

издательство харьковского университета

# КРЮЧИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

издательство

2

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

---

# УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО  
Харьков 1966

**РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК  
НАУЧНЫХ РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ**

Во второй выпуск сборника входит 21 статья. Из них значительная часть — восемь статей — посвящена геометрии в целом, по две-три статьи — геометрии аффинной связности, римановой геометрии, линейчатой геометрии, геометрии пространств с заданной фундаментальной группой, остальные — различным другим областям геометрии.

**Редакционная коллегия:**

Акад. АН УССР проф. *А. В. Погорелов* (ответственный редактор), проф. *А. С. Смогоржевский* (зам. ответственного редактора), доц. *В. П. Белоусова*, проф. *Я. П. Бланк*, доц. *Л. З. Гордеевский*, доц. *В. И. Коба*, проф. *Н. И. Кованцов*, доц. *А. С. Лейбин* (ответственный секретарь), доц. *А. В. Ловягин*, доц. *О. П. Сергунова*, доц. *В. Н. Скрылов*.

Адрес редакционной коллегии: Харьков—77, пл. Дзержинского, 4,  
Харьковский университет, механико-математический факультет.

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В «Украинском геометрическом сборнике» публикуются работы, содержащие новые законченные результаты научных исследований по геометрии, выполненных преимущественно в пределах УССР.

Согласно Положению о тематических сборниках, утвержденному Советом Министров УССР 7.1. 1964 г., статьи по объему не должны превышать 0,5 печатного листа (12 страниц машинописи); в отдельных случаях редколлегии дается право помещать статьи объемом до одного листа. Согласно Положению, авторы не получают гонорара за статьи и бесплатных экземпляров сборника и оттисков статей.

К каждой статье необходимо прилагать краткое изложение результатов объемом не более полутора страниц машинописи через два интервала. Редколлегия оставляет за собой право с согласия автора помещать в сборнике такое краткое изложение вместо статьи с развернутым изложением. К статьям аспирантов и соискателей учёных степеней желательно прилагать сведения о сроке предполагаемой защиты диссертации, к которой относится статья.

Рукопись должна быть четко напечатана на машинке в двух экземплярах на одной стороне листа через два интервала (т. е. с расстоянием между линейками строк не менее 9 мм). Формулы, буквенные обозначения и символы должны быть вписаны от руки чернилами четко, без помарок, с ясным различием в написании прописных (больших) и строчных (малых) букв и букв разных алфавитов; строчные вписываемые буквы должны быть по размеру в полтора раза больше строчных букв машинописи. Вписываемые от руки знаки нужно размещать реже, чем в обычном письме, чтобы можно было сделать их разметку для набора; поэтому для вписываемых знаков необходимо предусмотреть достаточно места.

Сходные по написанию строчные и прописные буквы (с, к, р, с, и, в, ѿ, ѿ, ѿ, ѿ, ѿ), подчеркиваются простым карандашом двумя черточками: прописные снизу, строчные сверху. Греческие буквы подчеркиваются снизу красным карандашом, готические—синим, векторы подчеркиваются снизу (не сверху) одной черточкой жирно простым карандашом. Текст, выделяемый курсивом, подчеркивается волнистой линией простым карандашом. Иностранные слова вписываются на машинке с иностранным шрифтом или четко от руки чернилами и тщательно сверяются с оригиналом.

Чертежи прилагаются только в случае необходимости, хорошего качества, выполненные тушью на кальке или на плотной чертежной бумаге. На обороте каждого чертежа указывается фамилия автора, название статьи и номер чертежа. В тексте должна быть ссылка на рисунок и указано его место пометкой на поле карандашом, обведенной рамкой.

Список литературы помещается в конце статьи в порядке ссылок в тексте. Библиографические данные приводятся в следующем порядке:

для книг — инициалы и фамилия автора, полное название книги, номер тома, издательство, место и год издания;

для журнальных статей — инициалы и фамилия автора, полное название статьи, название журнала, № или название серии, № тома, № выпуска, год издания, страницы начала и конца статьи.

Не допускаются ссылки в заголовке статьи и ссылки на неопубликованные работы.

---

## ОБ ОДНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КРИВЫХ 6-ГО ПОРЯДКА

*B. H. Боровик* (Чернигов)

В данной статье предлагается одна из возможных проективных классификаций плоских неприводимых кривых 6-го порядка ( $K_6$ ). Она основана на проективных свойствах последних, связанных с геометрическим образованием и особенностями их кратных точек.

Всякая кривая  $K_6$  является образом прямой в рациональном преобразовании 6-го порядка, т. е. в  $(1, \mu)$ -значном преобразовании, где  $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$  [1]. Нетрудно показать, что при этом всегда можно ограничиться такими случаями преобразования:

- 1) простое рациональное преобразование ( $\mu = 5$ );
- 2) произведение простого рационального преобразования порядка меньше шести ( $\mu = 2, 3, 4$ ) на бирациональное преобразование;
- 3) бирациональное преобразование ( $\mu = 1$ ).

В случае, если кривая  $K_6$  имеет только  $p$ -кратную точку,  $\mu = 6 - p$  ( $p \leq 5$ ). Очевидно, что  $\mu$  с геометрической точки зрения можно рассматривать как степень геометрической задачи построения данной кривой по ее уравнению или достаточному числу точек, в число которых включены все ее кратные точки, следовательно,  $\mu$  является инвариантом проективного преобразования.

На этом основании мы можем все кривые 6-го порядка в зависимости от значения  $\mu$  разбить на пять проективно различных типов; которые будем соответственно обозначать I, II, III, IV, V. В каждом из типов кривые  $K_6$  будем различать по числу и порядку кратности кратных точек. Кривая 6-го порядка может иметь двойные, трехкратные, четырехкратные и пятнадцатиразные точки. Среди кратных точек выделим обычные точки, все касательные в которых различны, и особые кратные точки, в которых некоторые или все касательные совпадают. Известно, что кратность точек и их особенности являются инвариантами проективного преобразования. Верхняя граница для двойных точек кривой 6-го порядка равна десяти.

Наибольшее число двойных точек имеют кривые I типа, являющиеся бирациональным образом прямой. Но такие кривые должны иметь три кратные точки, сумма кратностей которых больше порядка кривой [2]. Если принять во внимание, что обыкновенная  $p_i$ -кратная точка эквивалентна  $\frac{1}{2}p_i(p_i - 1)$  двойных точек, то среди кривых I типа с обычными кратными точками можно выделить следующие проективно различные классы кривых:

- I (1) — кривые с пятикратной точкой;
- I (2) — кривые с одной четырехкратной и четырьмя двойными точками;
- I (3) — кривые с тремя трехкратными и одной двойной точками;
- I (4) — кривые с двумя трехкратными и четырьмя двойными точками;
- I (5) — кривые с одной трехкратной и семью двойными точками.

Кривые II типа бирационально эквивалентны либо неособой кривой 3-го порядка, либо кривой 4-го порядка с одной двойной точкой, либо кривой 5-го порядка с одной тройной точкой. Отсюда следует, что возможны такие проективно различные классы:

- II (1) — кривые с одной четырехкратной и тремя двойными точками;
- II (2) — кривые с тремя трехкратными точками;
- II (3) — кривые с двумя трехкратными и тремя двойными точками;
- II (4) — кривые с одной трехкратной и шестью двойными точками;
- II (5) — кривые с одной четырехкратной и двумя двойными точками;
- II (6) — кривые с двумя трехкратными и двумя двойными точками;
- II (7) — кривые с одной трехкратной и пятью двойными точками;
- II (8) — кривые с одной четырехкратной и одной двойной точками;
- II (9) — кривые с одной четырехкратной точкой.

Кривые III типа бирационально эквивалентны либо неособой кривой 4-го порядка, либо кривой 5-го порядка с двумя или одной двойными точками. Следовательно, здесь будем иметь семь проективно различных классов:

- III (1) — кривые с одной тройной и четырьмя двойными точками;
- III (2) — кривые с двумя тройными и одной двойной точками;
- III (3) — кривые с одной тройной и тремя двойными точками;
- III (4) — кривые с двумя тройными точками;
- III (5) — кривые с одной тройной и двумя двойными точками;
- III (6) — кривые с одной тройной и одной двойной точками;
- III (7) — кривые с одной тройной точкой.

К IV типу относятся кривые, бирационально эквивалентные неособой кривой 5-го порядка или кривой 6-го порядка, имеющей только двойные точки. Среди них можно выделить следующие проективно различные классы:

- IV (1) — кривые с девятью двойными точками;
- IV (2) — кривые с восьмью двойными точками;
- IV (3) — кривые с семью двойными точками;
- IV (4) — кривые с шестью двойными точками;
- IV (5) — кривые с пятью двойными точками;
- IV (6) — кривые с четырьмя двойными точками;
- IV (7) — кривые с тремя двойными точками;
- IV (8) — кривые с двумя двойными точками;
- IV (9) — кривые с одной двойной точкой.

Наконец, к V типу принадлежат только неособые кривые 6-го порядка.

Перечисленными классами охватываются все неприводимые кривые  $K_6$ . Более подробно кривые 6-го порядка классифицируются внутри классов каждого из типов, что связано уже с использованием особых кратных точек. К ним относят кратные точки, совпадающие с простыми точками кривой, и совпавшие две и более кратные точки, например, дважды совпавшая двойная, дважды совпавшая тройная, трижды совпавшая двойная и т. д.

По характеру особых кратных точек в каждом классе выделим подклассы, а в каждом подклассе по особенностям касательных в особых точках выделим виды кривых 6-го порядка.

Для краткости ограничимся перечислением кривых только двух первых классов I типа кривых  $K_6$ . В первом классе I типа имеем кривые с пятикратной точкой, следовательно, они не могут иметь других кратных точек; это означает, что в первом классе I (1) — только один подкласс, содержащий кривые десяти видов, а именно: 1) все касательные в пятикратной точке действительны и различны; 2) две касательные действительны, совпадают, остальные действительны и различны; 3) из пяти действительных касательных три совпадают; 4) из пяти действительных касательных четыре совпадают; 5) все пять действительных касательных совпадают; 6) из пяти действительных касательных в двух направлениях совпадают по две; 7) из пяти действительных касательных в одном направлении совпадают две, а в другом — три; 8) одна действительная и четыре мнимых касательных; 9) одна действительная и четыре по две совпавшие мнимые касательные; 10) три действительные и две мнимые касательные.

Среди кривых второго класса первого типа имеется 11 подклассов кривых с различными особенностями совпадения четырехкратной точки с двойными<sup>1</sup>: 1) все кратные точки кривой  $K_6$  различны; 2) с четырехкратной совпадает одна двойная, три остальные двойные различны; 3) с четырехкратной совпадают две двойные, две другие различные; 4) с четырехкратной совпадают три двойные, четвертая — отдельно; 5) с четырехкратной совпадают все четыре двойные точки; 6) с четырехкратной совпадает одна двойная, совпадают две двойные между собой и одна двойная, отличная от них; 7) с четырехкратной совпадает одна двойная, три другие двойные совпадают между собой; 8) с четырехкратной совпадают две двойные, две другие совпадают между собой; 9) с четырехкратной не совпадают двойные, совпадают две двойные между собой, другие две двойные — различные; 10) с четырехкратной не совпадают двойные, три двойные совпадают между собой, четвертая двойная — отдельно от них; 11) с четырехкратной не совпадают двойные, а совпадают все четыре двойные между собой.

В первом подклассе второго класса можно выделить восемь видов кривых по характеру касательных в четырехкратной точке, а именно касательные: 1) все действительные различные; 2) все действительные попарно совпавшие; 3) все действительные, три совпавшие; 4) все действительные совпавшие; 5) две действительные различные и две мнимые; 6) две действительные совпавшие и две мнимые; 7) все четыре мнимые различные; 8) все мнимые попарно совпавшие и т. д.

Изложенное можно резюмировать таблицей, в которой отмечены только типы и классы кривых  $K_6$ , а также указано, каким кривым они рационально эквивалентны.

Таким образом, всего имеем типов — 5, классов — 31, подклассов — 267.

С помощью бирациональных преобразований можно доказать существование всех типов, классов и подклассов кривых 6-го порядка, а также указать способ геометрического их построения. При этом часто будем пользоваться таким предложением, следующим из свойств этих преобразований [1]: если кривая  $K$  порядка  $n$  является образом кривой  $K'$  порядка  $n'$  в квадратичном преобразовании  $T$  и эти кривые имеют в главных

<sup>1</sup> Мнимых кратных точек кривой  $K_6$  не выделяем отдельно.

Число и кратность точек				Тип кри- вой	Класс кри- вой	Данная кривая биравиополю- эквивалентна
$\alpha_5$	$\alpha_4$	$\alpha_3$	$\alpha_2$			
1	—	—	—	I	I (1)	прямой или кривой 2-го порядка
—	1	—	4	I	I (2)	
—	—	3	1	I	I (3)	
—	—	2	4	I	I (4)	
—	—	1	7	I	I (5)	
—	1	—	3	II	II (1)	кривой 3-го порядка без особенностей
—	—	3	—	II	II (2)	
—	—	2	3	II	II (3)	
—	—	1	6	II	II (4)	
—	1	—	2	II	II (5)	кривой 4-го порядка с одной двойной точкой
—	—	2	2	II	II (6)	
—	—	1	5	II	II (7)	
—	1	—	1	II	II (8)	кривой 5-го порядка с одной $\alpha_3$
—	1	—	—	II	II (9)	кривой 6-го порядка с одной $\alpha_4$
—	—	1	4	III	III (1)	кривой 4-го порядка без особенностей
—	—	2	1	III	III (2)	

*Продолжение*

Число и кратность точек				Тип кри-вой	Класс кри-вой	Данная кривая бирационально-эквивалентна
$\alpha_6$	$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_2$			
—	—	1	3	III	III (3)	
—	—	2	—	III	III (4)	кривой 5-го по-рядка с одной или двумя двойными точками
—	—	1	2	III	III (5)	
—	—	1	1	III	III (6)	кривой $K_6$ с $\alpha_3$
—	—	1	—	III	III (7)	кривой $K_6$ с $\alpha_2$
—	—	—	9	IV	IV (1)	
—	—	—	8	IV	IV (2)	
—	—	—	7	IV	IV (3)	
—	—	—	6	IV	IV (4)	кривой 6-го по-рядка с теми же особенностями, что и данная кривая
—	—	—	5	IV	IV (5)	
—	—	—	4	IV	IV (6)	
—	—	—	3	IV	IV (7)	
—	—	—	2	IV	IV (8)	кривые IV (8), IV (9), V (1) имеют наименьший порядок из всех бирационально-эквивалентных им кривых
—	—	—	1	IV	IV (9)	
—	—	—	0	V	V (1)	

точках преобразования  $T$  точки кратности соответственно  $p, q$  и  $r, p', q'$  и  $r'$ , то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} n &= 2n' - p' - q' - r', \\ p &= n' - q' - r', \\ q &= n' - p' - r', \\ r &= n' - p' - q'. \end{aligned} \tag{1}$$

При обратном преобразовании справедливы аналогичные соотношения. Для примера докажем здесь существование кривых классов I (2) и II (5).

Первой рассмотрим кривую  $K_6$  класса I (2) с одной четырехкратной и четырьмя двойными точками. Возьмем за базис кривую  $K'_2$  и выберем такое квадратичное преобразование  $T_1$ , главные точки которого не принадлежат  $K'_2$ , т. е.  $n'_1 = 2$ ,  $p'_1 = q'_1 = r'_1 = 0$ . Преобразование  $T_1$  отображает кривую  $K'_2$  в кривую 4-го порядка с тремя двойными точками:  $n_1 = 4$ ,  $p_1 = q_1 = r_1 = 2$ . Подвергнув полученную кривую  $K_4$  новому квадратичному преобразованию  $T_2$ , в котором одна главная точка поменяна в двойной точке кривой  $K_4$  (здесь  $n'_2 = 4$ ,  $p'_2 = 2$ ,  $q'_2 = r'_2 = 0$ ), получим кривую  $K_6$  этого класса:  $n = 6$ ,  $p = 4$ ,  $q = r = 2$  и еще две двойные точки — образы двойных точек кривой  $K_4$ , не совпадающих с главными точками преобразования  $T_2$ .

Приведем конкретный пример кривой  $K_6$  класса I (2). Пусть базисной кривой служит окружность  $x_1'^2 + y_1'^2 - 1 = 0$ , а квадратичное преобразование  $T_1$  определяется формулами  $x_1' = \frac{1}{x_1}$ ,  $y_1' = \frac{1}{y_1}$ . Главными точками этого преобразования являются точки  $(0, 0)$ ,  $(0, \infty)$  и  $(\infty, 0)$ , они не принадлежат взятой окружности. В результате преобразования  $T_1$  окружность  $x_1'^2 + y_1'^2 - 1 = 0$  отображается в кривую 4-го порядка  $K_4$   $x_1^2 y_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0$  с двойными точками в  $(0, 0)$ ,  $(0, \infty)$  и  $(\infty, 0)$ .

Полученную кривую 4-го порядка подвернем преобразованию  $T_2$ :

$$x_1 = -\frac{x^2}{y^2 + x}, \quad y_1 = -\frac{xy}{y^2 + x}$$

(все главные точки его совпадают с началом координат), т. е. имеем:  $n'_2 = 4$ ,  $p'_2 = 2$ ,  $q'_2 = r'_2 = 0$  и двойные точки еще в  $(0, \infty)$  и  $(\infty, 0)$ . Выполнив преобразование  $T_2$ , получим:  $n = 6$ ,  $p = 4$ ,  $q = r = 2$  и еще две двойные точки в  $(0, \infty)$  и  $(\infty, 0)$ , причем согласно свойству квадратичного преобразования в начале координат совпадают четырехкратная и две двойные точки. Уравнение полученной кривой  $K_6$  имеет вид:

$$x^4 y^2 + x^2 y^4 + y^6 + 2x^3 y^2 + 2x y^4 + x^4 + x^2 y^2 = 0.$$

Чтобы получить кривую  $K_6$  класса I (2), практически проще сразу взять произведение двух квадратичных преобразований, например циссональное преобразование [4]. Действительно, циссональю кривых  $x^2 - y = 0$  и  $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$  относительно начала координат будет кривая  $K_6$  класса I (2):

$$x^6 - 4x^4 y^2 - 2x^4 y + 8x^2 y^3 + x^2 y^2 - 4y^4 - 4x^4 = 0.$$

Исследуя кратные точки этой кривой на бесконечности с помощью диаграммы Ньютона [3], найдем, что две параболические ветви полученной кривой соприкасаются с бесконечно удаленной прямой. Следовательно, кривая имеет две бесконечно удаленные двойные точки действительные и две мнимые, кроме четырехкратной точки в начале координат.

Можно показать, что если осью циссонального преобразования выбрана гипербола, то все четыре двойные точки кривой  $K_6$  класса I (2) действительны и совпадают по две в направлении асимптот осевой гиперболы. Если осью служит эллипс, то все четыре двойные точки образуемой кривой  $K_6$  мнимые.

В другом примере покажем существование и конструктивное осуществление кривой  $K_6$  класса II (5). Такие кривые имеют одну четырехкратную

и две двойные точки, они бирационально эквивалентны кривой 4-го порядка с одной двойной точкой. Кривые этого класса можно получить непосредственно из последней квадратичным преобразованием, одна из главных точек которого помещена в двойной точке образующей кривой 4-го порядка, а две другие — не принадлежат кривой  $K_4$ . Действительно, возьмем за базис кривую 4-го порядка  $K'_4$  с одной двойной точкой в начале координат, определяемую уравнением  $x'^4 - y'^4 + y'^2 = 0$ . В квадратичном преобразовании  $x' = \frac{1}{x}$ ,  $y' = \frac{1}{y}$  с тремя различными главными точками  $(0, 0)$ ,  $(0, \infty)$  и  $(\infty, 0)$  эта кривая отобразится в кривую 6-го порядка  $y^4x^2 - x^4 + y^4 = 0$  с одной четырехкратной точкой в начале координат и двумя двойными точками в  $(0, \infty)$  и  $(\infty, 0)$ . Аналогично с помощью квадратичных преобразований можно получить все классы кривых 6-го порядка в рассматриваемой классификации. Некоторые классы кривых 6-го порядка рассмотрены автором ранее в работах [5] и [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Никулин. Рациональные преобразования и теория алгебраических кривых. Изв. Крымского пединститута, т. 35, Симферополь, 1961, стр. 5—125.
2. К. А. Апдреев. О геометрических соответствиях, М., 1879.
3. Р. Уокер. Алгебраические кривые. Изд-во иностр. лит., М., 1952.
4. В. Н. Боровик. О некоторых приложениях циссоидального преобразования в теории кривых. Изв. Крымского пединститута, т. 35, 1961, стр. 203—218.
5. В. Н. Боровик. Некоторые замечательные кривые шестого порядка. Изв. Крымского пединститута, т. 29, 1957, стр. 176—199.
6. В. Н. Боровик. Про один клас кривых 6-го порядку, «Наукові записки Чернігівського педінституту», т. 4, вип. 5, 1960, стр. 53—63.

*Поступила в редакцию 21 июня 1965 г.*

## О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*В. И. Денисов* (Харьков)

Вопрос о законах сохранения в общей теории относительности обычно связывают с построением комплекса энергии — импульса гравитационного поля. Необходимость введения такого комплекса состоит в следующем. Общековариантные уравнения движения материи с тензором энергии — импульса  $T_{i,k}^k$  имеют вид

$$T_{i,k}^k = 0, \quad (1)$$

где символ „ $\dot{}$ “ — знак ковариантного дифференцирования. Здесь и дальше  $i, k = 1, 2, 3, 4$ .

Если уравнение (1) записать в развернутом виде, получим

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k) - \Gamma_{ik}^l T_l^k = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет недивергентную форму и поэтому обычный способ построения законов сохранения — интегрирование по четырехмерному пространству — времени с последующим применением теоремы Гаусса здесь не применим. Положение спасает комплекс  $t_i^k$ , построенный из  $g_{ik}$  и его первых производных, такой, что

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} t_i^k) = -\Gamma_{ik}^l t_l^k. \quad (3)$$

С его помощью уравнение (2) можно записать так:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k + \sqrt{-g} t_i^k) = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) имеют дивергентную форму, поэтому применим способ построения законов сохранения, описанный выше.

Нетрудно заметить, что построение законов сохранения с помощью  $t_i^k$  имеет недостатки [1]. Основной недостаток состоит в том, что такое построение не имеет общековариантного смысла, так как сам способ введения  $t_i^k$  лишает его тензорных свойств. Кроме этого, условия (3) определяют  $t_i^k$  не единственным образом. Поэтому выражения для  $t_i^k$  (см., например, [2, 3, 4, 5]) — не удовлетворяют ряду естественных требований. Например, комплекс энергии — импульса  $t_i^k$ , построенный Эйнштейном, приводит к выражению для плотности энергии, зависящему от преобразований пространственных координат. В случае же плоского прост-

ранства — времени  $t_i^k$  Эйнштейна дает бесконечную величину для энергии, когда при вычислениях используется полярная система координат [6]. Если же при вычислениях использовать декартову систему координат, получается нулевое значение для энергии.

Для полей тяготения, которые описываются тензором второго ранга  $g_{ik}$  и допускают группу движений, т. е. обладают симметрией, можно построить законы сохранения, которые содержат только тензор энергии импульса материи. На возможность такого построения в случае частной теории относительности указал В. А. Фок [7].

Пусть пространство — время таково, что существует  $\rho_0$  — параметрическая группа движений в нем. Это значит, что существует  $\rho_0$  линейно независимых векторных полей  $\xi^\rho$  ( $\rho = 1, \dots, \rho_0$ ) таких, для которых

$$\xi_{i,k}^\rho + \xi_{k,i}^\rho = 0. \quad (5)$$

Легко видеть, что если  $\xi^\rho$  удовлетворяет (5), то

$$(T^{ik}\xi_k^\rho)_{,i} = 0. \quad (6)$$

Действительно,

$$(T^{ik}\xi_k^\rho)_{,i} = T^{ik}_{,i}\xi_k^\rho + T^{ik}\xi_{k,i}^\rho.$$

Но  $T^{ik}$  — симметричный тензор, а  $T^{ik}_{,i} = 0$ , поэтому

$$(T^{ik}\xi_k^\rho)_{,i} = \frac{1}{2} T^{ik} (\xi_{i,k}^\rho + \xi_{k,i}^\rho)$$

и, если имеет место (5), справедливо (6).

Тогда законы сохранения, соответствующие (6), будут

$$\int V\sqrt{-g}T^{ik}\xi_k^\rho dx^1 dx^2 dx^3 = C^2, \quad (7)$$

так как

$$(T^{ik}\xi_k^\rho)_{,i} = \frac{1}{V\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (V\sqrt{-g}T^{ik}\xi_k^\rho). \quad (8)$$

Выражение (8) можно записать, выделив временную координату:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} (V\sqrt{-g}T^{ik}\xi_k^\rho) + \frac{\partial}{\partial x^a} (V\sqrt{-g}T^{ak}\xi_k^\rho) = 0,$$

тогда

$V\sqrt{-g}T^{ik}\xi_k^\rho$  — плотность сохраняющейся величины,

а

$V\sqrt{-g}T^{ak}\xi_k^\rho$  — поток сохраняющейся величины.

Число законов сохранения при таком построении равно числу параметров группы движений.

Такое построение имеет инвариантный характер, так как оно основано на внутреннем свойстве пространства — времени. Нетрудно показать, что (7) инвариантно относительно преобразований

$$\begin{aligned} \tilde{x}^4 &= \tilde{x}^4(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \tilde{x}^a &= x^a \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{x}^4 &= x^4 \\ \tilde{x}^a &= \tilde{x}^a(x^1, x^2, x^3). \end{aligned}$$

Рассмотрим подробно случай сферически-симметричных полей тяготения, порождаемых сферически-симметрично распределенной материей. В этом случае система координат может быть выбрана так, что

$$ds^2 = e^\lambda dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (9)$$

Тогда отличные от нуля компоненты  $g_{ik}$  будут

$$g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = e^\lambda.$$

Можно показать, (см., например [8]), что в случае сферически-симметричного распределения материи тензор энергии — импульса имеет две независимые компоненты, через которые все остальные выражаются. Если за независимые взять  $T_4^1$  и  $T_1^1$ , то в соответствующей системе координат будет:

$$\begin{aligned} T_4^1 &= -\frac{1}{r^2} \int_0^r x^2 \frac{\partial T_4^1}{\partial t} dx, \\ T_2^2 &= \frac{r}{2} \left( \frac{\partial T_1^1}{\partial r} + \frac{\partial T_4^1}{\partial t} \right) + \left( 1 + \frac{r}{4} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) T_1^1 - \frac{e^{\lambda-\nu}}{4} T_4^1 \frac{\partial}{\partial t} (\lambda + \nu) - \frac{r}{4} T_4^1 \frac{\partial \nu}{\partial r}. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом

$$T_2^2 = T_3^3, \quad T_1^4 = -e^{\lambda-\nu} T_4^1. \quad (10')$$

Остальные компоненты  $T_k^l$  равны нулю.

Уравнения Эйнштейна

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij} \quad (11)$$

в этом случае могут быть проинтегрированы, и

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} &= 1 + \frac{\kappa}{r} \int_0^r x^2 T_4^1 dx, \\ \nu &= -\lambda + \kappa \int_0^r x e^\lambda (T_1^1 - T_4^1) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\kappa = \frac{8\pi k}{c^2},$$

а  $k$  — гравитационная постоянная Ньютона.

Тогда, если  $T_4^1$  и  $T_1^1$  заданы как произвольные функции переменных  $r$  и  $t$ , то метрическая форма (9) совместна с уравнениями поля (11), если  $\lambda$  и  $\nu$  заданы в виде (12).

Так как пространство-время (9) сферически-симметрично, то оно допускает трехпараметрическую группу движений — группу вращений. Поэтому имеем три закона сохранения:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} (T^{42} \cos \varphi + T^{43} \sin \varphi \operatorname{tg} \theta) \sin \theta r^2 d\theta d\varphi dr &= C^1, \\ \int e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} (T^{42} \sin \varphi + T^{43} \cos \varphi \operatorname{tg} \theta) \sin \theta r^2 d\theta d\varphi dr &= C^2, \\ \int e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} T^{42} \sin \theta r^2 d\theta d\varphi dr &= C^3. \end{aligned}$$

Эти законы естественно назвать законами сохранения момента, так как они являются следствиями изотропии пространства. Из (13) следует, что поле стационарно, если  $T_4^4$  и  $T_1^1$  не зависят от  $t$ . Тогда, если  $T_4^4$  и  $T_1^1$  зависят только от  $r$ , поле допускает движение с  $\xi^0 = (0, 0, 0, 1)$ . Можно дать инвариантное определение стационарности пространства — времени. Если пространство — время таково, что в нем существует однопараметрическое семейство изометрических гиперповерхностей с временем-подобной нормалью, то оно стационарно и допускает группу движений. Поле движения этой группы есть поле нормалей семейства. Соответствующий закон сохранения будет:

$$\int V \sqrt{-g} T^{4k} \xi_k^0 dx^1 dx^2 dx^3 = C, \quad (13)$$

где  $\xi_k^0$  — поле нормалей семейства.

Этот закон сохранения естественно назвать законом сохранения энергии, так как он следствие стационарности пространства — времени.

Пусть  $T_4^4$  и  $T_1^1$  — функции  $r$ . Тогда из (10) следует, что

$$T_1^1 \equiv 0. \quad (14)$$

Ниже мы будем рассматривать конечное стационарное сферически-симметричное распределение материи. Это значит, что материя заполняет область  $r < R$ . Поэтому поверхность  $r = R$  является поверхностью разрыва тензора энергии — импульса материи. На поверхности разрыва  $r = R$  должны выполняться условия (8):

$$T_i^k n_k = 0, \quad (15)$$

где  $n_k$  — четырехнормаль к поверхности разрыва.

В нашем случае четырехнормаль будет  $n_k = (1, 0, 0, 0)$ , так как поверхность разрыва стационарна. Поэтому условие (15) в этом случае примет вид

$$T_i^1 = 0 \text{ при } r = R.$$

Так как мы рассматриваем случай стационарного распределения материи, то на поверхности  $r = R$  должно выполняться единственное условие

$$T_1^1 = 0 \text{ при } r = R. \quad (16)$$

Возможны два случая, в которых имеет место (16).

1. Пусть

$$T_1^1 \equiv 0.$$

Тогда материя описывается одной функцией —  $T_4^4$ , и ее энергия в собственном поле тяготения, согласно (13), равна

$$E = 4\pi \frac{\int_0^R r^2 T_4^4 \exp \left\{ -\frac{x}{2} \int_0^r x e^\lambda T_4^4 dx \right\} dr}{\exp \left\{ -\frac{x}{2} \int_0^R \frac{T_4^4}{r - 2m(r)} r^2 dr \right\}}, \quad (17)$$

где  $\varepsilon$  дается уравнением (12), а

$$2m(r) = -\varepsilon \int_0^r r^2 T_4^4 dr.$$

Нетрудно преобразовать (17) так, что  $E$  будет функцией  $\frac{r_{\text{р}}}{R}$ , где  $r_{\text{р}}$  — гравитационный радиус тела.

Для сравнения с ньютоновской теорией тяготения, которая дает известное выражение для собственной энергии материи [3], достаточно выделить линейную часть в разложении (17) по  $\frac{r_{\text{р}}}{R}$ .

Например, для

$$T_4^4 = -\mu_0 r^\nu$$

линейная часть разложения (17) по  $\frac{r_{\text{р}}}{R}$  будет

$$E = M \left( 1 - \frac{\nu + 3}{2(2\nu + 5)} \cdot \frac{r_{\text{р}}}{R} \right). \quad (18)$$

Здесь и дальше  $M$  — масса гравитирующей сферы.

Ньютоновская теория тяготения дает такое же выражение для энергии материи в собственном поле тяготения, если плотность материи  $\rho = \mu_0 r^\nu$ .

В случае однородного распределения материи ( $\nu = 0$ ) уравнение (18) дает

$$E = M \left( 1 - \frac{3}{10} \frac{r_{\text{р}}}{R} \right). \quad (18')$$

В каждом конкретном случае можно получить точное выражение для энергии, проводя вычисление по (17).

2. Пусть

$$T_1^1 = 0 \text{ при } r = R.$$

Простейшей задачей такого типа является нахождение энергии сферы, образованной из идеальной жидкости.

В этом случае тензор энергии — импульса материи имеет следующий вид [8]:

$$T_k^i = (p + \mu u^i u_k + p \delta_k^i),$$

где  $p$  — давление в собственной системе отсчета;

$\mu$  — плотность жидкости в собственной системе отсчета;

$u^i$  — вектор четырехскорости жидкости.

Выберем в нашем случае ориентацию  $u$  в  $t$  направлении. Тогда

$$u_a = 0, \quad u_a = 0,$$

$$u^4 = e^{-\frac{\nu}{2}}, \quad u_4 = -e^{\frac{\nu}{2}},$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p,$$

$$T_4^4 = -\mu, \quad T_k^i = 0, \quad (19)$$

если  $i \neq k$ .

Компоненты  $T_4^4$  и  $T_1^1$  в случае идеальной жидкости зависимы в силу (19) и (10).

Известно несколько точных внутренних решений уравнений (11) при сферически-симметрично распределенной идеальной жидкости [9]. В каждом случае можно записать выражения для энергии сферы в собственном поле тяготения.

Например, в случае однородной несжимаемой идеальной жидкости решение уравнений поля будет [10]:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} &= 1 - gr^2, \\ e^\nu &= \frac{(3\sqrt{1-gR^2} - \sqrt{1-gr^2})^2}{(3\sqrt{1-gR^2} - 1)^2}, \\ p &= \mu_0 \frac{(1-gr^2)^{1/2} - (1-gR^2)^{1/2}}{3\sqrt{1-gR^2} - \sqrt{1-gr^2}}, \end{aligned}$$

где

$$g = \frac{8\pi k \mu_0}{3c^2}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Легко видеть, что при  $r=R$  давление  $p$  обращается в нуль, т. е. условие (16) выполняется. Тогда согласно (17) энергия такого образования будет:

$$E = 2\pi \mu_0 \int_0^R \frac{3\sqrt{1-gR^2} - \sqrt{1-gr^2}}{\sqrt{1-gr^2}} r^2 dr.$$

Это выражение легко преобразовать, введя новую переменную  $\frac{r}{R}$ . Тогда

$$E = 3M \int_0^1 \frac{3\sqrt{1-\alpha^2} - \sqrt{1-\alpha^2 x^2}}{2\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} x^2 dx,$$

где

$$\alpha^2 = gR^2 = \frac{r_{gp}}{R}.$$

После элементарных вычислений получим

$$E = M \left( \frac{9}{2} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{\arcsin \alpha (-\alpha) \sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha^3} - \frac{1}{2} \right). \quad (20)$$

Выделяя линейную часть относительно  $\frac{r_{gp}}{R}$ , получим

$$E = M \left( 1 - \frac{3}{10} \frac{r_{gp}}{R} \right). \quad (21)$$

Выражение (21) совпадает с выражением для энергии, полученным из ньютоновской теории тяготения [3]. Следует отметить, что в первом приближении структура материи не влияет на энергию гравитирующего тела, так как (21) совпадает с (18'). Отличие появляется в членах второго порядка по  $\frac{r_{gp}}{R}$ . На рисунке изображены графики функций (20) и (21). Кривая  $a$  — собственная энергия сферически-симметрично распределенной несжимаемой идеальной жидкости по теории тяготения Эйнштейна. Кривая  $b$  — энергия этого же образования по ньютоновской теории. Энергия измеряется в единицах  $M$ .

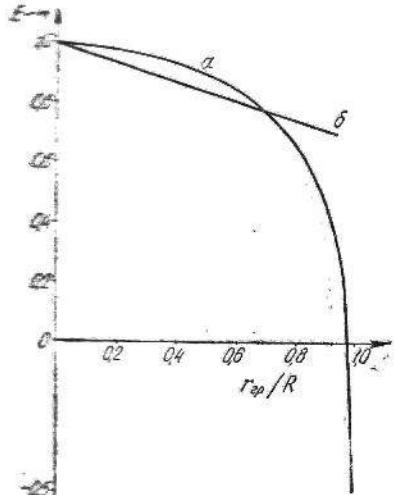
Нетрудно показать, что энергия нейтральной сингулярности с массой  $m_0$  по (13) будет

$$E = m_0.$$

В работе [11] В. Д. Захаров показал, что поля тяготения

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^4^2 - dx^1^2 - 2x^3 dx^2 (dx^4 + dx^1) + a(u) dx^2^2 + dx^3^2; \\ ds^2 &= du dv - 2x^3 dx^2 du + a(u) dx^2^2 + \beta(u) dx^2 dx^3 + v(u) dx^3^2; \\ ds^2 &= a(u) (dx^4^2 - dx^1^2 - dx^2^2) - b(u) dx^3^2, \end{aligned} \quad (22)$$

где



где

$$a_0 = \frac{da}{du}, \quad a_{00} = \frac{d^2a}{du^2}.$$

Для частицы в гравитационном поле законы сохранения строятся естественным образом при помощи теоремы Э. Неттер об инвариантном функционале [13, 14].

Пусть поле допускает  $\rho_0$  — параметрическую группу движений, тогда

$$m_0 u^\rho \dot{\xi}_i = C_\rho (\rho = 1, 2, \dots, \rho_0) \quad (23)$$

всегда вдоль траектории частицы. При этом  $m_0$ ,  $u^i$  — собственная масса частицы, четырехвектор скорости частицы соответственно. В приближении слабого поля (23) дает

$$m_0 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\varphi}{c^2} \right) = \text{const}, \quad \frac{v}{c} \ll 1,$$

если поле стационарно.

Для внешнего поля Шварцшильда, которое стационарно, (23) дает четыре закона сохранения, так как группа движений такого поля четы-

рехпараметрическая. Один из законов сохранения — закон сохранения энергии будет:

$$m_0 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} - k \frac{M}{rc^2} \right) = \text{const}, \quad \frac{v}{c} \ll 1,$$

где  $M$  — масса центрального тела;

$k$  — постоянная Ньютона.

Используя классификацию полей тяготения по группам движения, осуществленную А. З. Петровым [15], можно в каждом случае, когда поле допускает движение, записать соответствующие законы сохранения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Петров. Попытке энергии в общей теории относительности. Сб. «Гравитация и общая теория относительности», Изд-во Казанск. ун-та, 1963.
2. A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys., 49, 769, 1916.
3. Л. Л. Лапдау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, М., 1963.
4. C. Moller. Momentum and Energy in general relativity and gravitation radiation. Matematisk — fysiske Meddelelser., Det Kong. Danske Vidensk. Selsk. Bind 34, 3, 1964.
5. Н. В. Милкевич. Zu den Invarianzeigenschaften der Lagrange — Funktionen der Filder. Ann. der Phys., 1, 319, 1957.
6. H. Baueг. Uber die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes, Phys. Zs., 19, 103, 1918.
7. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Физматгиз, М., 1961.
8. Д. Синг. Общая теория относительности. Изд-во иностр. лит., М., 1963.
9. R. Tolman. Static solutions of Einstein's field equations of spheres of fluid. Phys. Rev., 55, стр. 364.
10. K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen theorie, Zitz. Preuss. Akad. Wiss., 189, 1916.
11. K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus das inkompressible Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Zitz. Preuss. Acad. Wiss., 424, 1916.
12. В. Д. Захаров. Некоторые типы полей тяготения с гравитационными волнами. Вестник МГУ, серия III, № 2. Изд-во МГУ, 1965, 59.
13. A. Trautman. On the conservation theorems and coordinate systems in general relativity. Bull. Polon. Sci., Cl. III, 5, 721, 1957.
14. И. М. Гельфанд и С. В. Фомин. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
15. А. З. Петров. Пространства Эйнштейна. Физматгиз, М., 1963.

Поступила в редакцию 14 июня 1965 г.

