots u^{l_p})} \cdot \frac{\partial(x^{k_1} \dots x^{k_p})}{\partial(u^{l_1} \dots u^{l_p})} = \\ &= \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} x_{\alpha_1}^{k_1} \dots x_{\alpha_p}^{k_p} (-1)^{\operatorname{sgn} \tau} x_{\beta_1}^{k_1} \dots x_{\beta_p}^{k_p} = \\ &= \sum_{(\alpha) (\beta)} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn} \tau} g_{\alpha_1 \beta_1} \dots g_{\alpha_p \beta_p}, \end{aligned}$$

где подстановки σ и τ имеют вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p \\ \beta_1 & \dots & \beta_p \end{pmatrix}$$

и суммирование по (α) и (β) означает суммирование по всем перестановкам из фиксированных наборов $(j_1 \dots j_p)$ и $(l_1 \dots l_p)$ соответственно. Для того чтобы упростить это выражение, фиксируем перестановку (α) и проведем суммирование по всем (β) :

$$\sum_{(\beta)} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn} \tau} g_{\alpha_1 \beta_1} \dots g_{\alpha_p \beta_p} = \sum_{(\gamma)} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn} \tau} g_{j_1 \gamma_1} \dots g_{j_p \gamma_p}.$$

Легко понять, что $\gamma = \sigma^{-1} \circ \tau$. Поскольку $\operatorname{sgn} \gamma = \operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn} \tau$, то последнюю сумму можно переписать так:

$$\sum_{(\gamma)} (-1)^{\operatorname{sgn} \tau} g_{j_1 \gamma_1} \dots g_{j_p \gamma_p} = \det \| g_{j_\nu \gamma_\mu} \|, \quad \nu, \mu = 1, \dots, p,$$

где ν и μ — номера строк и столбцов соответственно. Поэтому просуммировав еще по (α) , получим

$$A = p! \det \|g_{j,\ell_\mu}\|.$$

Выражение

$$\sum_{(j)(l)} \det \|g_{j,\ell_\mu}\| g^{j_1 \ell_1} \dots g^{j_p \ell_p}$$

удобно вычислять в карте, где $g_{\alpha\beta}(0) = g^{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$. Оно равно $\sum_{\substack{(j_1 \dots j_p) \\ j_i \neq j_k}} 1$ — числу выборок по p элементов из n без возвращения $= n(n-1) \dots (n-p+1)$. Подставляя это в (4.1), получим требуемое утверждение.

Лемма 4.2.

$$\sum_{(k)} \|\delta\omega^{(k)}\|^2 = c_p \int_M \left\{ \sum_{i=1}^n k_i^2 (n-1) + \sum_{i+j} k_i k_j (n-p) \right\} dV,$$

где $k_i (1 \leq i \leq n)$ — главные нормальные кривизны M ,

$$c_p = \begin{cases} p(n-2) \dots (n-p+1), & \text{для } p \geq 3, \\ 2, & \text{для } p = 2, \\ (n-1)^{-1}, & \text{для } p = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем [3, с. 171]

$$\begin{aligned} (\delta\omega^{(k)})_{j_1 \dots j_{p-1}} &= - \sum_{i=1}^n \nabla^i \omega_{i j_1 \dots j_{p-1}}^{k_1 k_2 \dots k_p} = - \sum_{i=1}^n \nabla^i \frac{\partial (x^{k_1} \dots x^{k_p})}{\partial (u_i, u_{j_1} \dots u_{j_{p-1}})} = \\ &= - \sum_{i=1}^n \nabla^i \left[\sum_{(\alpha)} (-1)^{\operatorname{sgn} \alpha} x_{\alpha_1}^{k_1} \dots x_{\alpha_p}^{k_p} \right] = - \sum_{i=1}^n \sum_{(\alpha)} (-1)^{\operatorname{sgn} \alpha} \times \\ &\quad \times [a_{\alpha_1}^i \xi^{k_1} x_{\alpha_2}^{k_2} \dots x_{\alpha_p}^{k_p} + \dots + x_{\alpha_1}^{k_1} \dots a_{\alpha_p}^i \xi^{k_p}], \end{aligned}$$

где

$$\sigma = \binom{i \ j_1 \dots j_{p-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(k)} \|\delta\omega^{(k)}\|^2 &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{(k)} \int_M \sum_{(j)(l)} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{(\alpha)} (-1)^{\operatorname{sgn} \alpha} \times \right. \\ &\quad \times [a_{\alpha_1}^i \xi^{k_1} x_{\alpha_2}^{k_2} \dots x_{\alpha_p}^{k_p} + \dots + x_{\alpha_1}^{k_1} \dots a_{\alpha_p}^i \xi^{k_p}] \Big\} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{(\beta)} (-1)^{\operatorname{sgn} \beta} [a_{\beta_1}^i \xi^{k_1} x_{\beta_2}^{k_2} \dots x_{\beta_p}^{k_p} + \dots + x_{\beta_1}^{k_1} \dots a_{\beta_p}^i \xi^{k_p}] \right\} \times \\ &\quad \times g^{j_1 l_1} \dots g^{j_p l_{p-1}} dV, \end{aligned}$$

т.е. $(j) = (j_1, \dots, j_{p-1})$, $(l) = (l_1, \dots, l_{p-1})$,

$$\tau = \begin{pmatrix} t & l_1 & \dots & l_{p-1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p \end{pmatrix}.$$

Как и при доказательстве леммы 4.1, выполним сначала суммирование по (k) . Учитывая, что $\sum_{k=1}^{n+1} \xi^{k^2} = 1$, $\sum_{k=1}^{n+1} \xi^k \chi_k^k = 0$, получим

$$\sum_{(k)} \| \delta_{\omega^{(k)}} \|^2 = \int_M \frac{1}{(p-1)!} \sum_{(j)(l)} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{(\alpha)(\beta)} a_{\alpha}^i a_{\beta}^t \times \right. \\ \left. \times g_{\alpha_2 \beta_2} \dots g_{\alpha_p \beta_p} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn} \tau} + \dots \right\} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_{p-1} l_{p-1}} dV.$$

В фигурных скобках кроме выписанного члена есть еще $p-1$ членов такого же типа. Легко понять, что при свертывании каждого из них по индексам (j) , (l) мы получим одинаковую величину. Поэтому

$$\sum_{(k)} \| \delta_{\omega^{(k)}} \|^2 = \int_M \frac{p}{(p-1)!} \sum_{(j)(l)} \left\{ \sum_{i, t=1}^n \sum_{(\alpha)(\beta)} a_{\alpha}^i a_{\beta}^t \times \right. \\ \left. \times g_{\alpha_2 \beta_2} \dots g_{\alpha_p \beta_p} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn} \tau} \right\} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_{p-1} l_{p-1}} dV.$$

Подынтегральное выражение удобно вычислять в виде трех сумм $S_1 + S_2 + S_3$, где S_1 есть сумма по всем перестановкам (α) , (β) таким, что $\alpha_1 = i$, $\beta_1 = t$; S_2 есть сумма по перестановкам вида $\alpha_1 = i$, $\beta_1 \neq t$ и $\alpha_1 \neq i$, $\beta_1 = t$; и, наконец, S_3 — сумма по перестановкам, у которых $\alpha_1 \neq i$, $\beta_1 \neq t$. Каждую сумму считаем отдельно.

4.2.1. Вычисление S_1 . В этом случае подстановки σ и τ имеют

вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} i & j_1 & \dots & j_{p-1} \\ i & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} t & l_1 & \dots & l_{p-1} \\ t & \beta_2 & \dots & \beta_p \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение подстановки

$$\sigma' = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{p-1} \\ \alpha_2 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \tau' = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_{p-1} \\ \beta_2 & \dots & \beta_p \end{pmatrix}.$$

Очевидно, имеем $\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma'$, $\operatorname{sgn} \tau = \operatorname{sgn} \tau'$. Поэтому, действуя, как при доказательстве леммы 4.1, получим

$$S_1 = \frac{p}{(p-1)!} \sum_{(j)(l)} \left\{ \sum_{i, t=1}^n a_i^i a_t^t \sum_{(\alpha)(\beta)} g_{\alpha_2 \beta_2} \dots g_{\alpha_p \beta_p} \times \right. \\ \left. \times (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma' + \operatorname{sgn} \tau'} \right\} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_{p-1} l_{p-1}} =$$

$$= p \left(\sum_{i=1}^n a_i^i \right)^2 \sum_{(j)(l)} \det \| g_{j_i l_j} \|_{p-1}^{p-1} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_{p-1} l_{p-1}} =$$

$$= p \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 n(n-1) \dots (n-p+2).$$

4.2.2. Вычисление S_2 . Сразу отметим, что поскольку сумма по перестановкам вида $\alpha_1 \neq i, \beta_1 = t$ равна сумме по перестановкам вида $\alpha_1 = i, \beta_1 \neq t$, то достаточно вычислить одну из этих сумм. Пусть $\alpha_1 = i, \beta_1 = l_s \neq t$. Подстановки σ и τ имеют вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} i & j_1 & \dots & j_{p-1} \\ & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} t & l_1 & \dots & l_s & \dots & l_{p-1} \\ l_s & \beta_2 & \dots & \beta_{s+1} & \dots & \beta_p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подстановки σ'' и τ'' :

$$\sigma'' = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{p-1} \\ \alpha_2 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \tau'' = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & t & l_{s+1} & \dots & l_{p-1} \\ \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{s+1} & \beta_{s+2} & \dots & \beta_p \end{pmatrix}.$$

Очевидно, имеем $\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma'', \operatorname{sgn} \tau = -\operatorname{sgn} \tau''$, так как подстановка τ'' получается из τ одной транспозицией и последующим ограничением на множестве элементов, отличных от l_s . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_2 &= \frac{p}{(p-1)!} \sum_{(j)} \left(\sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^{p-1} a'_i a^t_{l_s} \sum_{(\alpha)} g_{\alpha_2 \beta_2} \dots g_{\alpha_p \beta_p} \times \right. \\ &\quad \times \left. (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma'' + \operatorname{sgn} \tau'' - 1} \right) g^{j_1 l_1} \dots g^{j_{p-1} l_{p-1}} = \\ &= \frac{p}{(p-1)!} \sum_{(j)} \sum_{(l)} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^{p-1} a'_i a^t_{l_s} [-(p-1)!] \times \\ &\quad \times \begin{vmatrix} g_{j_1 l_1} & \dots & g_{j_1 t} & \dots & g_{j_1 l_{p-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{l_{p-1} l_1} & \dots & g_{l_{p-1} t} & \dots & g_{l_{p-1} l_{p-1}} \end{vmatrix} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_{p-1} l_{p-1}}. \end{aligned}$$

Этот инвариант удобно вычислять в главных осях, т. е. в координатах, где $g_{ij} = \delta_{ij}, a_{ij} = k_i \cdot \delta_{ij}$. Тогда легко видеть, что 1) суммирование по $(j), (l)$ надо ограничить только на совпадающие наборы $(j) = (l)$; 2) суммирование по (j) нужно проводить с дополнительным условием $j_q \neq j_r$, так как, если $j_q = j_r$, то строки у определителей совпадают и равны нулю. С учетом этих замечаний имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_2 &= -p \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) \sum_{\substack{(j_1 \dots j_{p-1}) \\ j_q \neq j_r}} (a_{i_1 j_1} + \dots + a_{i_{p-1} j_{p-1}}) = \\ &= -p \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) \sum_{\substack{(j_1 \dots j_{p-1}) \\ j_q + j_r}} (k_{j_1} + \dots + k_{j_{p-1}}). \end{aligned}$$

Эту сумму можно вычислить, посчитав, сколько раз 1 входит в наборы $(j_1, \dots, j_{p-1}), j_r \neq j_q, 1 \leq j_r \leq n$. Поскольку наборы не

порядочены, то 1 может оказаться на любом из $p - 1$ мест. При этом к ней следует добавить из $n - 1$ оставшихся чисел $p - 2$, если $p \geq 3$. Это можно сделать $(n - 1) \dots (n - 1 - (p - 2) + 1) = (n - 1) \dots (n - p + 2)$ количеством способов. Итак,

$$\frac{1}{2} S_2 = \begin{cases} -p(p-1)(n-1)\dots(n-p+2)\left(\sum_{i=1}^n k_i\right)^2, & p \geq 3, \\ -2\left(\sum_{i=1}^n k_i\right)^2, & p = 2. \end{cases}$$

4.2.3. Вычисление S_3 . Если $p = 2$, то

$$S_3 = 2 \sum_{j, l=1}^n \sum_{t, \ell=1}^n a_j^t a_l^t g_{jt} g_{lt} = 2 \sum_{i=1}^n k_i^2.$$

Если $p \geq 3$, то допустим, что $\alpha_1 = j_s$, $\beta_1 = l_r$ ($1 \leq s, r \leq p - 1$). Тогда подстановки σ и τ имеют вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} i & j_1 & \dots & j_{p-1} \\ j_s & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} t & l_1 & \dots & l_{p-1} \\ l_r & \beta_2 & \dots & \beta_p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подстановки

$$\sigma' = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & i & j_{s+1} & \dots & j_{p-1} \\ \alpha_2 & \dots & \alpha_{s+1} & \alpha_{s+2} & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \tau' = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & t & l_{r+1} & \dots & l_{p-1} \\ \beta_2 & \dots & \beta_{r+1} & \beta_{r+2} & \dots & \beta_p \end{pmatrix}.$$

Аналогично тому, как в пункте 4.2.2,

$$\operatorname{sgn} \sigma = -\operatorname{sgn} \sigma', \quad \operatorname{sgn} \tau = -\operatorname{sgn} \tau'.$$

Поэтому для фиксированных s, r имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{(\alpha) (\beta)} g_{\alpha_2 \beta_2} \dots g_{\alpha_p \beta_p} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn} \tau} = \\ & = \sum_{(\alpha) (\beta)} g_{\alpha_2 \beta_2} \dots g_{\alpha_p \beta_p} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma' + \operatorname{sgn} \tau'} = (p-1)! \Delta_s^r, \end{aligned}$$

где через Δ_s^r обозначен определитель матрицы, получаемой из матрицы $\|g_{j_s l_\mu}\|$, $\nu, \mu = 1, \dots, p-1$ заменой в r -м столбце индекса l_r на t и в s -й строке индекса j_s на i . Поэтому в главных осях для S_3 получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} S_3 & = p \sum_{(j)} \sum_{(t)} \sum_{i, t=1}^n \sum_{s, r=1}^{p-1} a_{j_s}^i a_{l_r}^t \Delta_s^r g_{j_1 l_1} \dots g_{j_{p-1} l_{p-1}} = \\ & = p \sum_{(j)} \sum_{s, r=1}^{p-1} \begin{vmatrix} \delta_{j_1 l_1} & \dots & a_{j_1 l_r} & \dots & \delta_{j_1 l_{p-1}} \\ a_{j_s l_1} & \dots & \sum_{t=1}^n a_{j_s t} a_{l_r}^t & \dots & g_{j_s l_{p-1}} \\ \delta_{j_{p-1} l_1} & \dots & a_{j_{p-1} l_r} & \dots & \delta_{j_{p-1} l_{p-1}} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что 1) если хотя бы два из индексов j_q совпадают, то соответствующий определитель равен нулю; 2) если все индексы j_q различны и $r \neq s$, то соответствующий определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & * & & \\ * & & & \\ & k_{j_r} & & \\ & & & \\ & & k_{j_s} & \\ & & & \\ * & & & 1 \end{vmatrix},$$

где все элементы на диагонали, кроме двух, равны 1, а звездочкой обозначены нулевые внедиагональные элементы; 3) если все индексы j_q различны и $r = s$, то соответствующий определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & * & & \\ * & & & \\ & k_{j_r} & k_{j_s} & \\ & & & \\ & & & \\ * & & & 1 \end{vmatrix}.$$

С учетом этих соображений получаем, что

$$S_3 = p \sum_{\substack{(j) \\ j_q \neq j_d}} \sum_{s, r=1}^{p-1} k_{j_r} k_{j_s}.$$

Поясним эту запись, чтобы избежать недоразумений. Здесь первое суммирование выполняется по всем наборам $(j) = (j_1, \dots, j_{p-1})$, где $j_q \neq j_d$, $1 < j_q < n$. Во второй сумме r может быть равно s , но для суммирования берутся индексы j_q из всех наборов (j) , по которым проводится первое суммирование. Используя те же соображения, что и в конце вычисления S_2 , получим для $p \geq 4$

$$S_3 = p \sum_{\substack{(j) \\ j_q \neq j_d}} \sum_{s, r=1}^{p-1} k_{j_r} k_{j_s} = p \sum_{\substack{(j) \\ j_q \neq j_d}} (k_{j_1} + \dots + k_{j_{p-1}})^2 =$$

$$= p \left\{ \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right) (p-1)(n-1) \dots (n-p+2) + \right. \\ \left. + \sum_{i+j} k_i k_j (p-1)(p-2)(n-2) \dots (n-p+2) \right\}.$$

Для $p = 3$ последний член в фигурной скобке не укладывается в общую формулу, поэтому приходится выписывать отдельную формулу:

$$S_3 = 4 \left((n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 + \sum_{i+j} k_i k_j \right), \quad (p=3).$$

Складывая вычисленные в пунктах 4.2.1 — 4.2.3 суммы, получаем при $p \geq 4$

$$S_1 + S_2 + S_3 = p \left\{ \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 n(n-1) \dots (n-p+2) - \right. \\ - 2 \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 (p-1)(n-1) \dots (n-p+2) + \\ + \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right) (p-1)(n-1) \dots (n-p+2) + \\ + \left. \sum_{i+j} k_i k_j (p-1)(p-2)(n-2) \dots (n-p+2) \right\} = \\ = p(n-2) \dots (n-p+1) \left\{ \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right) (n-1) + \sum_{i+j} k_i k_j (n-p) \right\}.$$

Непосредственно проверяется, что эта же формула верна и при $p = 3$. При $p = 2$ имеет место формула

$$S_1 + S_2 + S_3 = 2 \left((n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 + (n-2) \sum_{i+j} k_i k_j \right).$$

(Относительно случая $p = 1$ см. лемму 3.2). Доказательство леммы 4.2 закончено.

Теорема 4.3 Пусть M гладкая компактная связная ориентируемая гиперповерхность евклидова пространства R^{n+1} .

Пусть λ_1^p первое положительное собственное значение оператора Лапласа, действующего на p -формах гиперповерхности M .

Тогда для $1 < p \leq \left[\frac{n}{2} \right]$ имеем

$$\lambda_1^p = \lambda_1^{n-p} \leq p \frac{\int_M \left\{ (n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 + (n-p) \sum_{i+j} k_i k_j \right\} dV}{n(n-1) \operatorname{vol}(M)}, \quad (4.1)$$

где $\operatorname{vol}(M)$ — риманов объем M ; k_i — i -я главная нормальная кривизна M ; $\left[\frac{n}{2} \right]$ — целая часть $\frac{n}{2}$.

Доказательство следует из лемм 3.1, 4.1, 4.2 и двойственности Пуанкаре. Поскольку более сильное неравенство получается при $p < \left[\frac{n}{2} \right]$, то мы и ограничиваемся рассмотрением таких p .

Теорема 4.4. Пусть M удовлетворяет условиям теоремы 4.3. Тогда для первого положительного собственного значения оператора Лапласа гиперповерхности M , действующего на функциях, справедлива оценка

$$\lambda_1^0 = \lambda_1^n \leq \frac{\int_M \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right) dV}{\text{vol}(M)}. \quad (4.2)$$

Это неравенство получается при $p = n$ аналогично 4.1. Несколько иным способом оно было получено в [2]. Отметим довольно неожиданный факт, что при $p = n$ оценка 4.2 точная, в отличие от случая $\left[\frac{n}{2} \right] < p < n - 1$. Это доказано в [2].

Следствие 4.5. Пусть M удовлетворяет условиям теоремы 4.3, и нормальная кривизна во всех точках M неотрицательна и не превосходит k . Тогда для $1 < p \leq \left[\frac{n}{2} \right]$

$$\lambda_1^p = \lambda_1^{n-p} \leq p(n-p+1)k^2.$$

Для доказательства достаточно подставить $k_i \leq k$ в (4.1).

Следующая теорема обобщает теорему 3.5.

Теорема 4.6. Если $\omega^{(i)}$, $(i) = (i_1, \dots, i_p)$, $1 < i_q \leq n+1$ собственные формы лапласиана M , действующего на p -формах ($1 < p \leq \left[\frac{n}{2} \right]$), отвечающие общему собственному значению $\lambda \neq 0$ то M гиперсфера.