---

## О РЕГУЛЯРНОСТИ ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ ДВУМЕРНОГО РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ В ТРЕХМЕРНОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО

*A. A. Дубровин* (Харьков)

Проблема о погружении в целом двумерного риманова многообразия в трехмерное риманово пространство решена А. В. Погореловым при некоторых естественных предположениях, относящихся к кривизнам многообразия. Доказана теорема [1]:

Пусть  $R$  — полное трехмерное риманово пространство и  $M$  — замкнутое, гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду большей некоторой постоянной  $c$  (большой, меньшей или равной нулю).

Тогда, если кривизна пространства  $R$  всюду меньше  $c$ , то  $M$  допускает изометрическое погружение в  $R$  в виде регулярной поверхности  $F$ .

Более того, это погружение можно осуществить так, чтобы данный двумерный элемент  $\alpha$  многообразия  $M$  (точка  $O$  и лучок направлений в ней) совпал бы с данным, изометричным  $\alpha$ , двумерным элементом  $\alpha'$  в пространстве  $R$  и поверхность  $F$  располагалась бы по заданную сторону от площадки элемента  $\alpha'$ .

Если метрика пространства  $R$  и многообразия  $M$  дифференцируемы  $k$  раз ( $k \geq 6$ ), то поверхность  $F$  дифференцируема по крайней мере  $(\frac{k}{2} - 1)$  раз.

Ограничение  $k \geq 6$  не является существенным. Это связано с методом получения априорных оценок производных координат точки поверхности в пространстве по ее внутренним координатам.

Наша цель доказать следующее утверждение. Если метрика пространства  $R$  и многообразия  $M$  дифференцируемы  $k$  раз ( $k \geq 3$ ), то  $M$  погружается в  $R$  в виде поверхности  $F$ , которая принадлежит по крайней мере классу  $C^{(k-1+\nu)}$  при любом  $\nu$ ,  $0 < \nu < 1$ .

### 1. Априорные оценки для производных координат в пространстве по координатам поверхности

Пусть в трехмерном римановом пространстве  $R$  с линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

дана поверхность  $F$ :

$$x^i = x^i(u^1, u^2), \quad (i = 1, 2, 3)$$

с линейным элементом

$$\tilde{ds}^2 = \tilde{g}_{lm} du^l du^m, \quad (l, m = 1, 2),$$

где  $x^i$  — координаты точки поверхности в пространстве  $R$ ;  
 $u^1, u^2$  — координаты на поверхности, заданные в области  $\Omega$ .

Функции  $x^i(u^1, u^2)$ ,  $g_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ ,  $\tilde{g}_{lm}(u^1, u^2)$  предполагаются достаточно регулярными.

Тогда для поверхности  $F$  с положительной внешней кривизной имеют место оценки первых и вторых производных функций  $x^i(u^1, u^2)$  и их коэффициентов Гельдера, зависящие только от метрики поверхности, метрики пространства и интегральной средней кривизны поверхности  $F$ .

Известно, что получение оценок первых производных в зависимости от метрики не представляется трудным [6]. Оценки для вторых производных и их коэффициентов Гельдера можно получить из деривационных формул [6], если только соответственно оценить коэффициенты второй квадратичной формы поверхности  $F$  и их коэффициенты Гельдера. Коэффициенты  $\lambda_{ij}$  второй квадратичной формы при заданной параметризации поверхности  $(u^1, u^2)$  в случае перехода от одной пространственной параметризации к другой сохраняются с точностью до знака, поэтому достаточно иметь оценки  $\lambda_{ij}$  и их коэффициентов Гельдера в одной из регулярных пространственных параметризаций. С этой целью введем в пространстве в окрестности рассматриваемой поверхности полугеодезическую систему координат  $w^i$ . В качестве координат  $w^i$  произвольной точки пространства, близкой к поверхности, мы примем взятое со знаком расстояние точки от поверхности ( $w^3$ ) и координаты  $u^1, u^2$  основания геодезического перпендикуляра, опущенного на поверхность ( $w^1, w^2$ ). При такой параметризации пространства векторы  $x_1, x_2$ , касательные к поверхности, и нормаль  $n$  совпадают с векторами  $e_1, e_2, e_3$  локального базиса, определяемого параметризацией пространства, и основные уравнения теории поверхностей имеют вид [6]

$$\begin{aligned} K_e &= K_e - K_R, \\ \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u^1} &= \tilde{\Gamma}_{12}^1 \lambda_{11} + (\tilde{\Gamma}_{12}^2 - \tilde{\Gamma}_{11}^1) \lambda_{12} - \tilde{\Gamma}_{11}^2 \lambda_{22} - R_{1312}, \\ \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial u^1} &= \tilde{\Gamma}_{22}^1 \lambda_{11} + (\tilde{\Gamma}_{22}^2 - \tilde{\Gamma}_{12}^1) \lambda_{12} - \tilde{\Gamma}_{12}^2 \lambda_{22} - R_{2312}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $K_e$ ,  $K_e$  — внешняя и внутренняя (гауссова) кривизны поверхности, а  $K_R$  — кривизна пространства в направлении двумерной площадки, касающейся поверхности,  $\tilde{\Gamma}_{em}^k$  — символы Христоффеля второго рода для поверхности,  $R_{ijkl}$  — компоненты тензора кривизны пространства в полугеодезической системе координат. Теперь задача получения оценок для  $\lambda_{ij}$ , так же как и в случае евклидова пространства [4], может быть сведена к получению оценок для производных некоторого глобального гомеоморфизма:  $u^1 = u^1(\alpha, \beta)$ ,  $u^2 = u^2(\alpha, \beta)$ , приводящего вторую квадратичную форму к каноническому виду:

$$\lambda_{ij} du^i du^j = \lambda(\alpha, \beta)(dx^2 + d\beta^2),$$

и удовлетворяющего некоторой системе уравнений эллиптического типа с коэффициентами, зависящими только от метрики поверхности и кривизны пространства.

Точнее, гомеоморфизм строится следующим образом.

**Лемма 1.** Пусть  $F$  — аналитическая в области  $\Omega$  поверхность положительной внешней кривизны  $K_e$ . Тогда в каждом круге  $\Delta \{(u - u_0)^2 +$

$+(z - c_*)^2 \leq r^2 \} ((u, v) = (u^1, u^2))$ , содержащемся в области  $\Omega$ , существует пара действительных функций  $u = u(\alpha, \beta)$ ,  $v = v(\alpha, \beta)$ , обладающих следующими свойствами:

1) функции  $u = u(\alpha, \beta)$  и  $v = v(\alpha, \beta)$  дважды непрерывно дифференцируемы в круге  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$  и отображают круг  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$  одно-однозначно и непрерывно на круг  $\Delta \{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leq r^2\}$ . При этом  $u(0, 0) = u_0$ ,  $v(0, 0) = v_0$  и  $u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha \neq 0$  для  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ .

2)  $u = u(\alpha, \beta)$  и  $v = v(\alpha, \beta)$  удовлетворяют для  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$  дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta u + \left[ \tilde{\Gamma}_{11}^1 + \frac{1}{2K_e} \left( (K_i)_u + \frac{1}{g} R_{1212,1} \right) \right] (u_\alpha^2 + u_\beta^2) + \left[ 2\tilde{\Gamma}_{12}^1 + \frac{1}{2K_e} \left( (K_i)_v + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{g} R_{1212,2} \right) \right] (u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + \tilde{\Gamma}_{22}^1 (v_\alpha^2 + v_\beta^2) + \frac{2R_{3212}}{\sqrt{K_e g}} (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) = 0 \quad (2) \\ \Delta v + \tilde{\Gamma}_{11}^2 (u_\alpha^2 + u_\beta^2) + \left[ 2\tilde{\Gamma}_{12}^2 + \frac{1}{2K_e} \left( (K_i)_u + \frac{1}{g} R_{1212,1} \right) \right] (u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + \\ \left. \left. + \left[ \tilde{\Gamma}_{22}^2 + \frac{1}{2K_e} \left( (K_i)_v + \frac{1}{g} R_{1212,2} \right) \right] (v_\alpha^2 + v_\beta^2) + \frac{2R_{1313}}{\sqrt{K_e g}} (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) = 0. \right. \end{aligned}$$

3) Для  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$  имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \sqrt{K_e g} \frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \\ \lambda_{12} &= \sqrt{K_e g} \frac{u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \\ \lambda_{22} &= \sqrt{K_e g} \frac{u_\alpha^2 + u_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

**Лемма 2.** Пусть выполняются предположения леммы 1, а также

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_{lm}| &\leq \eta^+ < \infty, \quad (\eta^+ = \text{const} > 0), \\ \tilde{g} &= \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 \geq \eta^- > 0, \quad (\eta^- = \text{const}), \\ K_e &\geq K > 0 \quad ((u, v) \in \Omega, \quad K = \text{const}). \end{aligned}$$

Тогда для введенных в лемме 1 отображающих функций  $u = u(\alpha, \beta)$ ,  $v = v(\alpha, \beta)$  выполняется неравенство

$$\iint_{\alpha^2 + \beta^2 < 1} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2) d\alpha d\beta \leq \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{K_e}} \iint_{\tilde{F}} |H| d\sigma.$$

Леммы 1 и 2 доказываются точно так же, как аналогичные утверждения для поверхностей в евклидовом пространстве [4]. При этом уравнения (2) получаются из уравнений Бельтрами:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \frac{\lambda_{11}v_\beta + \lambda_{12}u_\beta}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}}, \\ v_\alpha &= \frac{\lambda_{12}v_\beta + \lambda_{22}u_\beta}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}}. \end{aligned}$$

шутем соответствующего дифференцирования и преобразования с использованием равенств (1).

В дальнейшем для краткости будем пользоваться обозначениями функционального анализа. Введем нормы  $\|x\|_p$ ,  $\|x\|_{p+\nu}$  ( $0 < \nu < 1$ ) и  $\|ds^2\|_p$  таким образом:

$$\begin{aligned} \|x\|_p(\Omega') &= \sum_k \sum_{m+n \leq p} \sup_{\Omega' \subset \Omega} \left| \frac{\partial^{m+n} x^k}{\partial u^m \partial v^n} \right|, \\ \|x\|_{p+\nu}(\Omega') &= \|x\|_p(\Omega') + \\ &+ \sum_k \sum_{m+n=p} \sup_{(u_0, v_0), (u_1, v_1) \in \Omega'} \frac{\left| \frac{\partial^p x^k(u_1, v_1)}{\partial u^m \partial v^n} - \frac{\partial^p x^k(u_0, v_0)}{\partial u^m \partial v^n} \right|}{(\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2})^\nu} \\ &\quad (u_0, v_0) \neq (u_1, v_1) \\ \|ds^2\|_p &= \sum_{l, m} \sum_{k+l \leq p} \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^{k+l} g_{lm}}{\partial u^k \partial v^l} \right|, \\ \|ds^2\|_p &= \sum_{i, j} \sum_{k+m+n \leq p} \sup_{(x^1, x^2, x^3) \in D} \left| \frac{\partial^{m+n} g_{ij}}{\partial x^1^k \partial x^2^m \partial x^3^n} \right|. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение об априорных оценках.

**Лемма 3.** Пусть поверхность  $F$ , ее линейный элемент  $ds^2(u, v)$ , линейный элемент пространства  $ds^2(x^1, x^2, x^3)$  аналитичны в соответствующих областях  $\Omega(u, v)$ ,  $D(x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$  и удовлетворяют следующим условиям.

1.  $\|ds^2\|_3 \leq a$ ,  $\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 \geq \frac{1}{a}$ ,
2.  $\|ds^2\|_3 \leq a$ ,  $g_{ij}\xi^i\xi^j \geq \frac{1}{a} (\cdot)^2$ , ( $a = \text{const} > 0$ )
3.  $K = K_l - K_R \geq b > 0$ ,  $(u, v) \in \Omega$ , ( $b = \text{const}$ )
4.  $\iint_F |H| d\sigma \leq c < \infty$ , ( $c = \text{const}$ ),

где  $H$  — средняя кривизна,  $d\sigma$  — элемент поверхности.

Тогда для любых двух точек  $(u_0, v_0)$ ,  $(u_1, v_1)$  множества  $\Omega_p$  (отстоящих от границы  $\Omega$  на расстоянии, не меньшем  $p$ ) имеют место оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial u^i \partial u^j} \right| &\leq \tau_0(a, b, c, p), \\ \left| \frac{\partial^2 x^\beta(u_1, v_1)}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 x^\beta(u_0, v_0)}{\partial u^i \partial u^j} \right| &\leq \tau_1 \cdot (\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2})^\nu, \\ &\quad (\beta = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

с любым показателем  $\nu$ ,  $0 < \nu < 1$ ,  $\tau_1 = \tau_1(a, b, c, p, \nu) < \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $(u_0, v_0)$  — произвольная точка в  $\Omega_p$  и  $u = u(\alpha, \beta)$ ,  $v = v(\alpha, \beta)$  — отображение, рассмотренное в лемме 1. Функции

$$\begin{aligned} \xi(\alpha, \beta) &= \frac{u(\alpha, \beta) - u_0}{p}, \\ \eta(\alpha, \beta) &= \frac{v(\alpha, \beta) - v_0}{p} \end{aligned}$$

отображают круг  $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$  одно-однозначно и непрерывно на круг  $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ , причем

$$\xi(0, 0) = \eta(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0, \quad (\alpha^2 + \beta^2 < 1),$$

и приводят следующим уравнениям:

$$\Delta \xi = h_1(\xi, \eta)(\xi_a^2 + \xi_b^2) + h_2(\xi, \eta)(\xi_a \eta_a + \xi_b \eta_b) + h_3(\xi, \eta)(\eta_a^2 + \eta_b^2) + h_4(\xi, \eta)(\xi_a \eta_b - \xi_b \eta_a), \quad (4)$$

$$\Delta \eta = \tilde{h}_1(\xi, \eta)(\xi_a^2 + \xi_b^2) + \tilde{h}_2(\xi, \eta)(\xi_a \eta_a + \xi_b \eta_b) + \tilde{h}_3(\xi, \eta)(\eta_a^2 + \eta_b^2) + h_4(\xi, \eta)(\xi_a \eta_b - \xi_b \eta_a),$$

$$h_1 = -\rho \left\{ \tilde{\Gamma}_{11} + \frac{1}{2K_e} \left[ (K_i)_u + \frac{1}{g} R_{1212,1} \right] \right\}, \quad h_3 = -\rho \tilde{\Gamma}_{22}',$$

$$h_2 = -\rho \left\{ 2\tilde{\Gamma}_{12} \frac{1}{2K_e} \left[ (K_i)_v + \frac{1}{g} R_{1212,2} \right] \right\}, \quad h_4 = \rho \frac{2R_{2312}}{\sqrt{K_e g}},$$

$$\tilde{h}_1 = -\rho \tilde{\Gamma}_{11}', \quad \tilde{h}_3 = -\rho \left\{ \tilde{\Gamma}_{22}^2 + \frac{1}{2K_e} \left[ (K_i)_u + \frac{1}{g} R_{1212,2} \right] \right\},$$

$$\tilde{h}_2 = -\rho \left\{ 2\tilde{\Gamma}_{12}^2 + \frac{1}{2K_e} \left[ (K_i)_u + \frac{1}{g} R_{1212,1} \right] \right\}, \quad \tilde{h}_4 = \rho \frac{2R_{1312}}{\sqrt{K_e g}}.$$

Составим из коэффициентов  $h_i$ ,  $\tilde{h}_i$  выражения

$$\omega_1 = \tilde{h}_1 = -\rho \tilde{\Gamma}_{11}^2,$$

$$\omega_2 = h_1 - \tilde{h}_2 = \rho (2\tilde{\Gamma}_{12}^2 - \tilde{\Gamma}_{11}^2),$$

$$\omega_3 = h_2 - \tilde{h}_3 = \rho (\tilde{\Gamma}_{22}^2 - 2\tilde{\Gamma}_{12}^2),$$

$$\omega_4 = h_3 = -\rho \tilde{\Gamma}_{22}'.$$

При переходе от одной пространственной параметризации  $x^i$  к другой  $w^i$   $K_i$  инвариантна, а величины  $R_{1312}$  и  $R_{2312}$  преобразуются, как компоненты тензора кривизны, по формуле

$$R_{i'j'k'l'} = \frac{\partial x^i}{\partial w^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial w^{l'}} \frac{\partial x^k}{\partial w^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial w^{l'}} R_{ijkl}.$$

Соответственно преобразуются тензоры  $R_{1212,i}$  ( $i = 1, 2$ ).

Производные  $\frac{\partial x^i}{\partial w^{i'}}$  функции  $x(w^1, w^2, w^3)$  при  $w^3 = 0$  нетрудно оценить в зависимости от метрик поверхности и пространства. Имеем

$$\left| \frac{\partial x^i}{\partial w^{i'}} \right| = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^{i'}} \right| \leq \Gamma(a), \quad (i' = 1, 2).$$

Фиксируя  $w' = c'$ ,  $w^3 = c^3$  в неравенстве

$$\frac{1}{a} \sum (dx^i)^2 \leq ds^2 = g_{jk} dw^j dw^k + (dw^3)^2, \quad (j, k = 1, 2),$$

получаем

$$\left| \frac{\partial x^i}{\partial w^3} \right| \leq \sqrt{a}.$$

Далее, учитывая условия (1) и (2) леммы, устанавливаем в круге  $\xi + \tau_i^2 \leq 1$  неравенства

$$\sum_{k=1}^4 (|h_k(\xi, \eta)| + |\tilde{h}_k(\xi, \eta)|) \leq M_0 = M_0(a, b, \rho) < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^4 \left( \left| \frac{\partial \omega_k}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial \omega_k}{\partial \eta} \right| \right) \leq M_1 = M_1(a, \rho) < \infty. \quad (5)$$

Из условия (3) и леммы 2 получаем

$$\iint_{\alpha^2 + \beta^2 < 1} (\xi_a^2 + \eta_a^2 + \xi_\beta^2 + \eta_\beta^2) d\alpha d\beta \leq P = P(a, b, c, p) < \infty. \quad (6)$$

По теореме Хейнца [4] для отображающей функции

$$\zeta(\gamma) = \xi(\alpha, \beta) + i\eta(\alpha, \beta), \quad (\gamma = \alpha + i\beta),$$

удовлетворяющей (4), (5), (6), справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\zeta_\alpha| + |\zeta_\beta| &\leq \lambda_1(M_0, M_1, P, r) < \infty, \quad (|\gamma| \leq r < 1), \\ |\zeta_\alpha(\gamma_2) - \zeta_\alpha(\gamma_1)| + |\zeta_\beta(\gamma_2) - \zeta_\beta(\gamma_1)| &\leq \lambda_2(M_0, M_1, P, r, v) |\gamma_2 - \gamma_1|, \\ |\gamma_1| &\leq r, \quad |\gamma_2| \leq r, \quad v — любое, \quad 0 < v < 1, \quad \lambda_2 < \infty, \\ |\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha| &\geq \lambda_3(M_0, M_1, p, r) > 0, \quad (|\gamma| \leq r). \end{aligned}$$

Далее, из равенств (3) точно так же, как в евклидовом пространстве, получаем оценки

$$|\lambda_{ij}| \leq \tau_0(a, b, c, p) < \infty,$$

$$|\lambda_{ij}(u_1, v_1) - \lambda_{ij}(u_0, v_0)| \leq \tau_1(a, b, c, p, v) (\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2}),$$

где  $v$  — любое,  $0 < v < 1$ ,  $\tau_1 < \infty$  и  $i, j = 1, 2$ .

Связь между вторыми производными функций  $x^i$  и коэффициентами второй квадратичной формы  $\lambda_{ij}$  выражается формулой [6]

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^i \partial u^j} = \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial u^k} - \Gamma_{ks}^l \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x^s}{\partial u^j} + \lambda_{ij} \xi^k,$$

где

$$\xi^k = \frac{1}{\sqrt{g\tilde{g}}} \begin{vmatrix} g_{ii} \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, & g_{im} \frac{\partial x^m}{\partial u^2} \\ g_{jl} \frac{\partial x^l}{\partial u^1}, & g_{jm} \frac{\partial x^m}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

$\tilde{g}$  и  $g$  — дискриминанты квадратичных форм  $d\tilde{s}^2$  и  $ds^2$ , индексы  $i, j$  различны и не равны  $k$ .

Используя эти формулы и оценки для  $\lambda_{ij}$  и  $\frac{\partial x^i}{\partial u^j}$ , получаем утверждаемые в лемме неравенства.

## 2. Доказательство теоремы о регулярном погружении

Прежде всего отметим некоторые свойства выпуклых поверхностей в римановом пространстве  $R$ .

Пусть  $P$  — точка поверхности  $F$  в пространстве  $R$ . Обозначим  $E$  нормальное евклидово пространство, соприкасающееся с  $R$  в точке  $P$ . Пусть  $\{x^i\}$  — соответствующая  $E$  нормальная система координат в  $R$  и  $x^i(u^1, u^2)$  — уравнение поверхности  $F$ , заданной в области  $\Omega(u^1, u^2)$ . Будем говорить, что поверхность  $F$  пространства  $R$  принадлежит классу  $\tilde{W}$ , если в пространстве  $E$  можно указать такие три различных вектора в точке  $P$ , что рассматриваемая в  $E$  поверхность

$$x^i = x^i(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in \Omega$$

однозначно проектируется в направлении каждого из них. Нетрудно установить, что достаточно малая окрестность любой точки на общей выпуклой поверхности в пространстве  $R$  принадлежит классу  $W$ .

Можно показать [8], что интегральная средняя кривизна регулярной поверхности с положительной внешней кривизной, прилежащей классу  $\mathcal{W}$ , зависит в зависимости от метрики поверхности и метрики пространства.

Отсюда и из леммы 3 вытекает лемма об априорных оценках:

**Лемма 4.** Пусть  $F$  — аналитическая выпуклая поверхность класса  $\mathcal{W}$  в аналитическом пространстве  $R$  и  $x^i = x^i(u^1, u^2)$  ( $(u^1, u^2) \in \Omega, i=1, 2, 3$ ) — ее уравнение.

Пусть метрика  $\tilde{ds}^2$  поверхности  $F$  и метрика  $ds^2$  пространства удовлетворяют условиям

$$1. \|\tilde{ds}^2\|_3 < a, \tilde{g} \geq \frac{1}{a},$$

$$2. \|ds^2\|_3 < a, g \geq \frac{1}{a},$$

$$3. K_r > \frac{1}{a},$$

где  $a$  — постоянное положительное число.

Тогда для любой замкнутой подобласти, содержащейся в  $\Omega$ , имеет место оценка

$$\|x\|_{2+} \leq \Phi(a, v) < \infty$$

для любого  $v, 0 < v < 1$ .

**Теорема.** Пусть  $R$  — полное трехмерное риманово пространство и  $M$  — замкнутое, гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду большей некоторой постоянной с (большей, меньшей или равной нулю).

Тогда, если кривизна пространства  $R$  всюду меньше  $c$ , то  $M$  допускает изометрическое погружение в  $R$  в виде регулярной поверхности  $F$ .

Точнее, если метрика пространства  $R$  и метрика многообразия  $M$  дифференцируемы  $k$  раз ( $k \geq 3$ ), то поверхность  $F$  принадлежит, по крайней мере, классу  $C^{(k-1+v)}$  при любом  $v, 0 < v < 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $O$  — любая точка многообразия  $M$ ,  $O'$  — любая точка пространства  $R$ . Зададим в точке  $O'$  ориентируемый двумерный элемент  $\alpha'$ , изометрический  $\alpha$  — двумерному элементу многообразия  $M$  в точке  $O$ . Это означает, что пучок направлений в точке  $O$  изометрически отражен на пучок направлений в точке  $O'$ .

Обозначим  $G$  — компактную область в  $R$ , содержащую шар с центром в точке  $O'$ , радиус которого равен внутреннему диаметру  $M$ , и  $\Sigma_3$  — аналитическое многообразие, на котором задана метрика  $ds^2$  пространства  $R$ .

Построим на многообразии  $\Sigma_3$  последовательность пространств  $R_n$  с аналитическими метриками  $ds_n^2$ , соприкасающихся с  $R$  в точке  $O'$ , и возьмем на сфере  $\Sigma_2$  последовательность многообразий  $M_n$  с аналитическими метриками  $\tilde{ds}_n^2$ , соприкасающихся с  $M$  в точке  $O$ , так чтобы

$$\|ds_n^2 - ds^2\|_3 \rightarrow 0, \quad (1)$$

$$\|\tilde{ds}_n^2 - ds^2\|_3 \rightarrow 0.$$

Пусть  $G_n$  — компактная область в  $R_n$ , содержащая шар с центром в точке  $O'$ , радиус которого равен внутреннему диаметру  $M_n$ . Не ограничивая общности, можно считать, что гауссова кривизна линейного элемента  $\tilde{ds}_n^2$  в  $G_n$  больше кривизны пространства  $R_n$  для любого  $n$ .

По теореме А. В. Погорелова  $M_n$  допускает изометрическое погружение в  $G_n$  в виде аналитической поверхности  $F_n$ , расположенной по залогу сторону от элемента  $\alpha'$ .

Покроем  $\Sigma_2$  системой параметризованных областей  $\tilde{\Sigma}_k$  ( $1, 2, \dots, N$ ) так, чтобы диаметр  $\tilde{\Sigma}_k$  в метрике  $M_n$  был не больше некоторого положительного числа  $d$  при любом  $k$  и  $n$ .

Пусть  $F_{nk}$  — область на поверхности  $F_n$ , соответствующая  $\tilde{\Sigma}_k$ , и  $P_{nk}$  — точка на ней. Тогда при достаточно малом  $d$  поверхность  $F_{nk}$  можно задать уравнением

$$x_{nk}^i = x_{nk}^i(u^1, u^2), (u^1, u^2) \in \Sigma_k (i = 1, 2, 3),$$

где  $x_{nk}^i$  — нормальные координаты в пространстве  $R_n$ , связанные с точкой  $P_{nk}$ .

Число областей покрытия  $\{F_{nk}\}_{k=1}^N$  на поверхности  $F_n$  зависит только от  $d$  и метрики пространства  $R_n$ . Следовательно, можно считать, что число областей  $N$  не зависит от  $n$ .

Отсюда и из соотношений (1) следует оценка

$$\|x_n\|_1 \leq C, \quad (2)$$

где  $C$  — константа, зависящая только от метрики пространства  $R$  и метрики многообразия  $M$ .

Из множества поверхностей  $F_n$  в силу (2) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к выпуклой поверхности  $F$ , гомеоморфной сфере  $\Sigma_2$ .

Докажем, что поверхность  $F$  принадлежит классу  $C^{2+\alpha}$  и реализует метрику  $\tilde{ds}^2$ , т. е. если  $x = x(u^1, u^2)$ ,  $(u^1, u^2) \in \Sigma_2$  — уравнение поверхности  $F$ , то

$$(dx)^2 = \tilde{ds}^2.$$

Пусть  $Q$  — произвольная точка поверхности  $F$ ,  $U$  — окрестность точки  $Q$  на поверхности  $F$ , принадлежащая классу  $W$ ,  $\omega \subset U$  — любая замкнутая область, содержащая внутри себя точку  $O$ .

Обозначим  $\omega_l$  замкнутые области, которые целиком лежат на поверхностях  $F_l$  и сходятся к  $\omega$  при  $F_l \rightarrow F$ .

Легко видеть, что при достаточно большом  $l$   $\omega_l$  принадлежит классу  $W$ .

Пусть  $Q_l \in \omega_l$  — последовательность точек, сходящихся к  $Q$ . Введем в окрестности  $Q_l$  нормальные координаты  $\{x_l^i\}$  в пространстве  $R_l$ , связанные с точкой  $Q_l$ . Без ограничения общности можно считать, что пространственная параметризация  $\{x_l^i\}$  в  $R_l$  покрывает  $\omega_l$ .

В силу соотношений (1) при достаточно малом диаметре  $d$ , области  $\omega$  и достаточно большом  $l$ , можно указать такое положительное число  $a$ , что для  $\omega_l$  выполняются неравенства

$$\|\tilde{ds}_l^2\|_3 \leq a, \tilde{g}_l > \frac{1}{a},$$

$$\|ds_l^2\|_3 \leq a, g_l > \frac{1}{a},$$

$$(K_l - K_R)_l \geq \frac{1}{a} (a = \text{const}).$$

Пусть  $x_l^i = x_l^i(u^1, u^2)$ ,  $((u^1, u^2) \in \Omega)$  — уравнения поверхности  $\omega_l$  и  $\Omega^1$  — любая замкнутая область, содержащаяся строго внутри  $\Omega$  и содержащая внутри образ точки  $O$ . По лемме 4 в области  $\Omega^1$  имеет место оценка

$$\|x\|_{2+\alpha} \leq \Phi(\alpha, v), (0 < v < 1)$$

при любом достаточно большом  $l$ .

Следует, что предельная поверхность  $F$  в окрестности  $\Omega^1$  обеих точек  $P$  дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию Гельдера с любым показателем  $\nu$ ,  $0 < \nu < 1$ .

Пусть  $F_{ik}$  — подпоследовательность поверхностей  $F_i$ , для которых

$$\|x_{ik} - x\|_1 \rightarrow 0.$$

В силу изометричности погружения имеет место равенство

$$\tilde{ds}_{ik}^2 = dx_{ik}^2.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\tilde{ds}^2 = dx^2.$$

Таким образом, предельная поверхность реализует метрику  $\tilde{ds}^2$  и принадлежит классу  $C^{2+\nu}$ .

При этом элемент  $\alpha$  в точке  $O$  многообразия  $M$  совпадает с данным, изометричным  $\alpha$ , двумерным элементом  $\alpha^1$  в пространстве  $R$  и поверхность  $F$  располагается по заданную сторону от площадки элемента  $\alpha^1$ .

Дальнейшая регулярность предельной поверхности получается с помощью теоремы Ниренберга [7] о характере регулярности дважды непрерывно дифференцируемого решения уравнения эллиптического типа с регуляризующими коэффициентами, путем применения ее к системе уравнений регуляризации предельной поверхности [6]. Согласно такой теореме из двумерной дифференцируемости поверхности  $F$  и  $k$ -кратной дифференцируемости метрик поверхности и пространства следует, что поверхность  $F$  принадлежит по крайней мере классу  $C^{(k-1)+\nu}$  с любым показателем  $\nu$ ,  $0 < \nu < 1$ ,  $k > 3$ .

Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. А. В. Погорелов. Некоторые результаты по геометрии в целом. Изд-во Харьковск. ун-та, 1961.
- 2. А. В. Погорелов. Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве. Изд-во Харьковск. ун-та, 1960.
- 3. E. Heinz. Über die Differentialungleichung  $0 < \alpha \leq rt - S^2 \leq \beta < \infty$ . Math. Zeitschr., 72 (1959).
- 4. E. Heinz. Neue a-priori-Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch Linienelement. Math. Zeitschr., 74 (1960).
- 5. А. В. Погорелов. Изгибание выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М. 1951.
- 6. А. В. Погорелов. Некоторые вопросы по геометрии в целом в римановом пространстве. Изд-во Харьковск. ун-та, 1957.
- 7. L. Nirenberg. On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure Appl. Math., 6 (1953).
- 8. А. А. Дубровин. О регулярности выпуклых поверхностей с регулярной мерой в пространствах постоянной кривизны. Укр. геом. сборник, вып. 1, Изд-во Харьковск. ун-та, 1965, 16—27.

Поступила в редакцию 6 апреля 1965 г.

## О ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕНОСА

*A. И. Иванов* (Кременчуг)

Н. Г. Чеботарев доказал [2], что через каждую точку поверхности переноса  $z = f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  — регулярная (четырежды непрерывно дифференцируемая) функция, проходят две, четыре, или бесчисленное множество линий переноса. Представляет интерес исследование того случая, когда поверхность нерегулярна.

Рассмотрим выпуклую поверхность переноса, имеющую особую точку. Особой мы называем ту точку, в которой не существует касательной плоскости. Такая точка на выпуклой поверхности может быть ребристой или конической. На цилиндрической поверхности переноса могут быть только ребристые особые точки. Нецилиндрическая выпуклая поверхность переноса может иметь не только конечное, но даже счетное, всюду плотное множество конических точек. Приведем пример такой поверхности.

В качестве образующей  $L_1$  и направляющей  $L_2$  возьмем выпуклые кривые, у каждой из которых существует счетное, всюду плотное множество точек, в которых не существует касательной. Расположим  $L_1$  в плоскости  $x = 0$  выпуклостью вверх, а  $L_2$  — в плоскости  $y = 0$  выпуклостью вверх. При переносе  $L_1$  вдоль  $L_2$  получим выпуклую поверхность переноса, обладающую счетным, всюду плотным множеством конических точек.

**Теорема 1.** *Если образующая  $L_1$  и направляющая  $L_2$  — гладкие кривые в точке  $A$  выпуклой поверхности переноса  $F$  и в ней не касаются, то поверхность  $F$  гладкая в точке  $A$ .*

**Доказательство.** Касательный конус поверхности  $F$  в точке  $A$  выпуклый ([1], гл. IV, § 5) и содержит в себе касательные  $T_1$  и  $T_2$  к кривым  $L_1$  и  $L_2$ . Следовательно, он — плоскость.

Как показывает пример цилиндра, из гладкости поверхности не следует гладкость линий переноса. Однако имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если на выпуклой поверхности переноса  $F$  через точку  $A$  не проходит прямолинейный отрезок, принадлежащий поверхности, то линия переноса  $L$  имеет в точке  $A$  правую и левую полукасательные.*

**Доказательство.** Пусть  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  — параметрическое уравнение линии переноса. Линия переноса  $L$  имеет окрестность точки  $A$ , гомеоморфную отрезку  $t_1 < t < t_2$ . Ограничимся рассмотрением этой окрестности. Точка  $A$  разбивает этот отрезок кривой  $L$  на левую и правую ветви. Отбросим левую ветвь и будем рассматривать только правую.

Дополним поверхность  $F$  до полной выпуклой поверхности, ограничивающей выпуклое тело  $Q$ . Проведем через точку  $A$  прямую  $N$ , идущую внутрь тела  $Q$ . Полуплоскости, проведенные через эту прямую, пересекают поверхность  $F$  по выпуклым кривым. Возможны два случая.

**1.** Существуют две полуплоскости  $P_1$  и  $P_2$ , каждая из которых имеет общие точки с кривой  $L_2$  в сколь угодно малой окрестности точки  $A$ . Эти полуплоскости разбивают пространство на две части  $E_1$  и  $E_2$ . Одна из них, например  $E_1$ , обладает тем свойством, что любая полуплоскость, проходящая в ней через прямую  $N$ , имеет с кривой  $L$  общие точки в сколь угодно малой окрестности точки  $A$ , так как в противном случае правая ветвь кривой  $L$  распалась бы на две ветви.

Будем проводить через прямую  $N$  всевозможные полуплоскости  $P$  из части  $E_1$ . Любая образующая  $T$  сектора  $R$  касательного конуса, заштрихованного между полуплоскостями  $P_1$  и  $P_2$ , является полукасательной к выпуклой линии пересечения плоскости  $P$  с поверхностью  $F$ . Но так как полуплоскость  $P$  имеет общие точки с линией переноса  $L$  в произвольно малой окрестности точки  $A$ , то эта образующая  $T$  является пределом для последовательности полуправых  $T_i$ , проведенных из точки  $A$  через точки пересечения плоскости  $P$  с кривой  $L$ . Переместимся вместе с образующей  $T$  из точки  $A$  вдоль направляющей в достаточно близкую точку  $A'$  так, чтобы прямая  $N'$ , параллельная  $N$ , входила внутрь тела  $Q$ . При этом прямая  $L$ , прямая  $N$ , плоскости  $P$ , и, следовательно, полуправые  $T_i$ , переместятся параллельно на один и тот же вектор  $\bar{r}$ , т. е. сектор  $R$  переместится как твердое тело в положение  $R'$ .

Выберем любую образующую  $T$  сектора  $R$  и соответствующую образующую  $T'$  сектора  $R'$  и проведем через них опорные плоскости к касательным конусам в точках  $A$  и  $A'$ . Эти опорные плоскости можно взять параллельными. Отсюда следует, что они совпадают, так как в противном случае одна из них пересекла бы тело  $Q$ . Но так как точки  $A$  и  $A'$  лежат на выпуклой плоскости, то отрезок  $AA'$  лежит на поверхности  $F$  и, следовательно, первый случай невозможен.

**2.** Не существует двух полуплоскостей, каждая из которых имела бы общую точку с кривой переноса  $L$  в сколь угодно малой окрестности точки  $A$ .

Разобъем касательный конус в точке  $A$  образующими  $T^i$  на сектора с углом, меньшим  $\frac{\varepsilon}{2}$ , где  $\varepsilon > 0$  — любое. Полуплоскости  $P^i$ , проведенные через прямую  $N$  и  $T^i$ , разбивают пространство на двугранные углы. Отрезок кривой  $L$ , лежащий в достаточно малой окрестности точки  $A$ , попадет внутрь двугранного угла между  $P^i$  и  $P^{i+2}$ .

Возьмем произвольную последовательность точек  $\bar{r}(t_i)$  кривой  $L$ , спрямляющуюся к  $A$ . Через каждую из них проведем луч из точки  $A$ . Попытаемся доказать, что любая такая последовательность сходится к одному и тому же лучу, лежащему на касательном конусе, который и будет правой полукасательной. Действительно, допустим, что это не так. Выберем две последовательности лучей, сходящихся соответственно к двум образующим  $T'$  и  $T''$  касательного конуса. Но обе эти образующие лежат между образующими  $T^i$  и  $T^{i+2}$  на касательном конусе и, следовательно, угол сектора между  $T'$  и  $T''$  меньше любого  $\varepsilon > 0$ , т. е.  $T'$  и  $T''$  совпадают. Аналогично доказывается существование левой полукасательной.

**Лемма 1.** Если через точку  $A$  выпуклой поверхности  $F$  не проходит прямолинейный отрезок, то образующая  $L_1$  и направляющая  $L_2$ , проходящие через точку  $A$ , не имеют других общих точек, кроме  $A$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $L_1$  и  $L_2$ , кроме  $A$ , имеют другую общую точку  $B$ . Обозначим через  $A_1$  и  $B_1$  те точки образующей  $L_1$ , лежащие в данный момент совпадают с точками  $A$  и  $B$ . Передвинем  $L_1$  вдоль направляющей так, чтобы точка  $A_1$  совпала с точкой  $B$ . После

такого перемещения точки  $A, B, B_1$  лежат на одной прямой. Следовательно отрезок  $AB_1$  лежит на поверхности  $F$ , что противоречит предположению

Допустим теперь, что поверхность  $F$  имеет две сети переноса. Точка  $A$  в своей окрестности разбивает проходящие через нее кривые переноса  $L_1$  и  $L_2$  первой сети на две части  $l_1, l_3$  и  $l_2, l_4$ , а кривые переноса  $L'_1$  и  $L'_2$  второй сети — на части  $l'_1, l'_3$  и  $l'_2, l'_4$  соответственно.

**Лемма 2.** *Если через точку  $A$  выпуклой поверхности переноса  $F$  не проходит прямолинейный отрезок, то две линии переноса не могут иметь общей полукасательной.*

Доказательство. Допустим, например, что в точке  $A$  совпадают полукасательные  $T_1$  и  $T'_1$  к кривым  $l_1$  и  $l'_1$ . Через каждую точку кривой  $L_2$  проведем опорную прямую к поверхности  $F$ , параллельную  $T_1$ . Получим выпуклый цилиндр  $C$  с направляющей  $L_2$  и образующей, параллельной  $T_1$ , на котором кривые  $l_2$  и  $l_4$  лежат по разные стороны образующей  $T_1$ . Действительно, допустив, что по одну сторону от  $T_1$  лежат точки кривых  $l_2$  и  $l_4$ , получим, что некоторая образующая цилиндра  $C$  пересечет  $l_2$  в точке  $B_2$ , и  $l_4$  — в точке  $B_4$ . Но тогда часть цилиндра  $C$ , заключенная между  $T_1$  и прямой  $B_2B_4$ , лежит на поверхности  $F$ , откуда следует, что через точку  $A$  проходит отрезок, параллельный  $T_1$ , или в окрестности точки  $A$  кривая  $l_2$  совпадает с  $l_4$ , что невозможно.

Построив цилиндр  $C'$  с направляющей  $L'_2$  и образующей, параллельной  $T'_1$ , получим, что в окрестности точки  $A$  цилиндр  $C'$  совпадает с  $C$  и кривая  $L'_2$  лежит на цилиндре  $C$ . Допустим, что кривая  $L'_2$  не совпадает с кривой  $L_2$ . Тогда найдется образующая цилиндра  $C$ , пересекающая кривые  $L_2$  и  $L'_2$  в точках  $B_2$  и  $B'_2$  соответственно. Отрезок  $B_2B'_2$  лежит на поверхности  $F$ . По непрерывности кривых  $L_2, L'_2$  любая образующая цилиндра  $C$ , проведенная между  $T_1$  и образующей  $B_2B'_2$ , пересечет и  $L_2$ , и  $L'_2$ , причем ее отрезок между этими кривыми лежит на поверхности  $F$ . Таким образом, часть цилиндра  $C$ , заключенная между кривыми  $L_2, L'_2$ , содержащая отрезок  $B_2B'_2$  и точку  $A$ , лежит на поверхности  $F$ . Эта часть не является плоским куском, так как тогда через точку  $A$  проходил бы отрезок. Таким образом, отрезок  $B_2B'_2$  будет частью линии переноса. Но так как второй линией переноса является кривая  $L_2$ , то через точку  $A$  проходит отрезок, параллельный  $B_2B'_2$ , что противоречит условию леммы.

Если кривые, имеющие общую полукасательную, принадлежат одной сети, то доказательство аналогично.

В силу лемм 1 и 2 кривые  $l_1, l_2, l_3, l_4$  разбивают окрестность точки  $A$  на четыре части. Полукасательные  $T_1, T_2, T_3, T_4$  к этим кривым разбивают касательный конус на четыре сектора. Покажем, что каждый из этих секторов есть плоский угол. Возьмем, например, часть окрестности точки  $A$ , заключенную между  $l_1$  и  $l_2$ . Продолжим прямолинейно каждую из кривых  $l_1$  и  $l_2$  за точку  $A$  в направлении полукасательных  $T_1$  и  $T_2$ . Тогда продленные кривые  $\bar{l}_1$  и  $\bar{l}_2$  будут иметь в точке  $A$  непараллельные касательные и по теореме 1 поверхность  $F$ , полученная переносом  $\bar{l}_1$  вдоль  $\bar{l}_2$ , будет гладкой в точке  $A$ , а часть касательного конуса, заключенная между полукасательными  $T_1$  и  $T_2$ , будет плоским углом. Но часть поверхности  $F$ , заключенная между  $l_1$  и  $l_2$ , совпадает с частью поверхности  $F$  между этими же кривыми. Следовательно, часть касательного конуса поверхности  $F$  в точке  $A$  между полукасательными  $T_1$  и  $T_2$  есть плоский угол.

Таким образом, касательный конус поверхности переноса в точке  $A$  может быть четырех-, трех- или двугранным углом или плоскостью. По-

занял, что в условиях леммы 2 трехгранным углом касательный конус быть не может. Допустим противное. Тогда одна из полукасательных, например  $T_2$ , лежит в плоскости между двумя другими полукасательными  $T_1$  и  $T_3$ . Возьмем точку  $A''$  на кривой  $l_2$ , столь близкую к плоскости  $T_1 T_3$ , чтобы плоскость  $P$ , проведенная через  $A''$  параллельно плоскости  $T_1 T_3$ , пересекла кривую  $l_4$  в некоторой точке  $A'''$ . В сечении выпуклого тела  $Q$  получается плоская фигура  $S$ , на границе которой лежат точки  $A''$  и  $A'''$ . Если в точках  $A''$  и  $A'''$  провести полукасательные  $T_1''$ ,  $T_3''$  и  $T_2''$  —  $T_2$  к линиям переноса  $l_1$  и  $l_3$  соответственно, то эти полукасательные, параллельные соответственно  $T_1$  и  $T_3$ , будут опорными прямыми для фигуры  $S$ . Но фигура  $S$  должна лежать как внутри меньшего из углов  $T_1'' A''' T_3''$ , так и внутри меньшего из углов  $T_1''' A''' T_3'''$ , а это возможно лишь в том случае, когда  $T_1$  и  $T_3$  составляют одну прямую, и тогда касательный конус будет двугранным углом или плоскостью.

Таким образом, нами доказана.

**Теорема 3.** Касательный конус выпуклой поверхности переноса  $F$  в точке  $A$ , через которую не проходит прямолинейный отрезок, есть четырехгранный или двугранный угол или плоскость, причем в первых двух случаях ребра угла являются полукасательными к линиям переноса.

Отсюда следует, что в окрестности особой точки, через которую не проходит прямолинейный отрезок, выпуклая поверхность переноса изогнута в бесконечно малом двугранному или четырехгранному углу (III гл. IV, § 5).

**Теорема 4.** Если на выпуклой поверхности переноса есть хоть одна особая точка  $A$ , через которую не проходит прямолинейный отрезок, то эта поверхность существует только одна сеть переноса.

**Доказательство.** Допустим, что на поверхности существуют две сети переноса. Тогда в точке  $A$  касательный конус есть двух- или четырехгранный угол, ребрами которого являются полукасательные к линиям переноса. Отсюда следует, что две кривые переноса из различных сетей имеют общую полукасательную в точке  $A$ , что противоречит лемме 2. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гос.издат. М., 1948.  
2. Н. Г. Чеботарев. Об одном обобщении поверхностей переноса. Собр. соч., том II, 1949, 198—209.

Поступила в редколлегию 14 июня 1965 г.

## ОБ АБСОЛЮТЕ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

*Н. И. Кованцов* (Киев)

Главная группа Клейна, действующая на проективной плоскости, определяет геометрию, абсолютом которой является пара мнимых сопряженных точек (циклических точек). Это геометрия Евклида в широком смысле, т. е. геометрия обычных евклидовых движений вместе с подобными преобразованиями. Собственно евклидова геометрия получается выделением из главной группы Клейна тех коллинеаций, каждая из которых представляет собой произведение того или иного числа инволютивных гомологий следующего вида: центр гомологии находится на прямой, проходящей через циклические точки (несобственная прямая); ось гомологии пересекает несобственную прямую в точке, гармонически сопряженной с центром относительно циклических точек.

Такое выделение группы собственно евклидовой геометрии из главной группы Клейна не позволяет непосредственно видеть, что именно добавляется к абсолюту группы Клейна, чем отличается абсолют собственно евклидовой геометрии от абсолюту группы Клейна.

Ниже мы предлагаем в качестве такого абсолюта — геометрического образа, инвариантного относительно евклидовых коллинеаций, — связку конгруэнтных окружностей, которой предварительно дадим чисто проективное определение.

Пусть  $F_1, F_2$  — некоторая пара точек проективной плоскости и  $u$  — прямая, их соединяющая. Пусть  $k, k'$  — какая-то пара кривых второго порядка, проходящих через точки  $F_1, F_2$ . Кривые  $k, k'$  пересекаются еще в какой-то паре точек  $M, M'$ . Пусть  $u'$  — прямая, соединяющая точки  $M, M'$ . Обозначим через  $P, P'$  полюсы прямой  $u'$  относительно кривых  $k, k'$  и через  $v$  — прямую  $PP'$ . Пусть, далее,  $S \equiv v \times u$ ,  $S' \equiv v \times u'$  и  $W = (PS/SP') : (PS'/S'P')$  — сложное отношение четырех точек  $PP'SS'$ .

Подсчитаем прежде всего величину этого отношения. Для этого выберем координатный трехсторонник так, чтобы точки  $F_1, F_2$  имели координаты

$$F_1 = A_1 + \varepsilon A_2, \quad F_2 = A_1 - \varepsilon A_2,$$

$\varepsilon = 1$  — для случая, когда  $F_1, F_2$  действительны и  $\varepsilon = i$  — для случая, когда они мнимы.

Уравнения кривых  $k$  и  $k'$  могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{33}(x^3)^2 &= 0, \\ -\varepsilon^2(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2a'_{13}x^1x^3 + 2a'_{23}x^2x^3 + a'_{33}(x^3)^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{Полагая } a_{11} = \varepsilon^2 a, a_{21} = -b, a_{31} = -\varepsilon^2 a^2 + b^2 - r^2, \dots : \\ -\varepsilon^2 (x^1 - a' x^3)^2 + (x^2 - b' x^3)^2 - r'^2 (x^3)^2 = 0, \\ -\varepsilon^2 (x^1 - a' x^3)^2 + (x^2 - b' x^3)^2 - r'^2 (x^3)^2 = 0. \quad (1)$$

Вычавив из этих уравнений один из другого получим уравнение прямой  $u'$ :

$$(b^2 - a'^2)x^2 - 2(b - b')x^2 + [(a^2 - a'^2) + (b^2 - b'^2) - r^2 + r'^2]x^3 = 0.$$

Точки  $P \in P'$  имеют соответственно координаты

$$P(a, b, 1), P'(a', b', 1).$$

Прямая  $u'$  определяется уравнением

$$(b - b')x^1 + (a' - a)x^2 + (ab' - a'b)x^3 = 0.$$

Можно легко определяемые координаты точки  $S$ :

$$S(a - a', b - b', 0).$$

Обозначим координаты точки  $S'$  через  $y^1, y^2, y^3$ . Тогда, учитывая, что  $S' \in PP'$ , заключим, что

$$y^3 = \frac{1}{a'b - ab'} [(b - b')y^1 + (a' - a)y^2].$$

Теперь имеем

$$W' = \frac{\frac{b - b'}{a - a'} - \frac{b}{a}}{\frac{b'}{a'} - \frac{b - b'}{a - a'}} : \frac{\frac{y^2}{y^1} - \frac{b}{a}}{\frac{b'}{a'} - \frac{y^2}{y^1}} = \frac{\frac{y^2}{y^1} - \frac{b'}{a'}}{\frac{y^2}{y^1} - \frac{b}{a}} \cdot \frac{a'}{a}.$$

Можно положить поэтому

$$y^1 = aW' - a', y^2 = bW' - b', y^3 = W' - 1.$$

Введем координаты точки  $S'$  в уравнение прямой  $u'$ . Это дает

$$(1 - W')[\varepsilon^2(a - a')^2 - (b - b')^2] - (1 - W')(r'^2 - r^2) = 0. \quad (2)$$

Для каждой пары кривых  $k, k'$  получаем определенное сложное значение  $W'$ , или, что то же,  $\lambda = (1 + W')/(1 - W')$ . Наоборот, для каждого  $\lambda$  получаем определенную совокупность кривых  $k, k'$ . Если кривую  $k$  фиксировать, то кривые  $k'$  составят двупараметрическое семейство, т. е. связку. Назовем её  $\lambda$ -связкой. Однако, если фиксировать какую-либо другую кривую этой связки и построить для нее  $\lambda$ -связку, то она в общем случае будет отличаться от первоначальной  $\lambda$ -связки. В частности, если фиксировать кривую  $k'$ , то, как показывает равенство (2), кривая  $k$  уже не будет принадлежать ее  $\lambda$ -связке, но необходимо будет принадлежать к некоторой  $\lambda$ -связке. Кривая  $k$  будет принадлежать к  $\lambda$ -связке кривой  $k'$  тогда и только тогда, когда  $\lambda = 0$ , т. е.  $W' = -1$ . Назовем такую связку *нулевой связкой* пары  $F_1, F_2$ . Для этой связки всегда  $r' = r$ .

Легко видеть, что все нулевые связки, построенные для какой-нибудь единой нулевой связки же, совпадают между собой. Это обстоятельство позволяет заключить, что если какая-нибудь коллинеация  $\omega$  переводит одну кривую нулевой связки в какую-либо другую кривую этой связки (использование такой коллинеации очевидно), то и все кривые нулевой связки переводятся коллинеацией  $\omega$  в кривые той же связки.

Пусть теперь  $\varepsilon = 1$ . Полагая  $\frac{x^1}{x^3} = x, \frac{x^2}{x^3} = y$ , запишем уравнения кривых нулевой связки (1) в виде

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0, r = \text{const}. \quad (3)$$

Теперь мы можем, оставаясь в пределах проективной терминологии сказать, что *абсолютом собственно евклидовой геометрии является нулевая связка пары циклических точек*. Кривые нулевой связки могут быть названы конгруэнтными окружностями радиуса  $r$ .

Аналогично, абсолютом собственно псевдоевклидовой геометрии ( $\varepsilon = 1$ ) является нулевая связка пары действительных точек на несобственной прямой:

$$-(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0, \quad r = \text{const}. \quad (4)$$

Это конгруэнтные равносторонние гиперболы, проходящие через базисные (абсолютные) точки на несобственной прямой.

Если фиксировать на несобственной прямой какую-нибудь пару минимых сопряженных точек

$$\Phi_1(1, a + bi, 0), \quad \Phi_2(1, a - bi, 0),$$

отличную от пары циклических точек, то они определят нулевую связку проходящих через них эллипсов

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2axy + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0. \quad (5)$$

Все эти эллипсы конгруэнтны между собою. Общим для них является значение следующего инварианта:

$$r^2 = (A + aB)^2 + b^2(B^2 - C).$$

Эллипсы (5) не охватывают всех конгруэнтных между собой эллипсов евклидовой плоскости. Нулевая связка таких эллипсов представляет собой совокупность всех тех эллипсов, которые получаются один из другого с помощью всевозможных параллельных переносов. При поворотах нулевая связка пары  $\Phi_1, \Phi_2$  переходит в пульевую связку той пары, в которую преобразуется пара  $\Phi_1, \Phi_2$ .

*Поступила в редакцию 19 сентября 1964 г.*

## ДВИЖЕНИЯХ В ОБЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ ПУТЕЙ $A_n(x, \dot{x})$

*A. T. Кондратьев* (Пенза)

### § 1. Исходные факты. Определения

Пространство, в котором система кривых, называемых геодезическими, задается системой уравнений

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} - \Gamma^i(x^j, \dot{x}^k) = 0, \quad \dot{x}^k = \frac{dx^k}{dt} \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где  $\Gamma^i$  — функции от  $2n$  независимых переменных однородные второго порядка относительно  $\dot{x}^k$ , называется  $n$ -мерным общим пространством путей  $A_n(x, \dot{x})$ . Если функции  $\Gamma^i$  являются полиномами второй степени относительно  $\dot{x}^k$ , то пространство путей  $A_n(x, \dot{x})$  сводится к пространству  $A_n(x, \dot{x})$  обычной аффинной связности, так как связность пространства  $A_n(x, \dot{x})$  определяется компонентами

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}.$$

Геометрию общих пространств путей изучал М. С. Кнебельман [1], который ввел понятия аффинных и проективных движений в таких пространствах. Б. Л. Лаптев [2] развил в них аппарат лиевого дифференцирования и записал условия аффинных и проективных движений в инвариантной форме. Д. Д. Косамби [3] рассматривал специальный тип пространства путей, определяемый функциями  $\Gamma^i$ , которые являются полиномами  $t$  степени относительно первых производных  $\dot{x}^k$ . Автоморфизмы в пространствах  $A_n(x, \dot{x})$  изучались И. Левиным [4].

Лиениделимальное преобразование

$$x'^i = x^i + v^i(x) \tau \quad (2)$$

называется аффинным движением в пространстве  $A_n(x, \dot{x})$ , если оно любую геодезическую переводит в геодезическую с сохранением аффинности параметра. Известно [4], что равенство

$$L\Gamma^i = 0, \quad (3)$$

где  $L$  — лиевой производной вдоль вектора  $v^i$ , является необходимым и достаточным условием того, чтобы он определял аффинное движение. Можно показать, что если пространство допускает  $r$  независимых преобразований (2), то оно допускает и конечную непрерывную группу аффинных движений  $G_r$ .

Обобщая результаты И. П. Егорова на случай пространств  $A_n(x, \dot{x})$ , Т. Окобе [5] показал, что если  $A_n(x, \dot{x})$  допускает группу аффинных

движений  $G_r$ ,  $n^2 < r \leq n^2 + n$ , то оно сводится к обычному аффинному пространству. Поэтому для пространства  $A_3(x, \dot{x})$ , не сводящегося к аффинному пространству, возможна группа аффинных движений  $G_r$ , где  $r \leq 9$ .

В настоящей работе определяются однородные пространства  $A_3(x, \dot{x})$ , не сводящиеся к пространствам обычной аффинной связности и допускающие четырехпараметрические группы аффинных движений  $G_4$ .

## § 2. Однородные пространства $A_3(x, \dot{x})$ с группой $G_4$

Известно, что если группа  $G_r$  транзитивна, то ее стационарная подгруппа  $H$ , являясь линейной и однородной в нормальных координатах, содержит  $r - n$  параметров, поэтому для группы  $G_4$  подгруппа  $H$  одночлена.

В. Думитраж [6] показал, что если в группе  $H$  имеется оператор  $U = x^i p_i$ , то пространство  $A_n(x, \dot{x})$  сводится к обычному аффинному пространству.

С. Йи [7] классифицировал все подгруппы линейной однородной группы от трех переменных. Из этой классификации мы находим семь типов одночленных групп, не содержащих оператора  $U$ :

- |                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| I. $x^3 p_2 + U$ ,            | V. $x^3 p_1 + x^2 p_2 + aU$ ,   |
| II. $x^3 p_1 + x^1 p_2 + U$ , | VI. $x^1 p_1 + cx^2 p_2 + aU$ , |
| III. $x^2 p_2 + aU$ ,         | VII. $x^3 p_2$ ,                |
| IV. $x^3 p_1 + x^1 p_2$ ,     |                                 |

$a, c$  — вещественные числа,  $c \neq 0, 1$ .

1°. Возьмем стационарную подгруппу типа I. Она определяется оператором  $X_4 = x^3 p_2 + U$ . В силу транзитивности искомой группы  $G_4$  операторы сдвигов  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можно представить в виде

$$X_i = p_i + \dots$$

Поэтому для коммутаторов  $(X_i X_4)$  имеем

$$(X_1 X_4) = X_1 + c_{14}^1 X_4, \quad (X_2 X_4) = X_2 + c_{24}^1 X_4, \quad (X_3 X_4) = X_3 + X_3 + c_{34}^1 X_4.$$

Переходя к новому базису группы по формулам

$$\bar{X}_i = X_i + a_i^1 X_4, \quad \bar{X}_4 = X_4,$$

где

$$a_1^1 = c_{14}^1, \quad a_2^1 = c_{24}^1, \quad a_3^1 = c_{34}^1 - c_{24}^1,$$

а также применяя тождества Якоби  $(X_i X_j X_4) = 0$ , получим

$$(X_1 X_4) = X_1, \quad (X_3 X_4) = X_2 + X_3, \\ (X_2 X_4) = X_2, \quad (X_i X_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Операторы сдвигов в группе (4) образуют простотранзитивнуюabelеву подгруппу, поэтому имеем следующее представление группы

$$X_i = p_i, \quad X_4 = x^3 p_2 + U. \quad (5)$$

Допустим, что операторы (5) есть операторы аффинных движений, тогда интегрирование системы (3) приводит к следующему пространству путей

$$\Gamma^1 = \dot{x}' \dot{x}^3 A^1, \quad \Gamma^2 = \dot{x}' \dot{x}^2 A^2 + \dot{x}'^2 A^3,$$

$$\Gamma^3 = \dot{x}' \dot{x}^3 A^2, \quad A^i = e^{-\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^3}} \psi^i \left( \frac{\dot{x}^3}{\dot{x}'} \right), \quad (6)$$

$\psi^i$  — произвольные функции указанного аргумента.

Значит, что полученное пространство  $A_3(\dot{x})$  зависит только от на-

применения. Таким образом, имеет место

**Теорема 1.** Общее однородное пространство путей  $A_3$ , допускающее движений  $G_4$ , стационарная подгруппа которой определяется оператором

$$X_4 = x^3 p_2 + U,$$

имеет функциями (6).

Стационарная подгруппа типа II определяется оператором  $X_4 = -x^3 p_1 + x^2 p_2 + U$ . Поступая, как и в 1°, найдем следующую структуру

$$\begin{aligned} (X_1 X_4) &= X_1 + X_2, & (X_3 X_4) &= X_1 + X_3, \\ (X_2 X_4) &= X_2, & (X_t X_i) &= 0. \end{aligned}$$

Этой структуре удовлетворяют операторы

$$X_t = p_i, \quad X_4 = x^3 p_1 + x^1 p_2 + U, \quad (7)$$

и пространство с этой группой имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \dot{x}^1 \dot{x}^3 A^3 + \dot{x}^3 A^1, \quad \Gamma^2 = \dot{x}^1 \dot{x}^3 A^1 + \dot{x}^3 A^2 + \frac{\dot{x}^{12}}{2} A^3, \\ \Gamma^3 &= \dot{x}^3 A^3, \quad A^t = e^{-\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3}} \psi^t \left[ \frac{\dot{x}^{12} - 2\dot{x}^3 \dot{x}^3}{(\dot{x}^3)^2} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

— произвольные функции указанного аргумента.

**Теорема 2.** Пространство путей  $A_3$  с транзитивной группой (7), стационарная подгруппа которой определяется оператором  $X_4 = x^3 p_1 + x^2 p_2 - U$ , задается функциями (8).

3°. Рассмотрим теперь стационарную подгруппу типа III:  $X_4 = -x^3 p_2 - U$ . Если допустить, что  $\alpha \neq 0, -1, 1$ , то, преобразуя операторы сдвигов по формуле

$$\bar{X}_1 = X_1 + \frac{c_{14}}{x} X_4, \quad \bar{X}_2 = X_2 + \frac{1}{1+\alpha} c_{24} X_4, \quad \bar{X}_3 = X_3 + \frac{1}{\alpha} c_{34} X_4$$

и учитывая тождество Якоби, получим

$$(X_1 X_4) = \alpha X_1, \quad (X_2 X_4) = (1 + \alpha) X_2, \quad (X_3 X_4) = \alpha X_3, \quad (X_t X_i) = 0.$$

Полагая операторы сдвигов  $X_t = p_i$ , Результатом интегрирования системы (3) является

**Теорема 3.** Пространство путей  $A_3$ , допускающее группу аффинных движений  $G_4$ , стационарная подгруппа которой  $X_4 = x^2 p_2 + \alpha U$ , ( $\alpha \neq 0, 1, -1$ ), определяется функциями

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= (\dot{x}^1)^{2+\alpha} (\dot{x}^2)^{-\alpha} A^1, \quad \Gamma^2 = (\dot{x}^1)^{1+\alpha} (\dot{x}^2)^{1-\alpha} A^2, \\ \Gamma^3 &= (\dot{x}^1)^{2+\alpha} (\dot{x}^2)^{-\alpha} A^3, \end{aligned} \quad (9)$$

— произвольные функции аргумента  $\dot{x}^3 (\dot{x}^1)^{-1}$ .

Если  $\alpha = 0$ , то пространство путей имеет вид

$$\Gamma^1 = (\dot{x}^3)^2 e^{\lambda x^3} A^1, \quad \Gamma^2 = x^2 \dot{x}^3 A^2, \quad \Gamma^3 = (\dot{x}^3)^2 A^3,$$

и это пространство

$$A^t = A^t \left( \frac{\dot{x}^1 e^{-\lambda x^3}}{\dot{x}^3} \right),$$

группа

$$G_4 = \{p_1, p_2, p_3 + \lambda x^1 p_1, x^2 p_2\}.$$

В случае  $\alpha = -1$  группа движений

$$G_4 = \{p_1, p_3, x^1 p_1 + x^3 p_3, p_2 - \nu x^3 p_1 + (\lambda x^1 - \nu x^3) p_3\},$$

а пространство путей определяется объектом

$$\Gamma^i = \dot{x}^i x^2 A^i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$\begin{aligned} A^1 &= \int \frac{\rho u e^{\int \psi(u) du}}{\mu u^2 - \nu u + \lambda} du + B \left( x^2 - \int \frac{du}{\mu u^2 - \nu u + \lambda} \right), \\ A^2 &= A^2 \left( x^2 - \int \frac{du}{\mu u^2 - \nu u + \lambda} \right), \\ A^3 &= A^1 - \dot{e}^{\int \psi(u) du}, \\ \psi(u) &= \frac{\mu u^2 - \lambda}{\mu u^3 - \nu u^2 + \lambda u}, \quad u = \frac{\dot{x}^3}{x^1}; \end{aligned}$$

$A^1, B$  — произвольные функции указанного аргумента,  $\rho, \nu, \lambda$  — постоянные, одновременно не равные нулю, в противном случае мы приходим к пространству (9) при  $\alpha = -1$ .

Случай  $\alpha = 1$  приводит к пространству:

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \dot{x}^{12} A^1; \quad \Gamma^2 = \dot{x}^1 \dot{x}^2 A^1 + \dot{x}^{12} A^2, \quad \Gamma^3 = \dot{x}^{12} A^3, \\ A^i &= \dot{x}^i (\dot{x}^2 - \lambda \dot{x}^1 \dot{x}^3)^{-1} \psi^i, \quad (i = 1, 3); \end{aligned}$$

$\psi^i, A^2$  — функции от  $(\dot{x}^1)^{-1} \dot{x}^3$  с группой

$$G_4 = \{p_1, p_2, p_3 + \lambda x^1 p_1, x^2 p_2 + U\}.$$

4°. Пространства путей  $A_3$  с стационарной подгруппой типа IV  $X_4 = x^3 p_1 + x^1 p_2$  и допускаемые ими группы движений определяются следующим образом.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \Gamma^1 &= \frac{1}{\Delta} \left[ \dot{x}^3 \sqrt{\frac{\dot{x}'^2}{2} - \dot{x}^2 \dot{x}^3} A^1 + \dot{x}^1 \dot{x}^3 (A^3 - 2\omega x^3) \right], \\ \Gamma^2 &= \frac{1}{\Delta} \left[ \dot{x}^1 \sqrt{\frac{\dot{x}'^2}{2} - \dot{x}^2 \dot{x}^3} A^1 + \frac{\dot{x}^3}{\Delta} e^{-\int \frac{\lambda}{\Delta} dx^3} A^2 + \frac{\dot{x}'^2}{2} (A^3 - 2\omega x^3) \right], \\ \Gamma^3 &= (\dot{x}^3)^2 \Delta^{-1} (A^3 - 2\omega x^3), \quad \Delta = 1 + \lambda x^3 + \omega x^{3^2}, \\ A^i &= A^i \left[ \Delta e^{-\int \frac{\lambda}{\Delta} dx^3} \left( \frac{\dot{x}^{12}}{2\dot{x}^3} - \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^3} \right) \right], \end{aligned}$$

группа

$$G_4 = \left\{ p_1, p_2, \omega x^1 x^3 p_1 + \frac{\omega x^{1^2}}{2} p_2 + (1 + \omega x^{3^2}) p_3 + \lambda U, x^3 p_1 + x^1 p_2 \right\}.$$

$$\text{б)} \quad \Gamma^1 = \Delta A^1 - x^1 \Gamma^2 + \dot{x}^1 \dot{x}^2, \quad \Gamma^2 = \Delta (p A^1 + A^2) - \frac{1}{2} (\dot{x}^2)^2,$$

$$\begin{aligned} \Gamma^3 &= \Delta \left( \frac{1}{4} \varepsilon \rho^2 A^1 + \frac{1}{2} \varepsilon \rho A^2 + A^3 \right) - \frac{1}{4} \varepsilon (\dot{x}^2)^2 p, \quad p = (\dot{x}^1 + x^1 \dot{x}^2)^{-1} \dot{x}^2, \\ \Delta &= \varepsilon \dot{x}^{2^2} - 4x^1 \dot{x}^3 - 4x^1 \dot{x}^2 \dot{x}^3, \quad A^i = A^i [(\dot{x}^1 + x^1 \dot{x}^2)^2 \Delta^{-1}], \end{aligned}$$

группа движений

$$G_4 = \{e^{-x^2} p_1, p_2, e^{x^2} (-x^{12} p_1 + 2x^1 p_2 + \varepsilon p_3), p_3\}, \quad \varepsilon = 0, 1.$$

5°. Возьмем теперь стационарную подгруппу типа V. Выбирая подыдущим образом постоянные  $a_i^*$  в преобразовании  $\bar{X}_i = X_i + a_i^* X_4$ , а также применяя тождество Якоби, мы приходим к каноническим типам искомых групп  $G_4$ . Затем находим их транзитивное представление и интегрируем уравнения (3). В результате находим следующие пространства и группы.

a)  $\Gamma^1 = (\dot{x}^2)^{-\alpha} (\dot{x}^3)^{2+\alpha} [A^3 \ln \dot{x}^2 (\dot{x}^3)^{-1} + A^1]$ ,  
 $\Gamma^2 = (\dot{x}^2)^{1-\alpha} (\dot{x}^3)^{1+\alpha} A^2$ ,  $\Gamma^3 = (\dot{x}^2)^{-\alpha} (\dot{x}^3)^{2+\alpha} A^3$ ,

Функции

$$A^i = A^i (\dot{x}^2 \dot{x}^{3-1} e^{-\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3}}),$$

Группа

$$G_4 = \{p_1, x^3 p_1 + x^2 p_2 + \alpha U\}, \quad \alpha \neq 0, 1, -1.$$

Если же  $\alpha = 0, 1, -1$ , то соответственно получаем

б)  $\Gamma^1 = \dot{x}^1 \dot{x}^3 A^3 + \dot{x}^3 A^1$ ,  $\Gamma^2 = \dot{x}^2 \dot{x}^3 A^2$ ,  $\Gamma^3 = \dot{x}^3 A^3$ ,

$$A^i = (1 + \lambda x^3)^{-1} \psi' [(1 + \lambda x^3) \dot{x}^{3-1} \dot{x}^2 e^{-\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3}}],$$

Группа

$$C_4 = \{p_1, p_2, \lambda x^1 p_1 + (1 + \lambda x^3) p_3, x^3 p_1 + x^2 p_2\}.$$

в)  $\Gamma^1 = \dot{x}^1 \dot{x}^3 A^3 + \dot{x}^3 A^1$ ,  $\Gamma^2 = \dot{x}^3 A^3$ ,

$$\Gamma^3 = \lambda x^3 (\dot{x}^1 \dot{x}^3 - \dot{x}^3 \ln x^3) A^3 + \lambda \dot{x}^3 (x^3 \dot{x}^3 A_1 + \dot{x}^3 \ln x^3) + \dot{x}^3 (\dot{x}^3 A^2 - \lambda \dot{x}^1)$$

Функции

$$A^i = e^{-\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3}} \psi' (Re^{-\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3} \dot{x}^{3-1}}), \quad A^2 = A^2 (Re^{-\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3} \dot{x}^{3-1}}),$$

$$R = \dot{x}^2 - \lambda \dot{x}^1 x^3 + \lambda x^3 \dot{x}^3 \ln x^3, \quad i = 1, 3,$$

группа

$$C_4 = \{p_1, p_2, p_3 + \lambda (x^1 - x^3 \ln x^3) p_2, (x^1 + x^3) p_1 + 2x^2 p_2 + x^3 p_3\}.$$

г)  $\Gamma^1 = \dot{x}^2 \dot{x}^3 \left( \ln \frac{\dot{x}^2}{x^3} - \frac{\lambda x^3}{2} \right) A^3 + \frac{\lambda x^{3^2}}{2} x^3 A^2 + \dot{x}^2 \dot{x}^3 A^1$ ,

$$\Gamma^2 = \dot{x}^2 A^2$$

$$A^i = A^i \left( \frac{\dot{x}^2}{x^3} e^{\frac{\lambda \dot{x}^2 x^3}{2x^3} - \frac{\lambda x^3}{2}} - \frac{\dot{x}^1}{x^3} \right),$$

группа

$$C_4 = \left\{ p_1, p_2 - \frac{1}{2} \lambda x^3 p_1, p_3 + \frac{1}{2} \lambda x^2 p_1, (x^3 - x^1) p_1 - x^3 p_3 \right\}.$$

6°. Стационарная подгруппа типа VI

$$X_4 = x^1 p_1 + c x^2 p_2 + \alpha U$$

зависит от двух параметров, причем  $c \neq 0, 1$ .

Если  $\alpha \neq 0, -1, -c, -1 - c, c - 1, 1 - c$ , то пространство путей зависит только от направления и имеет следующий вид:

а)  $\Gamma^i = (\dot{x}^1)^{-\alpha} (\dot{x}^3)^{1+\alpha} \dot{x}^i A^i$ ,  
 $A^i = A^i [(\dot{x}^1)^{-\alpha} \dot{x}^2 (\dot{x}^3)^{\alpha-1}] \quad (i = 1, 2, 3)$ ,

группа

$$C_4 = \{p_i, (1 + \alpha)x^1 p_1 + (c + \alpha)x^3 p_2 + \alpha x^3 p_3\}.$$

Когда  $\alpha = 0, c = -1$ , то имеем два пространства

б)  $\Gamma^1 = \Delta(\dot{x}^1 A^2 + \Delta^2 \dot{x}^2 A^1) + \tau x^1 \dot{x}^2 (\tau x^1 \dot{x}^2 + 2 \dot{x}^1),$

$$\Gamma^2 = \Delta \dot{x}^2 A^2 - \tau x^1 \dot{x}^2,$$

$$\Gamma^3 = \Delta(\Delta A^3 - \alpha x^1 \dot{x}^2 A^2) - \alpha \dot{x}^1 \dot{x}^2, \quad \Delta = \dot{x}^3 + \alpha x^1 \dot{x}^2$$

функции

$$A^i = A^i \left[ \frac{\dot{x}^2 (\tau x^1 \dot{x}^2 + 2 \dot{x}^1)}{\tau \Delta^2} \right],$$

а группа

$$C_4 = \left\{ p_2, p_3, (1 - \tau x^1 x^2) p_1 + \frac{\tau x^2}{2} p_2 - \alpha x^2 p_3, x^1 p_1 - x^2 p_2 \right\}.$$

б')  $\Gamma^1 = (\dot{x}^1)^{3/2} (\dot{x}^2)^{1/2} A^1, \quad \Gamma^3 = -\alpha x^1 (\dot{x}^3)^{3/2} (\dot{x}^1)^{1/2} A^2 + \dot{x}^1 \dot{x}^2 A^3,$

$$\Gamma^2 = (\dot{x}^1)^{1/2} (\dot{x}^2)^{3/2} A^2, \quad A^i = A^i \left[ \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{(\dot{x}^3 + \alpha x^1 \dot{x}^2)^2} \right].$$

Это пространство допускает группу

$$C_4 = \{p_3, p_2, p_1 - \alpha x^2 p_2, x^1 p_1 - x^2 p_2\}.$$

Если же  $\alpha = 0$  и  $c$  любое, то однородное пространство  $A_3$  имеет вид

в)  $\Gamma^i = \dot{x}^3 \dot{x}^i A^i,$

где

$$A^i = A^i [\dot{x}^2 (\dot{x}^1)^{-c} (\dot{x}^3)^{c-1} e^{\lambda x^3}],$$

а группа

$$G_4 = \{p_1, p_2, p_3 + \lambda x^2 p_2, x^1 p_1 + c x^2 p_2\}.$$

Когда значение параметра  $\alpha = -1$ , мы получаем группу  $G_4$  с базисом

$$X_1 = p_1 - \lambda x^2 p_3, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3, \quad X_4 = (c - 1) x^2 p_2 - x^3 p_3,$$

а пространство путей задается функциями

г)  $\Gamma^i = \dot{x}^1 \dot{x}^i A^i,$

причем

$$A^i = A^i [\dot{x}^2 (\dot{x}^3)^{c-1} (\dot{x}^1)^{-c} e^{\lambda(c-1)x^1}], \quad (i = 1, 2, 3).$$

Значение  $\alpha = -c$  приводит к пространству

д)  $\Gamma^i = \dot{x}^2 \dot{x}^i A^i,$

где

$$A^i = A^i [(\dot{x}^1)^c (\dot{x}^3)^{1-c} e^{\lambda c x^2} (\dot{x}^2)^{-1}],$$

группа

$$G_4 = \{p_1, p_3, p_2 + \lambda x^1 p_1, (1 - c) x^1 p_1 - c x^3 p_3\}.$$

В случае  $\alpha = -1 - c$  имеем

е)  $\Gamma^1 = \dot{x}^1 A^1, \quad \Gamma^2 = (\dot{x}^1)^{\frac{1}{c}} A^2,$

$$\Gamma^3 = \dot{x}^3 (\dot{x}^2)^{-1} (\dot{x}^1)^{\frac{1}{c}} A^2 + (\dot{x}^1)^{1+\frac{1}{c}} A^3,$$

функции

$$A^i = A^i [(\dot{x}^2)^c (\dot{x}^1)^{-1}, \lambda \dot{x}^2 (\dot{x}^1)^{-1-\frac{1}{c}} x^1 + \dot{x}^3 (\dot{x}^1)^{-1-\frac{1}{c}}]$$

такими, чтобы  $\Gamma^i$  были однородными второго измерения по  $x^3$ . Группа

$$G_4 = \{p_1 - \lambda x^2 p_3, p_2, p_3, cx^3 p_1 + x^2 p_2 + (1 - c)x^3 p_3\}.$$

Видим пространства и соответствующие им группы при других параметрах  $c$ .

$$\text{если } \Gamma^1 = (\dot{x}^1)^{2-c} (\dot{x}^3)^c A^1, \quad \Gamma^2 = (\dot{x}^1)^{1-c} \dot{x}^2 (\dot{x}^3)^c A^1 + \dot{x}^1 \dot{x}^3 A^2,$$

$$\Gamma^3 = (\dot{x}^1)^{1-c} (\dot{x}^3)^{1+c} A^3,$$

$$A = A' [(c \dot{x}^2 (\dot{x}^1)^{\frac{1}{c}-2} - \lambda c x^3 (\dot{x}^1)^{\frac{1}{c}-1})^{\frac{c}{1-c}} (\dot{x}^1)^{c-1} (\dot{x}^3)^{-c}],$$

$$G_4 = \{p_1, p_2, p_3 + \lambda x^1 p_2, cx^1 p_1 + (2c-1)x^2 p_2 + (c-1)x^3 p_3\}, \quad \alpha = c-1;$$

$$\text{если } \Gamma^1 = \dot{x}^1 (\dot{x}^2)^{1-\frac{1}{c}} (\dot{x}^3)^{\frac{1}{c}} A^2 + x^2 \dot{x}^3 A^1,$$

$$\Gamma^2 = (\dot{x}^2)^2 - \frac{1}{c} (\dot{x}^3)^{\frac{1}{c}} A^2,$$

$$\Gamma^3 = (\dot{x}^2)^{1+\frac{1}{c}} (\dot{x}^2)^{1-\frac{1}{c}} A^3,$$

$$A = A' [(\dot{x}^1 (\dot{x}^2)^{c-2} - \lambda x^3 (\dot{x}^2)^{c-1})^c (\dot{x}^2)^{1-c} (\dot{x}^2)^{-(c-1)^2}],$$

$$G_4 = \{p_1, p_2, p_3 + \lambda x^2 p_1, (2-c)x^1 p_1 + x^2 p_2 + (1-c)x^3 p_3\}.$$

**Пусть** Найдем, для стационарной подгруппы типа VII  $X_4 = x^3 p_2$  имеем:

$$\text{если } \Gamma^1 = \dot{x}^{12} A^1, \quad \Gamma^2 = \dot{x}^1 \dot{x}^2 A^3 + \dot{x}^1 \dot{x}^3 A^2, \quad \Gamma^3 = \dot{x}^1 \dot{x}^3 A^3,$$

$$A = A' [(\dot{x}^1)^{-1} \dot{x}^3 e^{\alpha x^1}],$$

$$G_4 = \{p_1 - \lambda x^2 p_2 - \lambda x^3 p_3, p_2, p_3, x^3 p_2\}.$$

$$\text{если } \Gamma^1 = \dot{x}^{12} A^1 [\Delta(\dot{x}^1)^{-1}], \quad \Delta = (2 + \lambda x^2) \dot{x}^3 - \lambda \dot{x}^2 x^3,$$

$$\Gamma^2 = \dot{x}^2 A^2 + \dot{x}^2 \Delta^{-1} \ln [\dot{x}^2 (1 + \lambda x^2)^{-1}] A^3,$$

$$\Gamma^3 = \dot{x}^2 A^2 + (\dot{x}^2)^{-1} A^3 + \dot{x}^2 \Delta^{-1} \ln [\dot{x}^2 (1 + \lambda x^2)^{-1}] A^3,$$

$$A = A' [\dot{x}^1, \Delta] \quad (i = 2, 3),$$

$$G_4 = \left\{ p_1, \left(1 + \frac{\lambda}{2} x^2\right) p_2 - \frac{\lambda x^3}{2} p_3, \left(1 + \frac{\lambda x^2}{2}\right) p_3, x^3 p_2 \right\}.$$

$$\text{если } \Gamma^1 = \dot{x}^{12} A^1, \quad \Gamma^3 = \rho^{-1} (\dot{x}^3)^2 (A^3 - 2\rho x^3),$$

$$\Gamma^2 = \dot{x}^{-1} \dot{x}^2 \dot{x}^3 (A^3 - 2\rho x^3) + \dot{x}^{12} e^{-\alpha x^1 + \int \rho^{-1} (\lambda + \mu x^3) dx^3},$$

$$z = 1 + \lambda x^3 + \mu x^{3^2}, \quad A^i = A' [\rho \dot{x}^1 (\dot{x}^3)^{-1}],$$

$$G_4 = \{p_1, p_1 - \alpha x^2 p_2, (\lambda x^2 + \mu x^2 x^3) p_2 + \rho p_3, x^3 p_2\}.$$

$$\text{если } \Gamma^1 = \dot{x}^{12} A^1, \quad \Gamma^3 = \dot{x}^1 \dot{x}^3 A^3,$$

$$\Gamma^2 = \dot{x}^1 \dot{x}^2 A^3 + \nu \dot{x}^{3^2} e^{(\sigma-2\lambda)x^1} \int e^{(2\lambda-\sigma)x^1} dx^1 + \dot{x}^{12} e^{-\alpha x^1} A^2,$$

$$A = A' [\dot{x}^3 (\dot{x}^1)^{-1} e^{(\sigma-\lambda)x^1}],$$

$$G_4 = \left\{ p_1 + \left(-\sigma x^2 - \frac{\nu x^{3^2}}{2}\right) p_2 + (\lambda - \sigma) x^3 p_3, p_2, p_3, x^3 p_2 \right\}.$$

$$\text{если } \Gamma^1 = \dot{x}^2 (\dot{x}^3)^{-1} \psi^3 - \dot{x}^1 \dot{x}^3 \frac{A''}{A'} + \psi^1, \quad \Gamma^3 = \psi^3,$$

$$\Gamma^2 = \dot{x}^2 (\dot{x}^3)^{-1} \psi^3 - \dot{x}^1 \dot{x}^3 \frac{B''}{B'} + \psi^2,$$

$$\psi = \psi [\dot{x}^3, x^3, (B' x^3 - B - 1) \dot{x}^1 - A' (\dot{x}^2 x^3 - \dot{x}^3 x^2)].$$

Функции  $A(x^3)$ ,  $B(x^3)$  находятся как решения системы

$$\begin{aligned} -(1+B)A' + \left(\sigma - \frac{1+\beta}{x^3} - \delta\right)A - \lambda &= 0, \\ -(1+B)B' + \tau x^3 A - (1+B)\delta - \nu x^3 &= 0, \end{aligned}$$

а группа

$$G_4 = \left\{ p_1, Ap_1 + (1+B)p_2, \left(\sigma x^3 - \frac{x^2 A}{x^3}\right)p_1 + \tau x^1 x^3 p_2 + (1+B)p_3, x^2 p_2 \right\}.$$

IV должны быть однородными второго измерения относительно  $\dot{x}^k$ .