Доказательство. Пусть m — произвольная точка M . Посмотрим, что следует из системы уравнений в кокасательном пространстве $T_m^*(M)$

$$\Delta \omega^{(i)} = \lambda \omega^{(i)}. \quad (4.3)$$

Перепишем эти уравнения в главных осях в точке m , пользуясь известной формулой [3, с. 174]

$$(\Delta \omega^{i_1 \dots i_p})_{j_1 \dots j_p} = -\nabla^i \nabla_i \omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} + \\ + \sum_{v=1}^p (-1)^v R^{\mu}_{i_v j_v} \omega^{i_1 \dots i_{v-1} i_{v+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{v-1} j_{v+1} \dots j_p} + 2 \sum_{\mu < v} (-1)^{\mu+v} R^{\mu}_{i_v j_v} \omega^{i_1 \dots i_{v-1} i_{v+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{v-1} j_{v+1} \dots j_{\mu} \dots j_p}.$$

Нетрудно вычислить каждое из трех слагаемых, стоящих справа. Опуская промежуточные вычисления и обозначив через H среднюю кривизну M , получим

$$-\nabla^i \nabla_i \omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} = \left(\sum_{a=1}^p k_{j_a}^2 \right) \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha=1}^p \xi^{i_\alpha} \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_{\alpha}-1}, nH, x^{i_{\alpha}+1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})}, \\
& \sum_{v=1}^p (-1)^v R_{i_1 \dots i_v}^{ht} \omega_{ihj_1 \dots j_v \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = \\
& = - \sum_{v=1}^p k_{j_v} (k_{j_v} - nH) \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})}; \\
& 2 \sum_{\mu < v} (-1)^{\mu+v} R_{i_1 \dots i_v i_\mu}^{ht} \omega_{ihj_1 \dots j_\mu \dots j_v \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = \\
& = -2 \sum_{\mu < v} k_{j_v} k_{j_\mu} \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})}.
\end{aligned}$$

Следовательно, система уравнений (4.3) может быть записана таким образом:

$$\left\{ nH \left(\sum_{v=1}^p k_{j_v} \right) - 2 \sum_{\mu < v} k_{j_\mu} k_{j_v} \right\} \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})} - \\
- \sum_{\alpha=1}^p \xi^{i_\alpha} \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_{\alpha}-1}, nH, x^{i_{\alpha}+1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})} = \lambda \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})}, \quad (4.4)$$

где $1 \leq i_\alpha \leq n+1$, $1 \leq j_\alpha \leq n$. Умножая (4.4) на ξ^{i_α} и сворачивая по индексу i_α , получим

$$\frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_{\alpha}-1}, nH, x^{i_{\alpha}+1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})} = 0.$$

Отсюда по теореме Лапласа для определителей следует, что

$$\frac{\partial (H, x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-1}})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_n})} = 0.$$

Допустим теперь, что векторы $\nabla x^1 = (\nabla_1 x^1, \dots, \nabla_n x^1)$, $\nabla x^2, \dots, \nabla x^n$ линейно независимы, что всегда можно сделать, поскольку ранг матрицы $\{x_\alpha^l\}$, $1 \leq l \leq n+1$, $1 \leq \alpha \leq n$ равен n . Из предыдущего соотношения следует, что существуют постоянные c_1, \dots, c_{n-1} такие, что

$$\nabla H = c_1 \nabla x^1 + \dots + c_{n-2} \nabla x^{n-2} + c_{n-1} \nabla x^{n-1}. \quad (4.5)$$

Если $\nabla H \neq 0$, то можно считать, что $c_{n-1} \neq 0$. Аналогично, существуют постоянные b_1, \dots, b_{n-1} такие, что

$$\nabla H = b_1 \nabla x^1 + \dots + b_{n-2} \nabla x^{n-2} + b_{n-1} \nabla x^n. \quad (4.6)$$

Теперь из (4.5), (4.6) получаем, что векторы $\nabla x^1, \dots, \nabla x^{n-1}$, ∇x^n линейно зависимы, что противоречит предположению. Следо-

вательно, $\nabla H = 0$. Отсюда, используя связность и компактность M , заключаем, что $H = \text{const} > 0$. Следовательно, (4.4) можно переписать в таком виде:

$$\left\{ nH \left(\sum_{v=1}^p k_{j_v} \right) - 2 \sum_{\mu < v} k_{j_\mu} k_{j_v} \right\} \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})} = \lambda \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})}. \quad (4.7)$$

Поскольку ранг матрицы $\{x_j^i\}$ равен n , то для всякого мультииндекса $(j) = (j_1, \dots, j_p)$ найдется мультииндекс $(i) = (i_1, \dots, i_p)$, что соответствующий якобиан в (4.7) отличен от нуля. Поэтому из (4.7) следует, что для всех (j) , $j_\alpha \neq j_\beta$ имеем

$$nH \left(\sum_{v=1}^p k_{j_v} \right) - 2 \sum_{\mu < v} k_{j_\mu} k_{j_v} = \lambda. \quad (4.8)$$

Покажем, что из 4.8 и условий $H = \text{const} > 0$, $1 < p < \left[\frac{n}{2} \right]$ следует, что все главные кривизны в точке m равны между собой. Случай $p = 1$ рассмотрен в теореме 3.5. Пусть $p \geq 2$. Допустим, что существуют две неравные главные кривизны $k_1 \neq k_2$. Если записать (4.8) дважды для мультииндексов $(k_1, k_{j_1}, \dots, k_{j_{p-1}})$, $(k_2, k_{j_1}, \dots, k_{j_{p-1}})$ вычесть и сократить на $k_1 - k_2 \neq 0$, то получим

$$nH = 2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} k_{j_\alpha}, \quad j_\alpha \neq 1, 2. \quad (4.9)$$

Из (4.9) легко следует, что все главные кривизны, кроме k_1 , k_2 , равны между собой. Более того, одна из кривизн k_1 , k_2 совпадает с остальными, поскольку можно было бы повторить предыдущие рассуждения, взяв за исходные k_1 и третью, неравную им, кривизну. (Случай $n = 3$, $p = 2$ не подлежит рассмотрению, так как $p \leq \left[\frac{n}{2} \right]$). Следовательно, можно считать, что $k_1 \neq k_2 = k_3 = \dots = k_n$. Воспользуемся еще раз (4.9)

$$\begin{aligned} k_1 + (n-1)k_2 &= 2(p-1)k_2, \\ k_1 &= (2p-n-1)k_2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Следовательно,

$$nH = k_1 + (n-1)k_2 = 2(p-1)k_2 > 0$$

и получаем, что $k_2 > 0$. Теперь из (4.10) следует, что $k_1 < 0$, так как $p < \left[\frac{n}{2} \right]$. Но это противоречит наличию на M эллиптических точек. Поэтому все главные кривизны в точке m равны между собой. Доказательство теоремы 4.6 завершается применением известной теоремы о том, что если всякая точка полной гиперповерхности M евклидова пространства R^{n+1} омбилическая, то M гиперсфера ([9, с. 30, гл. 5, теорема 5.1]).

Следствие 4.7. Равенство в (4.1) возможно тогда и только тогда, когда M гиперсфера.

Доказательство. 1) Если M гиперсфера, то $\lambda_1^p = \lambda_1^{n-p} = p(n-p+1)R^{-2}$ для $p < \left[\frac{n}{2}\right]$, где R — радиус гиперсферы.

2) Обратно, равенство в (4.1) влечет равенство в (3.1), из которого следует, что $\omega^{(k)}$ собственные формы лапласиана M , действующего на p -формах, отвечающие общему собственному значению. По теореме 4.6, M — гиперсфера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маккин Г. П., Зингер И. М. Кривизна и собственные значения оператора Лапласа.— «Математика», 1969, т. 13, № 6, с. 138—161.
2. Масальцев Л. А. О первом собственном значении лапласиана компактной ориентируемой гиперповерхности евклидова пространства.— «Укр. геометр. сб.» Вып. 19, Харьков, 1976, с. 104—108.
3. Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. М., Изд-во иностр. лит., 1956. 250 с.
4. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967. 664 с.
5. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., «Мир», 1970. 412 с.
6. Чжень Шэн-шэнь. Комплексные многообразия. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 238 с.
7. Berger M., Gauduchon P., Mazet E. Le secret d'une variété riemannienne. Berlin, 1971. 217 p.
8. Gallot S., Meyer D. Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne.— "Journ. Math. Pures et Appl.", 1975, t. 54, p. 259—284.
9. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. New York, Inters. Publish., 1969. Vol. II. 817 p.

Поступила 12 апреля 1976 г.

КРАТЧАЙШАЯ ЛИНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1. Известно, что на общей выпуклой поверхности могут существовать точки, через которые не проходят кратчайшие линии, могут существовать точки, из которых не во всех направлениях исходят кратчайшие; множество таких особых точек, соответственно — направлений может быть всюду плотным. Оказывается, отмеченные особенности отсутствуют, если рассматриваемая поверхность — поверхность вращения.

Теорема 1. В пространстве с постоянной кривизной на общей выпуклой поверхности вращения через каждую точку, за исключением полюса, в любом направлении, отличном от направления

параллели, проходит кратчайшая линия. В тех же условиях из каждой точки поверхности в направлении параллели исходит кратчайшая, если эта параллель — не квазигеодезическая, а угол при «ребре» поверхности, определяемом параллелью, близок к π .

Доказательство теоремы 1 проводится в пп. 2, 3. В качестве приложения полученного результата в пункте 4 устанавливается следующая

Теорема 2. Допустим, что в каждой малой полуокрестности параллели поверхности вращения поверхность не сводится к конусу. Тогда при изгибании окрестности любой дуги указанной параллели дуга переводится в гладкую кривую.

В дальнейшем для упрощения считается, что все рассуждения проводятся в пространстве E^3 . Уравнение меридiana поверхности вращения записывается в форме $r = \phi(u)$, где u — длина дуги меридiana; r — расстояние от оси поверхности точки на меридиане, соответствующей дуге u . Расстояние от оси вращения точки X поверхности обозначается $r(X)$. Считается, что меридианы поверхности вращения так ориентированы, что при проектировании на ось поверхности определяют одну и ту же ориентацию. Пусть L — ориентированная кривая на поверхности, имеющая в каждой точке определенные направления. Тогда символом $\theta(X)$ — обозначается угол на поверхности в точке $X \in L$ между «положительными» направлениями кривой L и соответствующего меридиана. Заметим, что на основании [1] теорема 1 распространяется и на многомерные поверхности вращения с одномерной осью.

Пусть F — выпуклая поверхность вращения; $A \in F$ — точка, отличная от полюса; τ — некоторое направление на F в точке A , отличное от направления соответствующей параллели i , можно считать, от направления соответствующего меридиана поверхности.

Легко устанавливается [1], что на поверхности F через точку A в направлении τ проходит квазигеодезическая линия L такая, что для всех точек $\tilde{X} \in L$ выполняется первое из равенств (*), которые приводятся в этом пункте. Считается, что положительное направление на L определяется направлением τ . Предположим, что линия L в окрестности точки A не кратчайшая. Тогда существует на F последовательность луночек, стягивающихся в точке A , каждая из которых ограничена некоторой дугой L и некоторой кратчайшей. Пусть E одна из луночек; \tilde{L} и \bar{L} — соответственно дуга L и кратчайшая линия, которые составляют границу E ; B и C — вершины луночки, в которых встречаются \tilde{L} и \bar{L} , причем B предшествует C . Для линий \tilde{L} , \bar{L} имеем равенства [1]

$$\tilde{r}(\tilde{X}) \sin \tilde{\theta}(\tilde{X}) = \tilde{c} \text{ и } \bar{r}(\bar{X}) \sin \bar{\theta}(\bar{X}) = \bar{c}, \quad (*)$$

где $\tilde{X} \in \tilde{L}$, $\bar{X} \in \bar{L}$. Поскольку кривизна F в точке A нулевая, то при стремлении E к A углы при вершинах B и C со стороны E убывают к нулю; при этом, как можно принять, $\tilde{\theta}(B)$ и $\bar{\theta}(B)$ стре-

нится к общему значению, равному углу в точке A между направлением τ и «положительным» направлением меридиана F .

Имеем $\tilde{\theta}(B) \geq \bar{\theta}(B)$, $\tilde{\theta}(C) < \bar{\theta}(C)$. Отсюда и из равенств (*) следует, что $\tilde{c} = \bar{c}$. Значит, $\tilde{\theta}(B) = \bar{\theta}(B)$ и линии \bar{L} , \tilde{L} образуют в точке B нулевой угол. Тогда по теореме единственности для пары «кратчайшая — квазигеодезическая» из [2] линии \bar{L} и \tilde{L} совпадают. Полученное противоречие показывает, что линия L в окрестности A — кратчайшая. Этим доказано первое утверждение теоремы 1.

3. Докажем второе утверждение. Пусть Λ — параллель поверхности вращения F с координатой u_0 , не являющаяся квазигеодезической линией, и $A_0 \in \Lambda$ — точка поверхности. Пусть L — квазигеодезическая на поверхности, выходящая из точки A_0 в направлении Λ , такая, что для всех точек $\bar{X} \in L$ выполняется первое из равенств (*), которые приводятся в этом пункте. Предположим, что линия L в окрестности точки A_0 — не кратчайшая. Тогда существует на F последовательность луночек с вершинами A_0 , $\bar{A} \in L$, стягивающихся к точке A_0 , каждая из которых ограничена дугой L и некоторой кратчайшей. Пусть E — одна из луночек; \bar{L} и \tilde{L} — соответственно дуга L и кратчайшая линия, которые составляют границу E ; A — вершина луночки, соответствующая параметру u . Считается, что $u < u_0$. Можно принять, что часть F поверхности, определяемая параллелью Λ , не содержащая линии L , является конусом. В противном случае указанная часть F заменяется конусом, идущим в окрестности Λ с внутренней стороны F ; при этом можно не очень существенно изменить угол поверхности при «ребре» Λ .

Для линий \bar{L} , \tilde{L} имеем равенства [1]

$$\tilde{r}(\tilde{X}) \sin \tilde{\theta}(\tilde{X}) = \tilde{c} \text{ и } \tilde{r}(\bar{X}) \sin \bar{\theta}(\bar{X}) = \bar{c}, \quad (*)'$$

где $\tilde{X} \in \tilde{L}$, $\bar{X} \in \bar{L}$. Учитывая (*)' и строение L [1], для длип \bar{L} , \tilde{L} получаем соответственно выражения

$$|\bar{L}| = \int_u^{u_0} \frac{ds}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Phi_0}{\Phi}\right)^2}}, \quad |\tilde{L}| = \int_u^{u_0} \frac{ds}{\sqrt{1 - \lambda^2 \left(\frac{\Phi_0}{\Phi}\right)^2}} + 2r_1 \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Здесь $u < s < u_0$, $\Phi_0 = \varphi(u_0)$, $\varphi = \varphi(s)$, $\lambda = \sin \bar{\theta}(B)$ ($B \in \Lambda \cap L$) и r_1 — радиус кривизны Λ со стороны F . Пусть

$$J \equiv |\bar{L}| - |\tilde{L}| + 2r_1 \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Так как функция $r = \varphi(s)$ имеет односторонние производные, то при $A \rightarrow A_0$, или при $u \rightarrow u_0$

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(u_0)} \rightarrow 1, \quad \left[\left(\frac{\varphi(s)}{\varphi(u_0)} \right)^2 - 1 \right] / s \rightarrow 2\varphi'(u_0)/\varphi(u_0) \equiv \mu.$$

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ при u , близком к u_0 ,

$$J < \int_u^{u_0} \frac{(1+\varepsilon)\nu ds}{\sqrt{(\mu-\varepsilon)s}\sqrt{(\mu-\varepsilon)s+\nu}[\sqrt{(\mu-\varepsilon)s}+\sqrt{(\mu-\varepsilon)s+\nu}]} = \\ = \frac{2(1+\varepsilon)\sqrt{\nu}}{\mu-\varepsilon} \int_0^t e^{-t} dt < 2(1+2\varepsilon)\sqrt{\nu}/\mu,$$

где $\nu = 1 - \lambda^2$ и в интеграле произведена замена переменной $(\mu - \varepsilon)s = \nu \sinh^2 t$. Таким образом, если $\mu r_1 > 1$, то $|\tilde{L}| < |L|$, и мы приходим к противоречию. Этим установлено, что линия L в окрестности точки A_0 — кратчайшая. Достаточное условие для данного утверждения

$$2\varphi'(u_0)r_1/\varphi(u_0) > 1$$

легко интерпретируется геометрически. Оно, в частности, удовлетворяется в том случае, когда поверхность F гладкая вдоль Λ . Можно показать на примере, что если это условие нарушается, то линия L в окрестности A_0 может не быть кратчайшей.

4. Для доказательства теоремы 2 воспользуемся следующим предложением.

Пусть F — выпуклая поверхность вращения; $L \in F$ — кратчайшая, существенно пересекающая параллели F ; \tilde{L} — строго внутренний участок L . Предположим, что при некотором изгибанении в классе выпуклых поверхностей некоторого куска F линия L переходит в прямолинейный отрезок. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\psi(\varepsilon) > 0$ ($\psi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) такое, что кривизна части F «заметаемой» линией \tilde{L} при вращении этой линии вокруг оси поверхности на любой угол $\phi < \psi(\varepsilon)$ не превосходит $\varepsilon\psi(\varepsilon)$.

Устанавливается это утверждение примерно так же, как в [3, с. 72] оценивается кривизна выпуклой поверхности в окрестности внутренней точки лежащего на ней прямолинейного отрезка. Соответствующее рассуждение мы приводить не будем.

Пусть F — выпуклая поверхность вращения; Λ — параллель этой поверхности. Предположим, что при некотором изгибанении куска F , содержащего внутри дугу $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$, линия \tilde{L} в точке A на новой поверхности — обозначим ее \tilde{F} — не гладкая. Очевидно, что точка A на \tilde{F} ребристая, и ребро поверхности в этой точке не касается $\tilde{\Lambda}$. Из теоремы 1 следует, что на \tilde{F} через A в направлении ребра поверхности проходит некоторая кратчайшая L . По теореме о гладкой точке кратчайшей [4, 5] линия L на \tilde{F} — прямолинейный отрезок. Согласно высказанному в начале пункта утверждению, для кривизны ω открытого пояса на F , содержащего L , имеем оценку $\omega \ll 2\pi\varepsilon$, где ε — произвольное. Тогда $\omega = 0$, но это противоречит условию теоремы.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Милка А. Д. Об одном признаке сферы.— «Укр. геометр. сб.». Вып. 9, Харьков, 1970, с. 78—84.
- Милка А. Д. О некоторых свойствах квазигеодезических.— «Укр. геометр. сб.». Вып. 11, Харьков, 1971, с. 73—77.
- Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 760 с.
- Милка А. Д. Теорема о гладкой точке кратчайшей.— «Укр. геометр. сб.». Вып. 15, Харьков, 1974, с. 62—70.
- Милка А. Д. Новые свойства кратчайших линий на выпуклых поверхностях.— «Укр. геометр. сб.». Вып. 17, Харьков, 1975, с. 128—132.

Поступила 20 сентября 1976 г.

КРАТЧАЙШАЯ, ВСЕ ТОЧКИ КОТОРОЙ ОСОБЫЕ

1. Точку кратчайшей линии на выпуклой поверхности в E^3 будем называть особой, если сферическое изображение этой линии в произвольной окрестности этой точки неспрямляемо. В [1] построен пример кратчайшей с изолированной особой внутренней точкой. На основании этого примера [2] установлено, что существуют кратчайшие линии, множества особенностей на которых — любой неполной относительной линейной меры. Целью данной заметки является построение примера поверхности, отмечавшегося в [2], содержащей кратчайшую линию, все точки которой особые.

2. Рассмотрим поверхность F^* , построенную в [2]. Это — бесконечноугранная выпуклая поверхность, содержащая кратчайшую линию Λ^* длины d^* с заданной липсгейной мерой μ^* ($\mu^* < d^*$) нигде не плотного на Λ^* множества M^* особых точек. Можно принять, что концы Λ^* принадлежат M^* . Тогда дополнение $\Lambda^* \setminus M^*$ состоит из счетного множества прямолинейных отрезков. Каждый из этих отрезков находится в некоторой грани F^* . Концы отрезка — внутренние точки ребер поверхности. Каждая грань F^* содержит некоторый прямолинейный отрезок, звено Λ^* . В границу F^* входят два прямолинейных отрезка со срединами в концах Λ^* , перпендикулярные к Λ^* , две кривые, объединение которых обозначим C^* , соединяющие соответственно «верхние» и «нижние» концы отрезков. Пусть h^* — расстояние C^* на F^* до Λ^* . Числа d^* , μ^* могут быть заданы произвольно. Можно считать, что при фиксированных этих числах и при любом $\epsilon^* > 0$ диаметр сферического изображения F^* меньше ϵ^* ; если $\epsilon^* \rightarrow 0$, то $h^* \rightarrow \infty$, а F^* сходится к бесконечной полоске ширины d^* ; кривизна F^* сосредоточена в трехгранных вершинах в ϵ^* -окрестности кратчайшей Λ^* ; для произвольного набора внутренних вершин на F^* сумма ω кривизн

поверхности в этих вершинах допускает внутренне геометрическую оценку

$$\omega \ll \varepsilon^* h,$$

где h — максимальная из высот на F^* вершин набора над Λ^* . Тем самым для Λ^* имеет место единственность: при достаточно малом ε^* концы Λ^* не соединяются на поверхности другой кратчайшей [1, 2].

Поверхности вида F^* в дальнейшем используются как вспомогательные. Для конкретной поверхности при этом применяется обозначение $F_\varepsilon(\Lambda, d, \mu)$, в котором индексы (*) опускаются.

3. Опишем конструкцию, которая обеспечивает построение выпуклой поверхности, содержащей кратчайшую линию с полной мерой особых точек. Пусть $F_\varepsilon(\Lambda, d, \mu)$ — одна из рассматриваемых в п. 2 поверхностей, для которой $\mu > d/2$, а число ε в зависимости от d и μ — достаточно малое. Пусть F' — выпуклая поверхность, содержащая некоторую кратчайшую Λ' , полученная из $F_\varepsilon(\cdot)$ такой деформацией $f: F_\varepsilon(\cdot) \rightarrow F'$, что выполняется следующее. Диаметр сферического изображения F' меньше $\varepsilon + 2\varepsilon'$, где $\varepsilon' > 0$ — наперед заданное, достаточно малое, меньшее, в частности, $\varepsilon/2$; если $\varepsilon' \rightarrow 0$, то F' сходится к $F_\varepsilon(\cdot)$, Λ' — к Λ ; при некотором малом фиксированном $\varepsilon'' > 0$ кривизна F' в $\varepsilon''/2$ -окрестности Λ' сосредоточена в трехгранных вершинах, для произвольного набора вершин из этой окрестности сумма ω' кривизн F' в этих вершинах допускает внутренне геометрическую оценку

$$\omega' \ll (\varepsilon + \varepsilon') h',$$

где h' — максимальная из высот на F' вершин набора над Λ' (тем самым кратчайшая Λ' на поверхности F' обладает свойством единственности в смысле п. 2); мера μ' множества M' особых точек на Λ' подчинена неравенству

$$\mu' > \mu + (d - \mu)/2;$$

отображение $f: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ является изометрией, более того — существует конечное число звеньев Λ и совокупность U замкнутых строго внутренних интервалов этих звеньев такая, что в некоторой окрестности V на $F_\varepsilon(\cdot)$ любой связной компоненты $\Lambda \setminus U$ отображение $f: V \rightarrow F'$ является конгруэнтностью. По своему строению поверхность F' должна быть сходной с $F_\varepsilon(\cdot)$: F' — бесконечногранная выщуклая поверхность; M' на Λ' нигде не плотно, дополнение $\Lambda' \setminus M'$ состоит из счетного множества прямолинейных отрезков; каждый из этих отрезков находится в некоторой грани F' , концы отрезка — внутренние точки ребер или перпендикулярных к Λ' прямолинейных образующих поверхности; каждая грань F' содержит некоторое звено Λ' .

Построим поверхность F' . Выберем на кратчайшей Λ конечное число m звеньев и множество $U = \{U_i\}_{i=1}^m$ замкнутых строго внут-

речных интервалов этих звеньев с длинами $\{d_i\}$ соответственно. К интервалу U_i сопоставим число μ_i ($\mu_i < d_i$). Звенья и интервалы, числа $\{\mu_i\}$ подбираются таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum \mu_i > (d - \varepsilon)/2.$$

Пусть $H_{\varepsilon''}$ — эквидистантный прямоугольник; ε'' — окрестность Λ на $F_{\varepsilon}(\cdot)$, $\varepsilon'' < \varepsilon$. В грани поверхности $F_{\varepsilon}(\cdot)$ несущий интервал U_i , через концы этого интервала проведем прямолинейные отрезки. Число ε'' считается столь малым, что эти отрезки при каждом i выделяют из $H_{\varepsilon''}$ плоский прямоугольник H_i . Рассмотрим еще поверхности $\{F_{\varepsilon'/m}(\Lambda_i, d_i, \mu_i)\}$, где ε' — достаточно малое ($\varepsilon' < < \varepsilon''$), и эквидистантные прямоугольники $\{H_{\varepsilon'', i}\}$, ε'' — окрестности на этих поверхностях соответствующих из кратчайших $\{\Lambda_i\}$. Вырежем прямоугольник $H_{\varepsilon''}$ из $F_{\varepsilon}(\cdot)$ и каждый из прямоугольников $\{H_{\varepsilon'', i}\}$ из соответствующей поверхности $\{F_{\varepsilon'/m}(\cdot)\}$. Вырежем далее из прямоугольника $H_{\varepsilon''}$ прямоугольники $\{H_i\}$ и вклейм на их место изометрически соответствующие прямоугольники из $\{H_{\varepsilon'', i}\}$. При этом обеспечиваем, чтобы при каждом i кратчайшая Λ_i заменила соответствующий вырезанный участок кратчайшей Λ и чтобы в результате указанной операции получилась локально выпуклая поверхность, гладкая в точках склеивания. При достаточно малом ε' несущие плоскости граней этой поверхности определяют выпуклую поверхность, которую мы обозначим F' . Образом Λ на F' является квазигеодезическая линия с нулевыми поворотами на обе стороны, которую мы обозначим Λ' . Легко устанавливается, что поверхность F' обладает всеми свойствами, перечисленными в начале этого пункта. В частности, Λ' — кратчайшая на F' , обладающая свойством единственности, для кривизны ω' набора вершин на F' из $\varepsilon''/2$ — окрестности Λ' справедлива оценка

$$\omega' \leq (\varepsilon + \varepsilon') h' < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2}\right) h',$$

мера μ' особых точек на Λ' подчинена неравенству

$$\mu' > \mu + (d - \mu)/2 > d \left(1 + \frac{1}{2}\right)/2.$$

4. Приведенная в п. 3 конструкция может быть использована для преобразования поверхности F' , затем — для преобразования построенной поверхности и так далее. На n -м шаге мы получаем выпуклую поверхность F^n , содержащую некоторую кратчайшую Λ^n длины d и обладающую всеми основными свойствами поверхности F' . При этом для Λ^n выполняется свойство единственности, а соответствующие оценки для кривизны F^n в окрестности Λ^n и меры особых точек на Λ^n записываются следующим образом:

$$\omega^{(n)} < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) h^{(n)}, \quad \mu^{(n)} > d \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)/2.$$

Рассмотрим последовательность выпуклых поверхностей $\{F^n\}$, которую можно считать сходящейся. Можно принять также, что

сходится и последовательность соответствующих кратчайших $\{\Lambda^n\}$. Предельная поверхность для указанной последовательности $\{F^n\}$ и есть искомая. Она содержит кратчайшую линию, предельную для последовательности $\{\Lambda^n\}$, все точки которой являются особыми. Перенесение особенностей на эту линию обеспечивается свойством конгруэнтности отображения $f: V \rightarrow F'$, отмеченного в п. 3.