Таким образом, найдены все однородные пространства  $A_3(x, \dot{x})$  с группой  $G_4$  аффинных движений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. S. Knebelman. Motions and Collineations in generalized spaces. Amer. J. M., 51, 317—364, (1929).
2. Б. Л. Лаптев. Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления. Изв. физ.-мат. о-ва, 3, 10, Казань, 1938, 3—36.
3. D. D. Kosambi. Collineations in path-space. J. Indian Math. Soc. N. S. vol. 1, (1934), pp. 69—72.
4. Tan Okubo. On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of paths. Tensor, 1956, 6, № 3, 141—158.
5. J. Levine. Collineations in generalized spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 447—455.
6. V. Dumitrus. Sur le groupe de stabilité d'un espace Hn. Bull. math. Soc. Sci. math. et phys. RPR (1959), 3, № 1, 17—20.
7. S. Lie si F. Engel. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, 1893. Vol. III, 117.

Поступила в редакцию 27 августа 1965 г.

## II. ВОПРОСУ О ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ КВАЗИПЕРЕНОСА

E. A. Косачевская (Днепроп.)

В статье [1] рассматриваются винтовые поверхности квазиэллиптического пространства, которые несут четыре сети квазипереноса. Эти поверхности получаются с помощью винтового движения, при котором одна из них является абсолютной прямой и одна из эллиптических прямых.

Как указал Б. А. Розенфельд, в квазиэллиптическом пространстве существует и второй тип винтового движения, когда инвариантными являются две полярно сопряженные евклидовы прямые.

Также рассматриваются винтовые поверхности, получаемые при построении этого типа движения второго типа, являющиеся одновременно поверхностью квазипереноса.

Кроме соответствующие этим поверхностям движения евклидовой прямой кинематическое отображение Бляшке — Грюнвальда [2].

### § 1. Уравнения винтового движения и винтовой поверхности

Базисом квазиэллиптического пространства является пара коммутативных сопряженных плоскостей

$$x_0^2 + x_1^2 = 0 \quad (1.1)$$

и пара взаимно сопряженных точек на линии пересечения этих плоскостей.

Большое движение квазиэллиптического пространства можно представить в виде

$$X = AX'B, \quad (1.2)$$

где  $X, X', A, B$  — полукватернионы:

$$\begin{aligned} X &= x_0 + x_1 i + (x_2 + x_3 i) \varepsilon, \\ X' &= x'_0 + x'_1 i + (x'_2 + x'_3 i) \varepsilon, \\ A &= \alpha_0 + \alpha_1 i + (\alpha_2 + \alpha_3 i) \varepsilon, \\ B &= \beta_0 + \beta_1 i + (\beta_2 + \beta_3 i) \varepsilon, \\ i^2 &= -1, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad i\varepsilon = -\varepsilon i. \end{aligned}$$

Нормировки полукватернионов

$$x_0^2 + x_1^2 = 1, \quad x_0'^2 + x_1'^2 = 1, \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 = 1. \quad (1.3)$$

Базисем две полярно сопряженные относительно абсолюта евклидовы прямые  $x_0 = x_2 = 0$  и  $x_1 = x_3 = 0$ . Каждая из этих прямых пересекает (1.1) в одной точке.

Если потребовать, чтобы эти прямые были инвариантны, движение (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned}x_0 &= x'_0, \\x_1 &= x'_1, \\x_2 &= (\beta_2 + \alpha_2)x'_0 + x'_2, \\x_3 &= (\beta_2 - \alpha_2)x'_1 + x'_3.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Связывая параметры  $(\beta_2 + \alpha_2)$  и  $(\beta_2 - \alpha_2)$  линейной зависимостью

$$\beta_2 + \alpha_2 = \frac{1}{\alpha}(\beta_2 - \alpha_2) = v, \quad \alpha = \text{const},\tag{1.5}$$

получим винтовое движение второго типа.

При этом движении происходит сдвиг по обеим евклидовым прямым. Если  $\alpha = 0$ , одна из прямых будет точечно неподвижна и движение можно рассматривать как «вращение» вокруг этой прямой.

В качестве образующей винтовой поверхности выбираем кривую в плоскости  $x'_2 = 0$ :

$$x'_0 = \cos u, \quad x'_1 = \sin u, \quad x'_3 = p(u).$$

Тогда уравнения винтовой поверхности принимают вид

$$\begin{aligned}x_0 &= \cos u, \\x_1 &= \sin u, \\x_2 &= v \cos u, \\x_3 &= \alpha v \sin u + p(u).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности равны

$$\begin{aligned}g_{11} &= \left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = 1, \\g_{12} &= \frac{\partial x_0}{\partial u} \frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0, \\g_{22} &= \left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = 0.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Тангенциальные координаты  $\xi_i$  находим из уравнений

$$\sum_{i=0}^3 x_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=0}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u} \xi_i = 0, \quad \sum_{i=0}^3 \frac{\partial x_i}{\partial v} \xi_i = 0,$$

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 = 1,$$

которые с учетом (1.6) дают

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \xi_3 (\alpha v \operatorname{tg} u + p' \sin u - p \cos u), \\&\xi_1 = -\xi_3 (\alpha v + p' \cos u + p \sin u), \\&\xi_2 = -\xi_3 \alpha \operatorname{tg} u, \\&\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 u}}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Коэффициенты второй квадратичной формы определяются формулами

$$b_{ij} = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial^2 x_k}{\partial u^i \partial u^j} \xi_k, \quad u^1 = u, \quad u^2 = v,$$

$$b_{11} = (p'' + p) \xi_3, \quad b_{12} = \frac{\alpha \xi_3}{\cos u}, \quad b_{22} = 0. \quad (1.9)$$

Все дифференциональные формулы

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x}{\partial u^k} - g_{ij} x + b_{ij} X, \quad$$

где  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — полюс касательной плоскости относительно абсолюта, коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{\alpha(p'' + p) \sin u}{\cos^2 u + \alpha^2 \sin^2 u}, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{(\alpha^2 - 1) \sin 2u}{2(\cos^2 u + \alpha^2 \sin^2 u)}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для тензора

$$\varepsilon_{ij} = \left( X, x, \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right)$$

$$\varepsilon_{12}^2 = \cos^2 u + \alpha^2 \sin^2 u. \quad (1.11)$$

## § 2. Винтовые поверхности квазипереноса

Для того чтобы сеть кривых на поверхности была сетью квазипереноса, необходимо и достаточно, чтобы она была чебышевской и квазисопряженной [3], т. е. она должна удовлетворять уравнениям Сервана—Либенса.

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^j}{\partial v^2} = 0 \quad (2.1)$$

и условию квазисопряженности

$$b_{11} - (b_{12} + \varepsilon_{12}) \varphi + (b_{12} - \varepsilon_{12}) \psi + b_{22} \varphi \psi = 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi = \frac{dv}{du}, \quad \psi = \frac{dv}{du},$$

где  $v^1, v^2$  — параметры квазипереноса.

Уравнения (2.1) и (2.2) с учетом (1.9) — (1.11) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \varphi_u + \varphi_v \psi + Q &= 0, \\ \psi_u + \psi_v \varphi + Q &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$Q = \frac{\sin u}{\cos^2 u + \alpha^2 \sin^2 u} [\alpha(p'' + p) + (\alpha^2 - 1)(\varphi + \psi) \cos u].$$

Из условия совместности этой системы следует, что  $\varphi$  и  $\psi$  являются функциями только одной переменной  $u$ :

$$\varphi_v = \psi_v = 0. \quad (2.4)$$

При условии (2.4) решение системы (2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{c_1}{\cos^2 u} - \frac{c(1+\alpha)}{2}, \\ \psi &= \frac{c_1}{\cos^2 u} + \frac{c(1-\alpha)}{2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\varphi = c_2 \cos u + c_3 \sin u + \frac{\alpha c_1 \cos 2u}{\cos u} + \frac{c(\alpha^2 - 1)}{2} u \sin u,$$

где  $c, c_1, c_2, c_3$  — постоянные.

Интегрируя первые два уравнения (2.5), находим параметры сетей квазипереноса

$$v^1 = v - c_1 \operatorname{tg} u + \frac{c(1+\alpha)}{2} u,$$

$$v^2 = v - c_1 \operatorname{tg} u - \frac{c(1-\alpha)}{2} u.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} u &= \frac{v^1 - v^2}{c}, \\ v &= \frac{1-\alpha}{2} v^1 + \frac{1+\alpha}{2} v^2 + c_1 \operatorname{tg} u. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (1.6), убеждаемся, что поверхность допускает каноническое представление в виде произведения полукватернионов:

$$X = A(\xi) B(\eta), \quad (2.7)$$

$$A(\xi) = \cos \xi_1 + i \sin \xi_1 + \varepsilon (\xi \cos \xi_1 + D \sin \xi_1) + i \varepsilon (-\xi \sin \xi_1 + D \cos \xi_1),$$

$$B(\eta) = \cos \eta_1 + i \sin \eta_1 + \varepsilon (\eta \cos \eta_1 - E \sin \eta_1) + i \varepsilon (\eta \sin \eta_1 + E \cos \eta_1),$$

$$\xi = \frac{1-\alpha}{2} v^1 - \frac{c_3}{2}, \quad \eta = \frac{1+\alpha}{2} v^2 + \frac{c_3}{2},$$

$$\xi_1 = \frac{2\xi + c_3}{(1-\alpha)c} = \frac{v_1}{c}, \quad \eta_1 = \frac{c_3 - 2\eta}{(1+\alpha)c} = -\frac{v^2}{c},$$

$$2D = c_2 + (1+\alpha)c_1,$$

$$2E = c_2 - (1-\alpha)c_1.$$

Как видно из формул (2.5), поверхность несет только одну сеть квазипереноса.

### § 3. Кинематическое отображение винтовых поверхностей квазипереноса

Как известно [2], поверхности квазипереноса соответствует движение с двумя степенями свободы евклидовой плоскости, представленное в виде произведения двух движений с одной степенью свободы. Каждое из этих движений может быть реализовано путем качения подвижной центроиды по неподвижной.

Движение, соответствующее полукватерниону  $A$ , записывается в виде

$$Z = AZ'\bar{A}, \quad (3.1)$$

$$Z = i + (x + yi)\varepsilon, \quad Z' = i + (x' + y'i)\varepsilon.$$

$\bar{A}$  — полукватернион, сопряженный  $A$ :

$$A\bar{A} = \bar{A}A = 1.$$

Подставляя в (3.1) значения полукватерниона  $A$ , получим

$$x = x' \cos 2\xi_1 - y' \sin 2\xi_1 - 2D,$$

$$y = x' \sin 2\xi_1 + y' \cos 2\xi_1 - 2E. \quad (3.2)$$

Неподвижной центроидой этого движения служит прямая,

$$x = \frac{(1-\alpha)c}{2} + 2D,$$

$$y = -2\xi.$$

— окружность радиуса  $\left| \frac{(1-\alpha)c}{2} \right|$ :

$$x' = \frac{(1-\alpha)c}{2} \cos 2\eta_1,$$

$$y' = -\frac{(1-\alpha)c}{2} \sin 2\eta_1.$$

соответствующее полукватерниону  $B$ :

$$\begin{aligned} z &= x' \cos 2\eta_1 - y' \sin 2\eta_1 - 2(\eta \sin 2\eta_1 + \beta \cos 2\eta_1), \\ \varphi &= x' \sin 2\eta_1 + y' \cos 2\eta_1 - 2(\eta \cos 2\eta_1 - \beta \sin 2\eta_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

близиенной центроиды:

$$x = -a \cos 2\eta_1 - 4\eta \sin 2\eta_1,$$

$$y = a \sin 2\eta_1 - 4\eta \cos 2\eta_1,$$

$$a = \frac{(1+\alpha)c}{2} + 4\beta.$$

близиенной центроиды:

$$x' = -b \cos 4\eta_1 - 2\eta \sin 4\eta_1,$$

$$y' = b \sin 4\eta_1 - 2\eta \cos 4\eta_1,$$

$$b = \frac{(1+\alpha)c}{2} + 2\beta.$$

#### 4. Винтовые поверхности квазигиперболического пространства

элементом квазигиперболического пространства является пара действительных плоскостей

$$x_0^2 - x_1^2 = 0 \quad (4.1)$$

действительных точек на линии пересечения этих плоскостей.

Поверхность квазигиперболического пространства записывается в виде

$$X = AX'B, \quad (4.2)$$

$X, X', A, B$  — полуантикватернионы:

$$X = x_0 + x_1e + (x_2 + x_3e)\varepsilon,$$

$$X' = x'_0 + x'_1e + (x'_2 + x'_3e)\varepsilon,$$

$$A = z_0 + \alpha_1e + (\alpha_2 + \alpha_3e)\varepsilon,$$

$$B = \beta_0 + \beta_1e + (\beta_2 + \beta_3e)\varepsilon,$$

$$e^2 = +1, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad e\varepsilon = -\varepsilon e.$$

Основные нормировки:

$$x_0^2 - x_1^2 = 1, \quad x_0'^2 - x_1'^2 = 1, \quad z_0^2 - \alpha_1^2 = 1, \quad \beta_0^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (4.3)$$

Прием (4.2), при котором инвариантны две евклидовы прямые  $(x_0, 0, x_1, 0)$  и  $(x_0, 0, 0, x_2)$ , имеет вид (1.4).

$$x_0 = \operatorname{ch} u, \quad x_1 = \operatorname{sh} u, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = p(u)$$

последнее (1.4), получаем винтовую поверхность квазигиперболического пространства:

$$x_0 = \operatorname{ch} u,$$

$$x_1 = \operatorname{sh} u,$$

$$x_2 = v \operatorname{ch} u,$$

$$x_3 = uv \operatorname{sh} u + p(u). \quad (4.4)$$

Уравнения Сервана — Бианки (2.1) и условие квазисопряженности принимают вид

$$\begin{aligned}\varphi_u + \varphi_v + R &= 0, \\ \psi_u + \psi_v + R &= 0,\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$(p'' - p) \operatorname{ch} u + (\alpha - \operatorname{ch}^2 u + \alpha^2 \operatorname{sh}^2 u) \varphi + (\alpha + \operatorname{ch}^2 u - \alpha^2 \operatorname{sh}^2 u) \psi = 0,$$

$$R = \frac{\operatorname{sh} u}{\alpha^2 \operatorname{sh}^2 u - \operatorname{ch}^2 u} [\alpha(p'' - p) + (\alpha^2 - 1)(\varphi + \psi) \operatorname{ch} u].$$

Здесь также имеют место условия (2.4), и, следовательно, решением системы (4.5) имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{c_1}{\operatorname{ch}^2 u} - \frac{c(1+\alpha)}{2}, \\ \psi &= \frac{c_1}{\operatorname{ch}^2 u} + \frac{c(1-\alpha)}{2}, \\ p &= c_2 \operatorname{ch} u + c_3 \operatorname{sh} u - \frac{\alpha c_1 \operatorname{ch} 2u}{\operatorname{ch} u} + \frac{c(\alpha^2-1)}{2} u \operatorname{sh} u.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Параметры сети квазипереноса:

$$v^1 = v - c_1 \operatorname{th} u + \frac{c(1+\alpha)}{2} u,$$

$$v^2 = v - c_1 \operatorname{th} u - \frac{c(1-\alpha)}{2} u.$$

Отсюда следует

$$u = \frac{v^1 - v^2}{c}, \quad (4.7)$$

$$v = \frac{1-\alpha}{2} v^1 + \frac{1+\alpha}{2} v^2 + c_1 \operatorname{th} u.$$

Подставляя (4.7) в (4.4), получаем каноническое представление винтовой поверхности квазипереноса в виде произведения полуантивактернионов

$$X = A(\xi)B(\eta), \quad (4.8)$$

$$A(\xi) = \operatorname{ch} \xi_1 + e \operatorname{sh} \xi_1 + \varepsilon (\xi \operatorname{ch} \xi_1 + D \operatorname{sh} \xi_1) + e\varepsilon (\xi \operatorname{sh} \xi_1 + D \operatorname{ch} \xi_1),$$

$$B(\eta) = \operatorname{ch} \eta_1 + e \operatorname{sh} \eta_1 + \varepsilon (\eta \operatorname{ch} \eta_1 - E \operatorname{sh} \eta_1) + e\varepsilon (\eta \operatorname{sh} \eta_1 - E \operatorname{ch} \eta_1),$$

$$\xi = \frac{1-\alpha}{2} v^1 - \frac{c_3}{2}, \quad \eta = \frac{1+\alpha}{2} v^2 + \frac{c_3}{2},$$

$$\xi_1 = \frac{2\xi + c_3}{(1-\alpha)c} = \frac{v^1}{c}, \quad \eta_1 = \frac{c_3 - 2\eta}{(1+\alpha)c} = -\frac{v^2}{c},$$

$$2D = c_2 + (1-\alpha)c_1, \quad 2E = c_2 - (1+\alpha)c_1.$$

Поверхность (4.4) также несет только одну сеть квазипереноса.

Автор выражает глубокую благодарность Я. П. Бланку и Б. А. Розенфельду за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк, Е. А. Косачевская. Винтовые поверхности квазипереноса и их связь с кинематикой на плоскости. Укр. геометр. сб., вып. 1, Изд-во Харьковского ун-та, 1965, 3—11.
2. W. Blaschke. Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum, 1922.
3. Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный. К проблеме В. Бляшке о поверхности квазипереноса и их связь с кинематикой на плоскости. Вестник мех.-мат. фак-та Харьковского ун-та, т. 31, 1965, 3—17.

Поступила в редакцию 13 сентября 1965

## СВОЙСТВА ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДИАМЕТРОВ ОБЩЕЙ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н. П. Макуха (Харьков)

Пусть  $F$  — общая замкнутая выпуклая поверхность. Внешним диаметром  $D$  поверхности  $F$  называется точная верхняя граница расстояний между точками поверхности  $F$ . Внутренним диаметром  $d$  называется точная верхняя граница расстояний между точками по поверхности  $F$ .

В работе устанавливается зависимость между внутренним и внешним диаметрами общей замкнутой выпуклой поверхности. Даётся приложение выведенной зависимости для оценки длин кривых на выпуклых поверхностях.

**Теорема 1.** Внутренний диаметр  $d$  и внешний диаметр  $D$  общей замкнутой выпуклой поверхности связаны неравенством  $d \leq \frac{\pi D}{2}$ .

Доказательство на поверхностях вращения постоянной ширины  $D$ . Для доказательства теоремы потребуются следующие факты.

**Лемма 1.** Все кривые постоянной ширины  $h$  имеют одну и ту же самую длину  $\ell_h$ .

**Лемма 2.** Среди всех замкнутых выпуклых кривых данного диаметра  $D$  наибольшей длиной обладают кривые постоянной ширины  $D$ .

**Доказательство.** Пусть  $L$  — замкнутая выпуклая кривая диаметром  $D$ , обладающая максимальной длиной и не являющаяся кривой постоянной ширины  $D$ . Ее длина вычисляется по формуле

$$l = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\vec{n}) d\varphi,$$

где  $\vec{n}$  — нормаль к кривой  $L$  в направлении  $\vec{n}$ . Так как  $L$  не кривая постоянной ширины  $D$ , то найдется некоторое множество  $M$  направлений положительной угловой меры, на котором  $h(\vec{n}) < D$ . Следовательно,

$$l = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\vec{n}) d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} D d\varphi = \pi D.$$

Это противоречит предположению, что кривая  $L$  имеет максимальную длину среди кривых постоянной ширины  $D$ .

Докажем теорему 1. Пусть  $F$  — общая замкнутая выпуклая поверхность с внешним диаметром  $D$ . Пусть кратчайшая  $AB$  реализует внутренний диаметр  $d$ .

Процедем сечение поверхности  $F$  плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $A$  и  $B$ . В сечении получим плоскую замкнутую выпуклую кривую  $\gamma$ , длина которой не меньше  $2d$ . Диаметр кривой  $\gamma$  обозначим через  $D_1$ . Из леммы 1 длина кривой  $\gamma$  не больше  $\pi D_1$ . Но  $D_1 \leq D$ .

$$2d \leq l_\gamma \leq \pi D_1 \leq \pi D. \quad (1)$$

$$d \leq \frac{\pi D}{2}.$$

Теперь докажем вторую часть теоремы. Покажем сначала, что при условии  $2d = \pi D$  поверхность  $F$  будет поверхностью постоянной ширины  $D$ . Для этого выберем произвольное направление  $\mathbf{n}$  и докажем, что ширина поверхности  $F$  в этом направлении равна  $D$ .

Из определения внешнего диаметра следует, что  $h(\mathbf{n}) \leq D$ . Рассечем поверхность  $F$  плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $A$  и  $B$  и параллельной вектору  $\mathbf{n}$ . В сечении получим плоскую кривую  $\gamma$ . Из неравенств (1) и из условия  $2d = \pi D$  следует

$$\pi D = 2d \leq l_1 \leq \pi D_1 \leq \pi D.$$

Следовательно,  $l_1 = \pi D$ .

В силу леммы 1 заключаем, что кривая  $\gamma$  является кривой постоянной ширины  $D$ . Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — опорные прямые к кривой  $\gamma$ , перпендикулярные  $\mathbf{n}$ , и  $h_1(\mathbf{n})$  — ширина кривой  $\gamma$  в направлении  $\mathbf{n}$ . Обозначим через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  опорные плоскости поверхности  $F$ , перпендикулярные  $\mathbf{n}$ . Плоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  должны содержать соответственно  $l_1$  и  $l_2$ , иначе получим  $h(\mathbf{n}) > h_1(\mathbf{n}) = D$ .

Следовательно, ширина поверхности  $F$  в направлении  $\mathbf{n}$  совпадает с шириной кривой  $\gamma$  в том же направлении. В силу произвольности направления  $\mathbf{n}$  заключаем, что  $F$  имеет постоянную ширину в любом направлении.

Покажем, что  $F$  — поверхность вращения с осью вращения  $AB$ . Спроектируем  $F$  цилиндром  $K$ , перпендикулярным плоскости  $\alpha$ . Покажем что кривая  $\gamma$ , которая по доказанному является кривой постоянной ширины  $D$ , совпадает с множеством общих точек  $F$  и  $K$ , т. е. является линией тени. Пусть направление  $\mathbf{n}$  параллельно плоскости  $\alpha$ . Опорные плоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , перпендикулярные  $\mathbf{n}$ , по доказанному, содержат точки кривой  $\gamma$ . Плоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  являются опорными и для цилиндра  $K$ . Следовательно,  $K$  имеет общие точки с кривой  $\gamma$ . Отсюда следует, что множество общих точек  $F$  и  $K$  совпадает с  $\gamma$ , так как поверхность постоянной ширины не может иметь плоских областей и прямолинейных отрезков.

Рассечем  $F$  плоскостью  $\beta$ , перпендикулярной отрезку  $AB$ . В сечении получим замкнутую выпуклую кривую  $\gamma_1$ . Покажем, что  $\gamma_1$  является окружностью с центром на оси  $AB$ . Если  $X$  — гладкая точка  $\gamma_1$ , то касательная к  $\gamma_1$  в точке  $X$  перпендикулярна плоскости  $AXB$ , проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $X$ . Покажем, что в каждой точке кривая  $\gamma_1$  имеет касательную. Действительно, для каждой точки  $Y$ , принадлежащей  $\gamma_1$ , можно построить сходящуюся к ней справа и слева последовательность гладких точек. Касательные к  $\gamma_1$  в этих точках перпендикулярны плоскостям, проходящим через ось  $AB$  и соответствующие точки. Отсюда следует, что полукасательные в точке  $Y$  перпендикулярны плоскости  $AYB$ . Значит, в точке  $Y$  существует касательная к  $\gamma_1$ . Следовательно,  $\gamma_1$  является ортогональной траекторией пучка плоскостей с осью  $AB$ . А это значит, что  $\gamma_1$  — окружность с центром на оси  $AB$ . Следовательно,  $F$  — поверхность вращения, что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 следует.

**Теорема 2.** Во всякой замкнутой выпуклой во внутреннем смысле области на выпуклой поверхности имеет место оценка

$$d \leq \frac{\pi D}{2}, \quad (2)$$

— внутренний диаметр области, а  $D$  — внешний диаметр области.

**Доказательство.** Пусть на выпуклой поверхности задана замкнутая область во внутреннем смысле область  $Q$  с внешним диаметром  $D$  и внутренним диаметром  $d$ . Натянем на  $Q$  выпуклую оболочку. Получим выпуклую поверхность  $\Phi$ . Очевидно, внешний диаметр  $\Phi$  равен  $D$ , а внутренний диаметр  $d_1 \geq d$ . Из теоремы 1 следует, что

$$d_1 \leq \frac{\pi D}{2}.$$

$$d \leq \frac{\pi D}{2}.$$

Следовательно неравенства (2) могут быть получены оценки длин кривых на внутренней области на выпуклой поверхности через внешний диаметр.

В работах [2] и [3] А. Д. Александров и В. В. Стрельцов вывели оценки длины кривых через внутренний диаметр области  $d$  и величину  $\omega_0 = \omega^+(Q)$ , где  $\omega$  — собственно, поворот (извивание) кривой  $L$ , а  $\omega^+(Q)$  — положительная часть кривизны области  $Q$ . Эти оценки имеют вид

$$l \leq \frac{d}{\cos \frac{\omega_0}{2}}, \quad (3)$$

если кривая  $L$  имеет общие концы с внутренним диаметром, а  $\omega_0 < \pi$

$$\left. \begin{aligned} l &\leq \frac{8d}{1 + \cos \frac{\omega_0}{2}}, \text{ если } 0 < \omega_0 < \pi \\ l &\leq \frac{8d}{\sin \frac{\omega_0}{2}}, \text{ если } \pi < \omega_0 < 2\pi \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Применив неравенство (2) к неравенствам (3) и (4), получим

$$l \leq \frac{\pi D}{2 \cos \frac{\omega_0}{2}},$$

если кривая  $L$  имеет общие концы с внутренним диаметром

$$l \leq \frac{4\pi D}{1 + \cos \frac{\omega_0}{2}}, \text{ если } 0 < \omega_0 < \pi;$$

$$l \leq \frac{4\pi D}{\sin \frac{\omega_0}{2}}, \text{ если } \pi < \omega_0 < 2\pi.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гос. Изд-во, 1948.  
 А. Д. Александров и В. В. Стрельцов. Оценки длины кривой на поверхности. ДАН СССР, т. 93, 2, 1953.  
 В. В. Стрельцов. Оценки длины кривой на поверхности данного диаметра. Учебник математики и механики, т. 1, АН Казах. ССР, 1958.  
 K. Weierstrass und W. Fenchel. Theorie der konvexen Körper. Berlin, 1934.

Поступила в редакцию 14 июня 1965 г.

---

## О ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ЗАМКНУТОЙ СТРОГО ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*A. И. Медяник* (Харьков)

Шириной замкнутой выпуклой поверхности в данном направлении называется расстояние между опорными плоскостями поверхности, перпендикулярными этому направлению. Пусть  $H(\mathbf{n})$  — опорная функция поверхности  $F$ , а  $B(\mathbf{n})$  — ее ширина. Известно, что

$$B(\mathbf{n}) = H(\mathbf{n}) + H(-\mathbf{n}).$$

Пусть  $H_1(\mathbf{n})$  и  $H_2(\mathbf{n})$  — опорные функции двух замкнутых строго выпуклых поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ , соответствующими точками которых являются точки с параллельными внешними нормалями.

Будем говорить, что поверхности допускают сильное внутреннее касание, если, например, поверхность  $F_2$  можно параллельно перенести так, чтобы совпали соответствующие точки поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  и для опорных функций в некоторой окрестности общей точки с нормалью  $\mathbf{n}_0$  выполнялось неравенство

$$|H_1(\mathbf{n}) - H_2(\mathbf{n})| \geq c(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)^2,$$

где  $c$  — положительная постоянная и равенство достигается только при  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ .

**Теорема 1.** *Если в каждом направлении ширины двух замкнутых строго выпуклых поверхностей трехмерного евклидова пространства равны, то сами поверхности либо равны, либо допускают сильное внутреннее касание.*

Так как ширины поверхностей с опорными функциями  $H(\mathbf{n})$  и  $H(-\mathbf{n})$  равны в каждом направлении, то из теоремы 1 следует.

**Теорема 2.** *Если замкнутая строго выпуклая поверхность трехмерного евклидова пространства в точках с противоположно направленными внешними нормалями не допускает сама с собой сильного внутреннего касания, то такая поверхность имеет центр симметрии.*

Прежде чем доказывать теоремы 1 и 2, докажем несколько лемм.

### Леммы о гладких поверхностях обобщенной отрицательной кривизны

Пусть  $z = f(x, y)$  — уравнение поверхности  $F$ . Поверхность  $F$  называется поверхностью обобщенной отрицательной кривизны, если никакой плоскостью нельзя отсечь от нее конечного куска.

Однако рассматривать только гладкие поверхности обобщенной кривизны и только те из них, для которых максимальное значение  $\rho$ , ограниченено и достигается в точке с конечными

Пусть  $\alpha$  — произвольная плоскость. Обозначим область этой плоскости, в которой лежит в той части пространства, где  $z > f(x, y)$ , и  $\alpha^+$ , а в другой части — противоположное неравенство. Обозначим  $\alpha^+$  и  $\alpha^-$  аналогочные множества на прямой  $l$ .

**Лемма 1.** Пусть прямая  $l$  пересекает поверхность  $F$  обобщенной конической симметрии так, что множество точек  $l^+$  несвязно, тогда прямая  $l$  проходит плоскость  $\alpha$ , на которой область  $\alpha^+$  также

Доказательство. Рассмотрим пучок полуплоскостей с осью  $l$ , состоящий из полуплоскостей, ортогональных плоскости  $(x, y)$ , за исключением полуплоскость пучка. Обозначим ее  $\alpha_0^1$ . Выберем направление изображенных полуплоскостями лучка с полуплоскостью  $\alpha_0^1$ . Пусть  $\alpha_0^2$  — ту полуплоскость пучка, с которой совмещается полуплоскость  $\alpha_0^1$  при извороте последней на угол  $\varphi$  в выбранном направлении. Проведем вторую полуплоскость до полной плоскости, обозначив целую полуплоскость  $\alpha_0^1$  в вторую полуплоскость  $\alpha_0^2$ .

Так как по условию леммы множество точек  $l^+$  несвязно, то на прямой  $l$  существует связное множество  $L$ , являющееся компонентой  $l^+$ , по концы стороны которого есть точки  $l^\pm$ . Пусть  $G_\varphi$  — максимальное связное множество точек плоскости  $\pi_\varphi$ , содержащее  $L$  и не содержащее точку  $\bar{L}$  — аналогичное множество на прямой  $l$ . Так как  $F$  — поверхность положительной острой кривизны, то  $\bar{L}$  разбивает  $G_\varphi$  на два компонента, не имеющих общих точек, отличных от точек  $\bar{L}$ . Обозначим  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) подмножество множества  $G_\varphi$ , которое содержит точки  $\bar{L}_i$  ( $i = 1, 2$ ), сколько угодно близкие к произвольной

Если оба множества  $G_1$  и  $G_2$  содержат бесконечно удаленные точки плоскости  $\alpha$ , то из этой плоскости область  $\alpha^+$  несвязна. Следовательно, нам придется выбрать плоскость, обладающую указанным свойством.

Рассмотрим плоскость  $\alpha_0$ . Пусть  $G_0^1$  содержит бесконечно удаленные точки  $a_\pi$ , а  $G_0^2$  таких точек не содержит (случай, когда ни одно из множеств  $G_0$  не содержит бесконечно удаленных точек  $a_\pi$  невозможен, так как  $F$  — изотропность обобщенной отрицательной кривизны). Отсюда следует, что  $G_0^2$  содержит бесконечно удаленные точки  $a_\pi$ , а  $G_0^1$  их не содержит. Так как плоскость  $\alpha_0$  совпадает с плоскостью  $\alpha_0$ . Но так как при параллельном переносе плоскости  $\alpha_0^1$  на угол  $\pi$  плоскость  $\alpha_0^1$  совмещается с  $\alpha_\pi^1$ , то для некоторого  $\theta < \pi < \pi$  оба множества  $G_{\varphi_0}^1$  и  $G_{\varphi_0}^2$  содержат бесконечно удаленные точки плоскости  $\alpha_0$ . Значит, плоскость  $\alpha = \alpha_{\varphi_0}$  является искомой, а ее область  $\alpha^+$  несвязна.

Пусть производная  $z$ , достигает максимального значения в точке  $A_0$  в направлении  $x_0, y_0$ . Пусть  $l_0$  — прямая, касающаяся поверхности  $F$  в точке  $A_0$  и лежащая в плоскости  $y = y_0$ ;  $\{l_0\}$  — множество всех прямых, параллельных  $l_0$ ;  $\Sigma$  — множество точек пересечения поверхности  $F$  и производящей плоскости  $z$  пучка плоскостей с осью  $l_0$ .

В дальнейшем мы будем предполагать, что ни одна прямая из  $\{l_0\}$  не касается  $F$  на бесконечности. Обозначим это условие (\*).

При предположении (\*) для множества  $\Sigma$  справедливы следующие леммы.

**Лемма 2.** Если плоскость  $y = \text{const}$  пересекает  $\Sigma$  в двух точках, то  $\Sigma$  содержит прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки.

**Лемма 3.** Если некоторая прямая из  $\{l_0\}$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , пересекает  $\Sigma$ , то общая часть их является связным множеством, расположенным в конечной части  $\alpha$ .

**Лемма 4.** Множество  $\Sigma$  связно.

**Лемма 5.** Касательная плоскость  $\alpha_0$  поверхности  $F$  в точке  $A_0$  касается  $F$  в любой точке их пересечения  $\Sigma_0$ .

**Лемма 6.** Множество  $\Sigma_0$  ограничено двумя непересекающимися бесконечными выпуклыми кривыми, обращенными выпуклостью в сторону  $\Sigma_0$ .

**Лемма 7.** Множество  $\Sigma_0$  содержит прямую линию.

Доказательство леммы 2. Пусть плоскость  $y = c$  пересекает  $\Sigma$  в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда на кривой  $z = f(x, c)$  в плоскости  $y = c$  между точками  $P$  и  $Q$  найдется точка  $R$ , в которой касательная к кривой параллельна  $PQ$  и некоторая окрестность точки  $R$  кривой  $PRQ$  лежит по одну сторону этой касательной. Если бы  $\Sigma$  не содержало отрезка  $PQ$ , то на кривой  $z = f(x, c)$ , лежащей в плоскости  $y = c$ , нашлась бы точка, в которой производная  $z_x$  была бы больше своего максимального значения, так как отрезок  $PQ$  параллелен прямой  $l_0$ . А это невозможно, т. е.  $PQ$  принадлежит  $\Sigma$ .

Доказательство леммы 3. Пусть некоторая прямая из  $\{l_0\}$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , пересекает  $\Sigma$ . Тогда по лемме 2 это пересечение связно.

Никакая прямая из  $\{l_0\}$  не может пересекать  $\Sigma$  по полуправой в силу условия (\*). Поэтому, чтобы доказать, что пересечение прямой из  $\{l_0\}$  и  $\Sigma$  расположено в конечной части плоскости  $\alpha$ , достаточно показать, что никакая прямая из  $\{l_0\}$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , не может иметь с  $\Sigma$  общую точку на бесконечности в направлении  $x \rightarrow +\infty$ .

Предположим противное. Пусть прямая  $l'_0$  плоскости  $\alpha$  из  $\{l_0\}$  имеет с  $\Sigma$  общую точку в направлении  $x \rightarrow +\infty$ . Пусть  $L$  — связная часть  $\Sigma$ , содержащая бесконечно удаленную точку, общую для  $l'_0$  и  $\Sigma$ .  $L$  расположено по одну сторону прямой  $l'_0$  в силу леммы 2 и условия (\*).

Выберем на  $L$  произвольную точку  $B$ . Пусть  $\bar{l}_0$  — прямая, параллельная  $l'_0$  и проходящая через точку  $B$ .

Пусть  $B'_n$  — последовательность точек на прямой  $l'_0$ , уходящая в бесконечность в направлении  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда последовательность прямых  $BB'_n$  сходится к прямой  $\bar{l}_0$ .