5. Полученный результат подобным способом устанавливается в пространствах сферическом и Лобачевского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милка А. Д. Кратчайшая с неспрямляемым сферическим изображением (I). — «Укр. геом. сб.», 1974, вып. 16, с. 31—34.
2. Милка А. Д. Кратчайшая с неспрямляемым сферическим изображением (II). — «Укр. геом. сб.», 1975, вып. 18, с. 98—107.

Поступила 23 сентября 1976 г.

**ОБ ИЗГИБАНИИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ
С ДАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ПОЛОСОЙ**

В работе [1] доказана теорема об изгибании регулярной выпуклой поверхности с краем L с заранее данной граничной полосой вдоль края. Граничной полосой вдоль края называется поверхностная полоса вдоль края L , нормалями которой являются нормали к поверхности.

Показано, что две изометричные поверхности F_1 и F_2 с границами L_1 и L_2 равны, если поверхностные полосы вдоль границ плоские, касаются некоторой сферы (причем границы L_1 и L_2 лежат на сфере), цилиндрические или конические.

Рембсом доказана жесткость регулярной выпуклой поверхности при условии, что в начальный момент изгибаания коническая полоса остается конической [2].

В настоящей заметке эти результаты будут перенесены на случай общих выпуклых поверхностей.

Дадим точную формулировку результатов. Рассмотрим сначала случай, когда полоса коническая и цилиндрическая. Случай плоской и сферической полосы будут рассмотрены в конце статьи.

Пусть F — выпуклая поверхность с границей L . Опорной плоскостью к F в точке x_0 на границе L назовем плоскость P , проходящую через точку x_0 , относительно которой F лежит в одном полупространстве, и плоскость P содержит хотя бы одну образующую касательного конуса к F в точке x_0 .

Теорема 1. Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые поверхности с границами L_1 и L_2 ограниченной вариации поворота.

Пусть опорные плоскости в точках границ L_1 и L_2 проходят через некоторые точки O_1 и O_2 соответственно, причем F_1 и F_2 обращены выпуклостью в одну сторону относительно точек O_1 и O_2 . Тогда поверхности F_1 и F_2 равны.

Теорема 2. Пусть F_1 и F_2 — выпуклые поверхности с границами L_1 и L_2 ограниченной вариации поворота. Пусть опорные плоскости в точках границ L_1 и L_2 огибают цилиндры. Тогда поверхности F_1 и F_2 равны. Имеют место также аналогичные теоремы жесткости.

Теорема 3. Пусть F — выпуклая поверхность с границей L ограниченной вариации поворота. Пусть опорные плоскости в точках границы L проходят через некоторую точку O . Возьмем на L произвольную точку x . Обозначим через α угол между произвольной нормалью к опорной плоскости в точке x и отрезком Ox . В начальный момент он равен $\frac{\pi}{2}$. Тогда, если при бесконечно малом изгибании $\dot{\alpha} = 0$, то поверхность F жесткая вне плоских областей. Точка означает дифференцирование по времени при $t = 0$.

Теорема 4. Пусть F — выпуклая поверхность с границей L ограниченной вариации поворота. Пусть опорные плоскости в точках L огибают цилиндр. Обозначим через α угол между произвольной нормалью к опорной плоскости в точке границы L и образующей цилиндра, проходящей через эту точку. В начальный момент $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тогда, если $\dot{\alpha} = 0$, то поверхность F жесткая вне плоских областей.

Доказательство теоремы 1. Будем для определенности считать, что поверхности F_1 и F_2 обращены выпуклостью от точек O_1 и O_2 . Обозначим через K_1 и K_2 конусы с вершинами в точках O_1 и O_2 и направляющими L_1 и L_2 . Площади сферических изображений кривых L_1 и L_2 равны нулю, так как сферические изображения кривых L_1 и L_2 представляют собой границы сферических изображений выпуклых конусов K_1 и K_2 . Повороты любых соответствующих дуг кривых L_1 и L_2 со стороны поверхностей F_1 и F_2 равны по изометрии. А так как сумма правого и левого поворотов кривой на поверхности равна площади ее сферического изображения, то и повороты соответствующих дуг кривых L_1 и L_2 на конусах K_1 и K_2 также равны.

Развернем конусы K_1 и K_2 на плоскость, предварительно разрезав их по соответствующим образующим. Кривые L_1 и L_2 перейдут при этом в плоские кривые L'_1 и L'_2 , у которых соответствующие по изометрии дуги будут иметь одинаковые повороты.

Так как плоская кривая однозначно определяется поворотом, заданным как функция длины дуги, то кривые L'_1 и L'_2 будут конгруэнтны. Пусть A_1, B_1 и A_2, B_2 — концы кривых L'_1 и L'_2 . Тогда расстояния между точками A_1, B_1 и A_2, B_2 будут равны. Рассмотрим треугольники $O_1A_1B_1$ и $O_2A_2B_2$. Они равнобедренные,

так как $O_1A_1 = O_1B_1$ и $O_2A_2 = O_2B_2$. Кроме того, их основания A_1B_1 и A_2B_2 равны. Углы при вершинах O_1 и O_2 также равны в силу изометрии поверхностей F_1 и F_2 . Следовательно, треугольники $O_1A_1B_1$ и $O_2A_2B_2$ равны. Но тогда равны все расстояния $r_1(x)$ и $r_2(x)$ от точек O_1 и O_2 до соответствующих по изометрии точек x на кривых L'_1 и L'_2 , а следовательно, и кривых L_1 и L_2 . Теперь равенство поверхностей F_1 и F_2 следует из следующей теоремы, доказанной автором в работе [3].

Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые поверхности, звездообразные расположенные относительно точек O_1 и O_2 , обращенные выпуклостью в одну сторону относительно точек, O_1 и O_2 . Пусть через точки O_1 и O_2 проходят плоскости, относительно которых F_1 и F_2 расположены в одном полупространстве. Тогда, если расстояния от точек O_1 и O_2 до соответствующих по изометрии точек границ равны, то поверхности F_1 и F_2 равны.

Доказательство теоремы 2.

Обозначим через C_1 и C_2 цилиндры, которые огибают опорные плоскости в точках границ L_1 и L_2 . Пусть l_1 и l_2 — соответствующие по изометрии образующие этих цилиндров, проходящие через соответствующие по изометрии точки x_1 и x_2 на границах L_1 и L_2 .

Возьмем на l_1 и l_2 точки a_1 и a_2 на одинаковом расстоянии от точек x_1 и x_2 так, чтобы из них поверхности F_1 и F_2 были видны с одной стороны, например, изнутри. Проведем через a_1 и a_2 плоскости P_1 и P_2 , перпендикулярные к образующим. Части цилиндров между плоскостями P_1 и P_2 и границами L_1 и L_2 развернем на плоскость, разрезав предварительно их по отрезкам x_1a_1 и x_2a_2 . Границы L_1 и L_2 перейдут в некоторые плоские кривые L'_1 и L'_2 , у которых расстояния до концов от некоторой прямой α будут равны.

Площади сферических изображений границ L_1 и L_2 равны нулю, повороты соответствующих дуг со стороны поверхности равны, следовательно, повороты соответствующих дуг плоских кривых L'_1 и L'_2 также равны. Но тогда кривые L'_1 и L'_2 конгруэнтны. А так как расстояния до концов L'_1 и L'_2 от некоторой прямой α равны, то расстояния от прямой α до всех соответствующих по изометрии точек на L'_1 и L'_2 также равны.

Следовательно, у поверхностей F_1 и F_2 расстояния до соответствующих по изометрии точек границ от некоторой плоскости равны. Но тогда, как известно, поверхности F_1 и F_2 конгруэнтны [4]. Доказательства соответствующих теорем жесткости 3 и 4 аналогичны, достаточно лишь конечные приращения заменить на скорости.

Докажем теорему 3. Пусть F — выпуклая поверхность и L — ее граница. Обозначим через K конус, который огибают опорные плоскости к границе L . Пусть ω — площадь сферического изображения дуги границы L . В начальный момент времени $\omega = 0$. И условия $\dot{\alpha} = 0$ следует $\dot{\omega} = 0$. Следовательно, $\ddot{\omega} = \ddot{P}_1 + \ddot{P}_2$, где

P_1 — поворот дуги кривой L со стороны поверхности, а P_2 — поворот той же дуги на конусе K . Но $\dot{P}_1 = 0$. Следовательно, $\dot{P}_2 = 0$. Таким образом, повороты всех дуг кривой L на конусе K стационарны. Разрежем конус K по произвольной образующей OA и развернем на плоскость. Кривая L перейдет в плоскую кривую L' , у которой при бесконечно малом изгибании повороты всех дуг стационарны. Следовательно, L' в начальный момент времени перемещается как твердое целое и расстояние между ее концами стационарно. Рассмотрим треугольник OAA . Скорость изменения длин его сторон OA и OA одна и та же и равна скорости изменения длины образующей OA конуса K . Длина же стороны AA стационарна. Кроме того, угол AOA стационарен, так как угол при вершине конуса K при бесконечно малом изгибании стационарен. Следовательно, скорость изменения сторон OA равна нулю. Тогда скорость изменения всех расстояний $r(x)$ от точки O до точек кривой L' , а следовательно, и L равна нулю. Но при этих условиях, как известно, поверхность F жесткая вне плоских областей.

Докажем теорему 4. Пусть F — выпуклая поверхность с границей L . Обозначим через C цилиндр, который огибают опорные плоскости в точках границы L . Возьмем на произвольной образующей цилиндра C точку a и проведем через нее плоскость P , перпендикулярную к образующей. Будем для определенности считать, что поверхность F обращена выпуклостью от точки O .

Пусть ω — площадь сферического изображения дуги границы L . В начальный момент времени $\omega = 0$. Из условия $\dot{\alpha} = 0$ следует $\dot{\omega} = 0$. Следовательно, $\ddot{P} = 0$, где P — поворот дуги границы L со стороны цилиндра C . Разрежем цилиндр C по образующей ax , где x — точка на границе L , через которую проходит образующая. Развернем часть цилиндра C между плоскостью P и границей L на плоскость. Кривая L перейдет в некоторую плоскую кривую L' , у которой каждая дуга имеет стационарный поворот. Следовательно, в начальный момент времени кривая L' двигается как твердое целое.

Присоединим к изгибающему полю поверхности F поле параллельного переноса вдоль образующих цилиндра C , такое, чтобы длина отрезка ax была стационарна. Следовательно, высоты всех точек кривой от некоторой прямой α будут стационарны. Это значит, что высоты всех точек границы L от плоскости P стационарны. Но тогда поверхность F жесткая вне плоских областей [4].

Рассмотрим случаи, когда граничные полосы плоские и сферические. Пусть F_1 и F_2 — изометричные поверхности с границами L_1 и L_2 . Пусть опорные плоскости в точках границ L_1 и L_2 лежат соответственно в одной плоскости. Тогда сферические изображения поверхностей F_1 и F_2 равны 4π . Но тогда, как известно, поверхности F_1 и F_2 равны [4].

Имеет место соответствующая теорема жесткости.

Теорема 5. Пусть F — выпуклая поверхность с границей L , у которой опорные плоскости в точках границы L лежат в одной плоскости P . Пусть α — угол между нормалью к любой опорной плоскости в точке на L и плоскостью P . В начальный момент он равен нулю. Тогда, если $\dot{\alpha} = 0$, то поверхность F жесткая вне плоских областей.

Действительно, граница L является плоской кривой. В силу условия $\dot{\alpha} = 0$ она обладает тем свойством, что поворот любой ее дуги стационарен. Следовательно, в начальный момент времени расстояние между любыми двумя точками кривой L стационарно. Если присоединить к F плоскую область, ограниченную кривой L , то получим замкнутую выпуклую поверхность со стационарной метрикой. Как доказано в [4], она жесткая вне плоских областей.

Пусть граничная полоса сферическая. Прежде всего заметим, что если поверхности F_1 и F_2 имеют границы L_1 и L_2 , лежащие в открытой полусфере, то условие касания опорных плоскостей на границе сферы лишнее. Действительно, пусть границы L_1 и L_2 лежат в открытой полусфере. Рассмотрим расстояния от центра сферы до соответствующих по изометрии точек границ L_1 и L_2 . Они все равны единице и, значит, равны. Но тогда поверхности F_1 и F_2 равны. Если границы L_1 и L_2 выходят за границы полу-сферы, то в силу того, что опорные плоскости на границе касаются сферы, следует равенство соответствующих по изометрии поворотов любых дуг кривых L_1 и L_2 на сфере. В силу того что на сфере кривая так же, как и на плоскости, однозначно определяется поворотом, заданным как функция длины дуги, следует, что L_1 и L_2 конгруэнтны. Следовательно, поверхности F_1 и F_2 равны. Соответствующие теоремы жесткости доказываются аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакельман И. Я., Вернер А. П., Каптор В. Я. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». М., «Наука», 1973. 440 с.
2. Rembs K. Zur verbiegbarkeit konvexer Kalotten.— „Archiv der Mathematik“, 1953, vol. IV, S. 49—57.
3. Сенькин Е. П. Об изгибаии общих выпуклых поверхностей с границей.— «Вестн. Ленингр. ун-та», 1960, № 19, с. 87—94.
4. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1960. 759 с.

Поступила 26 мая 1975 г.

УДК 513.838 : 513.917

В. В. ТИМОШЕНКО

**О ТРИ-ТКАНЯХ НАД АЛГЕБРОЙ, КРИВИЗНА КОТОРЫХ
ЯВЛЯЕТСЯ ДЕЛИТЕЛЕМ НУЛЯ**

В настоящей работе продолжается изучение три-тканей над коммутативными ассоциативными унитальными алгебрами конечного ранга r и их вещественных реализаций [1]. Рассматриваются

три-ткани, кривизна которых является делителем нуля. В 1 напоминаются основные определения и результаты работы [1], которые будут использоваться в последующих параграфах.

1. Три-ткани над алгебрами и их вещественные реализации

1°. Пусть A — вещественная коммутативная ассоциативная алгебра с главной единицей ε и базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$. Структурные константы алгебры A удовлетворяют условиям

$$\gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k, \quad \gamma_{jm}^l \gamma_{ls}^k = \gamma_{ms}^l \gamma_{jl}^k.$$

Если $\varepsilon = \varepsilon^k e_k$ — главная единица алгебры A , то

$$\gamma_{jk}^l \varepsilon^k = \delta_j^l,$$

где δ_j^l — символ Кронекера. Здесь и далее $i, j, k, \dots = 1, \dots, r$.

2°. Три-ткань $W_2(A)$ над алгеброй A задается на двумерном элементарном аналитическом многообразии $M_2(A)$ над этой алгеброй вполне интегрируемыми уравнениями вида

$$S_\alpha : \omega_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

где ω_α — формы Пфаффа со значениями в алгебре A (см. [2]), любые две из которых образуют базис кольца дифференциальных форм на многообразии $M_2(A)$. Формы ω_α допускают только согласованные преобразования вида

$$\tilde{\omega}_\alpha = g \omega_\alpha, \quad (1)$$

где g — A -аналитическая функция [3] двух переменных из алгебры A , не принимающая на $M_2(A)$ нулевых и равных делителям нуля значений.

Уравнения структуры три-ткани $W_2(A)$ записываются в виде

$$d\omega_\alpha = \omega_\alpha \wedge \omega, \quad d\omega = K \omega_1 \wedge \omega_2,$$

где K — кривизна три-ткани $W_2(A)$. Она представляет собой A -аналитическую функцию двух переменных из алгебры и при перенормировании (1) преобразуется по следующему закону:

$$K = g^2 \tilde{K}. \quad (2)$$

В силу (2) K является относительным инвариантом. Кривизна K удовлетворяет также соотношению вида

$$\delta K = 2K\pi, \quad (3)$$

где δ — это символ дифференцирования по вторичным параметрам, а π — значение формы ω из уравнений структуры ткани $W_2(A)$ при закрепленных главных параметрах, т. е. $\pi = \omega|_{\omega_1=\omega_2=0}$.

В зависимости от значений, принимаемых кривизной K , выделяются три класса тканей над алгебрами: 1) $K \equiv 0$; 2) K не принимает нулевых и равных делителям нуля значений; 3) K — делитель нуля постоянного ранга ρ ($0 < \rho < r$). В силу (2) эта классификация носит инвариантный характер.

Первые два класса три-тканей над алгебрами были изучены в [1]. При $K \equiv 0$ получаются параллелизуемые три-ткани. Для второго класса три-тканей $W_2(A)$ была показана возможность приведения кривизны K всюду на $M_2(A)$ к главной единице алгебры A . В настоящей работе рассматривается третий класс три-тканей над алгебрами. Кривизна K в данном случае является делителем нуля постоянного ранга ρ , $0 < \rho < r$. Под рангом делителя нуля $K = K^s e_s$ понимается ранг системы векторов $\{Ke_1, Ke_2, \dots, Ke_r\}$, или, что то же самое, ранг матрицы $\|\gamma_{sj}^i K^s\|$.

3°. Запишем разложения величин со значениями в алгебре A по базису алгебры A :

$$\omega_a = \omega_a^i e_i, \quad \omega = \omega^k e_k, \quad K = K^s e_s.$$

Вещественная реализация три-тканей $W_2(A)$ представляет собой $2r$ -мерную вещественную три-ткань W_{2r} без кручения. Уравнения структуры [4] рассматриваемой три-ткани W_{2r} имеют вид

$$d\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i, \quad (4)$$

$$d\omega_j^i = b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l, \quad (5)$$

где

$$\omega_j^i = \gamma_{jk}^i \omega^k, \quad (6)$$

а компоненты b_{jkl}^i тензора кривизны три-ткани W_{2r} подсчитываются по формуле

$$b_{jkl}^i = \gamma_{pl}^i \gamma_{sm}^p \gamma_{kl}^m K^s. \quad (7)$$

Формула (7) может быть записана также в виде

$$B_{jkl} = e_j e_k e_l K, \quad (8)$$

где $B_{jkl} = b_{jkl}^i e_i$. Из коммутативности и ассоциативности умножения в алгебре A следует, что величины B_{jkl} и b_{jkl}^i симметричны по нижним индексам. Уравнение (3) равносильно вещественной системе

$$\delta K^i = 2\gamma_{sj}^i K^s \pi^j. \quad (9)$$

2. Идеалы коммутативных ассоциативных алгебр, определяемые делителями нуля

Пусть K — делитель нуля ранга ρ коммутативной ассоциативной унитальной алгебры A копечного ранга r (см. п. 1). Так как случаи $\rho = 0$, $\rho = r$ были рассмотрены в работе [1], то далее мы будем считать, что $0 < \rho < r$.

4°. Рассмотрим множество $A(K)$, состоящее из всех делителей нуля алгебры A , сопряженных делителю нуля K :

$$A(K) = \{\xi \in A \mid K\xi = 0\}.$$

Относительно этого множества имеет место следующая

Теорема 1. $A(K)$ является идеалом алгебры A . При этом

$$\text{rang } A(K) = r - \rho; \quad (10)$$

если векторы $e_u (u, v, w = \rho + 1, \dots, r)$ базиса алгебры A поместить в идеал $A(K)$, то будет иметь место равенство

$$\gamma_{ui}^a = 0 \quad (a, b, c = 1, 2, \dots, \rho); \quad (11)$$

Пусть α — не равный нулю и делителю нуля элемент алгебры A . Тогда

$$A(\alpha K) = A(K), \quad (12)$$

т. е. идеал $A(K)$ остается инвариантным при замене K на αK .

Доказательство. Если $\xi \in A(K)$, т. е. $K\xi = 0$, то в силу ассоциативности умножения в алгебре A для любого $x \in A$ будет иметь место равенство $K(\xi x) = (K\xi)x = 0$, а это означает, что $\xi x \in A(K)$, т. е. $A(K)$ — идеал алгебры A .

Равенство (10) следует из того, что размерность пространства решений уравнения $K\xi = 0$ ($\gamma_{sj}^i K^s \xi^j = 0$) равна $r - \rho$ (так как ранг матрицы ее коэффициентов равен ρ).

Пусть $r - \rho$ векторов e_u базиса алгебры A помещены в идеал $A(K)$. Тогда умножение в $A(e_a, e_u)$ будет задаваться формулами

$$e_a e_b = \gamma_{ab}^i e_i, \quad e_u e_i = \gamma_{ui}^v e_v,$$

откуда и вытекает справедливость равенства (11).

Последнее утверждение теоремы 1 является следствием того, что в силу коммутативности и ассоциативности алгебры A уравнения $\xi(\alpha K) = 0$ и $\xi K = 0$ равносильны. Отметим, что здесь существенно используется то, что α не является делителем нуля алгебры A .

5°. Рассмотрим множество

$$B(K) = \{\eta \in A \mid \eta = hK, \text{ где } h \in A\}.$$

Относительно $B(K)$ имеет место

Теорема 2. $B(K)$ является идеалом алгебры A . При этом

$$\text{rang } B(K) = \rho; \quad (13)$$

$$K \in B(K). \quad (14)$$

Если векторы e_a базиса алгебры A поместить в идеал $B(K)$, то будет иметь место равенство

$$\gamma_{ai}^u = 0. \quad (15)$$

Если α — не равный нулю и делителю нуля элемент алгебры A , то

$$B(\alpha K) = B(K), \quad (16)$$

т. е. идеал $B(K)$ инвариантен при замене K на αK .

Доказательство. Для любого $\eta = hK$ из $B(K)$ и любого $x \in A$ в силу коммутативности и ассоциативности умножения в алгебре A будет выполняться следующее равенство:

$$\eta x = (hK)x = (hx)K.$$

Отсюда следует, что $\eta x \in B(K)$, т. е. $B(K)$ является идеалом.

Любой элемент $\eta = hK$ из $B(K)$ можно линейно выразить через элементы e_1K, e_2K, \dots, e_rK , так как

$$\eta = hK = (h^i e_i)K = h^i(e_i K).$$

Но ранг системы векторов $\{e_iK\}$ равен $p = \text{rang } K$. Таким образом, $\text{rang } B(K) = p$.

Утверждение (14) будет справедливо в силу унитальности A .

Если первые p векторов e_a базиса алгебры A принадлежат ее идеалу $B(K)$, то закон умножения в A $\{e_a, e_u\}$ записывается так:

$$e_a e_t = \gamma_{at}^b e_b, \quad e_u e_v = \gamma_{uv}^t e_t,$$

откуда и следует, что при $e_a \in B(K)$ верно равенство (15).

При доказательстве (16) воспользуемся тем, что для отличного от нуля и делителя нуля элемента κ алгебры A всегда существует ему обратный κ^{-1} . Поэтому элементы $\eta = hK$ из $B(K)$ могут быть записаны в виде $\eta = h\kappa^{-1}(uK)$, т. е. $B(K) \subset B(\kappa K)$. Обратное включение очевидно. Таким образом, $B(\kappa K) = B(K)$. Отметим, что вместе с K делитель нуля κK также принадлежит идеалу $B(K)$ и имеет в $B(K)$ максимальный ранг p .

6°. Из доказанных выше теорем 1, 2 следует, что идеалы $A(K), B(K)$ геометрически инвариантно связаны с три-тканью $W_2(A)$. В самом деле, при допустимых преобразованиях (1) базисных форм три-ткани $W_2(A)$ кривизна K умножается на множитель $(g^2)^{-1}$, не принимающий вместе с g нулевых и равных делителям нуля значений. Но при таких преобразованиях K идеалы $A(K), B(K)$ остаются инвариантными (12), (16).

Отсюда, в частности, следует, что пересечение $J(K) = A(K) \cap B(K)$ и сумма $\Sigma(K) = A(K) + B(K)$ идеалов $A(K), B(K)$ также будут идеалами, геометрически инвариантно связанными нашей три-тканью. Этим мы воспользуемся при канонизации репера алгебры A . Случаями $J(K) = \{0\}$ и $J(K) \neq \{0\}$ исчерпываются все возможности взаимного расположения идеалов $A(K), B(K)$.

7°. Так как в силу (10), (13) справедливо равенство

$$\text{rang } A(K) + \text{rang } B(K) = \text{rang } A,$$

то при $J(K) = \{0\}$ алгебра A распадается в прямую сумму своих идеалов $A(K)$ и $B(K)$:

$$A = A(K) \oplus B(K).$$

В этом случае базис $\{e_a, e_u\}$ алгебры A можно выбрать так, чтобы

$$e_a \in B(K), \quad e_u \in A(K).$$

Здесь и далее (когда $J(K) = \{0\}$) индексы принимают следующие значения:

$$a, b, c = 1, 2, \dots, p; u, v, w = p + 1, \dots, r.$$

В силу сказанного в п. 6°, эта канонизация инварианта относительно допустимых преобразований базисных форм три-ткани $W_3(A)$. Из (11), (16) следует, что при этом

$$\gamma_{ui}^a = 0, \quad \gamma_{ai}^u = 0.$$

Закон умножения в алгебре $A\{e_a, e_u\}$ записывается так:

$$e_a e_b = \gamma_{ab}^c e_c, \quad e_u e_v = \gamma_{uv}^w e_w, \quad e_a e_u = 0. \quad (17)$$

Обозначим через $\varepsilon_{A(K)}$, $\varepsilon_{B(K)}$ проекции $\varepsilon_{A(K)} = \varepsilon^u e_u$, $\varepsilon_{B(K)} = \varepsilon^a e_a$ главной единицы $\varepsilon = \varepsilon^i e_i$; алгебры A на идеалы $A(K)$, $B(K)$.

Теорема 3. Если алгебра A распадается в прямую сумму своих идеалов $A(K)$ и $B(K)$, то $A(K)$ и $B(K)$ являются универсальными подалгебрами алгебры A . Роль главных единиц подалгебр $A(K)$, $B(K)$ играют проекции

$$\varepsilon_{A(K)}, \quad \varepsilon_{B(K)}; \quad (18)$$

K не является делителем нуля подалгебры $B(K)$. (19)

Доказательство. $A(K)$ и $B(K)$ будут подалгебрами алгебры A в силу того, что они являются ее идеалами. Далее, если $\xi \in A(K)$, то в силу (17) $\xi = \xi \varepsilon = \xi (\varepsilon_{A(K)} + \varepsilon_{B(K)}) = \xi \varepsilon_{A(K)}$, т. е. для любого ξ из алгебры $A(K)$ справедливо равенство

$$\xi \varepsilon_{A(K)} = \xi.$$

Это означает, что $\varepsilon_{A(K)}$ является главной единицей алгебры $A(K)$.

Точно так же доказывается, что $\varepsilon_{B(K)}$ — главная единица алгебры $B(K)$, т. е. что $\eta \varepsilon_{B(K)} = \eta$ для всех η из $B(K)$.

В силу (14) и (17) мы получим, что

$$\text{rang } \{Ke_a\} = \text{rang } \{Ke_i\} = \text{rang } K = p.$$

Отсюда следует, что $\text{rang } \{Ke_a\} = p$, т. е. элемент K имеет в подалгебре $B(K)$ максимально возможный ранг, равный рангу p самой подалгебры. Поэтому K не будет делителем нуля алгебры $B(K)$.

8°. В том случае, когда $J(K) \neq \{0\}$, имеем

$$\text{rang } J(K) = \sigma > 0, \quad \text{rang } \Sigma(K) < r.$$

Выбираем базис $\{e_i\}$ алгебры A так, чтобы первые σ его векторов e_λ принадлежали идеалу $J(K)$, векторы e_a^λ дополняли $\{e_\lambda\}$ до базиса идеала $B(K)$, векторы e_u^λ дополняли $\{e_\lambda\}$ до базиса идеала $A(K)$, а векторы e_x дополняли базис $\{e_\lambda, e_a^\lambda, e_u^\lambda\}$ идеала $\Sigma(K)$ до базиса алгебры A . При этом индексы будут принимать такие значения:

$$\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, \sigma; \quad \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \sigma + 1, \dots, p; \quad a, b, c = 1, 2, \dots, p;$$

$$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \rho + 1, \dots, r - \sigma; u, v, w = 1, 2, \dots, \sigma, \rho + 1, \dots, r - \sigma; \\ x, y, z = r - \sigma + 1, \dots, r. \quad (21)$$

Умножение в $A\{e_\lambda, e_a^\lambda, e_u^\lambda, e_x\}$ выполняется по формулам

$$e_x e_x = \gamma_{\lambda x}^{\mu} e_\mu, \quad e_a^\lambda e_x = \gamma_{ax}^b e_b, \quad e_u^\lambda e_x = \gamma_{ux}^v e_v, \quad e_a^\lambda e_b^\mu = \gamma_{ab}^c e_c, \quad e_u^\lambda e_v^\mu = \gamma_{uv}^w e_w \\ e_x e_y = \gamma_{xy}^i e_i, \\ e_a e_u = 0. \quad (21)$$

Из (17) следует, что произведения любых двух элементов из идеала $J(K) = A(K) \cap B(K)$ равны нулю. В этом случае $J(K)$ не может обладать главной единицей, т. е. не является унитарной алгеброй. Следующая теорема показывает, что то же самое имеет место и для идеалов $A(K), B(K), \Sigma(K)$.

Теорема 4. Пусть $J(K) \neq \{0\}$, т. е. $\text{rang } J(K) = \sigma > 0$. Тогда, если элементы $\xi \in A(K), \eta \in B(K), \theta \in \Sigma(K)$ являются делителями нуля алгебр $A(K), B(K), \Sigma(K)$, то для них справедливы следующие неравенства:

$$\text{rang } \xi \leq r - \rho - \sigma, \quad \text{rang } \eta \leq \rho - \sigma, \quad \text{rang } \theta \leq r - 2\sigma. \quad (22)$$

Доказательство. По определению ранг делителя нуля алгебры $A(K)$ равен рангу системы векторов $\{\xi e_u\}$, где $\{e_u\}$ — базис $A(K)$. В силу (21)

$$\text{rang } \{\xi e_u\} = \text{rang } \{\gamma_{\lambda u}^w \hat{e}^w\},$$

откуда и следует справедливость первого из неравенств (22). Аналогично доказываются и остальные неравенства (22).

Так как неравенства (22) справедливы для всех элементов алгебр $A(K), B(K), \Sigma(K)$, то эти алгебры будут состоять из одних делителей нуля. По этой причине они не могут быть унитарными.

3. Три-ткани $W_2(A)$ над алгеброй A , кривизна которых является делителем нуля постоянного ранга. Случай $J(K) = \{0\}$.

Пусть все значения, принимаемые кривизной K три-ткани $W_2(A)$, таковы, что $J(K) = \{0\}$, или, что то же самое, $A = A(K) \oplus B(K)$ во всех точках многообразия $M_2(A)$. Репер в алгебре A выбираем в соответствии с п. 7°. При этом индексы будут принимать те же значения, что и в п. 7°.

9° В силу (14) и (17) среди величин $B_{jkl} = b_{jkl}^i e_i$ формулы (8) отличными от нуля могут быть лишь величины

$$B_{abc} = e_a e_b e_c K.$$

Так как $K \in B(K)$, то $K = K^g e_g$, где K^g — вещественные компоненты A — аналитической функции двух переменных из алгебры A , каковой является кривизна K ткани $W_2 A$. Выражение для величин B_{abc} перепишется в виде

$$B_{abc} = e_a e_b e_c e_g K$$

оскольку все B_{abc} принадлежат идеалу $B(K)$, то все компоненты тензора кривизны три-ткани W_{2r} , являющейся вещественной реализацией ткани над алгеброй, кроме b_{abc}^h , равны нулю, а компоненты b_{abc}^h подсчитываются по формуле

$$b_{abc}^h = \gamma_{da}^h \gamma_{gb}^d \gamma_{bc}^f K^g. \quad (23)$$

Индексы в (23) принимают значения 1, 2, ..., ρ .

10°. Так как в силу (6), (11), (15) формы ω_a^a , ω_a^u обращаются в нуль, то уравнения структуры (4) три-ткани W_{2r} , являющейся вещественной реализацией ткани $W_2(A)$, перепишутся так:

$$d\omega_a^a = \omega_a^b \wedge \omega_b^a, \quad (24)$$

$$d\omega_a^u = \omega_a^v \wedge \omega_v^u, \quad (25)$$

где $a = 1, 2, 3$. В силу этих уравнений распределения $\Delta_{2(r-\rho)}$, $\Delta_{2\rho}$, определяемые системами $\omega_a^a = 0$, $\omega_a^u = 0$, являются инволютивными, и мы получаем двойное расслоение многообразия $M_2(A)$. Через каждую точку многообразия $M_2(A)$ будет проходить по одной интегральной поверхности $V_{2(r-\rho)}$ и $V_{2\rho}$.

На поверхностях $V_{2(r-\rho)}$, $V_{2\rho}$ три-ткань W_{2r} высекает подткани $W_{2(r-\rho)}$ и $W_{2\rho}$. В силу (24), (25) кручение обоих подтканей равно нулю.

11°. Семейства $S'_a(r-\rho)$ -мерных поверхностей $V_{r-\rho}$, составляющих подткань $W_{2(r-\rho)}$ на поверхности $V_{2(r-\rho)}$, определяются при помощи вполне интегрируемых систем уравнений Пфаффа

$$S'_a: \omega_a^u = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Формы ω_1^u , ω_2^u будут базисными формами три-ткани $W_{2(r-\rho)}$, а уравнения структуры три-ткани $W_{2(r-\rho)}$ имеют вид

$$d\omega_a^u = \omega_a^v \wedge \omega_v^u, \quad d\omega_v^u = 0.$$

Последнее из уравнений структуры показывает, что тензор кривизны подткани $W_{2(r-\rho)}$ равен нулю. Так как и кручение ткани $W_{2(r-\rho)}$ равно нулю, то [4] подткань $W_{2(r-\rho)}$ является параллизуемой три-тканью. Поверхности $V_{(r-\rho)}$, образующие семейства S'_a поверхностей три-ткани $W_{2(r-\rho)}$, будут интегральными поверхностями распределений $(r-\rho)$ -мерных элементов $\Delta_{r-\rho}$, несущих структуру идеала $A(K)$ алгебры A .

На поверхности $V_{2(r-\rho)}$ естественным образом может быть введена структура двумерного многообразия $M_2(A(K))$ над коммутативной ассоциативной унитальной алгеброй $A(K)$. В результате три-ткань $W_{2(r-\rho)}$ можно рассматривать как вещественную реализацию ткани над алгеброй $A(K)$, определяемой на многообразии $M_2(A(K))$ уравнениями Пфаффа вида

$$S'_a: \omega_a|_{A(K)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Уравнения структуры три-ткани $W_2(A(K))$ записываются в виде

$$d(\omega_a|_{A(K)}) = (\omega_a|_{A(K)}) \wedge \omega|_{A(K)}, \quad d(\omega|_{A(K)}) = 0,$$

где $\omega_a|_{A(K)} = \omega_a^a e_a$, $\omega|_{A(K)} = \omega^b e_b$. Как показывает второе из уравнений структуры, кривизна три-ткани $W_2(A(K))$ над алгеброй $A(K)$ равна нулю, т. е. три-ткань $W_2(A(K))$ является параллелизуемой три-тканью над алгеброй [1].

12°. Семейства S''_a ρ -мерных поверхностей V_ρ , составляющих подткань $W_{2\rho}$ на поверхности $V_{2\rho}$, определяются при помощи вполне интегрируемых систем уравнений Пфаффа

$$S''_a: \omega_a^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Базисными формами три-ткани $W_{2\rho}$ будут формы ω_1^a, ω_2^b . Уравнения структуры три-ткани $W_{2\rho}$ имеют следующий вид:

$$d\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \omega_a^\alpha, \quad d\omega_b^\alpha = b_{bcd}^a \omega_1^c \wedge \omega_2^d,$$

где b_{bcd}^a находятся по формуле (23). Поверхности, образующие семейства S''_a поверхностей V_ρ три-ткани $W_{2\rho}$, будут интегральными поверхностями распределений ρ -мерных элементов $\Delta\rho$, несущих структуру идеала $B(K)$ алгебры A .

В результате введения на поверхности $V_{2\rho}$ структуры двумерного многообразия $M_2(B(K))$ над коммутативной ассоциативной унитальной алгеброй $B(K)$ три-ткань $W_{2\rho}$ может быть интерпретирована как вещественная реализация ткани $W_2(B(K))$ над алгеброй $B(K)$, которая задается на многообразии $M_2(B(K))$ уравнениями Пфаффа вида

$$S''_a: \omega_a|_{B(K)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Структурные уравнения ткани $W_2(B(K))$ имеют при этом следующий вид:

$$d(\omega_a|_{B(K)}) = (\omega_a|_{B(K)}) \wedge \omega|_{B(K)}, \quad d(\omega|_{B(K)}) = K \omega_1|_{B(K)} \wedge \omega_2|_{B(K)}, \quad (26)$$

где $\omega_a|_{B(K)}, \omega|_{B(K)}$ — формы Пфаффа со значениями в алгебре $B(K)$, определяемые равенствами

$$\omega_a|_{B(K)} = \omega_a^a e_a, \quad \omega|_{B(K)} = \omega^b e_b.$$

Формы $\omega_1|_{B(K)}, \omega_2|_{B(K)}$ будут базисными формами ткани $W_2(B(K))$.

Уравнение (26) показывает, что кривизна три-ткани $W_2(B(K))$ во всех точках многообразия $M_2(B(K))$ совпадает с кривизной K исходной ткани $W_2(A)$ над алгеброй A . Так как M_2 расслаивается многообразие $M_2(A)$, то, приведя при помощи канонизации кривизну каждой подткани $W_2(B(K))$ к одному и тому же фиксированному элементу идеала $B(K)$, мы тем самым осуществим канонизацию кривизны K ткани $W_2(A)$ на многообразии $M_2(A)$.

В силу (19) все значения кривизны K на многообразии $M_2(B(K))$ будут отличными от нуля и от делителей нуля элементами алгебры $B(K)$. Но тогда [1] при помощи канонизации кривизну K ткани

$W_2(B(K))$ можно привести всюду на $M_2(B(K))$ к главной единице $\varepsilon_{B(K)}$ алгебры $B(K)$. Тем самым доказана следующая

Теорема 5. Если кривизна K три-ткани $W_2(A)$ над алгеброй A является делителем нуля постоянного ранга ρ и при этом в каждой точке $M_2(A)$ алгебра A распадается в прямую сумму идеалов $A(K), B(K)$, то при помощи канонизации кривизне K можно придать на $M_2(A)$ постоянное значение $\varepsilon_{B(K)}$, равное проекции главной единицы ε алгебры A на идеал $B(K)$.

13°. Основной результат, полученный при рассмотрении случая $A = A(K) \oplus B(K)$, сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6. Если кривизна K три-ткани $W_2(A)$ над алгеброй A является делителем нуля постоянного ранга ρ всюду на многообразии $M_2(A)$, и при этом в каждой точке $M_2(A)$ алгебра A распадается в прямую сумму идеалов $A(K), B(K)$, то соответствующая вещественная три-ткань W_{2r} расслаивается на подткани $W_{2(r-\rho)}, W_{2\rho}$. Первая из этих подтканей является параллелизуемой, а вторая представляет собой вещественную реализацию ткани над алгеброй $B(K)$. При этом кривизна ткани над алгеброй $B(K)$ отлична от нуля алгебры $B(K)$ и совпадает всюду с кривизной исходной три-ткани $W_2(A)$.

4. Три-ткани $W_2(A)$ над алгеброй, кривизна которых является делителем нуля постоянного ранга. Случай $J(K) \neq \{0\}$

Рассмотрим второй случай взаимного расположения идеалов $A(K), B(K)$, а именно тот случай, когда их пересечение $J(K) = A(K) \cap B(K)$ не является нулевым. Естественно при этом считать, что ранг $J(K)$, так же, как ранги идеалов $A(K), B(K)$, будет постоянным во всех точках многообразия $M_2(A)$.

14°. В силу (14) и (21) все величины $B_{jkl} = b_{ijkl}^t e_t$ формулы (8), кроме $B_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}$, обращаются в нуль. В силу линейной независимости элементов e_t будут равны нулю все компоненты тензора кривизны три-ткани W_{2r} , кроме компонент $b_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^t$. Индексы здесь и далее принимают значения (20).

15°. Рассмотрим распределение $\Delta_{2r}, \Delta_{2(r-\rho)}, \Delta_{2\rho}, \Delta_{2(r-\sigma)}$ размерностей $2r, 2(r-\rho), 2\rho$ и $2(r-\sigma)$, определяемых, соответственно, системами уравнений Пфаффа

$$\begin{cases} \omega_a^x = 0, \\ \omega_a^{\hat{a}} = 0, \\ \omega_a^{\hat{u}} = 0 \end{cases} \quad (27) \quad \begin{cases} \omega_a^x = 0, \\ \omega_a^{\hat{a}} = 0; \\ \omega_a^{\hat{u}} = 0; \end{cases} \quad (28) \quad \begin{cases} \omega_a^x = 0, \\ \omega_a^{\hat{a}} = 0; \\ \omega_a^{\hat{u}} = 0; \end{cases} \quad (29)$$

Докажем инволютивность этих распределений.

По формуле (6) находим значения форм ω_i^t из уравнений структуры три-ткани W_{2r} :

$$\omega_\mu^\lambda = \gamma_{\mu x}^\lambda \omega^x, \quad \omega_{\hat{a}}^\lambda = \gamma_{\hat{a} c}^\lambda \omega^{\hat{c}} + \gamma_{\hat{a} y}^\lambda \omega^y,$$

$$\omega_x^\lambda = \gamma_{xi}^\lambda \omega^i, \quad \omega_{\hat{u}}^\lambda = \gamma_{\hat{u} \hat{w}}^\lambda \omega^{\hat{w}} + \gamma_{\hat{u} y}^\lambda \omega^y;$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{\lambda}^{\hat{a}} = \omega_{\hat{a}}^{\hat{a}} &= 0, & \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= \gamma_{\hat{b}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{c}} + \gamma_{\hat{b}}^{\hat{a}} \omega^y, \\
 \omega_{\lambda}^{\hat{u}} = \omega_{\hat{a}}^{\hat{u}} &= 0, & \omega_{\hat{x}}^{\hat{a}} &= \gamma_{\hat{x}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{c}} + \gamma_{xy}^{\hat{a}} \omega^y, \\
 \omega_{\hat{y}}^x &= \gamma_x^x \omega^z, & \omega_{\hat{v}}^{\hat{u}} &= \gamma_{\hat{v}}^{\hat{u}} \omega^{\hat{w}} + \gamma_{\hat{v}}^{\hat{u}} \omega^y, \\
 && \omega_{\hat{x}}^{\hat{u}} &= \gamma_{\hat{x}\hat{w}}^{\hat{u}} \omega^{\hat{w}} + \gamma_{xy}^{\hat{u}} \omega^y, \\
 && \omega_{\hat{a}}^x &= \omega_{\hat{a}}^x = \omega_{\hat{u}}^x = 0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

В силу (31) значения внешних дифференциалов $d\omega_{\alpha}^i$ из (4) записываются так:

$$\begin{aligned}
 d\omega_{\alpha}^{\lambda} &= \omega_{\alpha}^i \wedge \omega_i^{\lambda}, & d\omega_{\alpha}^{\hat{a}} &= \omega_{\alpha}^{\hat{b}} \wedge \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} + \omega_{\alpha}^y \wedge \omega_y^{\hat{a}}, \\
 d\omega_{\alpha}^x &= \omega_{\alpha}^y \wedge \omega_y^x, & d\omega_{\alpha}^{\hat{u}} &= \omega_{\alpha}^{\hat{v}} \omega_{\hat{v}}^{\hat{u}} + \omega_{\alpha}^y \wedge \omega_y^{\hat{u}},
 \end{aligned} \tag{32}$$

откуда и следует полная интегрируемость систем уравнений Пфаффа (27) — (30) и инволютивность отвечающих этим системам рядов пределений $\Delta_{2\sigma}$, $\Delta_{2(r-\rho)}$, $\Delta_{2\rho}$, $\Delta_{2(r-\sigma)}$. Обозначим соответствующие интегральные поверхности через $V_{2\sigma}$, $V_{2(r-\rho)}$, $V_{2\rho}$, $V_{2(r-\sigma)}$.

На поверхностях $V_{2\sigma}$, $V_{2(r-\rho)}$, $V_{2\rho}$, $V_{2(r-\sigma)}$ поверхности исходной три-ткани \tilde{W}_{2r} высекают подткани $W_{2\sigma}$, $W_{2(r-\rho)}$, $W_{2\rho}$, $W_{2(r-\sigma)}$ раз мерностей 2σ , $2(r-\rho)$, 2ρ , $2(r-\sigma)$. Из уравнений (32) следует, что кручение названных подтканей равно нулю.

16°. Семейства S_{α}^1 σ -мерных поверхностей \tilde{V}_{α} три-ткани $W_{2\sigma}$ определяются на поверхности $V_{2\sigma}$ при помощи вполне интегрируемых систем уравнений Пфаффа

$$S_{\alpha}^1 : \omega_{\alpha}^{\lambda} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Условия полной интегрируемости в силу (32), (27) имеют вид

$$d\omega_{\alpha}^{\lambda} = \omega_{\alpha}^{\mu} \wedge \omega_{\mu}^{\lambda}.$$

Дифференцируя внешним образом формы ω_{μ}^{λ} и пользуясь при этом формулами (5), (27), мы получим, что

$$d\omega_{\mu}^{\lambda} = 0,$$

т. е. тензор кривизны ткани $W_{2\sigma}$ равен нулю. Поскольку кручение три-ткани $\tilde{W}_{2\sigma}$ также равно нулю, то [4] подткань $W_{2\sigma}$ является параллелизуемой три-тканью. Поверхности V_{α} этой три-ткани будут интегральными поверхностями для распределений σ -мерных элементов Δ , со структурой идеала $J(K) = A(K) \cap B(K)$.