Пусть  $B_n$  — ближайшая к  $B'_n$  точка прямой  $BB'_n$ , принадлежащая  $L$ . Так как в точке  $A_0$  производная  $z_x$  максимальна, то отрезок  $B_nB'_n$  лежит под поверхностью  $F$ . Пусть  $B^0_n$  — точка, принадлежащая отрезку  $B_nB'_n$  и удаленная от точки  $B_n$  на расстояние не более  $\frac{1}{n}$ ;  $\bar{B}^0_n$  — точка поверхности  $F$ , имеющая одинаковую с точкой  $B^0_n$  проекцию на плоскость  $(x, y)$ . Для каждого  $n$  на поверхности  $F$  над отрезком  $B_nB^0_n$  лежит точка  $\bar{B}_n$ , касательная в которой параллельна отрезку  $B_n\bar{B}^0_n$ . При  $n \rightarrow \infty$  последовательность отрезков  $B_nB^0_n$  сходится к общей точке  $l'_0$  и  $L$ . Значит, последовательность точек  $\bar{B}_n$  также сходится к этой точке. Но тогда про-

максимальна в бесконечно удаленной точке, так как в точке  $A_0$  касательные параллельны отрезкам  $B_n \bar{B}_n^0$ . Значит,  $l'_0$  касается  $F$  в точке  $A_0$ , что невозможно в силу условия (\*).

**Доказательство леммы 4.** Предположим противное. Множество  $\Sigma$  может иметь более двух компонент, так как в противном случае по лемме 3 одна из компонент была бы расположена в конечной части поверхности, что невозможно, так как  $F$  — поверхность обобщенной кривизны. Итак, пусть  $\Sigma$  имеет две компоненты. Тогда прямая  $\bar{l}_0$  из  $\{l_0\}$ , разделяющая эти компоненты. Обе компоненты не могут иметь точек, сколь угодно близких к прямой  $\bar{l}_0$ , так как в противном случае по лемме 2  $\Sigma$  было бы связано, что противоречит предположению. Обозначим  $\Sigma_1$  компоненту  $\Sigma$ , не содержащую точек, близких к прямой  $\bar{l}_0$ . В силу леммы 3 найдется прямая  $l'_0$ , отсекающая от  $\Sigma_1$  конечную часть. В силу гладкости  $F$  и гладкость  $\alpha$  касается  $F$  по  $\Sigma$ .

В таком случае достаточно малым поворотом плоскости  $\alpha$  вокруг прямой  $\bar{l}_0$ , при котором полуплоскость, содержащая отрезанную прямой  $l'_0$  конечную часть, движется в направлении  $F$ , мы добьемся отсечения от  $F$  конечной части, что невозможно. Итак,  $\Sigma$  связано.

**Доказательство леммы 5.** Обозначим  $\gamma_0$  кривую пересечения  $F$  с плоскостью  $y = y_0$ . В силу условия (\*) кривая  $\gamma_0$ , для которой  $l_0$  является касательной в точке  $A_0(x_0, y_0)$ , не является прямой линией. Поэтому на одну сторону от точки  $A_0$  можно выбрать сходящуюся к точке  $A_0$  последовательность точек  $A_n$ , никакие две из которых не лежат на прямой, проходящей через  $A_0$ .

По лемме 1 через каждую прямую  $l_n$ , определенную точками  $A_0$  и  $A_n$ , плоскость  $\alpha_n$ , на которой одна из областей  $\alpha_n^+$  или  $\alpha_n^-$  несвязна. Для определенности предположим, что для всех  $n > n_0$  несвязна область  $\alpha_n^+$ . Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность плоскостей  $\alpha_n$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится к некоторой плоскости  $\alpha$  из плоскостей с осью  $l_0$ , так как в противном случае из этой последовательности можно было бы выделить сходящуюся последовательность.

Пусть  $\bar{\Sigma}$  — множество точек пересечения плоскости  $\alpha_n$  с поверхностью  $F$ ;  $\bar{\Sigma}_n$  — подмножество  $\bar{\Sigma}_n$ , включающее максимальное связное подмножество  $\bar{\Sigma}_n$ , содержащее точку  $A_0$ , и максимальное связное подмножество  $\bar{\Sigma}_n$ , содержащее точку  $A_n$ . Так как при  $n \rightarrow \infty$   $\alpha_n \rightarrow \alpha$ , то  $\bar{\Sigma}_n \rightarrow \bar{\Sigma}$ .

Любая прямая плоскости  $\alpha$ , параллельная  $l_0$ , пересекает  $\bar{\Sigma}$ . Поэтому, с некоторого  $n > N$ , прямая  $l'_n$  пересечения плоскостей  $\alpha_n$  и  $y = y_0$  пересекает  $\bar{\Sigma}_n$  хотя бы в двух точках. В противном случае либо все прямые предельной плоскости  $\alpha$ , параллельные  $l_0$ , пересекали бы  $\bar{\Sigma}$ , либо  $\bar{\Sigma}$  содержало бы полуправую, параллельную  $l_0$ , что противоречит условию (\*).

Пусть  $P_n$  и  $Q_n$  — точки пересечения прямой  $l'_n$  и  $\bar{\Sigma}_n$ . Тогда на кривой  $\gamma_0$  плоскости  $y = c$  между точками  $P_n$  и  $Q_n$  найдется точка  $R_n$ , касательная в которой параллельна прямой  $P_n Q_n$ . Так как последовательность прямых  $P_n Q_n$  сходится к прямой, параллельной  $l_0$ , то касательная в точке  $R_n$ , предельной для последовательности точек  $R_n$ , параллельна  $l_0$ , т. е. проекция  $\bar{\Sigma}$  в этой точке максимальна. Так как плоскость  $y = \text{const}$  произвольно, то плоскость  $\alpha$  касается  $F$  по множеству  $\bar{\Sigma}$ . Значит, плоскость  $\alpha$  касается  $F$  и в точке  $A_0$ , т. е.  $\alpha$  совпадает с  $\alpha_0$ , а  $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_0$ . Лемма доказана.

**Доказательство леммы 6.** Сначала покажем, что от множества  $\Sigma_0$  никакой прямой нельзя отрезать конечной части. Предположим противное. Пусть прямая  $\rho$  отсекает от  $\Sigma_0$  конечную часть  $G$ .

Множество  $\Sigma_0$  делит поверхность  $F$  на части  $F_1$  и  $F_2$ , а плоскость  $\alpha_0$  — на области  $\alpha_0^1$  и  $\alpha_0^2$ . Пусть  $F_i$  и  $\alpha_0^i$  ( $i = 1, 2$ ) имеют одинаковые проекции на плоскость  $(x, y)$ . Пусть  $G$  лежит в  $\alpha_0^1$ . Построим новую поверхность  $\bar{F}$ , склеив  $\alpha_0^1$  и  $F_2$ . Поверхность  $\bar{F}$  — гладкая, так как  $\alpha_0$  касается  $F$  по  $\Sigma_0$ , и лежит по одну сторону плоскости  $\alpha_0$ .

Как следует из доказательства леммы 4 от поверхности  $\bar{F}$  некоторую плоскостью  $\pi$  можно отрезать конечную часть. Параллельным переносом плоскости  $\pi$ , при котором отрезаемая горбушка уменьшается, мы можем получить плоскость  $\pi'$ , которая будет касаться поверхности  $\bar{F}$  по  $G$ . Так как поверхность  $\bar{F}$  гладкая, то  $G'$  не имеет общих точек с  $\Sigma_0$ , ибо в множеству  $\Sigma_0$  поверхности  $F$  касается плоскость  $\alpha_0$ .

Значит, множество  $G'$ , принадлежа части  $F_2$  поверхности  $\bar{F}$ , лежит на поверхности  $F$ . Тогда, параллельно сдвигая плоскость  $\pi'$  в направлении  $F$ , мы отрежем от поверхности  $F$  конечную часть, что невозможно.

Итак, от множества  $\Sigma_0$  нельзя отрезать конечной части. Значит, множество  $\Sigma_0$  ограничено непересекающимися бесконечными выпуклыми кривыми, обращенными выпуклостью в сторону  $\Sigma_0$ . Теперь из леммы следует, что кривых, ограничивающих множество  $\Sigma_0$ , должно быть не более двух. Лемма доказана.

**Доказательство леммы 7.** По лемме 6 множество  $\Sigma_0$  ограничено двумя непересекающимися бесконечными выпуклыми кривыми, если оно не сводится к прямой линии.

Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — выпуклые непересекающиеся кривые. Пусть точка  $x$  принадлежит  $L_1$ , точка  $y$  принадлежит  $L_2$ . Обозначим  $\rho(x, y)$  расстояние между точками  $x, y$ . Пусть  $x_0, y_0$  точки кривых  $L_1$  и  $L_2$ , находящиеся на конечном расстоянии, для которых выполняется неравенство

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x, y)$$

для всех  $x$  и  $y$ . Если  $\rho(x_0, y_0) = 0$ , то множество  $\Sigma_0$  содержит прямую, являющуюся общей опорной прямой кривых  $L_1$  и  $L_2$  в точке  $x_0$ . Если  $\rho(x_0, y_0) \neq 0$ , то в точках  $x_0$  и  $y_0$  есть опорные прямые перпендикулярные отрезку  $x_0y_0$ , т. е. в этом случае  $\Sigma_0$  содержит целую полосу параллельных прямых.

Если минимум расстояния достигается на бесконечности, то кривые  $L_1$  и  $L_2$  имеют параллельные асимптоты. И, значит,  $\Sigma_0$  содержит хотя бы одну прямую.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть  $H_1(x, y, z)$  и  $H_2(x, y, z)$  — опорные функции двух замкнутых строго выпуклых поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  трехмерного евклидова пространства. Рассмотрим поверхность  $F$

$$z = H_1(x, y, 1) - H_2(x, y, 1).$$

Пусть поверхности  $F_1$  и  $F_2$  не допускают сильного внутреннего касания. Покажем, что для  $F$  выполняются следующие условия.

1.  $F$  является поверхностью обобщенной отрицательной кривизны.
2.  $F$  — гладкая поверхность и на ней существует точка, где производная  $z_x$  достигает максимального значения.

**Лемма.** прямая пересечения плоскости  $y = \text{const}$  и касательной  $F$  в точке, где  $z_c$  максимально, не касается  $F$  на бесконечности.

При этом, по предположению, поверхности  $F_1$  и  $F_2$  не допускают внешнего касания, то, как показал А. В. Погорелов [1], никакость не отсекает от  $F$  конечной части, т. е.  $F$  есть поверхность отрицательной кривизны. Первому условию  $F$  удовлетворяет.

Доказательство второго условия следует из ограниченности координат поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ , так как

$$[H_1(x, y, 1) - H_2(x, y, 1)]_x = [H_1(x, y, z) - H_2(x, y, z)]_x$$

координат по оси  $x$  соответствующих точек поверхностей

Такое условие также можно считать выполненным. Предположим, что в точке с максимальным значением производной касается поверхности  $F$  на бесконечности. Это означает, что значение производной  $[H_1(x, y, z) - H_2(x, y, z)]_x$  в точке  $(1, 0, 0)$  максимально. Вычислим это значение. Так как  $H_1(x, y, z)$  и  $H_2(x, y, z)$  — положительно однородные функции второй степени, то

$$H_1 - H_2 + z(H_1 - H_2)_y + z(H_1 - H_2)_z \equiv H_1(x, y, z) - H_2(x, y, z). \quad (1)$$

В точке  $(1, 0, 0)$  тождество (1) принимает вид

$$\left. \frac{\partial(H_1 - H_2)}{\partial x} \right|_{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}} = H_1(1, 0, 0) - H_2(1, 0, 0). \quad (2)$$

В точке  $(-1, 0, 0)$  имеем

$$\left. \frac{\partial(H_1 - H_2)}{\partial x} \right|_{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}} = H_2(-1, 0, 0) - H_1(-1, 0, 0). \quad (3)$$

Поскольку производные поверхностей равны во всех направлениях, то

$$H_1(1, 0, 0) - H_2(1, 0, 0) = H_2(-1, 0, 0) - H_1(-1, 0, 0). \quad (4)$$

Сравнивая равенства (2), (3) и (4), замечаем, что производная по  $x$  принимает минимальное значение и в точке  $(-1, 0, 0)$ .

Из этого вытекает соотношение

$$(H_1 - H_2)_x = (H_2 - H_1)_{-x}. \quad (5)$$

Последнему из равенств (1—5) следует, что производная  $(H_1 - H_2)_{-x}$  принимает в точках  $(1, 0, 0)$  и  $(-1, 0, 0)$  минимальное значение. Значит, по ограниченности, можно считать, что производная  $(H_1 - H_2)_x$  соответствует поставленному условию, ибо в противном случае мы должны были рассматривать производную по направлению  $-x$ .

Таким образом, поверхность  $F$  удовлетворяет леммам 1—7. Значит, на поверхности  $F$  лежит прямая линия. Точке  $(x, y)$  поверхности  $F$  поставим в соответствие точку  $(X, Y, Z)$  единичной полусферы следующим образом:

$$X = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

При таком отображении прямой  $a_0$  поверхности  $F$  соответствует большему полуокружности на полусфере  $Z > 0$ . На этом полуокружности разность  $H_1(\mathbf{n}) - H_2(\mathbf{n})$  линейна. Но так как по условию теоремы ширины поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  по всем направлениям равны, т. е.

$$H_1(\mathbf{n}) + H_1(-\mathbf{n}) = H_2(\mathbf{n}) + H_2(-\mathbf{n}),$$

то разность опорных функций  $H_1(\mathbf{n})$  и  $H_2(\mathbf{n})$  является линейной функцией на всем большом круге. Выберем плоскость этого круга за координатную плоскость  $(x, y)$ . Параллельно перенесем одну из поверхностей на соответствующий вектор так, чтобы

$$H_1(x, y, o) = H_2(x, y, o).$$

После проведенных преобразований поверхности  $F_1$  и  $F_2$  будут удовлетворять следующим условиям:  $F_1$  и  $F_2$  строго выпуклые поверхности опорные функции которых в точках  $(x, y, o)$  равны; поверхности  $F_1$  и  $F_2$  не допускают сильного внутреннего касания в соответствующих точках. Применив дважды теорему 1а работы [2], получим, что поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны и параллельно расположены. Теорема 1 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорслов. Одно общее характеристическое свойство шара. УМЗ XI, 5(71), 1956.
2. А. И. Медянник. Некоторые теоремы единственности для выпуклых поверхностей, находящихся в соответствии по параллельности внешних нормалей. Укр. геометр. сб., вып. 1, Изд-во Харьковск. у-та, 1965, 58—61.
3. Г. М. Адельсон-Вельский. Обобщение одной геометрической теоремы С. Н. Бернштейна. ДАН СССР, 49, 6, 1945.

*Поступила в редакцию 27 сентября 1965*

## МЕТРИКЕ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

А. Д. Милка (Харьков)

В настоящей работе устанавливаются некоторые факты внутренней метрики выпуклых гиперповерхностей  $n$ -мерного евклидова пространства. Обобщаются соответствующие результаты, полученные А. Д. Александровым для случая пространства трех измерений [1].

В работе показано, что внутренняя метрика выпуклой гиперповерхности удовлетворяет условию выпуклости (теорема 1). Доказываются также теоремы о существовании угла в сильном смысле между кратчайшими линиями и о непрерывности кривизны треугольника (теорема 11), об изотонии кривизны между пространством направлений в точке построения максимальным конусом поверхности в той же точке (теорема 15). Некоторые из приведенных в работе результатов (теорема 1 и ее различные следствия, теоремы 2—5) получены ранее В. А. Топоноговым [2]. Доказательство теоремы 1, данное В. А. Топоноговым, основано на соответствующей теореме для римановых метрик неотрицательной кривизны. Между тем известное доказательство А. Д. Александрова без существенных изменений распространяется на случай гиперповерхности. Давайте заметить следующий факт.

Кратчайшая на выпуклом многограннике  $n$ -мерного евклидова пространства, не сводящаяся к отрезку прямой, не может проходить через грани, размерность которых меньше ( $n-2$ ).

Выпуклые гиперповерхности, рассматриваемые в работе, предполагаются замкнутыми. К их числу относятся и дважды покрытые выпуклые гиперплоскости.

В заключение заметим, что результаты настоящей работы без существенных изменений переносятся в  $n$ -мерные римановы пространства положительной кривизны.

### § 1. Поведение кратчайшей на выпуклом многограннике

Следующие утверждения обобщают известные факты о поведении кратчайших линий на выпуклом многограннике трехмерного евклидова пространства.

**Лемма 1.** Кратчайшая на выпуклом многограннике  $n$ -мерного евклидова пространства, не сводящаяся к отрезку прямой, не может проходить через грани, размерность которых меньше ( $n-2$ ).

**Лемма 2.** Каждая кратчайшая на выпуклом многограннике  $n$ -мерного пространства, не сводящаяся к отрезку прямой, имеет окрестность, которая разворачивается на гиперплоскость, причем кратчайшая линия проходит в прямолинейный отрезок. Развёрнутая окрестность

состоит из граней многогранника, уложенных на плоскость в порядке следования кратчайшей; соседние грани многогранника в этой окрестности имеют общие  $(n-2)$ -мерные грани, которые во внутренних точках пересекаются кратчайшей.

Докажем лемму 1', эквивалентную лемме 1.

**Лемма 1'.** Если кратчайшая на выпуклом многограннике  $P$   $n$ -мерноевклидова пространства не сводится к отрезку прямой, то каждая угловая точка кратчайшей лежит внутри  $(n-2)$ -мерной грани многогранника.

Доказательство.

*Первый случай.* Многогранник  $P$  не вырождается в дважды покрытую выпуклую область в гиперплоскости.

Пусть  $L$  — кратчайшая на  $P$ ,  $C$  — угловая точка  $L$ . Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда точка  $C$  принадлежит по меньшей мере трем различным  $(n-1)$ -мерным граням многогранника:  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T$ . Можно считать, что прямолинейные отрезки  $l_1$  и  $l_2$  кратчайшей  $L$ , сходящиеся в точке  $C$ , принадлежат граням  $T_1$  и  $T_2$ . Пусть  $l$  — отрезок прямой, соединяющий точку  $C$  и внутреннюю точку грани  $T$ . Проведем трехмерную плоскость, содержащую отрезки  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l$ . Сечение  $P'$  многогранника  $P$  этой плоскостью является двумерным выпуклым многогранником. Ломаная  $L' = l^1 + l^2$  — кратчайшая на многограннике  $P'$ . Но этого быть не может поскольку  $L'$  проходит через коническую точку  $C$  многогранника  $P'$ . Значит, в рассматриваемом случае лемма справедлива.

*Второй случай.* Многогранник  $P$  вырожденный. В этом случае достаточно доказать следующее утверждение.

Пусть  $P$  — выпуклый невырожденный многогранник в  $(n-1)$ -мерном пространстве,  $A$  и  $B$  — внутренние точки выпуклого тела, границей которого служит  $P$ ,  $C$  — точка на многограннике  $P$ . Предположим, что ломаная  $ACB$  — кратчайшая из всех ломанных, соединяющих  $A$  с  $B$  и состоящих из двух звеньев, общая вершина которых принадлежит  $P$ . Тогда точка  $C$  лежит внутри  $(n-2)$ -мерной грани многогранника  $P$ .

Докажем данное утверждение. Для этого убедимся, что точка  $C$  принадлежит только одной  $(n-2)$ -мерной грани многогранника  $P$ .

Пусть  $T$  есть  $(n-2)$ -мерная грань многогранника, которой принадлежит  $C$ . Отметим на продолжении отрезка  $AC$  точку  $\bar{B}$  так, чтобы  $\bar{B}C = BC$  и точка  $C$  разделяла  $A$  с  $\bar{B}$ . Положение точки  $\bar{B}$  определяется независимо от грани  $T$ . Вместе с тем эта точка симметрична точке  $B$  относительно грани  $T$ , так как ломаная  $ACB$  кратчайшая. Отсюда следует, что грань  $T$  единственная проходящая через точку  $C$  и точка  $C$  — внутренняя точка этой грани. Утверждение доказано. Тем самым доказана лемма 1'.

**Лемма 2** следует из леммы 1'.

Точку на выпуклой гиперповерхности будем называть *ребристой*, если касательный конус поверхности в этой точке вырождается в двугранный угол.

Из леммы 1' вытекает, что каждая угловая точка кратчайшей на выпуклой гиперповерхности является ребристой точкой поверхности. Отсюда следует, что на выпуклой гиперповерхности, не содержащей ребристых точек, любая геодезическая гладкая.

На основании леммы 2 можно заключить, что радиус-вектор выпуклой гиперповерхности в окрестности любой ее точки допускает такое же простое представление, как и в случае трехмерного пространства [3]. Пусть  $F$  — выпуклая гиперповерхность,  $r(X)$  — радиус-вектор точки  $X$  поверхности

точка на  $F$ ,  $s(X)$  — расстояние на поверхности точки  $X$  от кратной точки  $O$ ,  $\tau(X)$  — единичный вектор полукасательной в точке  $X_0$  к кратной линии  $F$ , проходящей  $X$  и  $X_0$ . Тогда

$$\tau(X) = \tau(X_0) + s(X) \tau(X) - v(X),$$

где  $v(X)$  — вектор, обладающий следующими свойствами:

если точки  $X$ , близких к  $X_0$ , единичный вектор направления  $v(X)$  определяет выпуклой оболочке сферического изображения открытой кратной линии  $F$ , проходящей  $X$  и  $X_0$ .

$$\|v(X)\| \rightarrow 0, |v(X)|/s(X) \rightarrow 0 \text{ при } X \rightarrow X_0.$$

## § 2. Условие выпуклости и его следствия

Пусть  $L$  и  $M$  — две кривые в многообразии с метрикой  $\rho$ , исходящие из точки  $O$ . Будем считать, что на малых отрезках, примыкающих к точке  $O$ , эти кривые не имеют точку  $O$  своей кратной точкой. Пусть точки  $X \in L$  и  $Y \in M$  выбираются на этих отрезках, причем  $X \neq O$  и  $Y \neq O$ . Пусть  $\gamma(X, Y)$  (т. е. лежащий в двумерной плоскости) треугольник с вершинами  $(O, X)$ ,  $(O, Y)$ ,  $\rho(X, Y)$  и обозначим  $\gamma(X, Y)$  угол в этом треугольнике против стороны, равной  $\rho(X, Y)$ . Если существует предел  $\lim_{X \rightarrow O, Y \rightarrow O} \gamma(X, Y)$ , когда  $X$  и  $Y$  сходятся к  $O$ , то этот предел называют углом между кривыми  $L$  и  $M$ .

Пусть кривые  $L$  и  $M$  кратчайшие и пусть при  $X \in L$  и  $Y \in M$  существует кратчайшая  $XY$ , соединяющая эти точки. Пусть хотя бы одна из точек  $X$  и  $Y$  сближается к  $O$ , а другая меняется так, что кратчайшая  $XY$  сходится к кратчайшей  $L$  или  $M$ , который может вырождаться в точку. Если при этом существует предел угла  $\gamma(X, Y)$ , то говорят, что между кривыми  $L$  и  $M$  существует угол в сильном смысле.

Поведение, что метрика  $\rho$  удовлетворяет условию выпуклости, если для каждой точки  $O$  многообразия и каждой пары кратчайших  $L$  и  $M$ , исходящих из  $O$ , угол  $\gamma(X, Y)$ , где  $X \in L$ ,  $Y \in M$ , является невозрастающей функцией дистанции точек  $X$  и  $Y$  от точки  $O$ .

В дальнейшем символом  $XY$  будем обозначать и кратчайшую, соединяющую точки  $X$  и  $Y$  на выпуклой гиперповерхности, и длину этой кратчайши, что не приводит к недоразумениям.

Фигуру, состоящую из трех различных точек поверхности и трех попарно их кратчайших. Точки будем называть вершинами, а кратчайшую линию — треугольника. Треугольник с вершинами  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  будем обозначать символом  $XYZ$ .

Пусть  $XYZ$  — треугольник на выпуклой гиперповерхности. Построим треугольник со сторонами, равными  $ZX$ ,  $ZY$  и  $XY$ . Будем говорить, что данный треугольник соответствует треугольнику  $XZY$ . Очевидно, что определется и соответствие элементов этих треугольников. Эти элементы будем обозначать соответствующие элементы одинаковыми символами с различными индексами.

Свойство метрики выпуклой гиперповерхности выражает

**Теорема 1.** На каждой выпуклой гиперповерхности выполняется условие

этого свойства обобщает результат, известный для случая трехмерного пространства. Как уже отмечалось выше, доказательство теоремы 1, данное

для конформных для двумерной поверхности, без существенных из-

менений распространяется и на случай гиперповерхности. На основании леммы 2 эта теорема устанавливается сначала для выпуклых многогранников в  $n$ -мерном пространстве. Затем результат распространяется и на общие выпуклые гиперповерхности путем их приближения выпуклыми многогранниками. Следует заметить, что при доказательстве теоремы 1 для многогранников достаточно ограничиться случаем, когда концы рассматриваемых кратчайших лежат внутри  $(n-1)$ -мерных граней.

Из теоремы 1, как и в случае трехмерного пространства, непосредственно следуют приведенные ниже теоремы 2—5.

**Теорема 2.** *Между двумя кратчайшими на выпуклой гиперповерхности, исходящими из одной точки, существует определенный угол, равный нулю только при налегании кратчайших.*

**Теорема 3.** *Если две кратчайшие на выпуклой гиперповерхности, исходящие из одной точки, совпадают на некотором отрезке, то одна из них есть часть другой, т. е. на выпуклой гиперповерхности выполняется условие неналегания кратчайших.*

**Теорема 4.** *Углы между сторонами треугольника на выпуклой гиперповерхности не меньше соответствующих углов плоского треугольника со сторонами той же длины.*

**Теорема 5.** *Пусть выпуклые гиперповерхности  $F_n$  сходятся к выпуклой гиперповерхности  $F$ , точки  $O_n \in F_n$  сходятся к точке  $O \in F$ , кратчайшие  $L_n$  и  $M_n$  на  $F_n$ , исходящие из точек  $O_n$ , сходятся к кратчайшим  $L$  и  $M$  на  $F$  исходящим из точки  $O$ . Тогда имеет место полунепрерывность углов снизу: если  $\alpha_n$  — угол между  $L_n$  и  $M_n$  на  $F_n$ ,  $\alpha$  — угол между  $L$  и  $M$  на  $F$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \geq \alpha$ .*

3. Если из точки на выпуклой гиперповерхности исходят три кратчайшие, то углы между парами из этих кратчайших находятся в определенной зависимости.

**Лемма 3.** *Если из точки  $O$ , лежащей внутри кратчайшей  $L$  на выпуклой гиперповерхности, исходит кратчайшая  $M$ , то сумма углов, которые  $M$  образует с ветвями кратчайшей  $L$ , равна  $\pi$ .*

**Доказательство.** Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — ветви кратчайшей  $L$ , исходящие из точки  $O$ . Угол между этими ветвями равен  $\pi$ . Обозначим  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  углы, которые образуют кратчайшие  $L_1$  и  $L_2$  с кратчайшей  $M$ . Из неравенства треугольника для углов между кривыми, установленного А. Д. Александровым, следует, что  $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \pi$ . Выберем точки  $X \in L_1$ ,  $Y \in L_2$  и  $Z \in M$ , не совпадающие с точкой  $O$ , и проведем кратчайшие  $ZX$  и  $ZY$ . Пусть  $X'Z'$ ,  $Z'Y'$  и  $Z''X''Y''$  — треугольники в одной и той же двумерной плоскости, соответствующие треугольникам  $XOZ$ ,  $ZOY$  и  $ZXY$  на поверхности. Первые два из плоских треугольников мы располагаем так, чтобы совпадали образы кратчайшей  $OZ$  и чтобы треугольники разделялись их общей стороной. Отметим на стороне  $X''Y''$  треугольника  $Z''X''Y''$  точку  $O''$ , отвечающую по изометрии точке  $O$  кратчайшей  $XY$ . Обозначим  $\beta_1$  и  $\beta_2$  углы при вершине  $O'$  в треугольниках  $X'Z'$  и  $Z'Y'$ ,  $\beta'$  и  $\beta''$  — углы при вершинах  $X'$  и  $X''$  в треугольниках  $X'Z'$  и  $Z''X''Y''$ .

Если допустить, что  $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi$ , то из определения угла между кривыми следует, что при достаточной близости точек  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  к точке  $O$  выполняется неравенство  $\alpha'_1 + \alpha'_2 > \pi$ , т. е. угол при вершине  $O'$  четырехугольника  $Z'X'Y'$  входящий. По известной лемме, при распрямлении четырехугольника  $Z'X'Y'$  в четырехугольник  $Z''X''Y''$  углы при вершинах  $X'$  и  $Y'$  первого из них увеличиваются. Следовательно,  $\beta' < \beta''$ . Но это неравенство противоречит условию выпуклости в применении к

кратчайшим  $ZX$  и  $XY$  на поверхности. Таким образом, строгое неравенство невозможно и, значит,  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $L, M$  и  $N$  — три кратчайшие на выпуклой гиперповерхности, исходящие из точки  $O$ . Тогда сумма углов между  $L$  и  $M$ ,  $L$  и  $N$ ,  $M$  и  $N$  не превосходит  $2\pi$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\alpha, \beta, \gamma$  углы между кратчайшими  $L$  и  $M$ ,  $L$  и  $N$ ,  $M$  и  $N$ . Пусть  $X$  и  $Y$  — внутренние точки кратчайших  $M$  и  $N$ ,  $Z_n$  — последовательность точек, сходящихся к точке  $O$  и расположенных внутри некоторого отрезка  $OZ$  кратчайшей  $L$ . Проведем кратчайшие  $Z_nX$  и  $Z_nY$ . По теореме о пленалегании кратчайших эти кратчайшие сходятся к отрезкам  $OX$  и  $OY$  кратчайших  $M$  и  $N$ . Обозначим  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  углы между кратчайшими  $Z_nZ$  и  $Z_nX$ ,  $Z_nZ$  и  $Z_nY$ ,  $Z_nX$  и  $Z_nY$ . Обозначим еще  $\xi_n, \eta_n$  углы между кратчайшими  $Z_nO$  и  $Z_nX$ ,  $Z_nO$  и  $Z_nY$ .

Из неравенства треугольника для углов между кривыми и леммы 3 следует  $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n < \alpha_n + \beta_n + \xi_n + \eta_n = 2\pi$ , откуда по теореме 5 находим  $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ . Лемма доказана.

4. Одним из следствий условия выпуклости является

**Теорема 6.** Между двумя кратчайшими на выпуклой гиперповерхности, исходящими из одной точки, существует угол в сильном смысле.

**Доказательство.** Пусть  $L$  и  $M$  — две кратчайшие на выпуклой гиперповерхности, исходящие из точки  $O$ . По теореме 2 между  $L$  и  $M$  существует определенный угол  $\alpha$ . Пусть  $X_n$  — последовательность точек на  $L$ , сходящихся к точке  $O$  и расположенных внутри отрезка  $OX$  кратчайшей  $L$ ,  $Y_n$  — последовательность точек на  $M$ , сходящихся к точке  $O$ , отличной от  $O$ . Будем считать, что точки  $X_n$  и  $Y_n$  соединяются кратчайшей  $X_nY_n$ , которая при  $n \rightarrow \infty$  сходится к отрезку  $OY$  кратчайшей  $M$ . Пусть плоский треугольник  $O'_nX'_nY'_n$  соответствует треугольнику  $OX_nY_n$  на поверхности. Для доказательства теоремы достаточно установить, что угол  $\alpha'_n$  при вершине  $O'_n$  треугольника  $O'_nX'_nY'_n$  стремится к  $\alpha$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Обозначим  $\xi_n$  угол между кратчайшими  $X_nY_n$  и  $X_nX$ ,  $\xi'_n$  — внешний угол при вершине  $X'_n$  треугольника  $O'_nX'_nY'_n$ . Из теоремы 4 и леммы 3 заключаем, что  $\alpha'_n \leq \alpha$ ,  $\xi'_n \leq \xi_n$ . При  $n \rightarrow \infty$  углы  $\xi'_n$  и  $\alpha'_n$  эквивалентны, так что  $\xi'_n \leq \xi_n \sim \alpha'_n \leq \alpha$ . Отсюда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi'_n \leq \alpha$ , но по теореме 5 имеем  $\alpha \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \xi'_n$ . Значит, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi'_n = \alpha$  и также  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n = \alpha$ .

Теорема доказана.

Пусть  $AB$  и  $BC$  — кратчайшие на выпуклой гиперповерхности  $F$ , причем точка  $C$  не принадлежит кратчайшей  $AB$ . Пусть  $X$  — внутренняя точка  $AB$ ,  $CX$  — кратчайшая на  $F$ ,  $C'B'C'$  — плоский треугольник, соответствующий треугольнику  $CBX$  на поверхности. Обозначим  $\alpha$  угол между кратчайшими  $AB$  и  $BC$ ,  $\alpha'$  — угол при вершине  $B'$  в треугольнике  $C'B'C'$ ,  $\xi$  — угол между кратчайшими  $AX$  и  $CX$ . Из условия выпуклости и определения угла между кратчайшими следует, что существует предел  $\lim_{X \rightarrow B} \alpha' = \bar{\alpha}$

и  $\bar{\alpha} \leq \alpha$ . Применяя те же соображения, что и в доказательстве теоремы 6, можно получить следующий результат.

**Теорема 7.** Существует предел  $\lim_{X \rightarrow B} \xi = \bar{\alpha}$ .

Пусть кратчайшая  $AB$  ориентирована от  $A$  к  $B$ . Если  $X$  — внутренняя точка  $AB$ , то на основании теоремы 7 можно говорить о правом (левом) предельном значении в точке  $X$  угла между кратчайшими  $CY$  и  $BY$  ( $CY \neq AY$ ), когда внутренняя точка  $Y$  кратчайшей  $BX$  ( $AX$ ) справа (слева) приближается к точке  $X$ . В точке  $A$  существует правое, а в  $B$  — левое

пределные значения. Правое предельное значение угла в точке  $X$  кратчайшей  $AB$  будем обозначать  $\xi(X)$ , левое —  $\eta(X)$ . Из теоремы 4, леммы 3 и теоремы 7 следует, что в каждой внутренней точке  $X$  кратчайшей  $AB$  выполняется неравенство  $\xi(X) + \eta(X) < \pi$ . Можно доказать, что строгое неравенство имеет место не более чем в счетном множестве точек кратчайшей.

Пусть  $x$  — расстояние точки  $X$  кратчайшей  $AB$  от точки  $A$ ,  $z(x)$  — расстояние точки  $C$  от точки  $X$ . Функция  $z = z(x)$  непрерывна. Можно доказать, что в каждой внутренней точке  $X$  кратчайшей  $AB$  эта функция имеет правую и левую производные  $z_X^+$  и  $z_X^-$ , причем  $z_X^+ = -\cos \xi(X)$ ,  $z_X^- = \cos \eta(X)$  и  $z_X^+ = z_X^-$  всюду, исключая лишь счетное множество точек кратчайшей  $AB$ . Соответствующие производные существуют и на концах кратчайшей, причем  $z_{X|X=A}^+ = -\cos \xi(A)$ ,  $z_{X|X=B}^- = \cos \eta(B)$ .

### § 3. Некоторые вспомогательные предложения

**Лемма 5.** Пусть  $K$  — сыпучий конус в  $n$ -мерном евклидовом пространстве с вершиной в точке  $O$ ,  $OAB$  — треугольник на этом конусе,  $\alpha$  — угол при вершине  $O$  треугольника,  $Z$  — переменная точка на стороне  $AB$ . Если  $\alpha = \pi$ , то ломаная  $AO + OB$  — кратчайшая, совпадающая с кратчайшей  $AB$ .

Если  $\alpha \neq 0$  или  $\pi$ , то множество прямолинейных отрезков  $OZ$  заполняет на конусе  $K$  фигуру, изометричную плоскому треугольнику. Углы в треугольнике  $OAB$  на конусе равны соответствующим углам плоского треугольника.

Доказательство. Построим плоский треугольник  $O'A'B'$ , соответствующий треугольнику  $OAB$ . Легко доказать, что угол при вершине  $O'$  треугольника  $O'A'B'$  равен  $\alpha$ . Поэтому первое утверждение леммы непосредственно вытекает из условия неналегания кратчайших.

Пусть  $\alpha \neq 0$  или  $\pi$ . В этом случае, очевидно, треугольник  $O'A'B'$  не вырождается в дважды покрытый отрезок.

1) Обозначим  $\Delta$  фигуру на конусе  $K$ , образованную прямолинейными отрезками  $OZ$ , где  $Z \in AB$ . Пусть  $Z'$  — точка на стороне  $A'B'$  треугольника  $O'A'B'$ , соответствующая по изометрии точке  $Z$  кратчайшей  $AB$ . При изменении  $Z$  множество прямолинейных отрезков  $O'Z'$  описывает плоский треугольник  $\Delta'$  с границей  $O'A'B'$ . Поставим в соответствие точке  $X$  фигуры  $\Delta$ , лежащей на отрезке  $OZ$ , точку  $X'$  треугольника  $\Delta'$  на отрезке  $O'Z'$ , делящую этот отрезок в том же отношении, в каком точка  $X$  делит отрезок  $OZ$ . Тем самым между фигурами  $\Delta$  и  $\Delta'$  устанавливается топологическое соответствие  $f$ . Мы убедимся, что это соответствие является изометрией.

2) Покажем, что для любой точки  $Z \in AB$  имеет место равенство  $OZ = O'Z'$  и что углы при вершинах  $A$  и  $B$  треугольника  $OAB$  на конусе равны соответствующим углам треугольника  $O'A'B'$ .

Пусть  $Z \in AB$ ,  $O''Z''A''$  и  $O''Z''B''$  — треугольники, соответствующие треугольникам  $OZA$  и  $OZB$  на конусе, расположенные в плоскости треугольника  $O'A'B'$ . Эти треугольники мы поместим так, чтобы совпадали образы отрезка  $OZ$  и чтобы треугольники разделялись их общей стороной. Обозначим  $\beta$ ,  $\gamma$  углы на конусе  $K$  между отрезками  $OZ$  и  $OA$ ,  $OZ$  и  $OB$ . Так как  $AB$  — кратчайшая на конусе и  $\alpha \neq \pi$ , то угол при вершине  $O''$  четырехугольника  $O''A''Z''B''$ , равный  $\beta + \gamma$ , меньше  $\pi$ . Угол  $\delta$  при вершине  $Z''$  этого же четырехугольника не больше  $\pi$ , что следует из леммы 3 и

теоремы 4. Если допустить, что  $\delta < \pi$ , то при распрямлении четырехугольника  $O''A''Z''B''$  в четырехугольник  $O'A'Z'B'$  этот угол увеличивается. В таком случае  $\beta + \gamma < \alpha$ . Но это противоречит неравенству треугольника для углов между отрезками  $OZ$ ,  $OA$  и  $OB$  на конусе  $K$ , согласно которому  $\beta + \gamma \geq \alpha$ . Следовательно,  $\delta = \pi$  и  $O'Z' = O''Z'' = OZ$ . По теореме 6 отсюда вытекает, что углы при вершинах  $A$  и  $B$  треугольника  $OAB$  на конусе  $K$  равны соответствующим углам треугольника  $O'A'B'$ .

3) Осталось убедиться, что соответствие  $f$  между фигурами  $\Delta$  и  $\Delta'$  изометрическое.

Пусть  $XY$  и  $X'Y'$  — расстояние на конусе  $K$  между точками  $X \in \Delta$ ,  $Y \in \Delta$  и между их образами  $X'$ ,  $Y'$  в треугольнике  $\Delta'$ . Так как  $OX = O'X'$ ,  $OY = O'Y'$ , углы между отрезками  $OX$ ,  $OY$  на конусе и отрезками  $O'X'$ ,  $O'Y'$  в треугольнике  $\Delta'$  равны, то  $XY = X'Y'$ . Отсюда следует, что длины кривых в фигуре  $\Delta$  и образов этих кривых в треугольнике  $\Delta'$  совпадают. Значит  $f$  — изометрическое соответствие. Лемма доказана.