17°. Параллелизуемой оказывается и три-ткань $W_{2(r-\rho)}$, определяемая на поверхности $V_{2(r-\rho)}$ уравнениями

$$S_{\alpha}^{II} : \omega_{\alpha}^{\mu} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

поскольку ее структурные уравнения имеют вид

$$d\omega_{\alpha}^{\lambda} = \omega_{\alpha}^{\nu} \wedge \omega_{\nu}^{\lambda}, \quad d\omega_{\alpha}^{\hat{u}} = \omega_{\alpha}^{\hat{v}} \wedge \omega_{\hat{v}}^{\hat{u}}; \quad d\omega_{\nu}^{\mu} = 0.$$

Поверхности V_{r-p} , образующие три-ткань $W_{2(r-p)}$, являются интегральными поверхностями распределений $(r-p)$ -мерных элементов со структурой идеала $A(K)$.

18°. Семейства S_a^{III} p -мерных поверхностей V_p три-ткани W_{2p} определяются на поверхности V_{2p} при помощи вполне интегрируемых систем уравнений Пфаффа

$$S_a^{III} : \omega_a^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Условия полной интегрируемости этих систем в силу (32), (29) записываются в виде

$$d\omega_a^\lambda = \omega_a^b \wedge \omega_b^\lambda, \quad d\omega_a^{\hat{a}} = \omega_a^{\hat{b}} \wedge \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}}.$$

Дифференцируя внешним образом входящие в эти уравнения формулы Пфаффа ω_i^i и пользуясь при этом формулами (5), (29), мы получим, что компоненты тензора кривизны подткани W_{2p} совпадают с соответствующими компонентами тензора кривизны $b_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^i$ исходной три-ткани W_{2r} . В силу сказанного в п. 14°, среди этих компонент отличными от нуля могут быть лишь компоненты $b_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^h$. Последние подсчитываются по формуле

$$b_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^h = \gamma_{\hat{a}\hat{a}}^h \gamma_{\hat{b}\hat{b}}^{\hat{a}} \gamma_{\hat{c}\hat{c}}^{\hat{b}} K^{\hat{b}}, \quad (33)$$

которая равносильна формуле

$$B_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^h = e_{\hat{a}}^{\hat{a}} e_{\hat{b}}^{\hat{b}} e_{\hat{c}}^{\hat{c}} K.$$

Здесь $h = 1, 2, \dots, p$, а все остальные индексы принимают значения $\sigma + 1, \dots, p$. Поверхности, образующие три-ткань W_{2p} на поверхности V_{2p} , являются интегральными поверхностями распределений p -мерных элементов Δ_p , несущих структуру идеала $B(K)$

алгебры A .

19°. Три-ткань $W_{2(r-\sigma)}$ определяется на поверхности $V_{2(r-\sigma)}$ при помощи систем уравнений Пфаффа

$$S_a^{IV} : \begin{cases} \omega_a^\alpha = 0, \\ \omega_a^{\hat{u}} = 0, \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

условия полной интегрируемости которых записываются в виде

$$d\omega_a^\lambda = \omega_a^b \wedge \omega_b^\lambda + \omega_a^{\hat{v}} \wedge \omega_{\hat{v}}^\lambda,$$

$$d\omega_a^{\hat{a}} = \omega_a^{\hat{b}} \wedge \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}}, \quad d\omega_a^{\hat{u}} = \omega_a^{\hat{v}} \wedge \omega_{\hat{v}}^{\hat{u}}.$$

Производя обычным образом подсчет компонент тензора кривизны подткани $W_{2(r-\sigma)}$, мы найдем, что отличными от нуля могут быть лишь компоненты, равные $b_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^h$ (формула (33)). Поверхности $V_{r-\sigma}$ три-ткани $W_{2(r-\sigma)}$ являются интегральными поверхностями

распределений $(r - \sigma)$ -мерных элементов $\Delta_{r-\sigma}$, несущих структуру идеала $\Sigma(K) = A(K) + B(K)$.

20°. Как было отмечено в п. 8°, при $J(K) \neq \{0\}$ алгебра $B(K)$ не может быть унитальной. Поэтому здесь невозможна канонизация, имевшая место для случая $J(K) = \{0\}$. По той же причине подткани $W_{2\sigma}$, $W_{2(r-\sigma)}$, $W_{2\rho}$, $W_{2(r-\rho)}$, на которые расслаивается исходная три-ткань W_{2r} , нельзя рассматривать как вещественные реализации тканей над коммутативными ассоциативными унитальными подалгебрами алгебры A .

Так как $K \in B(K)$, то $K = K^b e_b$, и система (9) принимает следующий вид:

$$\delta K^a = 2\gamma_{bi}^a K^b \pi^i.$$

Так как $\text{rang } \|\gamma_{bi}^a K^b\| = \text{rang } K = \rho$, то эту систему можно разрешить относительно ρ вторичных форм π^i . Поэтому [5] компонентам K^b кривизны K всюду на многообразии $M_2(A)$ можно присвоить любые, постоянные значения $K^b = K_0^b$, не обращающие в нуль соответствующий минор матрицы $\|\gamma_{bi}^a K^b\|$. Доказана следующая

Теорема 7. Если кривизна K три-ткань $W_2(A)$ над алгеброй A является делителем нуля постоянного ранга ρ и при этом $J(K) \neq \{0\}$, то при помощи канонизации кривизне K можно присвоить на $M_2(A)$ постоянное значение K_0 , равное произвольному делителю нуля ранга ρ алгебры A , принадлежащему ее идеалу $B(K)$.

Отметим, что в результате такой канонизации компоненты b^{ij} тензора кривизны три-ткань W_{2r} , а следовательно, и совпадающие с ними компоненты тензоров кривизны подтканей $W_{2\sigma}$, $W_{2(r-\sigma)}$, $W_{2\rho}$ и $W_{2(r-\rho)}$ примут постоянные значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко В. В. О три-тканях над коммутативными ассоциативными алгебрами.—«Укр. геом. сб.». Вып. 18, Харьков, 1975, с. 136—151.
2. Bergnard D. Sur la géométrie différentielle des G-structures. Paris, 1960, 87 р.
3. Кручкович Г. И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях.—«Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1972, вып. XVI, с. 174—201.
4. Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей.—«Тр. геом. семинара ин-та науч. информ. АН СССР», 1969, т. 2, с. 7—31.
5. Остиану Н. М. О канонизации подвихового репера погруженного многообразия.—*Revue Math. Pures Appl. (RPR)*, 7, 1962, № 2, с. 231—240.

Поступила 26 января 1976 г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТРИ-ТКАНЕЙ W_6 С ЧАСТИЧНО КОСОСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРОМ КРИВИЗНЫ

В работе [1] были рассмотрены многомерные три-ткани специального вида, которые характеризуются тем, что их тензор кривизны удовлетворяет условию $b_{j(kl)}^i = 0$. Такие три-ткани называются тканями с частично кососимметричным тензором кривизны. В настоящей работе проводится исследование три-ткани такого вида на шестимерном дифференцируемом многообразии M^6 . Классификацию таких тканей оказалось возможным связать с классификацией контравариантных тензоров a^{ij} [2]. В частности, доказано, что кососимметричность тензора a^{ij} соответствует изоклининости три-ткани W_6 .

Так как изоклинические три-ткани с частично кососимметричным тензором кривизны были изучены в работе [1], то в настоящей работе подробно рассматривается пример неизоклинической три-ткани W_6 , соответствующей одному из канонических типов тензора a^{ij} . Для этой ткани получены уравнения структуры и построена ее геометрическая интерпретация в проективном трехмерном пространстве. С помощью этой интерпретации доказано, что рассматриваемая три-ткань является тканью Боля (B_m).

1. Уравнения структуры шестимерной три-ткани с частично кососимметрическим тензором кривизны

1. Пусть на дифференцируемом многообразии M^{2r} задана три-ткань W_6 , образованная r -мерными поверхностями. Три семейства поверхностей ткани определяются тремя вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа $\bar{\omega}^i = 0$, $\bar{b}^i = 0$, $\bar{\omega}^i + \bar{b}^i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, r$, удовлетворяющими уравнениям структуры [3]

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\omega}^i &= \bar{\omega}^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^l \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^k, \\ d\bar{b}^i &= \bar{\omega}^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^l \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^k. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$d\omega_j^i = \omega_k^k \wedge \omega_k^i + b_{jkl}^i \bar{\omega}^k \wedge \omega_l^i, \quad (2)$$

$$\nabla a_{jk}^l = b_{[j|l|k]}^i \bar{\omega}^l + b_{[j|k]l}^i \bar{\omega}^l, \quad (3)$$

где b_{jkl}^i и a_{jk}^i — тензоры кривизны и кручения ткани, связанные соотношениями

$$a_{(jk)}^i = 0, \quad (4)$$

$$b_{[jkl]}^i = 2a_{[jk]}^m a_{[ml]}^i. \quad (5)$$

Будем рассматривать три-ткань, тензор кривизны которой удовлетворяет условию

$$b_{j(kl)}^i = 0. \quad (6)$$

Такую три-ткань назовем три-тканью с частично кососимметричным тензором кривизны. Для таких тканей, как показано в работе [1], уравнения (3) принимают вид

$$\nabla a_{jk}^l = b_{[jkl]}^l (\bar{\omega}^l - \bar{\omega}^l), \quad (7)$$

а ковариантный дифференциал тензора кривизны записывается так:

$$\nabla b_{jkl}^l = c_{jklm}^l (\bar{\omega}^m - \bar{\omega}^m),$$

где

$$c_{jklm}^l = b_{jpm}^l a_{kl}^p + b_{jpl}^l a_{km}^p - b_{jpk}^l a_{lm}^p, \quad (8)$$

причем

$$b_{jpk}^l a_{lm}^p - b_{kpl}^l a_{lm}^p = b_{plm}^l a_{pk}^p + b_{klm}^p a_{pl}^l - b_{lpm}^p a_{pk}^l. \quad (9)$$

2. Будем рассматривать три-ткань W_6 с частично кососимметричным тензором кривизны на шестимерном дифференцируемом многообразии M^6 . Тогда все индексы в предыдущих формулах принимают значения (1, 2, 3). Введем дискриминантный ковариантный относительный тензор ε_{ijk} , определяемый следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ — четная подстановка,} \\ -1, & \text{если } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ — нечетная подстановка,} \\ 0, & \text{если среди } i, j, k \text{ есть одинаковые} \end{cases}$$

и контравариантный дискриминантный тензор $\varepsilon^{i,j,k}$, определяемый аналогично. Эти тензоры связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{jkl} &= 2\delta_i^l; \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{klm} &= 2\delta_{[i}^l \delta_{j]}^m. \end{aligned} \quad (10)$$

Легко проверить также, что ковариантные дифференциалы этих тензоров имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{ijk} \omega_l^l, \\ \nabla \varepsilon^{ijk} &= \varepsilon^{ijk} \omega_l^l. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь в силу (4) и (6) тензоры кручения и кривизны три-ткани W_6 можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{jk}^l &= \varepsilon_{jkl} a^{ll}, \\ b_{jkl}^l &= \varepsilon_{klm} b_{jl}^m. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти формулы в силу (10) эквивалентны следующим соотношениям:

$$a_{jk}^l = \frac{1}{2} a_{jk}^l \varepsilon^{jkl}, \quad b_{jl}^l = \frac{1}{2} b_{jl}^l \varepsilon^{klm}.$$

Соотношения (5) в силу (12) записутся в виде

$$b_k^{lk} = 2\varepsilon_{jkl} a^{ll} a^{jk}. \quad (13)$$

Соотношения (9) для три-ткани W_6 в силу (10) и (12) принимают вид

$$b_p^{ij} a^{pk} - b_p^{ik} a^{ip} - b_p^{ik} a^{pj} = b_p^{ip} a^{jk} - b_p^{pk} a^{ij}. \quad (14)$$

Системы уравнений Пфаффа (7) и (8) в силу (10), (11), (12) перепишутся так:

$$\nabla a^{ij} = a^{ij} \omega_p^p + \frac{1}{2} (b_k^{ij} - b_p^{ip} \delta_k^j) (\bar{\omega}^k - \tilde{\omega}^k), \quad (15)$$

$$\nabla b_k^{ij} = b_k^{ij} \omega_p^p + b_k^{ij} \varepsilon_{pqr} [2a^{pj} (\bar{\omega}^q - \tilde{\omega}^q) - a^{pq} (\bar{\omega}^j - \tilde{\omega}^j)]. \quad (16)$$

3. Классификация шестимерных три-тканей связана с классификацией контравариантных тензоров a^{ij} [2]. Рассмотрим, какой вид примет тензор a^{ij} на изоклипной три-ткани W_6 . Как показано в работе [4], такая ткань характеризуется условием

$$a_{jk}^i = a_{[j} \delta_{k]}^i,$$

т. е. аффинная связанность, индуцируемая тканью на многообразии M^6 , будет полусимметричной. Поэтому в силу (12) тензор a^{ij} изоклипной три-ткани запишется в виде

$$a^{ij} = \frac{1}{2} a_k \varepsilon^{kjl}, \quad (17)$$

т. е. является кососимметричным. Обратно, если тензор a^{ij} кососимметричен, то при $r=3$ его всегда можно записать в виде (17), откуда в силу (12) и (10) следует, что

$$a_{jk}^i = a_{[j} \delta_{k]}^i.$$

Таким образом, для того, чтобы три-ткань на M^6 была изоклипной, необходимо и достаточно, чтобы ее тензор a^{ij} был кососимметричен. Изоклипные три-тканы с частично кососимметричным тензором кривизны были рассмотрены нами в работе [1]. Дальнейшей целью является исследование три-тканей с частично кососимметричным тензором кривизны, не являющихся изоклипными.

Рассмотрим подробно пример три-ткани W_6 , соответствующей одному из возможных канонических типов тензора a^{ij} , указанных в книге [2], матрица которого приводится к виду

$$a^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Так как тензор a^{ij} не является кососимметричным, то рассматриваемая три-ткань не будет изоклипной. Найдем теперь компоненты тензора b_k^{ij} рассматриваемой ткани. Соотношения (13) с учетом (18) дают

$$b_k^{ik} = \begin{cases} -4 & \text{при } i=1, \\ 0 & \text{при } i=2,3. \end{cases} \quad (19)$$

Найдем остальные компоненты тензора b_k^{ij} . Решая систему (14),

состоящую из 27 линейных уравнений относительно b_k^{ij} , используя при этом соотношения (18) и (19), найдем, что

$$\begin{aligned} b_1^{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \\ b_2^{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ -4 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ b_3^{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

где p — произвольный параметр.

В силу (18) и (20) уравнения (15) и (16) сводятся к системе

$$\begin{cases} \omega_1^1 = 0, & \omega_1^2 = 0, & \omega_1^3 = -2(\bar{\omega}^2 - \tilde{\omega}^2), \\ \omega_2^1 = \frac{1}{2}p(\bar{\omega}^2 - \tilde{\omega}^2), & \omega_2^2 = 2(\bar{\omega}^1 - \tilde{\omega}^1), & \omega_2^3 = -\frac{1}{4}dp + \frac{1}{2}p(\bar{\omega}^1 - \tilde{\omega}^1), \\ \omega_3^1 = -2(\bar{\omega}^2 - \tilde{\omega}^2), & \omega_3^2 = 0, & \omega_3^3 = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений видно, что если точка A^* многообразия M^6 фиксирована, то обращаются в нуль все формы ω_j^i за исключением формы ω_2^3 . Уравнение, содержащее эту форму, принимает вид

$$\pi_2^3 = -\frac{1}{4}\delta p,$$

где через δ обозначено дифференцирование по вторичным параметрам и $\pi_2^3 = \omega_2^3(\delta)$. Последнее уравнение показывает, что за счет вторичного параметра, содержащегося в форме π_2^3 , величина p может быть приведена к нулю, ввиду чего и сама форма π_2^3 становится равной нулю. После этой канонизации предыдущие уравнения примут вид

$$\begin{cases} \omega_1^1 = 0, & \omega_1^2 = 0, & \omega_1^3 = -2(\bar{\omega}^2 - \tilde{\omega}^2), \\ \omega_2^1 = 0, & \omega_2^2 = 2(\bar{\omega}^1 - \tilde{\omega}^1), & \omega_2^3 = 0, \\ \omega_3^1 = -2(\bar{\omega}^2 - \tilde{\omega}^2), & \omega_3^2 = 0, & \omega_3^3 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

В силу (18) и (21) уравнения структуры (1) три-ткань записываются в виде

$$\begin{cases} d\bar{\omega}^1 = 2\omega^3 \wedge \tilde{\omega}^2, & d\tilde{\omega}^1 = -2\tilde{\omega}^3 \wedge \bar{\omega}^2, \\ d\bar{\omega}^2 = -2\bar{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^1, & d\tilde{\omega}^2 = 2\tilde{\omega}^2 \wedge \bar{\omega}^1, \\ d\bar{\omega}^3 = 2\bar{\omega}^1 \wedge (\tilde{\omega}^2 + \bar{\omega}^3), & d\tilde{\omega}^3 = -2\tilde{\omega}^1 \wedge (\bar{\omega}^2 + \tilde{\omega}^3). \end{cases} \quad (22)$$

Уравнение (2) при этом удовлетворяется тождественно. Уравнения (22) показывают, что рассматриваемая три-ткань является три-тканью на шестимерном групповом многообразии.

2. Реализация три-ткани W_6 в трехмерном проективном пространстве P^3

1. Пусть P^3 — трехмерное проективное пространство, отнесенное к точечному реперу $\{A_i\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Уравнения инфинитезимальных перемещений этого репера записываются в виде

$$dA_i = \sigma_i^j A_j,$$

где σ_i^j — формы Пфаффа, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства

$$d\sigma_i^j = \sigma_j^k \wedge \sigma_k^i.$$

Рассмотрим подгруппу проективных преобразований в P^3 , оставляющих инвариантной линейчатую квадрику S . Эта подгруппа будет группой движений неевклидова пространства 2S_3 , абсолютом которого является квадрика S . Запишем уравнение этой квадрики в виде

$$(X, X) = g_{ij} x^i x^j = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

Выберем репер $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ так, чтобы прямые $A_0 A_1, A_0 A_2, A_3 A_1, A_3 A_2$ были образующими этой квадрики, и нормируем его вершины условием $(A_0 A_3) = (A_1 A_2) = 1$. Тогда уравнение квадрики S примет вид

$$x^0 x^3 + x^1 x^2 = 0.$$

В силу этого формы σ_i^j , определяющие стационарную подгруппу квадрики S , будут удовлетворять соотношениям

$$\sigma_i^j + \sigma_{3-j}^{3-i} = 0. \quad (23)$$

Эти соотношения показывают, что группа движений пространства 2S_3 зависит от шести параметров, содержащихся в шести независимых формах Пфаффа

$$\sigma_0^0, \sigma_1^1, \sigma_0^1, \sigma_1^0, \sigma_0^2, \sigma_2^0.$$

В силу соотношений (23) уравнения структуры пространства приводятся к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma_0^0 = \sigma_0^1 \wedge \sigma_1^0 + \sigma_0^2 \wedge \sigma_2^0, \\ d\sigma_1^1 = \sigma_1^0 \wedge \sigma_0^1 + \sigma_1^2 \wedge \sigma_2^0, \\ d\sigma_0^1 = (\sigma_0^0 - \sigma_1^1) \wedge \sigma_0^1, \\ d\sigma_1^0 = \sigma_1^0 \wedge (\sigma_0^0 - \sigma_1^1), \\ d\sigma_0^2 = (\sigma_0^0 + \sigma_1^1) \wedge \sigma_0^2, \\ d\sigma_2^0 = \sigma_2^0 \wedge (\sigma_0^0 + \sigma_1^1). \end{array} \right. \quad (24)$$

Сравним теперь уравнения (24) со структурными уравнениями (22) изучаемой три-ткани W_6 . Легко убедиться непосредственной проверкой, что если положить

$$\bar{\omega}^1 = \frac{1}{2} (\sigma_1^1 - \sigma_0^0), \quad \bar{\omega}^2 = \frac{1}{2} (\sigma_0^0 + \sigma_1^1),$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^2 &= \sigma_0^2, & \bar{\omega}^2 &= \sigma_0^1, \\ \bar{\omega}^3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1^0 - \sigma_0^1), & \bar{\omega}^3 &= \frac{1}{2}(\sigma_2^0 - \sigma_0^2),\end{aligned}\quad (25)$$

то системы уравнений (22) и (24) совпадут. Поэтому мы можем интерпретировать геометрию рассматриваемой три-ткани W_6 посредством геометрии неевклидова пространства 2S_3 .

2. Пусть A^* — произвольная точка многообразия M^6 , несущего рассматриваемую три-ткань. Тогда ее стационарная подгруппа определяется системой уравнений

$$\bar{\omega}^i = \omega^i = 0,$$

которая в силу системы (25) эквивалентна уравнениям

$$\sigma_0^0 = \sigma_1^1 = \sigma_0^1 = \sigma_1^0 = \sigma_0^2 = \sigma_2^0 = 0. \quad (26)$$

С другой стороны, возьмем на абсолюте S три точки M, N, L , попарно не лежащие на одной образующей, и докажем, что стационарная подгруппа этой тройки точек также определяется системой (26). Легко доказать, что репер $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ можно выбрать так, чтобы $A_0 \equiv M, A_1 + A_3 \equiv N, A_2 + A_3 \equiv L$. Тогда условие неподвижности этих точек запишется в виде

$$\begin{aligned}dA_0 &= \theta_0 A_0, \\ d(A_1 + A_3) &= \theta_1 (A_1 + A_3), \\ d(A_2 + A_3) &= \theta_2 (A_2 + A_3).\end{aligned}\quad (27)$$

Легко проверить, что из условий (27) вытекают соотношения (26).

Таким образом, в нашей интерпретации точке $A^* \in M^6$ соответствует тройка точек абсолюта S , попарно не лежащих на одной его образующей. Этот факт будем записывать в виде

$$A^* = (M, N, L).$$

Найдем образы поверхностей ткани W_6 при рассматриваемом отображении M^6 в 2S_3 . Для этого рассмотрим три поверхности X, Y, Z из различных семейств поверхностей ткани, проходящих через точку A^* многообразия M^6 . Поверхность X первого семейства определяется системой $\bar{\omega}^a = 0$, которая в силу (25) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^0 - \sigma_1^1 = 0, \\ \sigma_0^2 = 0, \\ \sigma_0^1 - \sigma_1^0 = 0. \end{array} \right. \quad (28)$$

Система (28) вполне интегрируема. Уравнения инфинитезимальных перемещений репера $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ в силу (28) записываются в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} dA_0 = \sigma_0^0 A_0 + \sigma_0^1 A_1, \\ dA_1 = \sigma_0^1 A_0 + \sigma_0^0 A_1, \\ dA_2 = \sigma_2^0 A_0 - \sigma_0^0 A_2 - \sigma_0^1 A_3, \\ dA_3 = -\sigma_2^0 A_1 - \sigma_0^1 A_2 - \sigma_0^0 A_3, \end{array} \right. \quad (29)$$

где формы σ_0^0 , σ_0^1 , σ_2^0 будут базисными на каждой поверхности первого семейства. Из уравнений (29) видно, что при преобразованиях, определяемых этими уравнениями, прямая A_0A_1 остается неподвижной. Кроме того, точки $A_0 \pm A_1$ также являются неподвижными, так как

$$\begin{aligned} d(A_0 + A_1) &= (\sigma_0^0 + \sigma_0^1)(A_0 + A_1), \\ d(A_0 - A_1) &= (\sigma_0^0 - \sigma_0^1)(A_0 - A_1). \end{aligned}$$

Следовательно, каждому интегральному многообразию системы $\bar{\omega}^\alpha = 0$, т. е. каждой поверхности первого семейства в нашей интерпретации соответствует прямолинейная образующая абсолюта S с двумя неподвижными точками.

Аналогично второе семейство поверхностей три-ткани определяется системой уравнений $\bar{\omega}^\alpha = 0$, которая в силу (25) равносильна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^0 + \sigma_1^1 = 0, \\ \sigma_0^1 = 0, \\ \sigma_2^0 - \sigma_0^2 = 0. \end{array} \right.$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений репера на поверхности второго семейства имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} dA_0 = \sigma_0^0 A_0 + \sigma_0^1 A_2, \\ dA_1 = \sigma_0^1 A_0 - \sigma_0^0 A_1 - \sigma_0^2 A_3, \\ dA_2 = \sigma_0^2 A_0 + \sigma_0^0 A_2, \\ dA_3 = -\sigma_0^2 A_1 - \sigma_0^1 A_2 - \sigma_0^0 A_3. \end{array} \right. \quad (30)$$

Из уравнений (30) следует, что при этих преобразованиях прямая A_0A_2 и точки $A_0 \pm A_2$ остаются неподвижными.

Третье семейство поверхностей ткани определяется системой уравнений $\bar{\omega}^\alpha + \bar{\omega}^\alpha = 0$, которая в силу (25) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^1 = 0, \\ \sigma_0^0 + \sigma_0^2 = 0, \\ \sigma_1^0 + \sigma_2^0 = 0. \end{array} \right.$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений репера, соответствующие поверхностям третьего семейства, записываются так:

$$\left\{ \begin{array}{l} dA_0 = \sigma_0^0 A_0 + \sigma_0^1 (A_1 - A_2), \\ dA_3 = -\sigma_0^0 A_3 + \sigma_1^0 (A_1 - A_2), \\ dA_1 = \sigma_1^0 A_0 + \sigma_0^1 A_3, \\ dA_2 = -\sigma_1^0 A_0 - \sigma_0^0 A_3. \end{array} \right.$$

Из этих уравнений видно, что точка $A_1 + A_2$ будет неподвижной и поверхности третьего семейства можно поставить в соответствие

ствие эту точку или полярио сопряженную ей плоскость $[A_0, A_3, A_1 - A_2]$. Пусть P — точка пересечения образующих квадрики S , проходящих через точки $A_0 + A_1$ и $A_0 - A_2$, а Q — точка пересечения образующих квадрики, проходящих через точки $A_0 - A_1$ и $A_0 + A_2$ (рис. 1). Легко показать, что $PA_0 + (A_1 - A_2) + A_3$ и $Q = A_0 - (A_1 - A_2) + A_3$. Отсюда следует, что плоскость $[A_0, A_3, A_1 - A_2]$, соответствующая поверхности третьего семейства, определяется также точками A_0, P, Q .

Итак, наша интерпретация обладает следующими свойствами: точке исходного пространства M^6 соответствуют произвольные упорядоченные три точки на поверхности абсолюта, попарно не лежащие на одной образующей (рис. 1). При этом поверхности Z третьего семейства ткани, проходящей через точку $A^* = \{A_0, P, Q\}$, соответствует плоскость $[A_0, P, Q]$, определяемая этими точками. Поверхности X первого семейства, проходящей через A^* , соответствует образующая x первого семейства абсолюта, проходящая через точку A_0 , на которой фиксированы две точки, являющиеся проекциями на эту образующую точек P и Q образующими второго семейства поверхности S . Аналогично поверхности Y второго семейства, проходящей через точку A^* , соответствует образующая y второго семейства абсолюта S , проходящая через A_0 , на которой фиксированы две точки, являющиеся проекциями точек P и Q на эту прямую образующими первого семейства.

3. С помощью построенной интерпретации докажем замыкание фигуры Боля (B_m) на нашей три-ткани W_6 . Пусть Z_1 и Z_2 — две произвольные поверхности третьего семейства. В нашей интерпретации им соответствуют две плоскости и, следовательно, две кривые второго порядка, по которым эти плоскости пересекаются с абсолютом S . Обозначим их также через z_1 и z_2 (рис. 2). Возьмем на поверхности z_1 произвольную точку $N = \{A, P, Q\}$. Обозначим через A_1, P_1, Q_1 проекции точек A, P, Q образующими первого семейства и через A_2, P_2, Q_2 — проекции точек A, P, Q образующими второго семейства на кривую z_2 . Легко видеть, что точка $N_1^* = \{A_1, P_1, Q_1\}$ является точкой пересечения поверхности z_2 с поверхностью x_1 , проходящей через точку $N^* = \{A, P, Q\}$, и аналогично $N_2^* = \{A_2, P_2, Q_2\} \equiv y_1 \cap z_2$, где y_1 — поверхность второго семейства, проходящая через N^* . Проведем поверхность y_2 через точку N_1^* и поверхность x_2 через N_2^* . Найдем точку пересечения N_3^* поверхностей x_2 и y_2 . Это будет точка $\{A_3, P_3, Q_3\}$, где A_3, P_3, Q_3 будут четвертыми вершинами четырехугольников $AA_1A_2A_3, PP_1P_2P_3, QQ_1Q_2Q_3$, образованных прямолинейными образующими абсолюта.

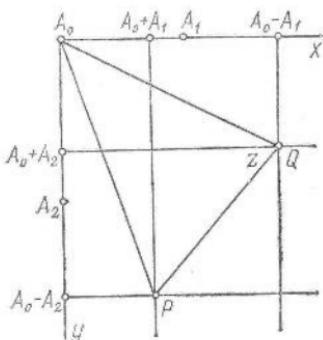


Рис. 1.

122

Проведем через точку $N_3^* = \{A_3, P_3, Q_3\}$ поверхность Z_3 . Докажем, что плоскость z_3 , соответствующая поверхности Z_3 , однозначно определяется плоскостями z_1 и z_2 и не зависит от выбора точки $N^* = \{A, P, Q\}$ на плоскости z_1 , соответствующей поверхности Z_1 . Рассмотрим гомологию H , определяемую плоскостью z_2 и полюсом T этой плоскости относительно квадрики S . При этой гомологии все точки плоскости z_2 , точка T и квадрика S переходят в себя. Покажем, что при этой гомологии плоскость z_1 переходит в плоскость z_3 . Действительно, прямые AA_3, PP_3, QQ_3 полярно сопряжены прямым A_1A_2, P_1P_2, Q_1Q_2 , лежащим в плоскости z_2 ; поэтому они проходят через полюс гомологии H и точки A и A_3 , P и P_3 , Q и Q_3 будут соответствующими в этой гомологии. Но так как $z_1 = [A, P, Q]$ и $z_3 = [A_3, P_3, Q_3]$, то плоскости z_1 и z_3 гомологичны. Отсюда следует, что плоскость z_3 не зависит от выбора точек A, P, Q на кривой z_1 , а только от положения плоскостей z_1 и z_2 . Отсюда следует, что на нашей три-ткани выполняется третья аксиома Мунфанг — Боля, что эквивалентно условию замыкания фигуры Боля [5, с. 207—209].

Таким образом, шестимерная ткань с тензором кривизны, удовлетворяющим условию (6), и тензором кручения, определяемым матрицей (18), является средней тканью Боля. Заметим, что всякая изоклиниальная ткань с частично кососимметричным тензором кривизны также является тканью Боля [4, 6]. В работе [7] была доказана необходимость условия (6) для замыкания фигуры Боля (B_m) на многомерной три-ткани. Вопрос о достаточности этого условия в общем случае остается открытым. Доказанное выше утверждение является еще одним шагом на пути к решению этого вопроса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Хасина В. И. О многомерных три-тканях с эластичными алгебрами.— «Сиб. мат. журн.», 1976, т. XVII, № 4, с. 945—949.
- Ходж B., Пидо D. Методы алгебраической геометрии. В 2-х т. Т. I. M., Изд-во иностр. лит., 1974. 462 с.
- Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей.— «Тр. геометр. семинара ин-та науч. информ. АН СССР», 1969, т. 2, с. 7—31.
- Акивис М. А. Об изоклиниальных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности.— «Сиб. мат. журн.», 1974, т. XV, № 1, с. 3—15.
- Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М., «Наука», 1967. 222 с.
- Акивис М. А. О локальной дифференцируемой квазигруппе и три-тканях, которые определяются тройкой гиперповерхностей.— «Сиб. мат. журн.», 1973, т. XIV, № 3, 467—474.

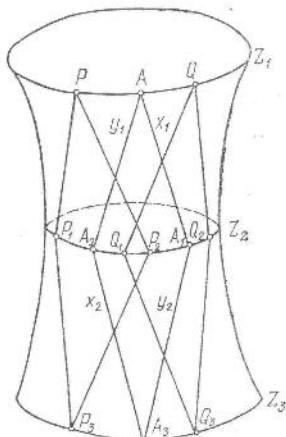


Рис. 2.

7. Акивис М. А. Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей. Исследования по теории квазигрупп и лун. Кишинев, «Штиинца», 1973. 127 с.

Поступила 26 января 1976 г.

О ЖЕСТКОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВНУТРЕННЕСКЛЕЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе [1] Б. В. Боярским рассматривались бесконечно малые изгибаия замкнутой поверхности S_m , полученной в результате внутреннего склеивания выпуклой поверхности F_0 , ограниченной кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, с выпуклыми поверхностями F_1, F_2, \dots, F_m . Им доказана жесткость поверхности S_m при условии, что она является звездной относительно начала координат и, кроме того, имеет достаточно малые «прогибы». Аналитически условие малости «прогибов» записывается следующим образом:

$$k_n^+(r, n^-) + k_n^-(r, n^+) < 0 \quad \text{вдоль } \Gamma \equiv \bigcup_{i=1}^m \gamma_i. \quad (1)$$

Здесь r — радиус-вектор поверхности; n — внешняя нормаль ее; k_n — нормальная кривизна, а индексами + и - отмечены предельные значения величин на Γ слева и справа. В этой же работе Б. В. Боярский высказал предположение о том, что условие (1) не является существенным для жесткости поверхности S_m . В связи с этим возникает задача отыскания других признаков жесткости такого типа поверхностей, позволяющих ослабить условие малости «прогибов».

В настоящей работе теорема Б. В. Боярского обобщается на более широкий класс поверхностей путем замены условия звездности поверхности более слабым условием, называемым нами α -звездностью. Вместе с тем ослабляется и условие малости «прогибов». В частности, класс жестких поверхностей, выделяемый в настоящей работе, содержит поверхности с довольно значительными «прогибами». Вопросам бесконечно малых изгибаний склеенных поверхностей посвящены также работы [2—6].

1. Формулировка результата

1°. Пусть F — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, снабженном декартовой прямоугольной системой координат $Oxyz$. Мы будем пользоваться также цилиндрической системой координат $Or\varphi z$, где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$. Зафиксируем некоторое число $\alpha \in [0, \infty)$ и в каждой координатной полуплоскости $\varphi = \text{const}$ рассмотрим однопараметрическое семейство кривых $z = cr^\alpha$, зависящее от параметра $c \in (-\infty, \infty)$.

Для краткости кривые этого семейства будем называть α -лучами. Доопределим понятие α -луча на случай $\alpha = \infty$. Для этого уравнение α -луча представим в виде $\rho = cz^{1/\alpha}$ ($z > 0$) и, перейдя к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, получим уравнение $\rho = c$ ($z > 0$), представляющее полупрямую, выходящую из оси ρ и параллельную оси z . Каждую полупрямую, выходящую из оси ρ и параллельную оси z , будем называть ∞ -лучом. В дальнейшем ∞ -лучи будем относить к α -лучам, считая для них $\alpha = \infty$. Будем считать, что число α не зависит от φ .

Определение. Поверхность F будем называть α -звездной ($0 < \alpha < \infty$) относительно точки O и оси z , если всякий α -луч имеет с F не более одной общей точки.

В частности, при $\alpha = 1$ данное определение совпадает с определением звездности поверхности относительно точки O . Пример α -звездной ($\alpha \neq 1$) поверхности изображен на рис. 1. Ниже, говоря об α -звездных поверхностях, мы всюду будем иметь в виду α -звездность относительно точки O и оси z . Отметим, что O -звездность поверхности F означает, что каждое сечние поверхности F плоскостью $z = \text{const}$ звездно относительно точки пересечения этой плоскости с осью z . Условие ∞ -звездности означает, что каждая часть поверхности F , лежащая по одну сторону от плоскости Oxy , взаимно однозначно проектируется на эту плоскость.

2°. Рассмотрим теперь замкнутую поверхность $S_m = F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_m$, полученную в результате внутреннего склеивания по терминологии И. Х. Сабитова [6] выпуклой поверхности F_0 с выпуклыми поверхностями F_1, F_2, \dots, F_m вдоль кривых $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, где $\gamma_i = F_0 \cap F_i$ — край поверхности F_i ($i = 1, 2, \dots, m$), а $\Gamma \equiv \bigcup_{i=1}^m \gamma_i$ — край поверхности F_0 . Предположим, что каждая поверхность F_i ($i = 0, 1, \dots, m$) кусочно-регулярна в классе C^3 и имеет гладкий край класса C^2 . Будем считать, что поверхности F_i ($i = 0, 1, \dots, m$) могут иметь ребра класса C^2 и вершины, в которых телесный угол, построенный на касательных к ребрам, не вырождается в плоскость. Кроме того, предполагаем, что поверхность S_m не содержит конических точек, и каждая асимптотическая ее неплоской области, где гауссова кривизна $K = 0$, пересекает границу либо плоской области, либо области, где $K > 0$ почти всюду.

Обозначим через $r = \{x, y, z\}$ радиус-вектор поверхности S_m и положим $r_\alpha = \{x, y, \alpha z\}$, где α — некоторое число, $\alpha \in [0, \infty)$, и $r_\infty = \{0, 0, z\}$. Ориентируем поверхность S_m внешним образом нормалью n и через k_n обозначим нормальную кривизну этой

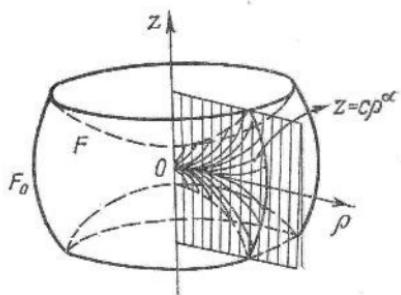


Рис. 1.

поверхности. На каждом ребре поверхности S_m будем различать два берега: «левый» и «правый», предельные значения величин на которых будем снабжать верхними индексами + и — соответственно. Будем рассматривать бесконечно малые изгибы поверхности S_m , предполагая, что изгибающие поля принадлежат классу C^1 в замыкании каждой регулярной части этой поверхности и триангульны на, возможно, имеющихся плоских областях.

Теорема. Если поверхность S_m α -звездна при некотором α ($0 < \alpha < \infty$) и вдоль Γ выполняется неравенство

$$k_n^+(r_a, n^-) - k_n^-(r_a, n^+) \leq 0, \quad (2)$$

то поверхность S_m — жесткая.

В частности, при $\alpha = 1$ сформулированная теорема совпадает с теоремой Б. В. Боярского [1]. В качестве следствий укажем некоторые классы жестких внутренесклейенных поверхностей S_1 , не удовлетворяющих условиям теоремы Б. В. Боярского.

Следствие 1. Если поверхность S_1 α -звездна ($\alpha \in (0, \infty)$, $\alpha \neq 1$), а поверхность F_0 касается вдоль своего края $\Gamma = \gamma_1$ некоторой поверхности, заданной в координатах $\rho\varphi$ уравнением $z = c(\varphi)\rho^\alpha$, то поверхность S_1 — жесткая.

Следствие 2. Пусть поверхность S_1 получена в результате зеркального выпучивания [2, с. 69] некоторого овалоида плоскостью $z = \text{const}$ и удовлетворяет перечисленным выше условиям регулярности, наложенным на поверхность S_m при $t = 1$. Тогда, если поверхность S_1 ∞ -звездна, то она жесткая.

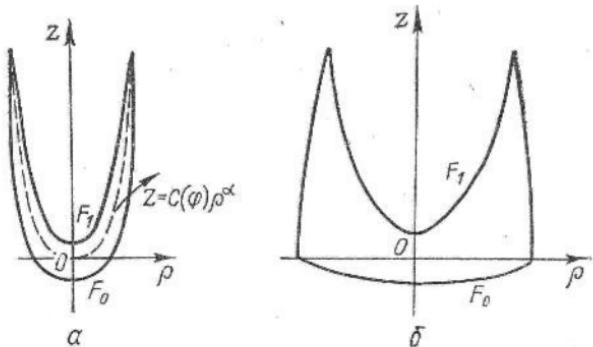


Рис. 2.

На рис. 2, а, б изображены сечения поверхностей S_1 , удовлетворяющих условиям следствий 1 и 2, плоскостью, проходящей через ось z . Дадим количественную оценку «прогибов» поверхности S_m , удовлетворяющей условиям теоремы. Рассмотрим произвольное ребро γ поверхности S_m . Пусть t — вектор внутренней главной нормали кривой γ ; n^\pm — угол между векторами t и n^\pm . Здесь и ниже отсчет углов мы производим от направления, назы-

ваемого первым (в данном случае от m), против движения часовой стрелки, если смотреть с конца касательной t к ребру. При этом за положительное направление обхода вдоль ребра мы принимаем то, которое оставляет «левый» берег слева. Пусть Φ — поверхность, заданная в координатах $\rho\varphi z$ уравнением $z = c(\varphi)\rho^\alpha$ ($0 \leq \alpha < \infty$) и проходящая через γ . В случае $\alpha = \infty$ под Φ будем понимать цилиндр $\rho = c(\varphi)$. Обозначим через n° вектор внешней нормали поверхности Φ , через θ° — угол между векторами t и n° и через χ — угол между векторами n° и n^+ (рис. 3). Угол $\vartheta = \theta^- - \theta^+$ назовем углом склеивания регулярных частей поверхности S_m , образующих ребро γ . Ниже будет показано, что неравенство (2) эквивалентно следующему:

$$0 \leq \vartheta \leq \pi - \chi + \arccotg(2 \operatorname{tg} \theta^\circ - \operatorname{ctg} \chi). \quad (3)$$

В частности, если γ является ребром зеркального выпучивания плоскостью $z = \text{const}$, то неравенство (3) вдоль γ выполняется автоматически.

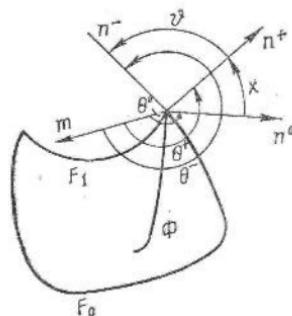


Рис. 3.

2. Вспомогательные предложения

1°. Следуя общей идее работ И. Н. Векуа и Б. В. Боярского [1, 4], доказательство теоремы проведем с помощью одной интегральной формулы, обобщающей известную формулу В. Бляшке на случай α -звездных поверхностей. Эта формула устанавливается в лемме 1.

Пусть ξ, η — криволинейные координаты на поверхности S_m ; g — дискриминант метрической формы этой поверхности; $d\sigma$ — элемент площади ее. Обозначим через V поле вращений и положим $\Delta = \frac{1}{Vg} \left(n, \frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)$. Пусть, далее, L — совокупность всех ребер поверхности S_m , ds — элемент длины дуги линии L . Вдоль L рассмотрим вектор $h \equiv (k_n^+ n^- + k_n^- n^+) \left(\frac{\partial k_n^-}{\partial k_n^+} \right)^2 \sin \vartheta$, где знак δ означает вариацию соответствующей величины.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$2 \iint_{S_m} (r_a, n) \Delta d\sigma = \begin{cases} \int_L (r_a, h) ds + (\alpha - 1)\lambda + \alpha\omega & \text{при } 0 \leq \alpha < \infty \\ \int_L (r_\infty, h) ds + \lambda + \omega & \text{при } \alpha = \infty, \end{cases}$$

где

$$\lambda = k \int_l d \{(k, r, V^+ - V^-) (V^+ + V^-)\},$$

$$\omega = \int_L d(r, V^-, V^+),$$

k — орт оси z .

Доказательство. Пусть F — регулярный кусок поверхности S_m , ограниченный кривой ∂F ; U — его изгибающее поле; $W = U + [r, V]$ — поле перемещений. Положим $P = [k, V]$ и рассмотрим тождество

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[P, \frac{\partial W}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[P, \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] = \{r(k, n) + k(r, n)\} \Delta \sqrt{g}.$$

С помощью формулы Грина получим интегральное равенство

$$\iint_F \{r(k, n) + k(r, n)\} \Delta d\sigma = \int_{\partial F} [P, dW].$$

Применяя последнюю формулу к каждому регулярному куску поверхности S_m и складывая результаты, найдем

$$\iint_{S_m} \{r(k, n) + k(r, n)\} \Delta d\sigma = \int [P^+, dW^+] - [P^-, dW^-].$$

Правую часть этого равенства представим в виде

$$J = \int [P^+ - P^-, dW^+] + [P^-, d(W^+ - W^-)]$$

и проинтегрируем по частям второе слагаемое, получим

$$J = \int [P^+ - P^-, dW^+] + [W^+ - W^-, dP^-] + \int d[P^-, W^+ - W^-].$$

В монографии [3, с. 438, 449] имеются формулы

$$V^+ - V^- = -\delta\vartheta t, \quad \frac{dV}{ds} = \delta k_n q + \delta\tau_g t, \quad \delta k_n^\pm = -\frac{k_n^\mp}{\sin\vartheta} \delta\vartheta,$$

где $q = [t, n]$, τ_g — геодезическое кручение полосы поверхности S_m . Пользуясь этими формулами, а также определением полей W и P , преобразуем выражение для J :

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2} \int_L \delta\vartheta \{r(k, t, dV^+ + dV^-) + k(r, t, dV^+ + dV^-) - \\ &- \frac{1}{2} \int_L \delta\vartheta \{(k, r, t) d(V^+ - V^-) + (k, r, dV^- - dV^+) t\} + \\ &+ \int_L d[P^-, W^+ - W^-] = \frac{1}{2} \int_L \{r(k, h) + k(r, h)\} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_L d\{(k, r, V^+ - V^-) (V^+ + V^-)\} + k \int_L d(r V^-, V^+). \end{aligned}$$

После умножения на вектор $2k$ получаем

$$2 \iint_{S_m} (r_2, n) \Delta d\sigma = - \int_L (r_2, h) ds + \lambda + 2\omega.$$

Здесь учтено, что $r + k(r, k) = r_2$. Применение формулы В. Бляшке [3, с. 447] к поверхности S_m дает

$$2 \iint_{S_m} (r, n) \Delta d\sigma = - \int_L (r, h) ds + \omega.$$

Вычитая это равенство из предыдущего и замечая, что $r_2 - r = r_\infty$, получим лемму 1 для случая $\alpha = \infty$. Для доказательства леммы в случае $0 < \alpha < \infty$ достаточно умножить формулу Бляшке на $\alpha - \alpha$, а предыдущую — на $\alpha - 1$ и результаты сложить. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы проведем с помощью оценки знаков левой и правой частей интегрального равенства, установленного в лемме 1. Для этого потребуются некоторые леммы оценочного характера.

Лемма 2. Если поверхность S_m α -звездна ($0 < \alpha < \infty$), то $(r_\alpha, n) > 0$ почти всюду на S_m .

Доказательство. Так как условие ∞ -звездности поверхности S_m эквивалентно тому, что составляющие ее части, лежащие по разные стороны от плоскости Oxy , взаимно однозначно проектируются на эту плоскость, то при $\alpha = \infty$ лемма 2 верна. Для доказательства леммы в случае $0 < \alpha < \infty$ рассмотрим произвольный α -луч $z = c\rho^\alpha$, пересекающий S_m . Из условия α -звездности поверхности S_m следует, что если R'_ρ — касательная к α -лучу, направленная в сторону возрастания параметра ρ , то в точке пересечения α -луча и поверхности будет $(n, R'_\rho) > 0$. С другой стороны, α -луч в пространстве может быть задан уравнением $R = \{\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, c\rho^\alpha\}$, где c и φ постоянны, откуда вытекает, что $\rho R'_\rho = \{x, y, az\} = r_\alpha$. Следовательно, $(r_\alpha, n) \equiv \rho (R'_\rho, n) > 0$ почти всюду на S_m .