**Теорема 8.** Угол между двумя кратчайшими на выпуклой гиперповерхности, исходящими из одной точки, равен углу между полукасательными к ним, измеренному на конусе, касательном к поверхности в той же точке.

Доказательство этой теоремы для поверхности в трехмерном пространстве, данное А. Д. Александровым, полностью распространяется и на случай гиперповерхности.

Имеет место следующая теорема Либермана.

**Теорема 9.** Пусть выпуклые гиперповерхности  $F_n$  сходятся к выпуклой гиперповерхности  $F$ , точки  $O_n$  на поверхностях  $F_n$  сходятся к точке  $O$  на  $F$  и кратчайшие  $L_n$  на  $F_n$ , исходящие из точек  $O_n$ , сходятся к кратчайшей  $L$  на  $F$ , исходящей из  $O$ . Тогда, если касательные конусы поверхности  $F_n$  в точках  $O_n$  сходятся к касательному конусу поверхности  $F$  в точке  $O$ , то полукасательные к кратчайшим  $L_n$  в точках  $O_n$  сходятся к полукасательной к кратчайшей  $L$  в точке  $O$ .

Из леммы 5 и теорем 8 и 9 вытекает теорема, дополняющая теорему 5.

**Теорема 10.** Если в условиях теоремы 5 касательные конусы поверхности  $F_n$  в точках  $O_n$  сходятся к касательному конусу поверхности  $F$  в точке  $O$ , то существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ .

#### § 4. Непрерывность кривизны треугольника

Кривизной треугольника на выпуклой гиперповерхности будем называть избыток суммы его углов над  $\pi$ .

**Теорема 11.** Пусть  $\Delta$  — треугольник на выпуклой гиперповерхности с одной закрепленной вершиной. Если треугольник  $\Delta$  стягивать в точку, то кривизна этого треугольника будет стремиться к нулю.

Доказательство. Пусть  $O$  — точка на выпуклой гиперповерхности  $F$ ,  $\bar{\Delta}_n = O\bar{X}_n\bar{Y}_n$  — последовательность треугольников на этой поверхности, такая, что точки  $\bar{X}_n$  и  $\bar{Y}_n$  сходятся к точке  $O$ . Для доказательства теоремы достаточно установить, что кривизны  $\delta_n$  треугольников  $\bar{\Delta}_n$  стремятся к нулю. Допустим противное. Тогда можно считать, что последовательность  $\delta_n$  имеет предел, отличный от нуля. Покажем, что такое допущение ведет к противоречию.

Можно принять, что  $O\bar{X}_n > O\bar{Y}_n$ . Пусть  $F_n$  — поверхность, полученная из  $F$  преобразованием подобия с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $(O\bar{X}_n)^{-1}$ . Поверхности  $F_n$  имеют в точке  $O$  общий с  $F$  касательный конус

$K$ , к которому они сходятся. Обозначим  $\Delta_n = OX_n Y_n$  образ треугольника  $\Delta_n$  при преобразовании подобия,  $l_n^1$  и  $l_n^2$  — полукасательные к кратчайшим  $OX_n$  и  $OY_n$  на поверхности  $F_n$  в точке  $O$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  — углы при вершинах  $O$ ,  $X_n$ ,  $Y_n$  треугольника  $\Delta_n$ . Заметим, что длина кратчайшей  $OX_n$  на  $F_n$  равна единице.

Можно считать, что на конусе  $K$  существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n^1 = l^1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n^2 = l^2$ . Можно также считать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$  и что в последовательности треугольников  $\Delta_n$  выполняется одно из метрических соотношений:

1.  $OY_n + Y_n X_n = 1$ ;
2.  $OY_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
3.  $OY_n \rightarrow 1$ ,  $X_n Y_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
4.  $1: OY_n : X_n Y_n \rightarrow 1:p:q$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $pq \neq 0$ .

Из теорем 8 и 10 следует, что угол между образующими  $l^1$  и  $l^2$  на конусе  $K$  равен  $\alpha$ . Из теоремы 9 вытекает существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ ,

где  $X \in l^1$ , а длина отрезка  $OX$  равна единице. Кратчайшие  $OX_n$  на поверхностях  $F_n$  сходятся, очевидно, к отрезку  $OX$ . Можно также считать, что существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$ , где  $Y \in l^2$ , и не исключается совпадение точек  $O$  и  $Y$ . Кратчайшие  $OY_n$  на  $F_n$ , очевидно, сходятся, к отрезку  $OY$ .

Выполнения перечисленных условий можно всегда добиться выбрав надлежащим образом подпоследовательность в исходной последовательности треугольников  $\Delta_n$ .

Докажем, что  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

В последовательности треугольников  $\Delta_n$  выполняется одно из соотношений 1—4. Рассмотрим четыре случая.

1).  $OY_n + Y_n X_n = 1$ .

В этом случае каждая из точек  $X_n$  соединяется с точкой  $O$  двумя кратчайшими на поверхности  $F_n$ :  $L_n^1 = OX_n$  и  $L_n^2 = OY_n + Y_n X_n$ . Очевидно,  $l^1 \equiv l^2$ ,  $\alpha = 0$ .

Пусть  $Z \in l^1$  — точка, отстоящая от точки  $O$  на две единицы,  $Z_n \in F_n$  — последовательность точек, сходящихся к  $Z$ ,  $X_n Z_n$  — последовательность кратчайших на  $F_n$ , сходящихся, очевидно, к отрезку  $XZ$  образующей  $l^1$ . Обозначим  $\mu_n$ ,  $\nu_n$  углы между кратчайшими  $L_n^1$  и  $X_n Z_n$ ,  $L_n^2$  и  $X_n Z_n$  на  $F_n$ . По теореме 5 имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n > \pi$ . Но  $\mu_n < \pi$ , так что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \leq \pi$ .

Значит, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \pi$ . Аналогично  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \pi$ . Учитывая теперь неравенство  $\beta_n + \mu_n + \nu_n \leq 2\pi$ , заключаем, что  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ . Так как  $\gamma_n = \pi - \gamma$ , то  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

2).  $OY_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $Z \in l^2$  — точка, отстоящая от точки  $O$  на единицу,  $Z_n \in F_n$  — последовательность точек, сходящихся к  $Z$ ,  $Y_n Z_n$  и  $OZ_n$  — кратчайшие на поверхностях  $F_n$ . Эти кратчайшие, очевидно, сходятся к отрезку  $OZ$  образующей  $l^2$ , а кратчайшие  $Y_n X_n$  — к отрезку  $OX$  на  $l^1$ . Обозначим

$\tau_n$ ,  $\mu_n$ ,  $\zeta_n$  углы при вершинах  $O$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  треугольника  $OY_n Z_n$  на  $F_n$ ,  $\xi_n$  — угол между кратчайшими  $X_n Y_n$  и  $Y_n Z_n$  на поверхности  $F_n$ . Легко видеть,

что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ . В силу теоремы 4 находим, что  $\pi - \gamma_n - \xi_n \leq \mu_n \leq \pi$  и, значит, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \pi$ . Из неравенства треугольника для углов между кривыми, леммы 4 и теоремы 4 получаем  $\mu_n \leq \gamma_n + \xi_n \leq 2\pi - \mu_n \leq \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \pi - \mu_n$ . Отсюда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n + \xi_n) = \pi$  и существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \alpha$ . По теореме 5 имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \geq \alpha$ . Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \alpha$  и  $\alpha + \beta + \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n + \gamma_n) = \pi$ .

3).  $OY_n \rightarrow 1$ ,  $X_n Y_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

В этом случае  $l^1 \equiv l^2$ ,  $Y \equiv X$ ,  $\alpha = 0$ .

Пусть  $Z \in l^1$  — точка, отстоящая от точки  $O$  на две единицы,  $Z_n \in F_n$  — последовательность точек, сходящихся к  $Z$ ,  $X_n Z_n$  и  $Y_n Z_n$  — кратчайшие на  $F_n$ . Эти кратчайшие, очевидно, сходятся к отрезку  $XZ$  образующей  $l^1$ . Обозначим  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  углы при вершинах  $Z_n$ ,  $X_n$ ,  $Y_n$  треугольника  $X_n Y_n Z_n$  на поверхности  $F_n$ ,  $\mu_n$ ,  $\nu_n$  — углы между кратчайшими  $OX_n$  и  $X_n Z_n$ ,  $OY_n$  и  $Y_n Z_n$  на этой поверхности. Легко видеть, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n + \tilde{\beta}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n + \tilde{\gamma}_n) = \pi$ . Из леммы 4 и теоремы 4 следует  $\beta_n + \tilde{\beta}_n \leq 2\pi - \mu_n \leq \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \pi - \mu_n$ . Значит,  $\tilde{\beta}_n \leq \gamma_n + \varepsilon_n$ , где  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ . Аналогично, рассматривая углы между кратчайшими на поверхности  $F_n$  в точке  $Y_n$ , получим  $\gamma_n \leq \tilde{\gamma}_n + \varepsilon'_n$ , где  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n = 0$ . Следовательно, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$ . Учитывая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n + \tilde{\beta}_n) = \pi$ , заключаем, что  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

4).  $1 : OY_n : X_n Y_n \rightarrow 1 : p : q$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $pq \neq 0$ .

В этом случае  $X$ ,  $Y \neq O$  и можно считать, что  $\alpha \neq 0, \pi$ . Можно так же принять, что кратчайшие  $X_n Y_n$  на  $F_n$  сходятся к кратчайшей  $XY$  на конусе  $K$ . Пусть  $Z \in l^1$  — точка, отстоящая от точки  $O$  на две единицы,  $Z_n \in F_n$  — последовательность точек, сходящихся к  $Z$ ,  $X_n Z_n$  — последовательность кратчайших на  $F_n$ , сходящихся, очевидно, к отрезку  $XZ$  образующей  $l^1$ . Обозначим  $\beta$ ,  $\tilde{\beta}$  углы между кратчайшими  $OX$  и  $XY$ ,  $XY$  и  $XZ$  на конусе  $K$ ,  $\tilde{\beta}_n$  — угол между кратчайшими  $X_n Y_n$  и  $X_n Z_n$  на  $F_n$ . Легко видеть, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n + \tilde{\beta}_n) = \pi$  и, значит, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_n = \xi$ . По лемме 3 имеем  $\beta + \tilde{\beta} = \pi$ . Таким образом,  $\beta - \tilde{\beta} + \xi - \tilde{\beta} = 0$ . По теореме 5 имеем  $\beta - \tilde{\beta} \geq 0$ ,  $\xi - \tilde{\beta} \geq 0$ . Следовательно,  $\beta = \tilde{\beta}$ . Аналогично можно показать, что угол при вершине  $Y$  треугольника  $OXY$  на конусе  $K$  равен  $\gamma$ . Учитывая лемму 5, заключаем, что  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

Итак, мы показали, что кривизны треугольников  $\Delta_n$  на поверхностях  $F_n$  стремятся к нулю. Но углы в этих треугольниках равны соответствующим углам треугольников  $\bar{\Delta}_n$  на  $F$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ , что противоречит нашему предположению  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n > 0$ . Значит, наше предположение неверно.

Теорема доказана.

### § 5. Направление кривой

Говорят, что кривая  $L$  в метрическом пространстве, исходящая из точки  $O$ , имеет в этой точке *определенное направление*, если она сама, с собой образует в точке  $O$  определенный угол. Этот угол, конечно, должен быть равен нулю.

**Теорема 12.** Пусть  $L$  и  $M$  — две кривые на выпуклой гиперповерхности исходящие из точки  $O$ . Для того, чтобы они образовывали в точке  $O$  определенный угол, равный  $\alpha$ , необходимо и достаточно, чтобы при  $X \in L$  и  $Y \in M$ , сходящихся к  $O$ , угол между кратчайшими  $OX$  и  $OY$  на поверхности стремился к  $\alpha$ .

**Теорема 13.** Для того, чтобы две кривые на выпуклой гиперповерхности, исходящие из точки  $O$ , образовывали друг с другом определенный угол, достаточно, чтобы каждая из них имела в точке  $O$  определенное направление.

Теоремы 12 и 13 доказываются так же, как и в случае трехмерного пространства [1]. При этом существенную роль играет теорема 11.

Из теорем 11, 12 и 13 вытекает следующая теорема, обобщающая теорему 6.

**Теорема 14.** Пусть  $L$  и  $M$  — две кривые на выпуклой гиперповерхности  $F$ , исходящие из точки  $O$ , причем  $M$  — кратчайшая на  $F$ , а кривая  $L$  имеет в точке  $O$  определенное направление и образует с  $M$  угол  $\alpha$ . Выберем точки  $X \in L$ ,  $Y \in M$ , отличные от  $O$ , проведем кратчайшие  $OX$  и  $XY$  на поверхности и построим плоский треугольник  $O'X'Y'$ , соответствующий треугольнику  $OXY$  на  $F$ . Пусть  $\alpha'$  — угол при вершине  $O'$  треугольника  $O'X'Y'$ . Тогда угол  $\alpha'$  стремится к  $\alpha$ , если точка  $X$  стремится к точке  $O$ , а кратчайшая  $XY$  сходится к некоторому отрезку кратчайшей  $M$ , который может вырождаться в точку.

Как известно, в случае двумерной поверхности условие теоремы 13 является и необходимым. Для гиперповерхности это, вообще говоря, не так. Но если угол между двумя кривыми, исходящими из одной точки, равен нулю, то, как легко доказать, каждая из кривых имеет в этой точке определенное направление.

Направлением в точке  $O$  называют класс кривых, исходящих из этой точки, обладающих следующим свойством: каждая пара кривых из этого класса образует в точке  $O$  угол, равный нулю. Таким образом, между кривыми, исходящими из точки  $O$  в определенных направлениях устанавливается отношение эквивалентности. Легко показать, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Говорят, что кривые из одного класса эквивалентности имеют в точке  $O$  одно и то же направление. Можно говорить об угле между двумя направлениями в точке  $O$ : это угол между двумя кривыми из соответствующих классов эквивалентности.

Внешне-геометрический смысл понятия направления в точке выпуклой гиперповерхности выясняет следующая теорема.

**Теорема 15.** Для того, чтобы кривая на выпуклой гиперповерхности, исходящая из точки  $O$ , имела в этой точке определенное направление, необходимо и достаточно, чтобы в точке  $O$  она имела полукасательную. Угол между двумя кривыми, исходящими из точки  $O$  в определенных направлениях, равен углу между полукасательными к ним, измеренному на касательном конусе поверхности в точке  $O$ .

Существенную роль в доказательстве теоремы 15 играет следующая лемма.

**Лемма 6.** Пусть  $O$  — точка на выпуклой гиперповерхности  $F$ ,  $X \neq O$  — точка на  $F$ , близкая к  $O$ ,  $\tau(X)$  — полукасательная в точке  $O$  к кратчайшей  $OX$  на поверхности,  $g(X)$  — полупрямая, проходящая из точки  $O$  в  $X$ . Тогда угол между  $\tau(X)$  и  $g(X)$  стремится к нулю, если точка  $X$  стремится к  $O$ .

Доказательства леммы 6 и теоремы 15, ввиду их простоты, мы приводить не будем.

Теорему 15 можно сформулировать также следующим образом.

**Теорема 15'.** Между образующими касательного конуса в точке выпуклой гиперповерхности и направлениями из этой точки на поверхности имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее углы. Все кривые данного направления имеют соответствующую образующую в качестве полукасательной.

Множество направлений в точке выпуклой гиперповерхности образует в этой точке касательный конус поверхности во внутреннем смысле. Из теоремы 15' и леммы 1' вытекает следующее утверждение.

Если метрика выпуклой гиперповерхности такова, что в каждой точке поверхности касательный конус во внутреннем смысле изометричен гиперплоскости, то каждая точка поверхности либо гладкая, либо ребристая.

Приведенное условие на метрику гиперповерхности выполняется, например, если эта метрика представима линейным элементом с непрерывными коэффициентами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гос. техиздат, М. Л., 1948, гл. III, IV и IX, § 1.
2. В. А. Топоногов. Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. УМН, 14, 1 (1959), 87—130.
3. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Изд-во АН УССР, К., 1952, гл. III, § 1.

Поступила в редакцию 8 октября 1965 г.

---

## ОБ ЭКВИЦЕНТРОАФИННЫХ ИНВАРИАНТАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

*А. П. Мокляк* (Симферополь)

Вопросами центроаффинной геометрии занимались многие авторы. Подробно изучены вопросы эквицентроаффинной теории плоских кривых, поверхностей и отчасти конгруэнций. В работе исследуются неплоские кривые в трехмерном эквицентроаффинном пространстве при произвольном выборе параметра с помощью систематического применения векторно-дублетного алгоритма [1, 2] и одномерного тензорного исчисления [3, 4].

Центрояффинные преобразования, как известно, образуют подгруппу проективной группы преобразований пространства, оставляющих неподвижными некоторую «фиксированную» плоскость  $\omega$  и неинцидентную с ней «фиксированную» точку  $O$ .

Для точечных эквицентроаффинных преобразований имеют место [5] формулы

$$\overset{*}{x} = A_s^i x^s, \quad |A_y^i| = 1. \quad (1)$$

Точки, прямые и плоскости, инцидентные фиксированным элементам, будем считать несобственными.

В центроаффинном пространстве сохраняется проективное свойство полной двойственности предложений относительно «точек» и «плоскостей». Двойственным аналогом вектора как упорядоченной пары обыкновенных точек будет дублет — упорядоченная пара обыкновенных плоскостей [1]. Дублеты мы будем обозначать символами типа  $\bar{a}$ .

Алгебраические операции над дублетами определяются аналогично соответствующим операциям над векторами по принципу двойственности (речь идет только об операциях, имеющих смысл в центроаффинной геометрии). Определяются также эквицентроаффинные операции скалярного умножения вектора на дублет, векторное умножение двух дублетов, дублетное умножение двух векторов [1, 5].

Мы будем пользоваться только такими векторами, начало которых находится в центре пространства  $O$ , а конец не лежит в плоскости  $\omega$ , и только такими дублетами, начальная плоскость которых есть  $\omega$ , а конечная не проходит через точку  $O$ .

В центроаффинном пространстве всякая кривая может быть задана двойственным образом: с помощью векторной функции  $r = r(t)$  и дублетной функции  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ . В первом случае кривая рассматривается как геометрическое место точек. Во втором случае функция  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  определяет однопараметрическое семейство плоскостей, а кривая представляет собой ребро возврата огибающей этого семейства.

Функции  $r = r(t)$  и  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  определяют одну и ту же кривую при условии, что все плоскости  $\bar{r}(t)$  являются соприкасающимися плоскостями кривой  $r = r(t)$ . Параметр введем таким образом, чтобы одному и тому же его значению всегда соответствовали точка  $r(t)$  и соприкасающаяся плоскость  $\bar{r}(t)$  именно в этой точке. Тогда функции  $r(t)$  и  $\bar{r}(t)$  будут подчиняться тождеству

$$r\bar{r} \equiv 1, \quad (2)$$

В дальнейшем рассматриваются исключительно кривые, для которых функции  $r(t)$  и  $\bar{r}(t)$  достаточное число раз дифференцируемы и удовлетворяют равенству (2).

В силу приведенных выше определений для каждой точки кривой векторы

$$r_1 = \frac{dr}{dt} \text{ и } r_{11} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

параллельны дублету  $\bar{r}$  (случай  $r_1 = \lambda r$  не рассматривается). Двойственным образом дублеты

$$\bar{r}_1 = \frac{d\bar{r}}{dt} \text{ и } \bar{r}_{11} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

параллельны вектору  $r$ . Следовательно, с каждой точкой пространственной кривой ассоциируются две пары взаимных реперов:

1-ая пара	векторный репер взаимный ему дублетный	$(r, r_1, r_{11}),$ $(\bar{r}, \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(2)}).$
2-ая пара	дублетный репер взаимный ему векторный	$(\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_{11}),$ $(r, r^{(1)}, r^{(2)}).$

Для первой и второй пары взаимных реперов будут иметь место соотношения

$$\begin{aligned} r\bar{r} &= 1, & r\bar{r}^{(1)} &= 0, & r\bar{r}^{(2)} &= 0, \\ r_1\bar{r} &= 0, & r_1\bar{r}^{(1)} &= 1, & r_1\bar{r}^{(2)} &= 0, \\ r_{11}\bar{r} &= 0, & r_{11}\bar{r}^{(1)} &= 0, & r_{11}\bar{r}^{(2)} &= 1; \\ \bar{r}r &= 1, & \bar{r}r^{(1)} &= 0, & \bar{r}r^{(2)} &= 0, \\ \bar{r}_1r &= 0, & \bar{r}_1r^{(1)} &= 1, & \bar{r}_1r^{(2)} &= 0, \\ \bar{r}_{11}r &= 0, & \bar{r}_{11}r^{(1)} &= 0, & \bar{r}_{11}r^{(2)} &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференцируя четвертое равенство и учитывая седьмое из (4) (или дифференцируя 4<sub>13</sub> и учитывая 4<sub>16</sub>), получим:

$$r_1\bar{r}_1 = 0. \quad (5)$$

Следовательно, векторы  $r_1$   $r^{(2)}$  (дублеты  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}^{(2)}$ ) всегда коллинеарны:

$$\begin{aligned} r^{(2)} &= \alpha r_1, \\ \bar{r}^{(2)} &= \beta \bar{r}_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$\alpha$  и  $\beta$  — вещественные не равные нулю числа.

Из (6), учитывая (4), получим

$$\begin{aligned} \bar{r}^{(1)}r^{(2)} &= \alpha, & \bar{r}_{11}r_1 &= \frac{1}{\alpha}, \\ r^{(1)}\bar{r}^{(2)} &= \beta, & r_{11}\bar{r}_1 &= \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (8)$$

При переходе к новому произвольному параметру  $\tilde{t}$  косое произведение [1] трех векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_{11}$ , являющееся инвариантом группы (1), ведет себя как одномерный скалярный тензор (обозначим символом  $\overset{*}{g}$ ) третьей валентности:

$$\overset{*}{g} = \overset{*}{g} \left( \frac{dt}{\tilde{t}} \right)^3. \quad (9)$$

Используем его для нахождения основных эквицентроаффинных инвариантов кривой (8). Во-первых, найдем параметр  $\tilde{t} = \overset{*}{s}$  такой, чтобы

$$\overset{*}{g} = \pm 1. \quad (10)$$

Равенство (9) для такого параметра примет вид

$$\overset{*}{g} \left( \frac{ds}{\tilde{s}} \right)^3 = \pm 1.$$

Отсюда

$$ds = |\overset{*}{g}|^{\frac{1}{3}} dt, \quad (11)$$

$$\tilde{s} = \int_{t_0}^t |\overset{*}{g}|^{\frac{1}{3}} dt. \quad (12)$$

Тензор (12) валентности  $n = 0$  эквицентроаффинно связан с кривой. Этот инвариант целесообразно назвать эквицентроаффинной длиной дуги первого рода или натуральным параметром первого рода.

Выясним его геометрический смысл. В эквицентроаффинном пространстве три точки, не лежащие на одной прямой, образуют с центром пространства тетраэдр, объем которого — эквицентроаффинный инвариант.

Возьмем на кривой (8) три точки:

$$\mathbf{r}_{(1)} = \mathbf{r}(t),$$

$$\mathbf{r}_{(2)} = \mathbf{r}(t + 2\Delta t) = \mathbf{r}(t) + 2\Delta t \mathbf{r}_1(t) + 2\Delta t^2 \mathbf{r}_{11}(t) + \dots,$$

$$\mathbf{r}_{(3)} = \mathbf{r}(t + \sqrt{6} \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \sqrt{6} \Delta t \mathbf{r}_1(t) + 3\Delta t^2 \mathbf{r}_{11}(t) + \dots;$$

вычислим объем  $\Delta V$  тетраэдра, образованного этими точками и центром пространства  $O$ ; получим

$$\Delta V = \frac{1}{6} |(\mathbf{r}_{(1)} \mathbf{r}_{(2)} \mathbf{r}_{(3)})| = |(\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11})| \Delta t^3 + \dots.$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  последнее выражение примет вид

$$dV = |(\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11})| dt^3 = |\overset{*}{g}| dt^3. \quad (13)$$

Сравнение с формулой (11) дает

$$dV = (ds)^3. \quad (14)$$

Образуем теперь из тензора  $\overset{*}{g}$  христофелев объект первого рода:

$$\Gamma = \frac{1}{n} \frac{d}{di} (\ln \overset{*}{g}) = \frac{1}{3} \frac{(\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11})}{(\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11})}. \quad (15)$$

Возьмем ковариантную производную по  $t$  от тензора  $g$ :

$$\nabla_1 g = \frac{d(g)}{dt} - n \Gamma g = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11}) + (\mathbf{r} \mathbf{r}_{11} \mathbf{r}_{11}) + (\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{111}) - (\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{111}) = 0.$$

Таким образом, ковариантная производная тензора  $g$  равна нулю:

$$\nabla_1 g = 0. \quad (16)$$

Найдем первую и вторую ковариантную производную тензора нулевой валентности  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned}\nabla_1 \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1, \\ \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{11} - \Gamma_1 \mathbf{r}_1.\end{aligned}$$

Составим косое произведение векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\nabla_1 \mathbf{r}$ ,  $\nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r}$ , получим

$$(\mathbf{r} \nabla_1 \mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r}) = g. \quad (17)$$

Ковариантно продифференцировав правую и левую часть (17) и учитя (16), будем иметь

$$(\mathbf{r} \nabla_1 \mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r}) = 0.$$

Следовательно, тензоры  $\mathbf{r}$ ,  $\nabla_1 \mathbf{r}$ ,  $\nabla_1 \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r}$  лежат в одной плоскости и между ними существует линейная зависимость вида

$$\nabla_1 \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r} + \alpha \nabla_1 \mathbf{r} + \beta \mathbf{r} = 0. \quad (18)$$

Умножив (18) скалярно на дублеты  $[\mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r}]$ ,  $[\nabla_1 \mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r}]$ , находим

$$\alpha = \frac{(\mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r})}{(\mathbf{r} \nabla_1 \mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r})}, \quad (19)$$

$$\beta = \frac{(\nabla_1 \mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r})}{(\mathbf{r} \nabla_1 \mathbf{r} \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{r})}. \quad (20)$$

Величины  $\alpha$  и  $\beta$  — скалярные тензоры соответственно второй и третьей валентности. Из них и тензора  $g$  образуем тензоры нулевой валентности:

$$\underset{1}{k} = \frac{\alpha}{\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

$$\underset{1}{\kappa} = \frac{\beta}{\frac{g}{3}}. \quad (22)$$

Инварианты  $k$  и  $\kappa$  будем называть эквицентроаффинной кривизной первого рода и эквицентроаффинным кручением первого рода кривой.

При переходе к натуральному параметру  $s$  ковариантные производные совпадут с обычными, величины  $\alpha$  и  $\beta$  будут равны соответственно эквицентроаффинной кривизне и кручению первого рода.  $k$  и  $\kappa$ , заданные как произвольные дифференцируемые функции параметра  $s$ , определяют кривую с точностью до эквицентроаффинного преобразования (1) ([6]).

Двойственным образом получим инварианты второго рода, связанные с кривой:

1) эквицентроаффинная длина дуги второго рода

$$\frac{s}{2} = \int_{t_0}^t |g|^{\frac{1}{3}} dt; \quad (23)$$

2) эквицентроаффинная кривизна второго рода

$$\frac{k}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{g}{2}^{\frac{3}{2}}}; \quad (24)$$

3) эквицентроаффинное кручение второго рода

$$\frac{x}{2} = \frac{\frac{\beta}{2}}{\frac{g}{2}}, \quad (25)$$

где

$$\frac{g}{2} = (\bar{r}_1 \bar{r}'_1 \bar{r}_{11}).$$

Теперь первую пару реперов (4), отнесенную к натуральному параметру  $s$ , будем принимать за основной сопровождающий базис кривой (8).

При этом будем всегда предполагать, что

$$\frac{g}{1} (s) = +1. \quad (26)$$

Введем следующие термины и обозначения:  
вектор касательной, нормированный эквицентроаффинно-

инвариантным способом —

$$t = r' = \frac{dr}{ds},$$

вектор эквицентроаффинной главной нормали —  
вектор эквицентроаффинной бинормали —

$$n = r'',$$

$$b = r;$$

(27)

дублет эквицентроаффинной касательной —

$$\bar{t} = \bar{r}^{(1)},$$

дублет эквицентроаффинной главной нормали —

$$\bar{n} = \bar{r}^{(2)},$$

дублет эквицентроаффинной бинормали —

$$\bar{b} = \bar{r}.$$

Так как при отнесении кривой (8) к параметру (12) основное ее уравнение (18) примет вид

$$r''' + kr' + \lambda r = 0, \quad (28)$$

то из (27<sub>1</sub>), (28) и (27<sub>3</sub>) получим

$$t' = n,$$

$$n' = -\frac{kt}{1} - \lambda \frac{b}{1},$$

$$b' = t.$$

В силу (26) и взаимности реперов ( $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ ) и ( $\bar{r}$ ,  $\bar{r}^{(1)}$ ,  $\bar{r}^{(2)}$ ) имеют место соотношения

$$\bar{r} = [r' r''], \quad \bar{r}^{(1)} = [r'' r], \quad \bar{r}^{(2)} = [rr']. \quad (30)$$

Отсюда, учитывая (27), (29), получим

$$\begin{aligned}\bar{t}' &= k\bar{n} - \bar{b}, \\ \bar{\kappa}' &= -\bar{t}, \\ \bar{b}' &= \alpha \bar{n},\end{aligned}\tag{31}$$

Формулы (29), (31) представляют собой формулы типа Френе. При отнесении кривой (8) к параметру  $s$  параллелепипед, построенный на векторах  $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''$  первой пары реперов, имеет в силу (26) «единичный объем». Объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{r}, \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}$  второй пары реперов, равен в этом случае  $\alpha^{-2}$ . В самом деле, в силу взаимности реперов  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)})$  и  $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', \bar{\mathbf{r}}'')$  и соотношений (6), (30)

$$\bar{\mathbf{r}}' = \frac{[\mathbf{r}^{(2)} \mathbf{r}]}{(\mathbf{r} \mathbf{r}^{(1)} \mathbf{r}^{(2)})} = \frac{[\mathbf{r}' \mathbf{r}]}{(\mathbf{r} \mathbf{r}^{(1)} \mathbf{r}')} = \frac{1}{(\mathbf{r} \mathbf{r}' \mathbf{r}^{(1)})} \bar{\mathbf{r}}^{(2)},$$

сравнивая с формулами (31), получаем

$$(\mathbf{r} \mathbf{r}' \mathbf{r}^{(1)}) = \frac{1}{\alpha} = \beta(s).$$

Далее, согласно (7), (5), (4), (30)

$$\frac{1}{\alpha(s)} = \bar{\mathbf{r}}'' \mathbf{r}' = -\mathbf{r}'' \bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{r}} \mathbf{r}''' = (\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') = -\frac{1}{\alpha}.$$

Теперь легко находим

$$(\mathbf{r} \mathbf{r}^{(1)} \mathbf{r}^{(2)}) = \alpha(s) (\mathbf{r} \mathbf{r}^{(1)} \mathbf{r}') = \alpha^{-2}.\tag{32}$$

Найдем связь между дифференциалами ( $ds_{\text{д}}$  и  $ds_s$ ) натуральных параметров кривых вида (8) экицентроаффинного и экиаффинного пространства, присоединяя ко всем экицентроаффинным преобразованиям в пространстве векторные трансляции

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \text{const}.\tag{33}$$

В результате действия преобразования (33) на тензор  $\tilde{g}$  получим

$$\tilde{g} = (\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11}) = (\mathbf{r} + \mathbf{c}) [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11}] = (\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11}) + \mathbf{c} [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11}] = (\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11}) (1 + c\bar{r}) = g (1 + c\bar{r}).\tag{34}$$

Следовательно (см. (11), (34)),

$$d\tilde{s} = ds (1 + c\bar{r})^{\frac{1}{3}}.\tag{35}$$

Далее находим

$$\frac{d\tilde{r}}{d\tilde{s}} = \frac{d\tilde{r}}{ds} \frac{1}{\alpha} = (\mathbf{r} + \mathbf{c})' \frac{ds}{ds (1 + c\bar{r})^{\frac{1}{3}}} = \mathbf{r}' (1 + c\bar{r})^{-\frac{1}{3}},\tag{36}$$

$$\frac{d^2\tilde{r}}{d\tilde{s}^2} = \left( \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{s}} \right)' \frac{ds}{ds} = \frac{1}{(1 + c\bar{r})^{\frac{2}{3}}} \mathbf{r}'' - \frac{1}{3} \frac{c\bar{r}'}{(1 + c\bar{r})^{\frac{5}{3}}} \mathbf{r}',\tag{37}$$

$$\frac{d^3\tilde{r}}{d\tilde{s}^3} = \frac{1}{1 + c\bar{r}} \mathbf{r}''' - \frac{c\bar{r}'}{(1 + c\bar{r})^2} \mathbf{r}'' - \frac{(c\bar{r}'') (1 + c\bar{r}) - \frac{5}{3} (c\bar{r}')^2}{3 (1 + c\bar{r})^3} \mathbf{r}'.\tag{38}$$

В силу (36) — (38)

$$\left( \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{ds} \frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}}{ds^2} \frac{d^3\tilde{\mathbf{r}}}{ds^3} \right) = \frac{[\mathbf{r}'\mathbf{r}'']}{1 + c\bar{r}} \frac{d^3\tilde{\mathbf{r}}}{ds^3} = \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')}{(1 + c\bar{r})^2},$$

т. е.

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} (1 + c\bar{r})^{-2}. \quad (39)$$

Из (35) и (39) получаем тензор нулевой валентности

$$|\mathbf{z}|^{\frac{1}{6}} ds, \quad (40)$$

связанный с кривой уже эквияффинно-инвариантно. Он принимается за дифференциал эквияффинной длины дуги. Действительно,

$$|\mathbf{z}|^{\frac{1}{6}} ds = \left| \frac{(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11} \mathbf{r}_{111})}{(\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11})^2} \right|^{\frac{1}{6}} |(\mathbf{r} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11})|^{\frac{1}{3}} dt = |(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{11} \mathbf{r}_{111})|^{\frac{1}{6}} dt.$$

Отсюда видно, что инвариант (40) совпадает с дифференциалом эквияффинного натурального параметра пространственной кривой, рассмотренного Бляшке [7].

Таким образом,

$$ds_3 = |\mathbf{z}_{\text{эк}}|^{\frac{1}{6}} ds_{\text{эк}}. \quad (41)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Дубнов. Основы векторного исчисления, т. 2, Приложение, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. Я. С. Дубнов и В. Н. Скрыдлов. Центроаффинная теория поверхностей. Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. 8, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
3. В. В. Вагнер. Классификация линейных связностей... Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. 7, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
4. Я. С. Дубнов. Центроаффинная геометрия кривых на плоскости. Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. 8, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. П. А. Широков и А. П. Широков. Аффинная дифференциальная геометрия. Физматгиз, М., 1959.
6. E. Salkowski. Affine Differentialgeometrie, Berlin und Leipzig (1934).
7. W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Bd. 2 (1923).

Поступила в редакцию 21 июня 1965 г.

---

## ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕНОСА

Л. Т. Моторный (Харьков)

Н. Г. Чеботареву [1] принадлежит следующее обобщение поверхностей переноса. Даны группы преобразований  $G$ . Рассматриваются поверхности, допускающие системы импримитивности относительно  $G$ , т. е. несущие семейства кривых, переходящих друг в друга при преобразованиях  $G$ .

Обобщая теорему С. Ли о поверхностях двойного образования, Н. Г. Чеботарев доказал, что обобщенная поверхность переноса может иметь либо континuum систем импримитивности, либо не более четырех.

В работах [2], [3] построены примеры обобщенных в смысле Н. Г. Чеботарева поверхностей переноса, несущих две или большее число систем импримитивности. В качестве группы  $G$  была взята некоммутативная группа клиффордовых переносов эллиптического и квазиэллиптического пространства.

Цель настоящей статьи — перенести результаты работ [2, 3] на квазигиперболическое пространство и пространство с кольцевым абсолютом.

### I. КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

#### § 1. Некоторые вопросы теории поверхностей

1°. Абсолют квазигиперболического пространства состоит из пары действительных плоскостей  $\alpha_1(x_0 = x_1)$ ,  $\alpha_2(x_0 = -x_1)$  и пары действительных точек на линии их пересечения

$$S_1(0, 0, 1, 1), S_2(0, 0, 1, -1).$$

Прямые назовем право- (лево-) параллельными, если они пересекают одну и ту же пару прямых, из которых одна лежит в  $\alpha_1(\alpha_2)$  и проходит через  $S_1$ , а вторая — в  $\alpha_2(\alpha_1)$ , и проходит через  $S_2$ .

Если  $G_{ik}$  — плюккеровые координаты прямой, а  $G'_{ik}$  — правопараллельной ей, то между ними существует следующая связь (если нормировка выбрана так, что  $G_{01} = G'_{01} = 1$ ):

$$G_{02} + G_{31} = G'_{02} + G'_{31}, \quad G_{03} - G_{12} = G'_{03} - G'_{12},$$

а для левого параллелизма

$$G_{02} - G_{31} = G'_{02} - G'_{31}, \quad G_{03} + G_{12} = G'_{03} + G'_{12}.$$

Будем рассматривать в качестве однородных координат точки ( $x_i$ ) компоненты кватерниона

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &= x_0 e_0 + x_1 e_1 + \epsilon (x_2 e_2 + x_3 e_3), \\ \epsilon^2 &= 0, \quad e_0^2 = e_1^2 = e_0, \quad e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \quad i = 1, 2, 3; \\ e_1 e_2 &= -e_2 e_1 = e_3, \quad e_1 e_3 = -e_3 e_1 = e_2,\end{aligned}$$

пронормированные так, что

$$x_0^2 - x_1^2 = 1.$$

Этим исключаются точки абсолюта, для которых

$$x_0^2 = x_1^2.$$

Любое движение пространства

$$\mathfrak{X}^* = \mathfrak{M} \mathfrak{X} \mathfrak{N}$$

разлагается на произведение двух квазипереносов: левого  $\mathfrak{X}' = \mathfrak{M} \mathfrak{X}$  и правого  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}' \mathfrak{N}$ .

Соответственно этому поверхность квазипереноса допускает каноническое представление

$$\mathfrak{X}(u, v) = \mathfrak{U}(u) \mathfrak{L}(v). \quad (1)$$

Естественно возникает задача отыскания поверхностей, которые двумя или большим числом способов представимы в виде (1).

2°. Расстояние между точками  $y, z$  по мероопределению Кэли-Клейна

$$\rho(y, z) = -\frac{1}{2} \ln D(y, z, x, x^*),$$

где  $x, x^*$  — точки пересечения прямой  $(yz)$  с плоскостями абсолюта  $x_1, x_2$ . Следовательно,

$$\rho(yz) = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где

$$y_0 = \operatorname{ch} \varphi_1, \quad y_1 = \operatorname{sh} \varphi_1, \quad z_0 = \operatorname{ch} \varphi_2, \quad z_1 = \operatorname{sh} \varphi_2,$$

Линейный элемент пространства

$$ds^2 = d\varphi^2 = dx_0^2 - dx_1^2,$$

Если  $u^1, u^2$  — криволинейные координаты поверхности, то ее первая квадратичная форма

$$ds^2 = g_{ik} du^i du^k,$$

где

$$g_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u^k} = \frac{\partial x_1}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u^k} - \frac{\partial x_0}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial u^k}.$$

Введем понятие квазисопряженности.

Пусть в точке  $O(x_i)$  поверхности  $F$  задано направление касательной  $dx_i$ . Опишем около  $F$  линейчатую  $S$  с образующими право- (лево-) параллельными к  $dx_i$ . Линейчатая  $S$  коснется  $F$  вдоль кривой  $\gamma$ , проходящей через  $O$ . Касательную  $dx_i$  к  $\gamma$  в  $O$  назовем правой (левой) квазисопряженной с  $dx_i$ .