Лемма 3. Если поверхность S_m α -звездна ($0 < \alpha < \infty$) и вдоль Γ выполняется неравенство (2), то вдоль L выполняется неравенство $(r_\alpha, h) \leq 0$.

Доказательство. Пусть γ -произвольное ребро поверхности S_m . Рассмотрим три возможных положения его:

1) $\gamma \in \Gamma$, в этом случае $\sin \vartheta \geq 0$. Следовательно, $(r_\alpha, h) \equiv \equiv (k_n^+ (r_\alpha, n^-) + k_n^- (r_\alpha, n^+)) \left(\frac{\delta k_n^-}{k_n^+} \right)^2 \sin \vartheta \leq 0$.

2) $\gamma \subset F_0$, $\gamma \notin \Gamma$. В этом случае $\sin \vartheta \geq 0$, $k_n^+ < 0$, $k_n^- < 0$, и поэтому $(r_\alpha, h) \leq 0$.

3) $\gamma \in F_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $\gamma \neq \gamma_i$. В этом случае $\sin \vartheta \leq 0$, $k_n^+ \geq 0$, $k_n^- \geq 0$, $(r_\alpha, n) \geq 0$, и лемма справедлива.

Лемма 4. Если поверхность S_m α -звездна ($0 < \alpha < \infty$), то $(\alpha - 1)\lambda + \alpha\omega \geq 0$ при $0 < \alpha < \infty$ и $\lambda + \omega = 0$ при $\alpha = \infty$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $I = \int_L d\{(k, r, V^+ - V^-)(V^+ + V^-)\}$. Следуя идее работы [4], вектор I представим

в виде $l = l_1 + l_2 + \dots + l_k$, где l_i обозначает приращение вектора $L \equiv (k, r, V^+ - V^-)(V^+ + V^-)$ на ребре $L_i \in L$. Если A_i — начало и B_i — конец ребра L_i , то $l_i = L_{B_i} - L_{A_i}$, где через L_c обозначено значение вектора L в точке C . На изолированных ребрах приращение вектора L равно нулю. В самом деле, для замкнутых ребер $A_i = B_i$ и $l_i = 0$; для незамкнутых ребер по непрерывности поля V на регулярных кусках имеем $V_{A_i}^+ = V_{A_i}^-$, $V_{B_i}^+ = V_{B_i}^-$ и вновь $l_i = 0$.

Теперь рассмотрим пересекающиеся ребра поверхности S_m . Суммируя выражения $l_i = L_{B_i} - L_{A_i}$ по пересекающимся ребрам и группируя слагаемые по соответствующим вершинам, получим $l = l_A + l_B + \dots + l_M$, где A, B, \dots, M — вершины, а l_c — сумма тех слагаемых, стоящих в правой части выражения для l , которые относятся к вершине C . Пусть в произвольной вершине C сходится n ребер L_1, L_2, \dots, L_n . Окрестность точки C будет разделена этими ребрами на n регулярных частей $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$. Для определенности будем считать, что L_i — общая граница кусков Φ_i и Φ_{i+1} ($i = 1, \dots, n$; $\Phi_{n+1} = \Phi_1$) и направление перехода от Φ_i к Φ_{i+1} противоположно движению часовой стрелки, если смотреть из вершины C . Пусть t_i — касательная к ребру L_i в точке C ($i = 1, 2, \dots, n$; $t_{n+1} = t_1$). Будем считать, что векторы t_i направлены так, что построенный на них многогранник расположен в отношении точки C так же, как и рассматриваемая окрестность. Если точка C является началом ребра L_i , то соответствующее слагаемое в сумме l_c будет равно $-L_c = -(k, r, V^+ - V^-)(V^+ + V^-)\}_{c} = (k, r, V_{i+1} - V_i)(V_{i+1} + V_i)$; если C — конец ребра L_i , то

$$\begin{aligned} L_c &= (k, r, V_i - V_{i+1})(V_{i+1} + V_i) = \\ &= -(k, r, V_{i+1} - V_i)(V_{i+1} + V_i). \end{aligned}$$

Здесь L_c — предел $L(M)$, когда M стремится к C , оставаясь в области Φ_i . Суммируя последние выражения по всем ребрам, образующим вершину C , получим

$$\begin{aligned} l_c &= -(k, r, V_2 - V_1)(V_2 + V_1) - \dots - (k, r, V_n - \\ &\quad - V_{n-1})(V_n + V_{n-1}) - (k, r, V_1 - V_n)(V_1 - V_n). \end{aligned}$$

Известно [4], что $V_{i+1} - V_i = -\mu_i t_i$, $V_{i+1} = V_1 - \sum_{j=1}^i \mu_j t_j$, $\sum_{j=1}^n \mu_j t_j = 0$, где μ_i — вариация угла склеивания кусков Φ_i и Φ_{i+1} . Пользуясь последними равенствами, для l_c получим два выражения:

$$\begin{aligned} l_c &= -\mu_1^2 (k, r, t_1) t_1 - \mu_2 (k, r, t_2) (2\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) - \dots - \\ &\quad \dots - \mu_n (k, r, t_n) (2\mu_1 t_1 + \dots + 2\mu_{n-1} t_{n-1} + \mu_n t_n), \\ l_c &= \mu_1^2 (k, r, t_1) t_1 + \mu_2 t_2 (k, r, 2\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) + \dots + \\ &\quad + \mu_n t_n (k, r, 2\mu_1 t_1 + \dots + 2\mu_{n-1} t_{n-1} + \mu_n t_n). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства и умножая результат из $\frac{1}{2}k$, получим

$$\lambda_c = kI_c = \{k(r, k) - r\} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mu_i \mu_j [t_i, t_j]. \quad (4)$$

2°. Рассмотрим интеграл $\omega = \int_L d(r, V^-, V^+)$. Аналогично предыдущему представим его в виде $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$, где ω_i — приращение произведения (r, V^-, V^+) на ребре L_i . Если значение этого произведения в точке C обозначить через $(r, V^-, V^+)_c$, то $\omega_i = (r, V^-, V^+)_{B_i} - (r, V^-, V^+)_{A_i}$, где A_i — начало, B_i — конец ребра L_i . В работе [4] доказано, что для изолированных ребер $\omega_i = 0$. Если ω_o — сумма всех слагаемых в выражении ω , которые относятся к вершине C , то там же доказано, что

$$\omega_o = r \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mu_i \mu_j [t_i, t_j].$$

Пусть сначала $0 < \alpha < \infty$. Умножая последнее равенство на $2 - \alpha$, а (4) на $\alpha - 1$ и складывая результаты, найдем

$$(\alpha - 1)\lambda_c + \alpha\omega_o = r_a \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mu_i \mu_j [t_i, t_j].$$

В случае $\alpha = \infty$ будет

$$\lambda_c + \omega_o = r_\infty \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mu_i \mu_j [t_i, t_j].$$

Как известно [4], вектор $\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mu_i \mu_j [t_i, t_j]$ лежит внутри сферического изображения многогранного угла, построенного на векторах t_1, \dots, t_n . Отсюда в силу α -звездности поверхности S_m следует, что

$$r_a \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mu_i \mu_j [t_i, t_j] \geq 0 \quad (0 < \alpha < \infty).$$

Суммируя эти неравенства по всем вершинам, получаем лемму 4.

3. Доказательство теоремы

Оценим знаки левой и правой частей интегрального равенства, установленного в лемме 1. Так как поверхность S_m кусочно-выпукла, а плоские куски ее предполагаются жесткими, то $\Delta \leq 0$ на S_m . По лемме 2 из α -звездности поверхности S_m следует, что $(r_a, n) > 0$ почти всюду на S_m . Следовательно, левая часть интегрального равенства леммы 1 неположительна. С другой стороны, из лемм 3 и 4 вытекает, что правая часть этого равенства неотрицательна. Отсюда заключаем, что $\Delta \equiv 0$ на S_m . Таким образом, доказана жесткость областей поверхности S_m , где $K > 0$

почти всюду. А так как каждая асимптотическая неплоской области $K > 0$ пересекает границу либо плоской области, либо области, где $K > 0$ почти всюду, то тем самым [3, с. 475—476] доказана жесткость всей поверхности S_m .

Для доказательства жесткости поверхности S_1 , удовлетворяющей условиям следствия 1, достаточно заметить, что если поверхность F_0 касается вдоль Γ поверхности $z = c(\varphi) \rho^\alpha$, то $(r_\alpha, n^+) = 0$, $k_n^+(r_\alpha, n^-) < 0$, и мы попадаем в условия теоремы. Установим теперь эквивалентность неравенств (2) и (3). Так как вектор r_α лежит в касательной плоскости к поверхности Φ , то неравенство (2) эквивалентно следующему:

$$\cos \theta^+ \sin (\chi + \vartheta) + \cos \theta^- \sin \chi \leq 0.$$

Замечая, что

$\theta^+ = \theta^0 + \chi$, $\theta^- = \theta^0 + \chi + \vartheta$ и $\cos \theta^0 \sin \chi \sin (\chi + \vartheta) \leq 0$, получаем

$$\operatorname{ctg} (\chi + \vartheta - \pi) \geq 2 \operatorname{tg} \theta^0 - \operatorname{ctg} \chi.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3). Справедливость следствия 2 вытекает из того, что вдоль ребер зеркального выпучивания овалоида неравенство (3) выполняется автоматически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярский Б. В. О жесткости некоторых составных поверхностей.— «Усп. мат. наук», 1959, т. 14, № 3, с. 141—146.
2. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М., «Наука», 1967. 280 с.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
4. Боярский Б. В., Векуа И. Н. Доказательство жесткости кусочно-регулярных замкнутых выпуклых поверхностей неотрицательной кривизны.— «Изв. АН СССР», сер. мат., 1958, т. 22, с. 165—176.
5. Фоменко В. Т. Некоторые результаты теории бесконечно малых изгибаний поверхностей.— «Мат. сб.», 1967, т. 72, № 3, с. 388—411.
6. Сабитов И. Х. Об одном условии жесткости составных поверхностей.— «Мат. заметки», 1967, т. 2, № 1, с. 105—114.

Поступила 26 января 1976 г.

УДК 513

А. В. ЧАКМАЗЯН

**ПОДМНОГООБРАЗИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ
С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОДРАССЛОЕНИЕМ НОРМАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ**

1. Ю. Г. Лумисте [1] определил p -мерную поднормализацию подмногообразия M^m в евклидовом пространстве E^n . Там доказано, что если M^m допускает p -мерную поднормализацию, то оно допускает также ортогональную $(n - m - p)$ -мерную поднормализацию.

В. Е. Чен и К. Яно [2] рассмотрели параллельное p -мерное подрасслоение нормального расслоения подмногообразия M^m риманова пространства V^n . Определения Чена и Яно совпадают с определением Ю. Г. Лумисте.

В настоящей работе изучается локальное строение подмногообразия M^m пространства постоянной кривизны V_c^n , допускающего параллельное p -мерное подрасслоение. Строение таких подмногообразий в случае $p=1$ изучено в работе [3]. Их строение тесно связано со строением тангенциально вырожденных многообразий и многообразий, несущих ортогональную сопряженную систему, которые были исследованы в работах М. А. Акивиса [4–6] и В. В. Рыжкова [7].

2. Известно, что неевклидовы пространства — эллиптические пространства S^n или гиперболическое пространство 1S_n — можно рассматривать как проективные пространства, метризованные при помощи некоторой квадрики, называемой абсолютом пространства [8] или как гиперсфера радиуса $R = 1/\sqrt{c}$ в евклидовом E^{n+1} (при $c > 0$) или псевдоевклидовом ${}^1E^{n+1}$ (при $c < 0$) с отождествленными диаметрально противоположными точками. Пользуемся подвижным репером, который составлен (в терминах второй интерпретации) из радиуса-вектора \boldsymbol{x} точки $x \in V_c^n$ и из n единичных попарно ортогональных векторов e_1, \dots, e_n , ортогональных к \boldsymbol{x} . Тогда $(e_J, e_K) = \delta_{JK}$, а при $c = 0$, кроме того, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{c}$, $(\boldsymbol{x}, e_J) = 0$, $(J, K, L = 1, 2, \dots, n)$.

Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера записываются в виде [9]

$$d\boldsymbol{x} = \omega^J e_J, \quad (1)$$

$$de_J = -c\omega^J \boldsymbol{x} + \omega_J^K e_K, \quad \omega_J^K + \omega_K^J = 0, \quad (2)$$

где пфаффовы формы ω^J и ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_J^K, \quad (3)$$

$$d\omega_J^K = \omega_L^K \wedge \omega_J^L + c\omega^J \wedge \omega_J^K. \quad (4)$$

3. Рассмотрим m -мерное подмногообразие M^m , погруженное в n -мерное пространство V_c^n постоянной кривизны c . Тогда возникает его касательное и нормальное векторные расслоения $T(M^m)$ и $N(M^m)$. К этим расслоениям можно присоединить ортонормированный подвижный репер, так что

$$e_i \in T_x(M^m) \quad (i, j, k = 1, \dots, m),$$

$$e_\alpha \in N_x(M^m) \quad (\alpha, \beta, \gamma = m+1, \dots, n).$$

Из [1] следует, что в таком случае

$$\omega^\alpha = 0. \quad (5)$$

Дифференцируя (5) с помощью (3), получим $\omega_i^a \wedge \omega^i = 0$. Отсюда в силу леммы Картана будем иметь

$$\omega_i^a = b_{ij}^a \omega^j, \quad b_{ij}^a = b_{ji}^a. \quad (6)$$

Величины b_{ij}^a образуют второй фундаментальный или асимптотический тензор подмногообразия M^m . Формы ω_j^i определяют аффинную связность без кручения в касательном расслоении $T(M^m)$ подмногообразия M^m . Форма кривизны Ω_j^i этой связности в силу (4), (6) имеет вид

$$\Omega_j^i \equiv d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = - \sum_a b_{ik}^a b_{jl}^a \omega^k \wedge \omega^l + c \omega^i \wedge \omega^j.$$

Отсюда следует, что тензор кривизны этой связности выглядит следующим образом:

$$R_{jke}^i = - \sum_a b_{i[k}^a b_{l]e}^a + c \delta_{i[k} \delta_{l]e}. \quad (7)$$

Формы ω_β^a определяют связность в нормальном расслоении $N(M^m)$, которую называют нормальной связностью [10]. Форма кривизны этой связности имеет в силу уравнений (4) и (6) вид

$$\Omega_\beta^a \equiv d\omega_\beta^a - \omega_\beta^i \wedge \omega_i^a = - \sum_i b_{ik}^a b_{il}^a \omega^k \wedge \omega^l,$$

а ее тензор кривизны имеет вид

$$R_{\beta kl}^a = - \sum_i b_{i[k}^a b_{l]l}^a. \quad (8)$$

Считают, что нормальная связность является плоской, если результат параллельного переноса любого нормального вектора ξ не зависит от пути на многообразии M^m . Нормальная связность будет плоской тогда и только тогда, когда ее форма кривизны Ω_β^a тождественно обращается в нуль, что равносильно условию $R_{\beta kl}^a = 0$.

4. Пусть N^p является p -мерным подрасслоением нормального расслоения $N(M^m)$ подмногообразия M^m . Подрасслоение N^p называется параллельным [2], если ковариантный дифференциал каждого вектора из N^p не имеет компоненты в подпространстве N^{n-m-p} , ортогонально дополняющем N^p в $N(M^m)$.

Выберем репер в $N(M^m)$ так, чтобы его векторы e_ρ ($\rho, \pi, \sigma = m+1, \dots, m+p$) принадлежали подрасслоению N^p , а векторы e_a ($a, b, c = m+p+1, \dots, n$) — дополнительному подрасслоению N^{n-m-p} . Тогда любой вектор $\xi \in N^p$ может быть представлен в виде $\xi = \xi^\rho e_\rho$.

В силу (2) имеем

$$d\xi = \xi^\pi \omega_\pi^i e_i + (d\xi^\rho + \xi^\pi \omega_\pi^\rho) e_\rho + \xi^\sigma \omega_\sigma^a e_a.$$

Отсюда видно, что p -мерное подрасслоение N^p будет параллельным тогда и только тогда, когда

$$\xi^\rho \omega_\rho^a = 0$$

при любых $\xi^{m+1}, \dots, \xi^{m+p}$. Отсюда следует, что

$$\omega_p^a = 0. \quad (9)$$

В силу (9) из (2) получим $\omega_p^a = 0$. Это значит, что если подраслоение N^p является параллельным, то будет параллельным и ортогональное $(n - m - p)$ -мерное подраслоение N^{n-m-p} .

Внешнее дифференцирование (9) в силу (6) дает

$$\sum_i b_{\bar{i}k}^{\bar{a}} b_{\bar{i}l}^a = 0. \quad (10)$$

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 1. Нормальное подраслоение N^p подмногообразия M^m будет параллельным тогда и только тогда, когда m -параметрическое семейство p -мерных плоскостей в V_c^n образует тангенциально вырожденную поверхность ранга m размерности $m + p$ [4].

Доказательство. Пусть M^m допускает параллельное p -мерное подраслоение N^p . Рассмотрим подмногообразие M^{m+p} , образованное этим p -мерным подраслоением N^p . Пусть

$$y = \sqrt{1 - c \sum_{\pi} (y^{\pi})^2} x + y^{\pi} e_{\pi} \quad (11)$$

произвольная точка этого подмногообразия.

В точке x подмногообразия M^{m+p} касательная плоскость определяется векторами $\{e_i, e_{\pi}\}$. Дифференцируя (11) и имея в виду (1), (2) и (9), получим

$$dy = -\frac{c \sum_{\pi} y^{\pi} dy^{\pi}}{\sqrt{1 - c \sum_{\pi} (y^{\pi})^2}} x + \left(\sqrt{1 - c \sum_{\pi} (y^{\pi})^2} \omega^i + y^{\pi} \omega_p^i \right) e_i + (dy^{\pi} + y^{\pi} \omega_p^{\pi}) e_{\pi}. \quad (12)$$

Отсюда ясно, что касательная $(m + p)$ -мерная плоскость к подмногообразию M^{m+p} в точке y определяется точкой x и векторами e_i, e_{π} и не зависит от положения точки y на p -мерном подпространстве N_x^p , а зависит только от положения точки x на подмногообразии M^m . Поэтому M^{m+p} является тангенциально вырожденным подмногообразием ранга m , размерности $m + p$.

Теперь докажем обратное. Допустим, что p -мерное подраслоение N^p нормального расслоения M^m образует тангенциально вырожденное подмногообразие M^{m+p} размерности $m + p$ ранга m . Тогда касательная плоскость к M^{m+p} во всех точках его образующей N_x^p должна оставаться постоянной. Если записать точку образующей N_x^p в виде (11), то отсюда вытекает, что на многообразии

M^{m+p} должно тождественно выполняться условие $y^a \omega_p^a = 0$. Но это означает, что подмногообразие M^m допускает p -мерное параллельное подрасслоение.

Теорема 1 показывает, что понятие подмногообразия M^m , допускающего параллельное p -мерное подрасслоение N^p (см. [2]), совпадает с введенным ранее понятием подмногообразия M^m , допускающего p -мерную нормализацию, которое в [1] определяется условием, фактически совпадающим со вторым утверждением теоремы 1.

5. Теперь определим фокальные образы подмногообразия M^{m+p} . Для этого рассмотрим точку

$$y = \sqrt{1 - c \sum_n (y^n)^2} x + y^a e_a,$$

которая принадлежит образующей N_x^p подмногообразия M^{m+p} . Точку y назовем фокальной, если для некоторых смещений $dy \in N_x^p$. Все фокальные точки на N_x^p образуют некоторое многообразие, которое называется фокальной поверхностью F , образующей N_x^p [4]. Из соотношения (12) следует, что для фокусов имеют место уравнения

$$\left(\sqrt{1 - c \sum_n (y^n)^2} \delta_{ij} - \sum_p y^p b_{ij}^p \right) \omega^i = 0.$$

Положив в этих уравнениях $y^n / \sqrt{1 - c \sum_n (y^n)^2} = z^n$, получим

$$\left(\sum_p z^p b_{ij}^p - \delta_{ij} \right) \omega^i = 0.$$

Для того чтобы эта система уравнений имела нетривиальное решение относительно ω^i , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\det \left(\sum_p z^p b_{ij}^p - \delta_{ij} \right) = 0. \quad (13)$$

Это будет уравнением фокальной поверхности F , принадлежащей N_x^p , которая является алгебраической поверхностью порядка m размерности $p-1$.

Аналогично мы можем получить уравнение фокальной поверхности Φ подмногообразия M^{n-p} , которое образуется нормальным подрасслоением N^{n-m-p} . Это уравнение имеет вид

$$\det \left(\sum_a x^a b_{ij}^a - \delta_{ij} \right) = 0 \quad (14)$$

и определяет в N^{n-m-p} алгебраическую поверхность порядка m размерности $n-m-p-1$.

Теорема 2. Если фокальная поверхность F подмногообразия M^{m+p} не имеет кратных компонент, то фокальная поверхность Φ подмногообразия M^{n-p} распадается на m плоскостей

размерности $n - m - p - 1$. Аналогично, если фокальная поверхность Φ не имеет кратных компонент, то фокальная поверхность F распадается на m плоскостей размерности $p - 1$.

При доказательстве этой теоремы мы используем метод, развитый в работе [4].

Доказательство. Пусть фокальная поверхность F не имеет кратных компонент. Тогда найдется прямая $e_x = \{x, e_{m+1}\}$, которая пересекает F в m различных точках.

Уравнение e_x имеет вид $y^{m+1} \neq 0, y^{m+2} = \dots = y^{m+p} = 0$. Фокусы на этой прямой определяются из уравнения

$$\det(z^{m+1}b_{ij}^{m+1} - \delta_{ij}) = 0.$$

Это будет характеристическое уравнение для b_{ij}^{m+1} . Так как по условию все фокусы разные, то это характеристическое уравнение должно иметь все различные корни, т. е. b_{ij}^{m+1} должен иметь различные собственные значения. Тогда тензор b_{ij}^{m+1} приводится к диагональному виду $b_{ij}^{m+1} = b_i^{m+1}\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, и суммирования по индексам i здесь нет.

Из (10) получим $b_k^{m+1}b_{lk}^a - b_l^{m+1}b_{kl}^a = 0$ или $(b_k^{m+1} - b_l^{m+1})b_{lk}^a = 0, k \neq l$. Но так как $b_k^{m+1} \neq b_l^{m+1}$ при $k \neq l$, то $b_{lk}^a = 0$ при $k \neq l$. Это означает, что асимптотические тензоры b_{ij}^a приводятся к диагональному виду. Ввиду этого уравнение (14) переписывается так:

$$\prod_{i=1}^m (\sum_a x^a b_i^a - 1) = 0.$$

Следовательно, фокальная поверхность Φ распадается на m плоскостей размерности $n - m - p - 1$. Повторяя то же самое рассуждение и меняя местами F и Φ , получим второе утверждение теоремы. Из теоремы 2 следует, что если подмногообразие M^m допускает p -мерное параллельное подрасслоение и фокальные поверхности F и Φ не имеют кратных компонент, то асимптотические тензоры b_{ij}^a, b_{ij}^b одновременно приводятся к диагональному виду. Отсюда следует, что на подмногообразии M^m существует ортогональная сопряженная сеть, т. е. сеть линий кривизны [5]. Кроме того, из (8) следует, что $R_{\beta\gamma\lambda}^a = 0$, т. е. нормальная связность является плоской. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 3. Если подмногообразие M^m допускает p -мерное параллельное подрасслоение и фокальные поверхности F и Φ не имеют кратных компонент, то подмногообразие M^m несет сеть линий кривизны и его нормальная связность будет плоской.

6. Рассмотрим случай, когда $p = 1$, т. е. когда подмногообразие M^m допускает одномерное параллельное нормальное подрасслоение. Этот случай рассмотрен ранее в [3]. В этом случае мы имеем одномерное нормальное подрасслоение и дополнительное к нему

$(n - m - 1)$ -мерное нормальное подрасслоение. Фокальные поверхности этих расслоений будут иметь соответственно уравнения:

$$\Phi : \det (x^n b_{ij}^n - \delta_{ij}) = 0,$$

$$F : \det \left(\sum_{\pi_1} x^{\pi_1} b_{ij}^{\pi_1} - \delta_{ij} \right) = 0,$$

где $\pi_1, \rho_i = m + 1, \dots, n - 1$. Тензор b_{ij}^n назовем основным тензором одномерного нормального подрасслоения. Фокальная поверхность Φ сводится к некоторой системе точек на прямой, являющейся слоем нормального подрасслоения. Симметрическую матрицу $\|b_{ij}^n\|$ можно подходящим преобразованием репера в $T_x(M^m)$ привести к каноническому виду.

Общий случай рассматривался в [3]. Здесь мы приведем подробное изложение для частного случая, когда тензор b_{ij}^n имеет два различных собственных значения λ_1, λ_2 кратности соответственно r и s ($r + s = m$).

В каждом касательном слое подмногообразия M^m имеем два ортогональных подпространства Δ_r, Δ_s размерностей r и s , где $r + s = m$, инвариантных по отношению к тензору b_{ij}^n , соответствующих его собственным значениям λ_1, λ_2 .

Теперь специализируем построенный выше репер таким образом, чтобы векторы $e_{i_1}, (i_1, j_1 = 1, \dots, r)$ принадлежали подпространству Δ_r , а векторы $e_{a_1}, (a_1, b_1 = r + 1, \dots, m)$ — подпространству Δ_s . Тогда имеем

$$b_{i_1 j_1}^n = \lambda_1 \delta_{i_1 j_1}, \quad b_{a_1 b_1}^n = \lambda_2 \delta_{a_1 b_1}, \quad b_{i_1 a_1}^n = 0. \quad (15)$$

Запишем матрицы $B^{\pi_1} = \|B_{ij}^{\pi_1}\|$ в блочной форме:

$$B^{\pi_1} = \begin{vmatrix} B_{i_1 j_1}^{\pi_1} & B_{i_1 a_1}^{\pi_1} \\ B_{a_1 i_1}^{\pi_1} & B_{a_1 b_1}^{\pi_1} \end{vmatrix},$$

где $\|B_{i_1 j_1}^{\pi_1}\|, \|B_{a_1 b_1}^{\pi_1}\|$ — квадратные матрицы порядка соответственно r, s , а матрицы $\|B_{i_1 a_1}^{\pi_1}\|, \|B_{a_1 i_1}^{\pi_1}\|$ — прямоугольные. В силу (15) соотношения (10) примут вид $(\lambda_1 - \lambda_2) b_{a_1 i_1}^{\pi_1} = 0$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Отсюда следует, что

$$b_{a_1 i_1}^{\pi_1} = 0 \text{ при } a_1 \neq i_1. \quad (16)$$

Тогда матрицы B^{π_1} приводятся к блочно-диагональному виду

$$B^{\pi_1} = \begin{vmatrix} B_{i_1 j_1}^{\pi_1} & 0 \\ 0 & B_{a_1 b_1}^{\pi_1} \end{vmatrix}$$

Отсюда следует, что подмногообразие M^m несет двухкомпонентную сопряженную ортогональную систему [6].

М. А. Акивис в [6] рассматривает строение двухкомпонентных неприводимых сопряженных систем на m -мерных подмногообразиях проективного пространства размерности n ($m < n$) и дает классифи-

кацию таких подмногообразий в зависимости от строения их окрестности второго порядка.

Для форм $\omega_{i_1}^n, \omega_{a_1}^n, \omega_{i_1}^{\pi_1}, \omega_{a_1}^{\pi_1}$, если учесть (15) и (16), мы получаем выражения

$$\begin{aligned}\omega_{i_1}^n &= \lambda_1 \omega^{i_1}, & \omega_{a_1}^n &= \lambda_2 \omega^{a_1}, \\ \omega_{i_1}^{\pi_1} &= b_{i_1 i_1}^{\pi_1} \omega^{i_1}, & \omega_{a_1}^{\pi_1} &= b_{a_1 b_1}^{\pi_1} \omega^{b_1},\end{aligned}\quad (17)$$

Если внешним образом продифференцировать первую группу уравнений (17), то получим

$$\begin{aligned}d\lambda_1 \wedge \omega^{i_1} + (\lambda_2 - \lambda_1) \omega_{a_1}^{i_1} \wedge \omega^{a_1} &= 0, \\ d\lambda_2 \wedge \omega^{a_1} + (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_{i_1}^{a_1} \wedge \omega^{i_1} &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что формы $\omega_{a_1}^{i_1} = -\omega_{i_1}^{a_1}$ главные. Их выражение через базисные формы имеет вид

$$\omega_{a_1}^{i_1} = C_{i_1 a_1 b_1} \omega^{b_1} + C_{a_1 i_1 i_1} \omega^{i_1}, \quad (18)$$

где

$$C_{i_1 a_1 b_1} = C_{i_1 b_1 a_1}, \quad C_{a_1 i_1 i_1} = C_{a_1 i_1 i_1}.$$

Теперь докажем, что распределения Δ_r, Δ_s инволютивны. Распределение Δ_r на M^m определяется системой уравнений

$$\omega^{a_1} = 0. \quad (19)$$

В силу (18) из (3) получим

$$d\omega^{a_1} = -C_{a_1 i_1 i_1} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_1} - (C_{i_1 a_1 b_1} \omega^{b_1} + \omega_{b_1}^{a_1}) \wedge \omega^{b_1}.$$

Здесь первая группа слагаемых равна нулю ввиду симметричности $C_{a_1 i_1 i_1}$. В результате этого $d\omega^{a_1} = 0$ является алгебраическим следствием уравнений системы (19), т. е. система уравнений (19) будет вполне интегрируемой. Тогда система уравнения $\omega^{a_1} = 0$ определяет на M^m s -параметрическое семейство r -мерных подмногообразий M' , касательными слоями которых является Δ_r . Точно таким же образом можно доказать, что распределение Δ_s , определяемое на M^m системой уравнений $\omega^{i_1} = 0$, будет инволютивным. Тогда система уравнений $\omega^{i_1} = 0$ определяет на подмногообразии M^m r -параметрическое семейство s -мерных подмногообразий M^s , касательными слоями которых являются Δ_s . Такие сопряженные системы называются голономными [6]. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 3. Если основной тензор b_{ij}^n одномерного нормального подрасслоения подмногообразия M^m приводится к диагональному виду и имеет два различных собственных значения λ_1, λ_2 кратности, соответственно равной r, s ($r + s = m$), то многообразие M^m несет двухкомпонентную голономную ортогональную сопряженную систему поверхностей размерностей r, s .

7. Теперь вычислим компоненты тензоров кривизны связностей в нормальных расслоениях. В силу (15), (16) из (8) получим

следующие компоненты тензора кривизны связности в нормальном расслоении:

$$R_{\pi_1 l_1 l_1}^n = 0, R_{\pi_1 a_1 b_1}^n = 0, R_{\pi_1 a_1 i_1}^n = 0, R_{\pi_1 a_1 i_1}^{\rho_1} = 0,$$
$$R_{\pi_1 l_1 l_1}^{\rho_1} = - \sum_{k_1} b_{k_1 | l_1}^{\pi_1} b_{k_1 | l_1}^{\rho_1}, R_{\pi_1 a_1 b_1}^{\rho_1} = - \sum_{c_1} b_{c_1 | a_1}^{\pi_1} b_{c_1 | b_1}^{\rho_1}.$$

Отсюда следует, что группа голономии связности в нормальном расслоении сохраняет 1-мерную и $n-m$ — 1-мерную плоскости, параллельные подрасслоению, как и следовало ожидать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лумисте Ю. Г. К теории многообразий плоскостей евклидова пространства.— «Учен. зап. Тартусск. ун-та», 1966, вып. 192, с. 12—46.
2. Chen Bang-Yen, Yano Kentaro. Submanifolds imbilical with respect to a non-parallel normal subbundle.— Kodai Math. Semin. Repts., 1973, vol. 25, N 3, p. 289—296.
3. Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В. Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем.— «Изв. вузов. Математика», 1974, № 5 (144), с. 148—157.
4. Акивис М. А. Фокальные поверхности ранга r .— «Изв. вузов. Математика», 1957, № 1, с. 9—19.
5. Акивис М. А. О строении многомерных поверхностей, несущих сеть линий кривизны.— ДАН СССР, 1963, т. 149, № 6, с. 1247—1249.
6. Акивис М. А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем. «Тр. геометр. семинара», 1966, т. 1, с. 7—31.
7. Рыжков В. В. Сопряженные системы на многомерных поверхностях.— «Тр. Моск. мат. о-ва», 1958, т. 7, с. 179—226.
8. Розенфельд Б. А. Невевклидовы пространства. М., «Наука», 1969, 547 с.
9. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М., Изд-во Моск. ун-та, 1960. 307 с.
10. Chen Bang-Yen. Geometry of Submanifolds. New-York, 1973. 120 p.

Поступила 20 марта 1976 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Бабичев А. Н. Об уклонении графиков сферических отображений выпуклых поверхностей	3
Белоусов Ю. Ф. Теоремы о покрытии плоских фигур	10
Бланк Я. П., Николаенко М. А. К геометрии пфаффовых и монжевых многообразий	18
Буяло С. В. Об экстремальном случае одной оценки объема риманова многообразия	23
Выпливина Р. П. Биэрмитовы прямые над тензорными произведениями тел	27
Игнатенко В. Ф. О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^n	35
Игнатенко В. Ф. Об алгебраической поверхности шестого порядка с двумя сетями переноса	46
Кованцов Н. И. Об одном обобщении минимальных поверхностей	48
Кованцов Н. И., Ильинченко В. Я. Инфлексионно-параболические комплексы прямых в гиперболическом пространстве	57
Масальцев Л. А. Принцип минимума для собственных значений лапласiana гиперповерхности евклидова пространства	69
Масальцев Л. А. Некоторые оценки первого собственного значения лапласiana гиперповерхности пространства постоянной кривизны	85
Милка А. Д. Кратчайшая линия на поверхности вращения	91
Милка А. Д. Кратчайшая, все точки которой особые	95
Сенькин Е. П. Об изгибаии выпуклой поверхности с данной граничной полосой	98
Тимошенко В. В. О три-тканях над алгеброй, кривизна которых является делителем нуля	102
Федорова В. И. Об одном классе три-тканей W_6 с частично кососимметричным тензором кривизны	115
Фоменко В. Т., Марков П. Е. О жесткости одного класса внутренне склеенных поверхностей	124
Чакмазян А. В. Подмногообразия пространства постоянной кривизны с параллельным подразделением нормального расслоения	132

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК
Республиканский межведомственный тематический
научный сборник

Выпуск 20

Харьков, издательское объединение «Вища школа»

Редактор *A. П. Гужва*
Обложка художника *A. И. Удовенко*
Художественный редактор *A. С. Романова*
Технический редактор *L. Т. Момот*
Корректоры *L. A. Федоренко, M. F. Христенко*

Информ. бланк № 488

Сдано в набор 11. 01. 77 г. Подписано в печать 14. 3.
77 г. Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага типографская № 2.
9425 усл. печ. л. 9,9 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд.
№ 493. БЦ 50033. Зак. 7-25. Цена 1 р. 49 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003,
Харьков, 3, Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфния» Госкомиздата УССР в Харьковской городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Харьков-3, Университетская, 16. Зак. 595.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Об уклонении графиков сферических отображений выпуклых поверхностей. Бабичев А. Н.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 3—10.

Для близких, в смысле расстояния по Хаусдорфу, полных выпуклых гиперповерхностей устанавливается возможность такого сопоставления их точек и внешних нормалей в них, при котором будут одновременно близки и точки и нормали. Дается точная оценка.

Ил. 4. Список лит.: 2 назв.

УДК 513

Теоремы о покрытии плоских фигур. Белоусов Ю. Ф.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 10—17.

Фигура F — выпуклая, ограниченная, замкнутая, $b(F)$ — минимальное число покрывающих гомотетичных F фигур F_i ($i = 1, \dots, k$) с центрами O_i и коэффициентами $0 < k_i < 1$. Получено новое доказательство теоремы: $b(F) = 3$, если F не параллелограмм, для параллелограмма $b(F) = 4$. Доказано: если F_i ($i = 1, 2, 3$) покрывают F , то треугольник центров гомотетий $O_1O_2O_3 \supset F$; F не покрывается F_i ($i = 1, 2, 3$), коэффициентом гомотетий которых меньше $\frac{2}{3}$; выпуклая центральносимметричная фигура не покрывается тремя её гомотетичными фигурами с коэффициентами меньшими $\frac{3}{4}$. Определено число k^n , $n > 2$ так, что 1) если $k_i \leq k^n$, причем хотя бы для одного k_i , имеет место строгое неравенство, то F не покрывается F_i ($i = 1, \dots, n$), 2) если каждый из $k_i = k^n$, то существуют n фигур F_i , которые покрывают F . Для любого F число $k^3 = \frac{2}{3}$, если F — треугольник, то $k^4 = \frac{3}{7}$, $k^5 = \frac{9}{15}$, $k^6 = \frac{1}{3}$, $k^7 = \frac{3}{11}$. Пусть $\pi(F)$ — минимальное число меньших, подобных и покрывающих F фигур. Получены необходимое и достаточное условия, при которых $\pi(F) = 2$.

Список лит.: 7 назв.

УДК 513

К геометрии пфаффовых и монжевых многообразий. Бланк Я. П., Николаенко М. А.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 18—22.

Уравнение Пфаффа рассматривается как частный случай уравнения Монжа, когда оно линейно относительно дифференциалов, и доказывается, что дифференциальное уравнение характеристических линий монжа уравнения превращается при этом в условие интегрируемости пфаффова уравнения. Исправлена ошибка в вычислениях, допущенная в работе Д. М. Синцова при отыскании геодезических «кратчайших» уравнения $dy - zdx = 0$ и показано, что общее заключение его работы остается справедливым.

Список лит.: 2 назв.

УДК 513.813

Об экстремальном случае одной оценки объема риманова многообразия.
Б у я ло С. В.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 23—27.

Пусть M — полное связное m -мерное риманово многообразие, $m \geq 2$, все секционные кривизны которого ≥ 1 , а N — замкнутое вполне геодезическое подмногообразие. Доказана следующая экстремальная теорема. Если в неравенстве $\text{vol}_m M \leq \omega_m \frac{\text{vol}_n N}{\omega_n}$, где ω_k — объем единичной k -мерной сферы, достигается равенство, то M и N — пространства постоянной кривизны 1, причем их фундаментальные группы изоморфны.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Биэрмитовы прямые над тензорными произведениями тел. В и п л а в и на Р. П.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 27—34.

Рассматриваются проективные, эллиптические, гиперболические и евклидовы прямые над телами (эрмитовы прямые) и над тензорными произведениями тел (биэрмитовы) и над простыми алгебрами, имеющими те же комплексные формы, что и указанные произведения. Определяются группы проективных преобразований и движений этих прямых и проективные и метрические инварианты их точек. Для всех прямых строятся интерпретации, среди которых следует отметить интерпретации эрмитовых и биэрмитовых прямых как многообразий пар полярно сопряженных точек, прямых, 3-плоскостей и 7-плоскостей в эллиптических, гиперболических и квазиэллиптических пространствах.

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^m . Игнатенко В. Ф.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 35—46.

Изучается структура множества диаметральных гиперплоскостей (с учетом их вырождения) алгебраической гиперповерхности F_n пространства E^m и строение гиперповерхности F_n , имеющей бесконечное множество гиперплоскостей косой (в частности, ортогональной) симметрии.

Список лит.: 9 назв.

УДК 513

Об алгебраической поверхности шестого порядка с двумя сетями переноса. Игнатенко В. Ф.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 46—48.

Алгебраическая поверхность с двумя сетями переноса, определяемая уравнением $z^6 - \frac{15}{4}z^4 - 15xz^3 - 45x^2 + 45yz + \frac{65}{4} = 0$, является поверхностью переноса относительно двух плоскостей — несобственной плоскости и плоскости $z = 0$.

Список лит.: 6 назв.

УДК 513

Об одном обобщении минимальных поверхностей. Ковапцов Н. И.— «Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 48—56.

Комплекс прямых, допускающий функциональное расслоение (широта — одна функция одного аргумента) в нормальные конгруэнции ортогональными к ним минимальными поверхностями, допускает такое же расслоение в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям σ , для которых сумма главных радиусов кривизны есть некоторая функция одного аргумента f . Это есть самое общее расслоение указанного комплекса. Отыскание поверхностей σ , как и отыскание минимальных поверхностей, сводится к решению уравнения Лапласа. В работе находятся в явном виде уравнения поверхностей σ для каждого решения уравнения Лапласа. В частности, выписываются уравнения, обобщающие известные формулы Вейерштрасса для минимальных поверхностей. При $f = 0$ поверхности σ становятся минимальными поверхностями. Однако в отличие от последних, поверхности, сопряженные поверхностям σ , имеют сумму главных радиусов кривизны, отличную от f .

Список лит.: 3 назв.

УДК 513

Инфлексионно-параболические комплексы прямых в гиперболическом пространстве. Ковапцов Н. И., Ильяшенко В. Я.— «Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 57—69.

Изучаются свойства комплексов прямых гиперболического пространства, у которых простые или кратные инфлексионные центры луча являются бесконечно удаленными точками.

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

Принцип минимума для собственных значений лапласиана гиперповерхности евклидова пространства. Масальцев Л. А.— «Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 69—85.

Получено неравенство, оценивающее сверху через симметрические функции от главных кривизн первое положительное собственное значение оператора Лапласа $\Delta = d\delta + \delta d$, действующего на p -формах гладкой компактной ориентируемой гиперповерхности евклидова пространства R^{n+1} ($1 \leq p \leq n$). Доказано, что равенство достигается тогда и только тогда, когда гиперповерхность является гиперсферой.

Список лит.: 9 назв.

УДК 513

Некоторые оценки первого собственного значения лапласиана гиперповерхности пространства постоянной кривизны. Масальцев Л. А.— «Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 85—91.

Устанавливаются некоторые оценки сверху для первого собственного значения оператора Лапласа, действующего на функциях, заданных на гиперповерхностях сферического и пространства Лобачевского.

Список лит.: 2 назв.

УДК 513

Кратчайшая линия на поверхности вращения. Милка А. Д.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 91—95.

Устанавливаются теоремы существования для кратчайших линий на общих выпуклых поверхностях вращения в пространствах с постоянной кривизной. С помощью этих результатов доказывается следующая теорема об изгибаниях куска поверхности вращения в классе выпуклых. При любом изгибанье окрестности дуги параллели, если эта окрестность — не развертывающаяся поверхность, дуга переводится в гладкую кривую.

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

Кратчайшая, все точки которой особые. Милка А. Д.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 95—98.

Доказывается существование выпуклой поверхности, содержащей кратчайшую линию, которая в произвольной окрестности любой точки имеет неспрямляемое сферическое изображение.

Список лит.: 2 назв.

УДК 513

Об изгибании выпуклой поверхности с данной граничной полосой. Сенькин Е. П.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 98—102.

Доказаны теоремы об однозначной определенности и жесткости для общих выпуклых поверхностей с краем с заранее заданной граничной полосой вдоль края.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513. 838: 513. 917

О три-тканях над алгеброй, кривизна которых является делителем нуля. Тимошенко В. В.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 102—114.

Изучаются аналитические три-ткани $W_2(A)$ на двумерном аналитическом многообразии $M_2(A)$ над коммутативной ассоциативной алгеброй A ранга r с главной единицей. Рассмотрен класс три-тканей $W_2(A)$ над алгеброй, кривизна K которых является делителем нуля постоянного ранга. Рассмотрены вещественные три-ткани W_{2r} без кручения, являющиеся вещественными реализациями три-тканей $W_2(A)$. Показано, что в случае, когда кривизна три-тканя $W_2(A)$ над алгеброй A является делителем нуля, имеет место расслоение три-тканя $W_2(A)$ на подткани над подалгебрами алгебры A . Соответствующая вещественная три-ткань W_{2r} также будет расслаиваться на подткани. При помощи канонизации кривизне K три-тканя $W_2(A)$ придается постоянное значение, в результате чего упрощается строение тензора кривизны вещественной три-ткани W_{2r} .

Список лит.: 5 назв.

УДК 513. 838

Об одном классе три-тканей W_6 с частично кососимметричным тензором кривизны. Федорова В. И.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 115—124.

Рассматриваются шестимерные три-ткани, тензор кривизны которых удовлетворяет условию $b_{ij}^l (kl) = 0$. В этом случае тензор кручения ткани сводится к дважды контравариантному тензору a^{il} и для классификации рассматриваемых тканей может быть использована известная классификация билинейных форм. В случае кососимметрии тензора a^{il} рассматриваемая три-ткань оказывается изоклинией тканью Боля. Затем рассматривается пример неизоклинией шестимерной три-ткани с частично кососимметричным тензором кривизны. Строится интерпретация этой ткани в трехмерном неевклидовом пространстве S_3^2 , и с ее помощью доказывается, что эта ткань также является тканью Боля.

Ил. 2. Список лит.: 7 назв.

УДК 513. 736. 4

О жесткости одного класса внутренне склеенных поверхностей. Фоменко В. Т., Марков П. Е.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 124—132.

Б. В. Боярским была доказана жесткость замкнутой поверхности S_m , полученной в результате внутреннего склеивания выпуклой поверхности F_0 с выпуклыми поверхностями F_1, F_2, \dots, F_m при условии, что поверхность S_m является звездной относительно некоторой внутренней точки и, кроме того, имеет достаточно малые «прогибы». В настоящей работе теорема Б. В. Боярского обобщается на более широкий класс поверхностей путем замены условия звездности поверхности S_m более слабым условием, называемым авторами α -звездностью. Вместе с тем ослабляется и условие малости «прогибов». В частности, класс жестких поверхностей, выделяемый в настоящей работе, содержит поверхности с довольно значительными «прогибами».

Ил. 3. Список лит.: 6 назв.

УДК 513

Подмногообразия пространства постоянной кривизны с параллельным подраслоением нормального расслоения. Чакмазян А. В.—«Украинский геометрический сборник», 1977, вып. 20, с. 132—140.

Подраслоение N^p нормального расслоения подмногообразия называется параллельным, если ковариантный дифференциал каждого вектора из N^p не имеет компоненты в ортогональном дополнении к N^p во всем нормальном расслоении. Доказывается ряд теорем локального характера. Так, если подмногообразие допускает p -мерное параллельное подраслоение N^p и фокальные поверхности не имеют кратных компонент, то подмногообразие несет сеть линий кривизны и его нормальная связность будет плоской. Если основной тензор одномерного нормального подраслоения подмногообразия M^m приводится к диагональному виду и имеет два различных собственных значения кратности соответственно r и s ($r + s = m$), то подмногообразие M^m несет двухкомпонентную голомоновую ортогональную сопряженную систему поверхностей размерности r и s .

Список лит.: 10 назв.