Аналитически это условие имеет вид

$$(b_{ik} \pm \epsilon_{ik}) du^i \delta u^k = 0, \quad (2)$$

где

$$b_{ik} du^i du^k = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k} \cdot \xi du^i du^k$$

— вторая квадратичная форма поверхности,

$$\varepsilon_{ik} = \left( x, \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^k}, X \right); X(0, 0, \xi_2, -\xi_3)$$

— полюс касательной плоскости ( $\xi$ ) относительно абсолюта.

Знак плюс отвечает правой, знак минус — левой квазисопряженности.

**Теорема.** Чтобы сеть кривых

$$\frac{du^2}{du^1} = \varphi(u^1, u^2), \quad \frac{du^2}{dv^1} = \psi(u^1, u^2) \quad (3)$$

была сетью квазипереноса, необходимо и достаточно, чтобы она была квазисопряженной и чебышевской

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^2} = -G_{\alpha\beta}^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1} \cdot \frac{\partial u^\beta}{\partial v^2}, \quad (4)$$

где  $G_{\alpha\beta}^k$  — коэффициенты деривационных формул:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k} = G_{ik}^m \frac{\partial x}{\partial u^m} + g_{ik} x + b_{ik} X;$$

$v^1, v^2$  — параметры чебышевской сети. Условие (4) означает, что кривые  $u^1 = \text{const}$  вдоль кривых  $u^2 = \text{const}$  параллельны в смысле Леви-Чевита относительно связности  $G_{\alpha\beta}^k$ .

## § 2. Поверхности вращения

Если потребовать, чтобы при движении две точки  $M_1(1, 0, 0, 0)$  и  $M_2(0, 1, 0, 0)$  оставались неподвижными, получим группу вращений вокруг  $M_1 M_2$ . При этом кривая, лежащая в плоскости  $x_2 = 0$ , описывает поверхность вращения:

$$x_0 = \operatorname{ch} u, \quad x_1 = \operatorname{sh} u, \quad x_2 = p(u) \operatorname{ch} v, \quad x_3 = p(u) \operatorname{sh} v. \quad (5)$$

Для поверхности вращения (5) уравнения (2), (4) принимают следующий вид:

$$p(\varphi - 1)(\psi + 1) = -p'', \quad (2')$$

$$\varphi_u + \psi \varphi_v = -\frac{p'}{p}(\varphi + \psi), \quad (2'')$$

$$\psi_u + \varphi \psi_v = -\frac{p'}{p}(\varphi + \psi). \quad (4'')$$

Из (2'')  $\psi$  определяется как дробно-линейная функция  $\varphi$  с коэффициентами, зависящими только от  $u$ . После подстановки в (4'') выражения для  $\psi$  получим два уравнения в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией  $\varphi$ . Условие совместности этих уравнений есть полином относительно  $\varphi$  с коэффициентами, зависящими только от  $u$ . Если условие совместности — тождество, то поверхность несет континуум сетей квазипереноса. Эти поверхности мы будем рассматривать отдельно. Следовательно, условие совместности определяет  $\varphi$  как функцию только  $u$ , т. е.

$$\varphi_v = \psi_v = 0.$$

Теперь из (4') следует

$$\varphi = A + \frac{B}{p^2}, \quad \psi = \frac{B}{p^2} - A, \quad (6)$$

где  $A, B$  — произвольные постоянные, а из уравнения (2') при  $A \neq 1$

$$p^2 = h \operatorname{ch} \gamma + g, \quad (7)$$

где

$$h = \sqrt{\frac{C^2}{4(A-1)^4} - \frac{B^2}{(A-A)^2}}, \quad g = \frac{C}{2(A-1)^2}, \quad \gamma = 2\omega |A-1|(u+C'), \quad \omega^2=1.$$

$C, C'$  — постоянные.

Проинтегрировав уравнения (3), (6), найдем формулы перехода от координат  $u, v$  сети, составленной из меридианов и параллелей, к координатам  $\xi, \eta$  сети квазипереноса:

$$v = Au + \frac{i}{2} \arcsin \frac{g \operatorname{ch} \gamma + h}{h \operatorname{ch} \gamma + g} - 2A\eta,$$

$$v = -Au + \frac{i}{2} \arcsin \frac{g \operatorname{ch} \gamma + h}{h \operatorname{ch} \gamma + g} + 2A\xi.$$

Из этих формул следует, что найденные поверхности допускают каноническое представление

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A}(\xi) \mathfrak{L}(\eta),$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\xi) &= e_0 \operatorname{ch} \xi + e_1 \operatorname{sh} \xi + \epsilon a [e_2 \operatorname{sh} k + e_3 \operatorname{ch} k]; \\ \mathfrak{L}(\eta) &= e_0 \operatorname{ch} \eta + e_1 \operatorname{sh} \eta + \epsilon b (e_2 \operatorname{ch} k' + e_3 \operatorname{sh} k'), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$a = \frac{\sqrt{C+2B}}{2|A-1|}, \quad b = \frac{\sqrt{C-2B}}{2|A-1|}, \quad k = (2A-1)(\xi+C'), \quad k' = (2A-1)(\eta+C').$$

Если заменить  $B$  на  $-B$  или  $A-1$  на  $1-A$ , то меридиан поверхности (7) не меняется, в то время как сети квазипереноса (6) существенно изменяются. Следовательно, поверхности (8) несут четыре сети квазипереноса.

Если  $A=1$ , то меридиан поверхности

$$Cp^2 = (Cu + C')^2 - B^2, \quad (9)$$

а формулы перехода к сети квазипереноса  $\xi, \eta$ :

$$v = u + \frac{1}{2} \ln \frac{Cu + C' - B}{Cu + C' + B} - 2\eta,$$

$$v = -u + \frac{1}{2} \ln \frac{Cu + C' - B}{Cu + C' + B} + 2\xi.$$

Каноническое представление полученных поверхностей

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A}(\xi) \mathfrak{L}(\eta),$$

где

$$\mathfrak{A}(\xi) = e_0 \operatorname{ch} \xi + e_1 \operatorname{sh} \xi + \epsilon (-\sqrt{C}\xi \operatorname{sh} \xi e_2 + e_3 \sqrt{C}\xi \operatorname{ch} \xi),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\eta) &= e_0 \operatorname{ch} \eta + e_1 \operatorname{sh} \eta + \epsilon \left[ \left[ \frac{B}{\sqrt{C}} \operatorname{ch} \eta + \left( \sqrt{C}\eta + \frac{C}{\sqrt{C}} \right) \operatorname{sh} \eta \right] e_2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{B}{\sqrt{C}} \operatorname{sh} \eta + \left( \sqrt{C}\eta + \frac{C'}{\sqrt{C}} \right) \operatorname{ch} \eta \right] e_3 \right]. \end{aligned}$$

**Теорема.** Поверхности вращения, являющиеся поверхностями квазипереноса с конечным числом сетей, исчерпываются уравнениями (8), (8'). Они несут четыре сети квазипереноса.

## § 3. Поверхности, несущие континуум сетей квазипереноса.

1°. Из (1) для координат поверхности имеем

$$\begin{aligned}x_0 &= \operatorname{ch}(u+v), \\x_1 &= \operatorname{sh}(u+v), \\x_2 &= A_2(u) \operatorname{ch} v - A_3(u) \operatorname{sh} v + B_2(v) \operatorname{ch} u + B_3(v) \operatorname{sh} u, \\x_3 &= A_3(u) \operatorname{ch} v - A_2(u) \operatorname{sh} v + B_3(v) \operatorname{ch} u + B_2(v) \operatorname{sh} u.\end{aligned}\quad (10)$$

Координатная сеть является сетью квазипереноса. Наша задача — определить функции  $A_2(u)$ ,  $A_3(u)$ ,  $B_2(v)$ ,  $B_3(v)$  так, чтобы поверхность (10) несла континуум сетей квазипереноса.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}A_2 + A'_3 &= U_1 \operatorname{ch} u = U_0 \operatorname{sh} u, \quad A_3 + A'_2 = U_1 \operatorname{sh} u - U_0 \operatorname{ch} u, \\B_2 - B'_3 &= V_1 \operatorname{ch} v + V_0 \operatorname{sh} v, \\B_3 - B'_2 &= V_0 \operatorname{ch} v + V_1 \operatorname{sh} v, \\b &= b_{11} b_{12}, \quad b' = b_{12}^2, \quad b'' = b_{22} b_{12}.\end{aligned}\quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned}b + V_0 U'_1 + V_1 U'_0 + U'_0 U_1 - U_0 U'_1, \\b'' = U_0 V'_1 + U_1 V'_0 + V'_0 V_1 - V_0 V'_1, \\b' = U_0^2 + U_1^2 + V_0^2 - V_1^2 + 2(U_1 V_1 - U_0 V_0).\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнения (2), (4) принимают вид

$$b + 2b'\varphi + b''\varphi\psi = 0, \quad (2'')$$

$$\varphi_u + \psi\varphi_v = (\varphi + 1) \left( \frac{b'_u}{2b'} - \frac{b'_v}{2b} \right) \varphi\psi, \quad (2'')$$

$$\varphi_u + \varphi\psi_v = (\psi + 1) \cdot \left( \frac{b'_u}{2b'} - \frac{b'_v}{2b} \right) \varphi\psi. \quad (4'')$$

Перепишем (2'') так:

$$b''\psi - b' = b' - \frac{b}{\varphi} = \sigma.$$

Определив отсюда  $\varphi$ ,  $\psi$  через  $\sigma$  и подставив в (4''), получим

$$\begin{aligned}(\sigma^2 + bb'' - b'^2)\sigma_u &= a_1\sigma^3 + b_1\sigma^2 + c_1\sigma + d_1, \\(\sigma^2 + bb'' - b'^2)\sigma_v &= a_2\sigma^3 - b_2\sigma^2 + c_2\sigma - d_2,\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{2b}{b''}, \quad b_1 = 3b_v - \frac{bb''}{b''} + \frac{2bb'_v}{b''}, \\c_1 &= 3bb'_v - b''b_u - \frac{2bb'b''_v}{b''} - b'b'_u - bb_v + b''b_u + \frac{bb'b'_v}{b''}, \\d_1 &= \frac{3}{2}bb'b'_v - \frac{b'b''b'_u}{2} - \frac{bb'^2b''_v}{b''} + \frac{3}{2}bb''b'_u - b'b''b'_u - \frac{b^2b'_v}{2}.\end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ,  $d_2$  получаем из  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$ , заменяя  $b$  на  $b''$ , и на  $v$ .

Условие совместности системы (13)

$$A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}A &= a_{1v} - a_{2u}, \quad B = b_{1v} + b_{2u} - a_1 b_2 - a_2 b_1, \\C &= c_{1v} - c_{2u} + 2(a_1 c_2 - a_2 c_1) + a_2 (bb'' - b'^2)_u - a_1 (bb'' - b'^2)_v, \\(bb'' - b'^2)D &= (bb'' - b'^2)(d_{1v} + d_{2u}) - d_1 c_2 - d_2 c_1 - d_1 (bb'' - b'^2)_v - \\&- d_2 (bb'' - b'^2)_u.\end{aligned}$$

Мы ищем поверхности, несущие континуум сетей квазипереноса, этому (14) должно быть тождеством, следовательно,

$$A = B = C = D = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты в (14), мы получим систему функциональных уравнений на функции  $A_2(u)$ ,  $A_3(u)$ ,  $B_2(v)$ ,  $B_3(v)$  и производные. Общее решение этой системы:

$$\begin{aligned} A_2(u) &= \alpha \operatorname{ch}(u + \beta) + \sqrt{\gamma + \delta u} \operatorname{sh}(u + \vartheta), \\ A_3(u) &= \alpha \operatorname{sh}(u + \beta) + \sqrt{\gamma + \delta u} \operatorname{ch}(u + \vartheta), \\ B_2(v) &= \alpha_1 \operatorname{ch}(v + \beta_1) + \sqrt{\gamma_1 + \delta v} \operatorname{ch}(v - \vartheta), \\ B_3(v) &= \alpha_1 \operatorname{sh}(v + \beta_1) + \sqrt{\gamma_1 + \delta v} \operatorname{sh}(v - \vartheta). \end{aligned} \quad (15)$$

2°. Покажем, что найденные поверхности квазипереноса являются поверхностями вращения.

Подвернем поверхности (15) произвольному движению:

$$\mathfrak{X}^1 = \mathfrak{M}\mathfrak{X}\mathfrak{M}.$$

Выбирая постоянные кватернионы  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  соответствующим образом, т. е. задаваясь определенным движением, можно добиться того, что поверхность (13) запишется следующим образом:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A}(u)\mathfrak{L}(v),$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(u) &= e_0 \operatorname{ch} u + e_1 \operatorname{sh} u + \varepsilon \sqrt{\gamma + \delta u} [-e_2 \operatorname{sh}(u + \vartheta) + e_3 \operatorname{ch}(u + \vartheta)], \\ \mathfrak{L}(v) &= e_0 \operatorname{ch} v + e_1 \operatorname{sh} v + \varepsilon \sqrt{\gamma_1 + \delta v} [e_2 \operatorname{ch}(v - \vartheta) + e_3 \operatorname{sh}(v - \vartheta)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Переходя от координат  $u$ ,  $v$  к координатам  $\xi$ ,  $\eta$  по формулам

$$\xi = u + v, \quad \eta = \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{\gamma_1 + \delta v}{\gamma + \delta u}},$$

поверхность (15) можно записать так:

$$\begin{aligned} x_0 &= \operatorname{ch} \xi, \\ x_1 &= \operatorname{sh} \xi, \\ x_2 &= p(\xi) \operatorname{ch} \eta, \\ x_3 &= p(\xi) \operatorname{sh} \eta, \end{aligned}$$

где

$$p(\xi) = \gamma + \gamma_1 + \delta \xi,$$

а это поверхность вращения (5).

**Теорема.** Поверхности квазипереноса, несущие континуум сетей квазипереноса, являются с точностью до движения поверхностями вращения (16).

## II. ПРОСТРАНСТВО С КОЛЬЦЕВЫМ АБСОЛЮТОМ

1°. Абсолют этого пространства можно задать уравнением

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Это кольцевая поверхность, имеющая две серии действительных прямолинейных образующих.

Прямые назовем (право-) лево-параллельными, если они пересекают одну и ту же пару прямолинейных образующих первой (второй) серии.

Если  $G_{ik}$  — плюккеровы координаты прямой, а  $G'_{ik}$  — ей правопараллельной, то

$$G_{01} + G_{23} = G'_{01} + G'_{23}, \quad G_{02} + G_{31} = G'_{02} + G'_{31}, \quad G_{03} - G_{12} = G'_{03} - G'_{12}.$$

Для левого параллелизма

$$G_{01} - G_{23} = G'_{01} - G'_{23}, \quad G_{02} - G_{31} = G'_{02} - G'_{31}, \quad G_{03} + G_{12} = G'_{03} + G'_{12}.$$

Будем рассматривать в качестве однородных координат точки ( $x_i$ ) компоненты кватерниона

$$\mathfrak{X} = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

где

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_0^2 = e_0, \quad e_3^2 = -e_0,$$

$$e_1 e_2 = e_3, \quad e_1 e_3 = e_2, \quad e_2 e_3 = -e_1, \quad e_i e_k = -e_k e_i,$$

нормированные так, что

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Этим исключаются точки абсолюта.

Любое движение пространства

$$\mathfrak{X}^* = \mathfrak{M} \mathfrak{X} \mathfrak{N}$$

разлагается на произведение двух квазипереносов: левого —  $\mathfrak{X}' = \mathfrak{M} \mathfrak{X}$  и правого  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}' \mathfrak{N}$ . Соответственно этому поверхность квазипереноса допускает каноническое представление

$$\mathfrak{X}(u, v) = \mathfrak{M}(u) \mathfrak{N}(v). \quad (1)$$

Линейный элемент пространства

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2.$$

Если  $u^1, u^2$  — криволинейные координаты на поверхности, то ее первый тензор

$$ds^2 = g_{ik} du^i du^k,$$

где

$$g_{ik} = \frac{\partial x_0}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial u^k} - \frac{\partial x_1}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u^k} - \frac{\partial x_2}{\partial u^i} \frac{\partial x_2}{\partial u^k} + \frac{\partial x_3}{\partial u^i} \frac{\partial x_3}{\partial u^k}.$$

Введем понятие квазисопряженности.

Пусть в точке  $O(x_i)$  поверхности  $F$  задано направление касательной  $\delta x_i$ . Опишем около  $F$  линейчатую  $S$  с образующими право-(лево-)параллельными к  $\delta x_i$ . Линейчатая коснется  $F$  вдоль кривой  $\gamma$ , проходящей через  $O$ . Касательную  $dx_i$  к  $\gamma$  в точке  $O$  назовем правой (левой) квазисопряженной с  $\delta x_i$ .

Аналитическое выражение условия квазисопряженности имеет следующий вид:

$$(b_{ik} \pm \varepsilon_{ik}) du^i \delta u^k = 0, \quad (2)$$

где  $b_{ik} = \xi \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k}$  — коэффициенты второго тензора поверхности, тензор  $\varepsilon_{ik} = \left( x, \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^k}, X \right); X(-\xi_0, \xi_1, \xi_2, -\xi_3)$  — полюс касательной плоскости относительно абсолюта. Легко показать, что

$$\varepsilon_{12}^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2.$$

В формуле (2) знак минус для левой, знак плюс для правой квазисопряженности.

Квазисопряженность не инволюционна: если  $t_2$  — правая квазисопряженная с  $t_1$ , то  $t_1$  — левая квазисопряженная с  $t_2$ .

**Теорема.** Чтобы сеть кривых

$$\frac{du^2}{du^1} = \varphi(u^1, u^2), \quad \frac{\partial u^2}{\partial u^1} = \psi(u^1, u^2) \quad (3)$$

была сетью квазипереноса, необходимо и достаточно, чтобы она была квазисопряженной и чебышевской

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^2} + G_{\alpha\beta}^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1} \cdot \frac{\partial u^\beta}{\partial v^2} = 0, \quad (4)$$

где  $v^1, v^2$  — параметры чебышевской сети,

$G_{\alpha\beta}^k$  — коэффициенты деривационных формул:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k} = G_{ik}^m \frac{\partial x}{\partial u^m} + g_{ik} x + b_{ik} X.$$

2°. Если потребовать, чтобы при движении две точки  $M_1(1, 0, 0, 0)$  и  $M_2(0, 1, 0, 0)$  оставались инвариантными, то получим группу вращений вокруг  $M_1 M_2$ . При этом кривая, лежащая в плоскости  $x_2 = 0$ , опишет поверхность вращения:

$$\begin{aligned} x_0 &= p(u) \\ x_1 &= q(u) \\ x_2 &= u \operatorname{ch} v, \\ x_3 &= u \operatorname{sh} v, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$1 - p^2 + q^2 + u^2 = 0. \quad (6)$$

Для поверхности (5) уравнения (2), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} 2uE(\varphi_u + \psi_v) &= u\varphi(E' + 2u\varphi\psi) - 2E(\varphi + \psi), \\ 2uE(\psi_u + \varphi_v) &= u\psi(E' + 2u\varphi\psi) - 2E(\varphi + \psi), \end{aligned} \quad (7)$$

$$E' + 2uE^2 - 2u(E + Eu^2 - 1)\varphi\psi = 2uEV(E + Eu^2 - 1)(\varphi - \psi), \quad (8)$$

где

$$E = 1 - p'^2 + q'^2. \quad (9)$$

Из (8)  $\psi$  определяется как дробно-линейная функция  $\varphi$  с коэффициентами, зависящими только от  $u$ . После подстановки выражения для  $\psi$  в (7) получаем два уравнения в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией  $\varphi$ . Условием совместности этой системы является равенство нулю полинома относительно  $\varphi$  с коэффициентами, зависящими лишь от  $u$ . Если все коэффициенты этого полинома равны нулю, то система вполне интегрируема и сеть зависит от произвольной постоянной. Поверхность несет континuum сетей квазипереноса. Приравнивая коэффициенты в условии совместности нулю, мы получим систему дифференциальных уравнений второго порядка на  $E(u)$ , которая совместна только при  $E = \text{const}$ , т. е. для цилиндров (линейчатые с окружающими право-(лево-) параллельными). Отбросив этот правильный случай, приходим к выводу, что условие совместности определяет  $\varphi$  как функцию одной лишь переменной  $u$ . Следовательно,

$$\varphi_v = \psi_v = 0.$$

Теперь из системы (6) следует

$$\varphi = \frac{a+u^2}{u^2(b+u^2)} \sqrt{E+Eu^2-1}, \quad \psi = \frac{a-u^2}{u^2(b+u^2)} \sqrt{E+Eu^2-1}, \quad (10)$$

где  $a, b$  — произвольные постоянные, а из уравнения (8)

$$E(u) = \frac{u^4+cu+a^2}{a_1u^4+b_1u^2+a^2}, \quad (11)$$

где

$$a_1 = 1 + c - 2b, \quad b_1 = a^2 + c - b^2,$$

$c$  — произвольная постоянная. Уравнения (6), (9), (11) определяют функции  $p(u)$ ,  $q(u)$ :

$$p(u) = \sqrt{1+u^2} \operatorname{ch} \omega(u), \quad q(u) = \sqrt{1+u^2} \operatorname{sh} \omega(u),$$

$$\omega(u) = \frac{i}{2} \arcsin \frac{(b_1-2a_1)(1+u^2)+2(1+b)^2}{(1+u^2)\sqrt{b_1^2-4a^2a_1}} - \frac{i}{2\sqrt{a_1}} \arcsin \frac{2a_1u^2+b_1}{\sqrt{b_1^2-4a^2a_1}}.$$

Если заменить  $a$  на  $-a$ , то меридиан поверхности не изменяется, в то время как сети квазипереноса (10) существенно изменяются, следовательно, при  $a \neq 0$  найденные поверхности вращения несут две сети квазипереноса.

Проинтегрировав уравнения (3), (10) находим формулы перехода от координат  $u, v$  сети, составленной из меридианов и параллелей, к координатам  $\xi, \eta$  сети квазипереноса. Переходя к сети квазипереноса получим каноническое представление полученных поверхностей квазипереноса:

$$\mathfrak{X}(\xi, \eta) = \mathfrak{A}(\xi) \mathfrak{L}(\eta), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\xi) &= \operatorname{ch} \xi \cdot \frac{1-\sqrt{a_1}}{2} \operatorname{ch} \alpha \cdot e_0 + e_1 \operatorname{sh} \frac{1+\sqrt{a_1}}{2} \xi \cdot \operatorname{sh} \alpha + \\ &\quad + e_2 \operatorname{sh} \frac{1-\sqrt{a_1}}{2} \xi \operatorname{ch} \alpha + e_3 \operatorname{ch} \frac{1+\sqrt{a_1}}{2} \xi \operatorname{sh} \alpha, \\ \mathfrak{L}(\eta) &= -e_0 \operatorname{ch} \frac{1-\sqrt{a_1}}{2} \eta \operatorname{sh} \beta + e_1 \operatorname{sh} \frac{1+\sqrt{a_1}}{2} \eta \operatorname{ch} \beta - \\ &\quad - e_2 \operatorname{sh} \frac{1-\sqrt{a_1}}{2} \eta \operatorname{sh} \beta + e_3 \operatorname{ch} \frac{1+\sqrt{a_1}}{2} \eta \operatorname{ch} \beta, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta$  — постоянные, выражющиеся через  $a, b, c$ .

**Теорема.** Единственными поверхностями вращения, являющимися поверхностями квазипереноса, служат поверхности (12). Они несут две сети квазипереноса.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю проф. Я. П. Бланку за полезные советы и замечания, высказанные при обсуждении статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Чеботарев. Математическая автобиография. Собр. соч., т. II, 1949.
2. Я. П. Бланк и Л. Т. Моторный. О поверхностях сдвига эллиптического пространства, несущих две сети. УМН, т. LIX, вып. 1, 1964, 115.
3. Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный. К проблеме В. Бляшке о поверхностях квазипереноса. ДАН СССР, т. 160, № 6, 1965.

Поступила в редакцию 7 июля 1964 г.

---

## О СВОЙСТВЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ИЗГИБАНИЯ ОБЩЕЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ГРАНИЦЕЙ

Е. П. Сенькин (Харьков)

**Теорема 1.** Пусть  $F$  — общая строго выпуклая поверхность с произвольной границей  $L$ . При нетривиальном бесконечно малом изгиблении поверхности  $F$  на границе  $L$  найдутся пары точек  $A, B$  и  $C, D$  такие, что при  $t = 0$

$$\dot{r}(A, B) > 0, \quad \dot{r}(C, D) < 0,$$

где  $r$  — расстояние в пространстве, а точка означает дифференцирование по времени.

Для конечных изгибаний подобное свойство установлено ранее в работе [1].

Из теоремы 1 следует

**Теорема 2.** Замкнутая строго выпуклая поверхность — жесткая.

Действительно, достаточно из замкнутой поверхности удалить одну точку и применить теорему 1. Однако отметим, что при доказательстве теоремы 1 используется основная лемма А. В. Погорелова [2].

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая

**Лемма.** Пусть  $Q$  — плоская замкнутая выпуклая кривая, не содержащая прямолинейных отрезков. Пусть  $x, y$  — произвольные точки кривой  $Q$ . Тогда, если длины всех дуг кривой  $Q$  стационарны, то при  $t = 0$  из неравенства  $\dot{r}(x, y) \geq 0$  следует  $\dot{r}(x, y) = 0$ .

Для конечных деформаций эта лемма доказана в работе [1].

Доказательство для бесконечно малых деформаций аналогично, достаточно лишь конечные приращения заменить скоростями.

Докажем теорему 1. Пусть  $\tau$  — изгибающее поле поверхности  $F$ . Предположим противное. Пусть для всех  $x, y \in L$  при  $t = 0$  имеет место либо  $\dot{r}(x, y) \geq 0$ , либо  $\dot{r}(x, y) \leq 0$ . Для определенности предположим, что на  $L \dot{r}(x, y) \geq 0$ . Возьмем на  $L$  произвольную точку  $O$ .

Пусть  $x$  — произвольная точка  $F$ , а  $r(x)$  — расстояние ее от точки  $O$ . Возможны следующие три случая (при  $t = 0$ ):

1. Для всех  $x \in F$  будет  $\dot{r}(x) = 0$ .

2. На  $F$  найдется множество  $G$ , на котором  $\dot{r}(x) < 0$ .

3. Для всех  $x \in F$  справедливо неравенство  $\dot{r}(x) \geq 0$ .

Если имеет место первый случай, то поле  $\tau$  тривиально.

Рассмотрим второй случай. Так как для точек  $L$  имеет место неравенство  $\dot{r}(x) \geq 0$ , а для точек  $G$  —  $\dot{r}(x) < 0$ , то на границе  $G$  будет  $\dot{r}(x) = 0$ .

Пусть  $P$  — опорная плоскость к поверхности  $F$  в точке  $O$ .

Присоединяя к полю  $\tau$  подходящий перенос в направлении, перпендикулярном плоскости  $P$ , легко добиться того, что радиальная состав-

ляющая  $\dot{r}_1$  будет всюду  $\geq 0$  и хотя бы в одной внутренней точке  $\dot{r}_1 = 0$ . Действительно, пусть  $a$  — вектор переноса, перпендикулярный  $P$  и направленный в полупространство, в котором расположена  $F$ . Радиальные его составляющие во всех точках положительны.

Поэтому можно подобрать  $a$  так, что радиальные составляющие  $\dot{r}_1$  векторов  $\tau_1 = \tau + a$  будут всюду  $\geq 0$  и хотя бы где-нибудь внутри  $\dot{r}_1 = 0$ .

Введем декартову систему координат, взяв за плоскость  $x, y$  плоскость  $P$ .

Подвернем поверхность  $F$  проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Поле  $\tau_1$  подвернем преобразованию

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}.$$

Полученное поле  $\tau'_1$  будет изгибающим для преобразованной поверхности  $F'$ .

Радиальная составляющая поля  $\tau_1$  равна  $\frac{\dot{r}_1}{|\tau|}$ .

Составляющая поля  $\tau'_1$  по оси  $z$  равна  $\zeta' = \frac{\dot{r}_1}{z}$ . Поэтому для всех точек  $F'$  будет  $\zeta' \geq 0$  и хотя бы для одной внутренней точки  $\zeta' = 0$ . Но тогда поверхность  $\zeta' = \zeta'(x, y)$  будет иметь точки строгой выпуклости, что невозможно в силу основной леммы А. В. Погорелова.

Рассмотрим третий случай.

Пусть для всех точек поверхности  $F$  имеет место  $\dot{r}(x) \geq 0$ . Будем перемещать точку  $O$  по границе  $L$  так, чтобы она пробегала все точки  $L$ . Может случиться, что найдется положение  $O'$  точки  $O$ , для которого, хотя бы для одной точки  $x$ , будет  $\dot{r}(x) < 0$ . тогда приходим к случаю 2. В противном случае неравенство  $\dot{r}(x) \geq 0$  будет иметь место для любой точки  $x \in F$  и любого положения  $O$  на границе.

Пусть теперь точка  $O$  пробегает все точки  $F$ . Для точек границы  $\dot{r}(x) \geq 0$ . Поэтому, если найдется точка  $x \in F$ , для которой  $\dot{r}(x) < 0$ , снова приходим к случаю 2. В противном случае для всех пар точек  $x, y$  поверхности  $F$  будет справедливо неравенство  $\dot{r}(x, y) \geq 0$ .

Покажем, что поле  $\tau$  в этом случае локально тривиально. Отсюда уже будет следовать, что оно тривиально и на всей поверхности.

Пусть  $x$  — произвольная точка  $F$ . Отсечем некоторой плоскостью  $\alpha$  шапочку  $P$ , содержащую  $x$ . Край шапочки  $Q$  является плоской выпуклой кривой, удовлетворяющей условиям леммы. Следовательно, для любых  $x, y \in Q$  будет  $\dot{r}(x, y) = 0$ . То же имеет место для любого сечения шапочки  $P$ , не содержащего точек  $Q$ . А из этого уже следует, что поле  $\tau$  тривиально на шапочке  $P$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Сенькин. Об изгибаии общих выпуклых поверхностей с границей. Вестник ЛГУ, № 19, 1960.

2. А. В. Погорелов. Бесконечно малые изгибаия общих выпуклых поверхностей. Изд-во Харьковск. ун-та. 1959.

Поступила в редакцию 17 мая 1965 г.

---

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРИНЫ ОБЩЕЙ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ.

*E. П. Сенькин* (Харьков)

Функция множества  $F_1(H, \omega)$  называется первой функцией кривизны [1] выпуклой поверхности  $H$ , если для каждого борелевского множества  $\omega$  на единичной сфере она равна интегральной средней кривизне множества на поверхности  $H$ , сферическое изображение которого совпадает с  $\omega$ .

Для регулярной поверхности

$$F_1(H, \omega) = \frac{1}{2} \int_{\omega} (R_1 + R_2) d\omega,$$

где  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны.

**Теорема.** Пусть  $H_1, H_2$  — общие замкнутые выпуклые поверхности. Пусть  $F_1(H_1, \omega), F_1(H_2, \omega)$  — их первые функции кривизны;  $B_1(\mathbf{n}), B_2(\mathbf{n})$  — ширины тел  $H_1, H_2$  в направлении  $\mathbf{n}$ . Тогда имеет место оценка

$$|B_1(\mathbf{n}) - B_2(\mathbf{n})| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} |F_1(H_1, d\omega) - F_1(H_2, d\omega)|. \quad (1)$$

Здесь интегрирование ведется по всей единичной сфере  $\Omega$ .

Докажем теорему сначала для аналогичных многогранников, а затем распространим ее на общие поверхности предельным переходом.

Многоугольники называются аналогичными, если каждой стороне одного соответствует параллельная сторона другого и обратно.

Многогранники называются аналогичными, если каждой грани одного соответствует параллельная и аналогичная грань другого и обратно.

Нам потребуются следующие свойства аналогичных многогранников, установленные А. Д. Александровым<sup>1</sup>:

- 1) соответственные грани аналогичных многогранников соприкасаются по соответственным ребрам;
- 2) каждой вершине одного соответствует вершина другого и обратно;
- 3) в соответственных вершинах грани образуют равные и параллельно расположенные многогранные углы;

<sup>1</sup> А. Д. Александров. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Матем. сб. 2 (44) : 5, 1937; 2 (44) : 6, 1937; 3 (45) : 1, 1938; 3 (45) : 2, 1938.

4) любое конечное число выпуклых тел можно с любой точностью аппроксимировать аналогичными многогранниками.

Установим справедливость оценки (1) для аналогичных многогранников.

Пусть  $P_1, P_2$  — аналогичные многогранники. Пусть  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$  — векторы соответствующих ребер,  $\alpha_i$  — двугранные углы, дополняющие до  $\pi$  двугранные углы многогранников при этих ребрах. Обозначим через  $Q(\mathbf{n})$  плоскость с нормалью  $\mathbf{n}$ , а через  $\theta_i(\mathbf{n})$  — плоский угол, который получается в сечении угла  $\alpha_i$  плоскостью  $Q(\mathbf{n})$ .

Рассмотрим суммы

$$\sum_i |\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}| \theta_i(\mathbf{n}) = 2\pi B_1(\mathbf{n}),$$

$$\sum_i |\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}| \theta_i(\mathbf{n}) = 2\pi B_2(\mathbf{n}).$$

Вычитая, получим

$$2\pi |B_1(\mathbf{n}) - B_2(\mathbf{n})| = \sum_i (|\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}| - |\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}|) \theta_i(\mathbf{n}).$$

Отсюда

$$2\pi |B_1(\mathbf{n}) - B_2(\mathbf{n})| \leq \sum_i ||\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}| - |\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}|| \theta_i(\mathbf{n}).$$

Но

$$\sum_i ||\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}| - |\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}|| \theta_i(\mathbf{n}) \leq \sum_i ||\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i|| \alpha_i.$$

Так как

$$\sum_i ||\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i|| \alpha_i = 2 \int_{\Omega} |F_1(P_1, d\omega) - F_1(P_2, d\omega)|,$$

то

$$|B_1(\mathbf{n}) - B_2(\mathbf{n})| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} |F_1(P_1, d\omega) - F_1(P_2, d\omega)|.$$

Справедливость оценки для общих выпуклых поверхностей устанавливается предельным переходом на основании свойства 4.

*Поступила в редакцию 17 мая 1965 г.*

---

## О ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю. С. Слободян (Харьков)

Вполне геодезической поверхностью риманова пространства называется такая поверхность, геодезические линии которой являются также геодезическими линиями пространства. В статье рассматриваются полные римановы пространства с аналитической метрикой.

Пространство называется полным, если из сходимости последовательности точек в смысле метрики следует сходимость ее в смысле Коши [2].

Метрика пространства аналитическая, если функции

$$g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 4),$$

дающие линейный элемент пространства, есть аналитические функции точки.

Под семейством мы будем понимать полное связное множество, непрерывно зависящее от параметров.

**Лемма A.** *Если полное риманово пространство с аналитической метрикой допускает вполне геодезическую гиперповерхность, то она будет аналитической поверхностью.*

Доказательство проведем для случая  $n = 4$ . Пусть в пространстве введена система координат  $(x^1, \dots, x^4)$ . Предположим, что вполне геодезическая поверхность касается в точке  $M$  трехмерной плоскости  $E_3$ . Вполне геодезическая поверхность описывается всеми геодезическими линиями пространства, которые проходят через точку  $M$  и касаются  $E_3$ . Геодезические линии являются решениями следующей системы уравнений:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 4).$$

Вследствие аналитичности метрики, решения этой системы

$$x^\alpha = x^\alpha(c^1, \dots, c^9), \quad (\alpha = 1, \dots, 4),$$

где  $c^i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) — произвольные постоянные, являются аналитическими функциями всех аргументов. Потребуем, чтобы геодезические линии проходили через точку  $M$  и касались  $E_3$ . Уравнения таких геодезических имеют вид

$$x^\alpha = x^\alpha(a^1, \dots, a^9), \quad (\alpha = 1, \dots, 4).$$

Среди параметров  $a^1, \dots, a^9$  найдется система  $a^{i_1}, \dots, a^{i_s}$  независимых.

В силу этого по меньшей мере один из определителей

$$\frac{D(x^1, \dots, x^4)}{D(a^{i_1}, \dots, a^{i_4})} \neq 0$$

и мы можем принять систему параметров  $a^{i_1}, \dots, a^{i_4}$  за координаты на вполне геодезической поверхности.

**Лемма В.** Если полное риманово пространство с аналитической метрикой допускает однопараметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей, то в окрестности некоторой вполне геодезической поверхности можно ввести такую параметризацию пространства, при которой сами эти поверхности будут координатными, а одним из семейств координатных линий — их ортогональные траектории; введенная таким образом параметризация будет аналитической.

**Доказательство.** Для того чтобы пространство допускало однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ijkl} &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} x_i^\alpha x_j^\beta x_k^\gamma x_l^\delta, \quad (i, j, k, l = 1, \dots, 3), \\ 0 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} x_i^\alpha x_j^\beta x_k^\gamma x_\ell^\delta, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, 4)\end{aligned}$$

где  $\bar{R}_{ijkl}$  — компоненты тензора Римана для метрики вполне геодезической поверхности,  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — компоненты тензора Римана для метрики пространства,  $x_i^\alpha$  — ковариантные производные координат пространства по внутренним координатам поверхности. Возьмем кривую  $\gamma$ , пересекающую все поверхности семейства. Обозначим длину кривой  $\gamma$  от некоторого начала через  $s$  и рассмотрим решение указанной системы уравнений, считая неизвестными величины  $x_i^\alpha$ . Относительно  $x_i^\alpha$  эта система алгебраическая, кроме того, компоненты тензоров Римана — аналитические функции параметра  $s$ . Решение системы тоже аналитическая функция параметра  $s$ . Но величины  $x_i^\alpha$  определяют систему площадок, каждой из которых касается вполне геодезическая гиперповерхность. Семейство площадок, касательных к вполне геодезическим поверхностям, аналитически зависит от параметра. В силу леммы А семейство поверхностей тоже аналитически зависит от параметра. Выбирая в качестве линий  $\gamma$  ортогональные траектории семейства, мы можем ввести [2] в пространстве указанную в лемме параметризацию. По доказанному, она будет аналитической.

**Теорема.** Если полное риманово пространство четырех измерений допускает только двупараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей, то все поверхности семейства либо проходят через фиксированную геодезическую линию, либо каждые две из них пересекаются по двумерной вполне геодезической поверхности, и никакие две двумерные поверхности не пересекаются.

**Доказательство.** Известно [1], что вполне геодезическая гиперповерхность, проходящая через точку  $M$  пространства, ортогональна главному направлению индикаторы Эйнштейна [1], построенной для этой точки. Индикаторы Эйнштейна задаются уравнением

$$(Rg_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}) x^\alpha x^\beta = 1, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 4),$$

где  $R$  — скалярная кривизна пространства,  $R_{\alpha\beta}$  — компоненты тензора Риччи.

Индикаторы может вовсе не допускать семейств главных направлений, может допускать однопараметрическое либо двупараметрическое семейство главных направлений или же быть сферой. В рассматриваемом

случае индикатриса в каждой точке пространства допускает по меньшей мере однопараметрическое семейство главных направлений.

Введем следующие обозначения. Трехмерную вполне геодезическую поверхность, проходящую через точку  $M$ , обозначим  $F_{3M}$ . Если двумерная вполне геодезическая поверхность получена при пересечении двух трехмерных поверхностей, проходящих через точки  $M$  и  $N$  соответственно, то мы обозначим ее  $F_{2MN}$ .

Пусть в пространстве имеется хотя бы одна точка  $M$ , в которой индикатриса Эйнштейна допускает только однопараметрическое семейство главных направлений. Вследствие аналитичности метрики пространства индикатриса будет допускать только однопараметрическое семейство главных направлений и в каждой точке пространства, за исключением, быть может, множества точек  $V$ , не имеющего внутренней точки. В самом деле, если бы множество  $V$  имело внутреннюю точку  $P$ , то мы имели бы, что три или четыре собственных значения индикатрисы совпадают на множестве с внутренней точкой. Собственные значения — функции аналитические. Равенство их можно продолжить на все пространство. Таким образом, в пространстве существует точка  $N$ , не совпадающая с  $M$ ,  $N \in V$ . Через точку  $M$  проходит однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей с «осью»  $F_{2M}$ . Через точку  $N$  проходит семейство с осью  $F_{2N}$ . Возможны следующие случаи.

- Поверхности  $F_{2M}$  и  $F_{2N}$  пересекаются по геодезической  $\delta_{MN}$ .
- Поверхности  $F_{2M}$  и  $F_{2N}$  имеют общей только точку  $P$ .
- Поверхности  $F_{2M}$  и  $F_{2N}$  не имеют ни одной общей точки.

Рассмотрим случай «а».

Пусть  $F_{2M}$  и  $F_{2N}$  пересекаются по  $\delta_{MN}$ . Докажем, что  $\delta_{MN} \in V$ . В точках геодезической линии  $\delta_{MN}$  индикатриса допускает два различные однопараметрические семейства главных направлений. Двумерные плоскости этих семейств ортогональны касательному вектору  $e$  к  $\delta_{MN}$ . Следовательно, они имеют общее направление. Отсюда вытекает, что всякое направление, ортогональное вектору  $e$ , главное. Индикатриса в точках  $\delta_{MN}$  допускает двупараметрическое семейство главных направлений.

Предположим, что множество  $V$  представляет собой единственную геодезическую линию  $\delta_{MN}$ . Так как метрика пространства аналитическая, то поверхности семейства с «осью»  $F_{2M}$  проходят через каждую точку пространства. То же можно утверждать и о поверхностях семейства с «осью»  $F_{2N}$ . Каждая геодезическая, имеющая общую точку с  $\delta_{MN}$ , лежит, с одной стороны, на вполне геодезической поверхности семейства с «осью»  $F_{2M}$ , с другой стороны, на поверхности семейства с «осью»  $F_{2N}$ . Возьмем точку  $P$  так, чтобы она не лежала ни на  $F_{2M}$ , ни на  $F_{2N}$ . Через  $P$  проходит поверхность  $F_{3M}$  из семейства с «осью»  $F_{2M}$  и поверхность  $F_{3N}$  из семейства с «осью»  $F_{2N}$ . Поверхности  $F_{3M}$  и  $F_{3N}$  пересекаются по поверхности  $F_{2MN}$ , которая содержит геодезическую  $\delta_{MN}$ . Через точку  $P$  проходит однопараметрическое семейство с «осью»  $F_{2P}$ . Возможны следующие случаи.

- Поверхности  $F_{2P}$  и  $F_{2MN}$  имеют общей только точку  $P$ .
- Поверхности  $F_{2P}$  и  $F_{2MN}$  имеют общей геодезическую линию  $\delta_P$ .

Рассмотрим случай 2. Пусть поверхности  $F_{2P}$  и  $F_{2MN}$  имеют общей геодезическую линию  $\delta_P$ . В точке  $P$  индикатриса допускает однопараметрическое семейство главных направлений, образующих двумерную плоскость  $E_{2P}$ , и, кроме того, главное направление  $e_{MP}$ , ортогональное поверхности  $F_{3M}$ , и главное направление  $e_{NP}$ , ортогональное поверхности  $F_{3N}$ . Направления  $e_{MP}$  и  $e_{NP}$  ортогональны поверхности  $F_{2MN}$ . Они опре-

лежат двумерную плоскость  $E_{2MN}$ . Так как  $F_{2P}$  имеет с  $F_{2MN}$  общую геодезическую, то  $E_{2MN}$  ортогональна направлению  $\delta_P$  и  $E_{2P}$  тоже ортогональна направлению  $\delta_P$ . Таким образом, в трехмерном пространстве, ортогональном направлению  $\delta_P$ , мы имеем двумерную плоскость главных направлений и еще два главные направления, вообще говоря, лежащие в этой плоскости. Если ни одно из направлений  $e_{MP}$  и  $e_{NP}$  не лежит в плоскости  $E_{2P}$ , то индикаториса в точке  $P$  допускает двупараметрическое семейство главных направлений, что противоречит предположению. Если одно из направлений, пусть  $e_{MP}$ , лежит в плоскости  $E_{2P}$ , а  $e_{NP}$ , не лежит в этой плоскости, то индикаториса тоже допускает в точке  $P$  двупараметрическое семейство главных направлений, что невозможно.

Отсюда следует, что поверхности  $F_{3M}$  и  $F_{3N}$  пересекаются ортогонально и что  $F_{2P}$  лежит либо на  $F_{3M}$ , либо на  $F_{3N}$ . Пусть  $F_{2P}$  лежит на  $F_{3M}$ . Возьмем последовательности точек  $P_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} M$ ,  $P_i \in F_{3M}$ . В каждой из точек  $P_i$ , аналогично предыдущему, мы имеем «ось»  $F_{2P_i}$ , лежащую на поверхности  $F_{3M}$ , и направление  $e_{NP_i}$ , ортогональное этой поверхности. Вследствие аналитичности семейства, и в точке  $M$  индикаториса допускает два семейства главных направлений, имеющих общее направление. Индикаториса в точке  $M$  допускает двупараметрическое семейство главных направлений, что противоречит предположению.

Рассмотрим случай 1. Пусть поверхности  $F_{2MN}$  и  $F_{2P}$  имеют общей только точку  $P$ . Индикаториса в точке  $P$  допускает двумерную плоскость главных направлений, ортогональную  $F_{2P}$ , и еще два главные направления  $e_{MP}$  и  $e_{NP}$ , каждое из которых ортогонально  $E_{2MN}$ . Направления  $e_{MP}$  и  $e_{NP}$  образуют двумерную плоскость  $E_{2MN}$ . Плоскость  $E_{2MN}$  и  $E_{2P}$  имеют общей только точку  $P$ . Если  $E_{2MN}$  не ортогональна  $E_{2P}$ , то индикаториса в точке  $P$  допускает более чем однопараметрическое семейство главных направлений, что невозможно. Таким образом, плоскости  $E_{2MN}$  и  $E_{2P}$  ортогональны.

Берем последовательность точек  $P_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} M$ ,  $P_i \in F_{3M}$ . В каждой из точек  $P_i$  плоскость  $E_{2P_i}$  — «ось» семейства, проходящего через точку  $P_i$ , ортогональна двумерной плоскости, образованной направлениями, ортогональными  $F_{3M}$  и той поверхности семейства с «осью»  $F_{3N}$ , которая проходит через точку  $P_i$ .

Такая же картина имеет место и в предельной точке  $M$ . В ней индикаториса допускает два различные однопараметрические семейства главных направлений, а пространство — два различные семейства вполне геодезических поверхностей. Проведем через точку  $M$  поверхность  $F'_{3MN}$  из семейства с осью  $F_{2N}$ . Направление  $e_{MV}$ , ортогональное поверхности  $F'_{3MN}$  в точке  $M$ , лежит в плоскости  $E'_{2M}$ , ортогональной  $F'_{2M}$ , иначе в точке  $M$  индикаториса была бы сферой. Но тогда «оси»  $F_{2N}$  и  $F'_{2M}$  лежат на одной трехмерной вполне геодезической поверхности. Они могут либо пересекаться по геодезической, либо не иметь ни одной общей точки. Если  $F_{2N}$  и  $F'_{2M}$  имеют общую геодезическую  $\delta_{MN}$ , то мы имеем случай 2. Что же касается случая, когда  $F_{2N}$  и  $F'_{2M}$  не имеют ни одной общей точки, то его мы рассмотрим несколько позже.

Пусть теперь множество  $V$  представляет собой некоторую поверхность. Возьмем точки  $M \in V$ ,  $N \notin V$ . Через  $M$  проходит семейство с «осью»  $F_{2M}$ , через  $N$  — семейство с «осью»  $F_{2N}$ .

Возьмем точку  $P \notin V$ ,  $P \notin F_{2M}$ ,  $P \notin F_{2N}$ . Через  $P$  проходит семейство с «осью»  $F_{2P}$  и две поверхности  $F_{3M}$  и  $F_{3N}$  из семейства с «осами»  $F_{2M}$  и  $F_{2N}$ . Возможны, как и раньше, случаи «а» и «б». Рассматриваем индикатрису в точке  $P$ . Выбираем последовательность точек  $P_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} M$ . Если

мы не встретим точки множества  $V$ , исследование проводим, как и раньше. Если встретим точку  $P_k$  множества  $V$ , то выбираем последовательность точек, сходящуюся к точке  $P_k$ . В каждой точке последовательности имеем ту же картину, что и в точке  $P$ . То же будет по непрерывности и в точке  $P_k$ .

Дальше исследование проводим аналогично случаю, когда множество  $V$  представляет собой единственную геодезическую  $\delta_{MN}$ . Множество  $V$  может представлять собой только конечное число поверхностей, либо бесконечное их число, но такое, что из этих поверхностей невозможно выбрать сходящуюся последовательность.

Мы показали, что ни случай «а», ни случай «б» невозможны. Единственno возможен тот случай, когда  $F_{2P}$  совпадает с поверхностью  $F_{2M}$ . Точка  $P$  была произвольной точкой пространства, не принадлежащей множеству  $V$ . По непрерывности устанавливаем, что и семейства вполне геодезических поверхностей, проходящие через точки множества  $V$ , имеют «оси», проходящие через геодезическую линию  $\delta_{MN}$ . Всякое трехмерное направление  $E_3$ , включающее направление  $\delta_{MN}$  в точках  $\delta_{MN}$ , определяет вполне геодезическую поверхность, касающуюся  $E_3$ . Таких направлений может быть только двупараметрическое семейство. Но во всем пространстве имеется только двупараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических гиперповерхностей. Все вполне геодезические гиперповерхности семейства проходят через геодезическую  $\delta_{MN}$ .

Рассмотрим случай «в». Пусть в пространстве множество  $V$  пусто. Возьмем точки  $M$  и  $N$ . Через  $M$  проходит однопараметрическое семейство с «осью»  $F_{2M}$ , через  $N$  — семейство с «осьью»  $F_{2N}$ . «Оси»  $F_{2M}$  и  $F_{2N}$  не пересекаются. Возьмем точку  $P$ ,  $P \notin F_{2M}$ ,  $P \notin F_{2N}$ . Через  $P$  проходит семейство с осью  $F_{2P}$ . Индикатриса в точке  $P$  допускает однопараметрическое семейство главных направлений, образующих двумерную плоскость  $E_{2P}$  и еще два главные направления  $e_{MP}$  и  $e_{NP}$ , ортогональные соответственно поверхностям  $F_{3M}$  и  $F_{3N}$ . Плоскость  $E_{2P}$  ортогональна двумерной плоскости  $E_{2MN}$ , образованной направлениями  $e_{MP}$  и  $e_{NP}$ . Выбираем сходящуюся последовательность точек  $P_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} M$ . В каждой точке  $P_i$  плоскость  $E_{2P_i}$  — плоскость главных направлений индикатрисы — ортогональна двумерной плоскости  $\{e_{MP_i}, e_{NP_i}\}$ . Это же должно иметь место и в предельной точке  $M$ . В точке  $M$  индикатриса допускает два различные семейства главных направлений, а пространство — два семейства вполне геодезических поверхностей. Мы имеем, таким образом, либо случай «а», либо случай «в». Остается только тот случай, когда  $F_{2P}$  лежит либо на поверхности  $F_{3M}$ , либо на  $F_{3N}$ . Если  $F_{2P}$  пересекается с  $F_{2M}$  или  $F_{2N}$ , то мы имеем случай «а». Таким образом, если две «оси», фиксированные, не пересекаются, то никакие две «оси» не пересекаются.

Если множество  $V$  не пусто, то при переходе через точки множества  $V$  мы пользуемся непрерывностью семейства.

Найдем линейный элемент пространства. Сначала рассмотрим тот случай, когда все вполне геодезические поверхности проходят через одну геодезическую линию  $\delta_{MN}$ . Докажем, что линейный элемент такого пространства имеет вид

$$dS^2 = dx^1{}^2 + \varphi_1(x^1) \{dx^2{}^2 + \varphi_2(x^2) [dx^3{}^2 + \varphi_3(x^3, x^4) dx^4{}^2]\}. \quad (1)$$

Для доказательства рассмотрим геометрическое место точек, равноудаленных от линии  $\delta_{MN}$ . Получим поверхность  $\Phi_3$ . Каждая вполне геодезическая поверхность  $F_3$  пространства пересекает поверхность  $\Phi_3$  по двумерной поверхности  $\Phi_2$ .

Докажем, что  $\Phi_2$  является вполне геодезической, поверхностью в смысле метрики поверхности  $\Phi_3$ .

Возьмем в точке  $M$  вектор  $a$ , касательный к поверхности  $\Phi_2$ , перенесем его параллельно в точку  $M'$ , бесконечно близкую  $M$ , вдоль некоторой кривой  $\gamma$ , лежащей на  $\Phi_2$ . Получим вектор  $a'$ . Так как  $F_3$  — вполне геодезическая, то вектор  $a'$  тоже касается поверхности  $F_3$ . Спроектируем  $a'$  ортогонально на площадку, касательную к поверхности  $\Phi_3$ . Но поверхность  $F_3$  пересекает  $\Phi_3$  ортогонально, проекция вектора  $a'$  будет касаться поверхности  $\Phi_2$ . Введенный выше параллельный перенос совпадает с внутренним переносом вектора в смысле поверхности  $\Phi_3$  [3].

Поверхность  $\Phi_3$  допускает двупараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей  $\Phi_2$ . Так как поверхности  $F_3$  имели общей только  $\delta_{MN}$ , то поверхности семейства  $\{\Phi_2\}$  не имеют ни одной общей точки. Как показано в работе [4], линейный элемент такой поверхности имеет вид

$$ds^2(x_0^1) = \varphi_1(x_0^1, x^2) dx^{2^2} + \varphi_2(x_0^1, x^2) [\varphi_3(x_0^1, x^3) dx^{3^2} + \varphi_4(x_0^1, x^3, x^4)] dx^{4^2}.$$

Введем в пространстве следующую систему координат. За координатные поверхности возьмем поверхности  $\Phi_3$ . За одно из семейств координатных линий возьмем ортогональные траектории поверхностей  $\Phi_3$ . Этими ортогональными траекториями будут служить все геодезические линии пространства, ортогональные линии  $\delta_{MN}$ . Линейный элемент пространства имеет вид

$$dS^2 = dx^{1^2} + ds^2(x^1, x^2, x^3, x^4).$$

Найдем вид  $ds^2$ .

Возьмем на поверхности  $\Phi_3$  две точки  $M_1$  и  $N_1$ . Расстояние между ними в смысле метрики поверхности  $\Phi_3$  обозначим  $\rho$ . На расстоянии  $\rho$  на поверхности  $\Phi_3$  возьмем еще две точки  $M_2$  и  $N_2$ . Соединим точки  $M_2, N_2$  кратчайшей  $\gamma_1$ , точки  $M_1N_1$  — кратчайшей  $\gamma_2$ . Ортогональные траектории к вполне геодезическим поверхностям пространства устанавливают между ними изометрию. Тем самым они устанавливают изометрию между  $\Phi_2$ . Линии  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  лежат на вполне геодезических поверхностях  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$ . Мы всегда можем подобрать такое семейство  $\{F_3\}$ , чтобы оно содержало поверхности  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$ . Ортогональные траектории к поверхностям  $\Phi_3$ , проведенные в точках  $M_1, N_1, M_2, N_2$ , пересекут другую поверхность  $\Phi_3(x_0^1)$  в точках  $M'_1, M'_2, N'_1, N'_2$ . В метрике  $\Phi_3(x_0^1)$  расстояния  $M'_1N'_1$  и  $M'_2N'_2$  равны между собой. Двум равным расстояниям на одном цилиндре соответствуют два равные расстояния на произвольном другом цилиндре. Соответствие между ними конформное с коэффициентом конформности, зависящим от  $x^1$ . Линейный элемент пространства имеет вид (1).

Рассмотрим второй случай.

Пусть через каждую точку пространства проходит «ось» однопараметрического пучка трехмерных вполне геодезических поверхностей и никакие две «оси» не пересекаются. На каждой трехмерной вполне геодезической поверхности имеется однопараметрическое семейство таких «осей». Если мы проведем трехмерную вполне геодезическую поверхность  $F_3$  через «ось»  $F'_2$  и точку на  $F''_2$ , то поверхность  $F''_2$  будет целиком лежать

на  $F_3$ . Возьмем на  $F_3$  точку  $M$  и проведем через нее ортогональную траекторию всех «осей», лежащих на этой поверхности. Изменяя поверхность  $F_3$ , мы получим однопараметрическое семейство линий  $\gamma$ . Все линии этого семейства проходят через точку  $M$ . Семейство линий образует двумерную поверхность  $\Phi_2$ . Через каждую точку пространства проходит поверхность, построенная аналогично. Мы можем выбрать «оси» однопараметрических пучков и поверхности  $\Phi_2$  за координатные. Трехмерные вполне геодезические поверхности пересекают поверхности  $\Phi_2$  по геодезическим линиям в смысле метрики поверхности  $\Phi_2$ . Аналогично предыдущему случаю показываем, что линейный элемент пространства имеет следующий вид:

$$dS^2 = d\sigma_1^2 + \varphi_1(x^1, x^2) d\sigma_2^2,$$

где  $d\sigma_1^2$  есть функция переменных  $x^1, x^2$ ;  $\varphi_1$  — функция переменных  $x^3, x^4$ .

Предположим, что пространство допускает трехпараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей. Через каждую точку проходит двупараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. Индикатриса в каждой точке допускает по меньшей мере двупараметрическое семейство главных направлений. Возможны два случая.

а) Существует хотя бы одна точка, в которой индикатриса допускает только двупараметрическое семейство главных направлений.

б) Индикатриса в каждой точке пространства является сферой.

Рассмотрим случай «а».

**Теорема.** Если пространство допускает трехпараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей и если имеется хотя бы одна точка пространства, в которой индикатриса допускает только двупараметрическое семейство главных направлений, то все поверхности семейства либо проходят через одну точку, либо каждое двупараметрическое семейство, проходящее через точку, проходит через геодезическую линию — «ось» семейства, и никакие две «оси» не пересекаются.

**Доказательство.** Вследствие аналитичности метрики индикатриса допускает двупараметрическое семейство и в каждой точке пространства, за исключением, быть может, множества точек  $V$ , не имеющего внутренней точки. Возьмем точку  $M \notin V$ . Через  $M$  проходит двупараметрическое семейство поверхностей  $F_3$  с «осью»  $\delta_M$ . Через  $N$  проходит семейство с «осью»  $\delta_N$ .

Возможны два случая.

1. «Оси»  $\delta_M$  и  $\delta_N$  пересекаются в точке  $P$ .

2. «Оси»  $\delta_M$  и  $\delta_N$  не пересекаются.

Рассмотрим случай 1.

Возьмем точку  $L \notin V$ . Через  $L$  проходит однопараметрическое семейство  $\{F_{3ML}\}$  из двупараметрического семейства с «осью»  $\delta_M$  и однопараметрическое семейство  $\{F_{3NL}\}$  из двупараметрического семейства с «осью»  $\delta_N$ . Семейство  $\{F_{3ML}\}$  имеет двумерную «ось»  $F_{2ML}$ , семейство  $\{F_{3NL}\}$  имеет двумерную «ось»  $F_{2NL}$ . Обе эти «оси» пересекаются по геодезической линии  $\delta_{MN}$ . Кроме того, через точку  $L$  проходит двупараметрическое семейство с «осью»  $\delta_L$ . Индикатриса в точке  $L$  допускает двупараметрическое семейство главных направлений  $E_{3L}$ , ортогональным поверхностям семейства с «осью»  $\delta_L$  и еще два однопараметрических семейства: одно ортогонально «оси»  $F_{2ML}$ , другое — «оси»  $F_{2NL}$ . Два последние семейства ортогональны линии  $\delta_{ML}$ . Они лежат в трехмерной плоскости, образованной двупараметрическим семейством главных направлений  $E_{3L}$ . В противном случае индикатриса

в точке  $L$  является сферой, вопреки предположению. Тем самым  $E_{3L}$  вполне определено. Оно ортогонально линии  $\delta_{MN}$ . Двупараметрическое семейство, проходящее через точку  $L$ , проходит через линию  $\delta_{MN}$ . Точка  $L$  была произвольной. Все поверхности трехпараметрического семейства проходят через точку  $P$ .

Рассмотрим случай 2.

Пусть «оси»  $\delta_M$  и  $\delta_N$  не пересекаются. Возьмем точку  $P \notin V$  и проведем через нее все поверхности из семейства с «осью»  $\delta_M$ . Получим однопараметрическое семейство  $\{F_{3MP}\}$  с осью  $F_{2MP}$ . Аналогично проведем через  $P$  все поверхности из семейства с «осью»  $\delta_{NP}$ . Получим однопараметрическое семейство  $\{F_{3NP}\}$  с «осью»  $F_{2NP}$ . Через точку  $P$  проходит, кроме того, двупараметрическое семейство с «осью»  $\delta_P$ . В точке  $P$  индикатриса допускает два однопараметрических семейства главных направлений  $E_{2NP}$  и  $E_{2MP}$ , ортогональных  $F_{2NP}$  и  $F_{2MP}$  соответственно, кроме того, двупараметрическое семейство главных направлений  $E_{3P}$ , ортогональное  $\delta_P$ . Направления  $E_{2NP}$  и  $E_{2MP}$  лежат на плоскости  $E_{3P}$ . Они имеют общее направление, так как поверхности  $F_{2NP}$  и  $F_{2MP}$  имеют общую геодезическую  $\delta_{MN}$ . «Ось»  $\delta_P$  совпадает с линией  $\delta_{MN}$ . Но тогда мы имеем, что «оси»  $\delta_{MN}$  и  $\delta_P$  пересекаются в точке  $M$ . Согласно предыдущему случаю все поверхности проходят через одну точку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. Изд-во иностр. лит., М., 1936.
2. А. В. Погорелов. Лекции по аналитической геометрии. Изд-во Харьковск. ун-та, 1962.
3. А. Эйзенхарт. Риманова геометрия. Изд-во иностр. лит., М., 1948.
4. Поправка к статье Ю. С. Слободяна «О трехмерных римановых пространствах, допускающих семейства вполне геодезических поверхностей». См. настоящий сборник.

*Поступила в редколлегию 12 октября 1965 г.*

## ОДНА ТЕОРЕМА ОБ ОДНОРОДНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

С. П. Солов (Харьков)

Многогранник есть конечное множество многоугольников таких, каждая сторона одного многоугольника обязательно принадлежит только одному многоугольнику. Многоугольники, их стороны и вершины называются соответственно *гранями*, *ребрами* и *вершинами* многогранника.

Односвязный многогранник называется *однородным*, если его грани — односвязные правильные многоугольники, а звезды всех вершин — конгруэнтные фигуры.

Однородный многогранник называется *правильным*, если все его грани — одинаковые многоугольники. Существует девять правильных однородных многогранников: пять *платоновых многогранников* и четыре *многогранника Пуансо*.

Однородный многогранник называется *полуправильным*, если среди его граней есть различные. Существует четырнадцать выпуклых полуправильных однородных многогранников, называемых *архимедовыми*. Сюда же следует отнести две бесконечные серии призм и антипризм.

Из невыпуклых полуправильных однородных многогранников в настоящее время известно 53 многогранника и три бесконечные серии призм и антипризм.

Все однородные многогранники, кроме одного, были получены Кокстером и Миллером при помощи конструкции Витгоффа [1]. До сих пор не доказано, что известными многогранниками исчерпываются все однородные многогранники.

В настоящей статье доказана

**Теорема.** Существует только один однородный многогранник, эйлерова характеристика которого равна 0.

Доказательство дано в следующих параграфах.

**§ 1.** Предположим, что существуют однородные многогранники, для которых характеристика Эйлера равна 0. Найдем структуру звезд вершин этих многогранников.

Пусть  $B$ ,  $\Gamma$  и  $P$  соответственно число вершин, граней и ребер однородного многогранника,  $\Gamma_i$  — число  $n_i$ -угольных граней. Каждой вершине инцидентно  $S$  граней.  $S_i$  — число  $n_i$ -угольных граней, инцидентных каждой вершине. Очевидно, что  $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ ,  $S = \sum_i S_i$ .

Всем вершинам многогранника инцидентно  $SB$  ребер, причем каждое ребро считается дважды. Следовательно,

$$SB = 2P. \quad (1)$$

Каждое ребро инцидентно двум граням, а каждая грань инцидентна не менее чем трем ребрам, т. е.

$$SB \geq 3\Gamma. \quad (2)$$

Для однородных многогранников с эйлеровой характеристикой, равной 0, имеем:

$$B + \Gamma = P. \quad (3)$$

Сопоставив (1), (2) и (3), получим

$$B + \frac{SB}{3} \geq B + \Gamma = P = \frac{SB}{2},$$

т. е.

$$B + \frac{SB}{3} \geq \frac{SB}{2},$$

откуда находим

$$S < 6.$$

Это неравенство показывает, что в однородных многогранниках, имеющих эйлерову характеристику, равную 0, каждая вершина инцидентна не более чем шести граням. Так как количество граней при каждой вершине может выражаться только целым числом  $S \geq 3$ , то

$$S = 3, 4, 5, 6.$$

Во всех вершинах многогранника сходится  $S_i B$  плоских углов  $n_i$ -угольных граней. А все  $n_i$ -угольные грани содержат  $n_i \Gamma_i$  плоских углов. Значит,

$$S_i B = n_i \Gamma_i$$

или

$$\Gamma_i = \frac{S_i B}{n_i}.$$

Суммируя по  $i$ , находим общее число граней однородного многогранника:

$$\Gamma = \sum_i \frac{S_i B}{n_i}. \quad (4)$$

Для рассматриваемого типа многогранников

$$\Gamma = P - B.$$

Заменив  $\Gamma$  и  $P$  их выражениями (4) и (1), получим

$$\sum_i \frac{S_i B}{n_i} = \frac{SB}{2} - B,$$

или

$$\sum_i \frac{S_i}{n_i} = \frac{S-2}{2}. \quad (5)$$

Решим это уравнение в целых числах.

Пусть  $S = 3$ . Могут быть такие случаи:

- 1)  $S_1 = 3$ ;
- 2)  $S_1 = 2, S_2 = 1$ ;
- 3)  $S_1 = S_2 = S_3 = 1$ .

Рассмотрим каждый случай.

- 1)  $S_1 = 3$ . Уравнение (5) принимает вид

$$\frac{3}{n_1} = \frac{1}{2},$$

откуда  $n_1 = 6$ , т. е. в вершине многогранника сходятся три шестиугольные грани.

2)  $S_1 = 2, S_2 = 1$ . Уравнение (5) имеет вид

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Так как  $n_2 \geq 3$ , то  $\frac{2}{n_1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , т. е.

$$5 \leq n_1 \leq 12.$$

Подставляя последовательно значения  $n_1$  в (6), найдем все целые положительные значения  $n_2$ :

1.  $n_1 = 5, n_2 = 10$ ;
2.  $n_1 = 8, n_2 = 4$ ;
3.  $n_1 = 12, n_2 = 3$ .

3)  $S_1 = S_2 = S_3 = 1$ . Уравнение (5) принимает вид

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Пусть  $\frac{1}{n_1}$  есть наибольшее из слагаемых суммы (7). Тогда

$$\frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}, \text{ т. е. } 3 \leq n_1 \leq 6.$$

Следовательно,  $n_1 = 3, 4, 5, 6$ .

Рассматривая каждый случай в отдельности, получим такие значения для  $n_1, n_2$  и  $n_3$ :

1.  $n_1 = 3, n_2 = 7, n_3 = 42$ ;
2.  $n_1 = 3, n_2 = 8, n_3 = 24$ ;
3.  $n_1 = 3, n_2 = 9, n_3 = 18$ ;
4.  $n_1 = 3, n_2 = 10, n_3 = 15$ ;
5.  $n_1 = 4, n_2 = 5, n_3 = 20$ ;
6.  $n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 12$ .

Пусть  $S = 4$ . Возможны следующие случаи:

- 1)  $S_1 = 4$ ;
- 2)  $S_1 = 3, S_2 = 1$ ;
- 3)  $S_1 = S_2 = 2$ ;
- 4)  $S_1 = 2, S_2 = S_3 = 1$ ;
- 5)  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 1$ .

Рассмотрим каждый случай.

1)  $S_1 = 4$ . Уравнение (5) принимает вид

$$\frac{4}{n_1} = 1,$$

откуда видно, что  $n_1 = 4$ , т. е. в вершине многогранника сходятся четыре квадрата.

2)  $S_1 = 3, S_2 = 1$ . Уравнение (5) имеет вид

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} = 1.$$

Это уравнение имеет единственное решение в целых положительных числах

$$n_1 = n_2 = 4.$$

3)  $S_1 = S_2 = 2$ . Уравнение (5) имеет вид

$$\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} = 1,$$

$$n_1 > 3, \frac{2}{n_2} \geq \frac{1}{3}, 3 \leq n_2 \leq 6.$$

Рассматривая каждый случай в отдельности, получим единственное, отличное от предыдущих, решение:

$$n_1 = 3, n_2 = 6.$$

4)  $S_1 = 2, S_2 = S_3 = 1$ . Уравнение (5) принимает вид

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1.$$

Это уравнение имеет два решения, отличных от имеющихся:

1.  $n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 12;$
2.  $n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 6.$

5)  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 1$ . Уравнение (5) принимает вид

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1,$$

и его решение не дает новых значений для  $n_i$ .  
Пусть  $S = 5$ . Уравнение (5) принимает вид

$$\sum_i \frac{S_i}{n_i} = \frac{3}{2}. \quad (8)$$

Возможны следующие случаи:

- 1)  $S_1 = 5;$
- 2)  $S_1 = 4, S_2 = 1;$
- 3)  $S_1 = 3, S_2 = 2;$
- 4)  $S_1 = 3, S_2 = S_3 = 1;$
- 5)  $S_1 = S_2 = 2, S_3 = 1;$
- 6)  $S_1 = 2, S_2 = S_3 = S_4 = 1;$
- 7)  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 1.$

В случае 1) уравнение (8) решений в целых числах не имеет.

2)  $S_1 = 4, S_2 = 1$ . Уравнение (8) имеет вид

$$\frac{4}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{3}{2}.$$

Решение одно:

$$n_1 = 3, n_2 = 6.$$

3)  $S_1 = 3, S_2 = 2$ . В этом случае уравнение (8) имеет вид

$$\frac{3}{n_1} + \frac{2}{n_2} = \frac{3}{2}$$

и единственное решение

$$n_1 = 3, n_2 = 4.$$

Остальные случаи 4) — 7) никаких новых решений не дают.

Пусть  $S = 6$ . Уравнение (5) имеет вид

$$\sum_i \frac{S_i}{n_i} = 2.$$

Возможны одиннадцать случаев распределения  $S_i$ . Все они дают единственное решение:

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 3.$$

Итак, звезды вершин предполагаемых однородных многогранников, эйлерова характеристика которых равна 0, могут иметь только следующие структуры:

1.  $3\{6\}$ ;
2.  $2\{5\}$  и  $\{10\}$ ;
3.  $2\{8\}$  и  $\{4\}$ ;
4.  $2\{12\}$  и  $\{3\}$ ;
5.  $\{3\}, \{7\}$  и  $\{42\}$ ;
6.  $\{3\}, \{8\}$  и  $\{24\}$ ;
7.  $\{3\}, \{9\}$  и  $\{18\}$ ;
8.  $\{3\}, \{10\}$  и  $\{15\}$ ;
9.  $\{4\}, \{5\}$  и  $\{20\}$ ;
10.  $\{4\}, \{6\}$  и  $\{12\}$ ;
11.  $4\{4\}$ ;
12.  $2\{3\}$  и  $2\{6\}$ ;
13.  $2\{3\}, \{4\}$  и  $\{12\}$ ;
14.  $\{3\}, 2\{4\}$  и  $\{6\}$ ;
15.  $4\{3\}$  и  $\{6\}$ ;
16.  $3\{3\}$  и  $2\{4\}$ ;
17.  $6\{3\}$ ,

где  $k\{n\}$  обозначает  $k$  инцидентных данной вершине  $n$ -угольников.

Можно заметить, что в случае выпуклых граней сумма всех плоских углов при вершине каждой из перечисленных звезд равна  $2\pi$ .

Отсюда следует, с одной стороны, что для каждого такого многогранника универсальной накрывающей поверхностью будет плоскость. С другой стороны, каждый такой многогранник определяет покрытие плоскости правильными выпуклыми многоугольниками, среди которых только конечное число различных. В каждом конкретном случае покрытия плоскости звезды вершин должны быть одинаковы.

Если звезды вершины типа 2, 5, 6, 7, 8, 9, 13, то ей не соответствует покрытие всей плоскости. Будем поэтому рассматривать только звезды вершин типа 1, 3, 4, 10, 11, 12, 14, 15, 16 и 17. Этим звездам вершин соответствуют одиннадцать типов покрытия всей плоскости. Звезда 16 дает два типа покрытия всей плоскости.

Докажем, что только развертка типа 12 реализуется в виде многогранника.

## § 2. Рассмотрим многогранники с выпуклыми гранями.

Кокстэр доказал, что все вершины однородного многогранника лежат на сфере [2]. Пусть  $R$  — однородный многогранник,  $A$  — вершина  $R$ ,  $K$  — предельный угол  $R$  в точке  $A$  [3],  $A_i$  — концы ребер многогранника, сходящихся в  $A$ . Из теоремы Кокстера следует, что точки  $A_i$  лежат в одной плоскости. Сечение предельного угла  $K$  этой плоскостью является многоугольником, который называют *вершинной фигурой* многогранника  $R$ .

В рассматриваемых многогранниках вершинными фигурами не могут быть выпуклые многоугольники, так как тогда многогранный угол должен быть выпуклым, т. е. сумма его плоских углов должна быть меньше  $2\pi$ .

В звездах 1, 3, 4, 10 вершинными фигурами могут быть только треугольники. Следовательно, развертки типа 1, 3, 4 и 10 не могут быть реализованы в многогранники.

Вершинными фигурами рассматриваемых многогранников могут быть только невыпуклые многоугольники, вокруг которых можно описать окружность.

Рассмотрим звезду 11. Здесь вершинной фигурой может быть или дважды покрытый отрезок (рис. 1, а) или угол с дважды покрытыми сторонами (рис. 1, б). В первом случае многогранник вырождается в четырежды покрытый квадрат, во втором получаем бесконечную серию вырожденных многогранников, представляющих собой дважды покрытую квадратную поверхность правильной призмы.

Рассмотрим звезду 12.

Вершинной фигурой может быть только пересеченная трапеция (рис. 1, в). Покажем, что боковые стороны ее параллельны.

Допустим, что диагонали шестиугольников образуют со стороной треугольника разные углы. Тогда в звезде вершины плоскость треугольника образует с плоскостями инцидентных шестиугольников также разные

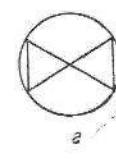
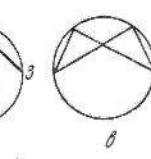
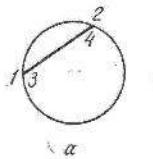


Рис. 1.

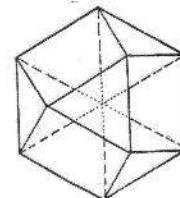


Рис. 2.

двугранные углы. Выберем на многограннике произвольный треугольник. Ему инцидентны три шестиугольника. Каждая пара из этих шестиугольников образует с исходным треугольником разные двугранные углы. Но это невозможно. Отсюда следует, что вершинной фигурой многогранника должен быть пересеченный прямоугольник (рис. 1, в).

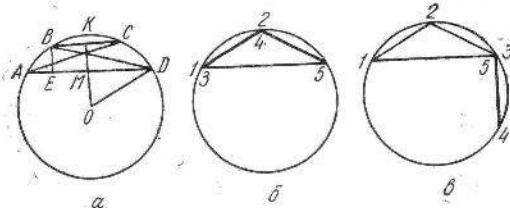


Рис. 3.

Этой вершинной фигуре соответствует ориентируемый однородный многогранник, гомеоморфный тору, который имеет 12 вершин, 24 ребра, 4 шестиугольных и 8 треугольных граней. Он называется октатетраэдром (рис. 2). Все его шестиугольные грани пересекаются в центре описанной сферы.

Рассмотрим звезду 14.

Вершинной фигурой может быть только пересеченная трапеция. Найдем радиус описанной окружности вокруг этой вершинной фигуры. Если  $BC = 1^*$ , то  $AC = BD = \sqrt{2}$  и  $AD = \sqrt{3}$  (рис. 3, а).

$$BE = KM = \sqrt{2 - \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{4}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}.$$

\* Будем и впредь предполагать для простоты, что длина ребра однородного многогранника равна 1.

Из треугольников  $OKC$  и  $OMD$  находим:

$$R^2 = \left( \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + OM \right)^2 + \frac{1}{4}, \quad R^2 = \frac{3}{4} + OM^2,$$

откуда

$$OM = \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}},$$

$$R^2 = \frac{3}{4} + \frac{2-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})} = 1, \quad R = 1.$$

Если радиус описанной окружности вокруг вершинной фигуры равен 1, тогда звезда вершины плоская и многогранника с этой вершинной фигурой не существует.

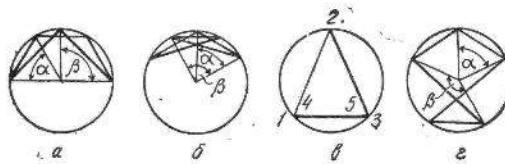


Рис. 4.

Рассмотрим звезду 15.

Вершинными фигурами могут быть вырожденные многоугольники, изображенные на рис. 3, б и 3, в. Радиус описанной окружности вокруг них в обоих случаях равен 1. Многогранники вырождаются в плоские фигуры.

Рассмотрим звезду 16.

Здесь могут быть четыре вида вершинных фигур.

1). Вершинная фигура изображена на рис. 4, а. Вычислим радиус описанной окружности:

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{2R}, \quad \beta = 2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2R}. \quad (9)$$

Очевидно, что  $3\alpha = 2\beta$ , т. е.

$$6 \arcsin \frac{1}{2R} = 4 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2R}.$$

Это уравнение имеет единственный вещественный положительный корень  $R = 1$ , т. е. многогранника с данной вершинной фигурой не существует.

2). Вершинная фигура изображена на рис. 4, б.

Получаем те же самые соотношения для радиуса описанной окружности, и, следовательно,  $R = 1$ .

3). Вершинная фигура (рис. 4, в) представляет собой равнобедренный треугольник, у которого основание трижды покрыто стороной, равной 1. Ей соответствует правильная треугольная призма с трижды покрытыми основаниями.

4). Вершинная фигура изображена на рис. 4, г.

Здесь углы  $\alpha$  и  $\beta$  находятся в соотношении

$$2\beta = 2\pi - \alpha.$$

Подставляя значения (9) для  $\alpha$  и  $\beta$ , найдем

$$2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2R} = \pi - \arcsin \frac{1}{2R}.$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$R = \frac{2\sqrt{7}}{7} < 1. \quad (10)$$

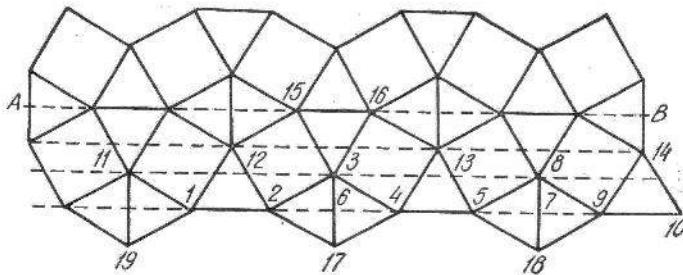


Рис. 5.

Несложные вычисления дают нам значение радиуса описанной вокруг многогранника сферы:

$$r = \frac{\sqrt{21}}{6}. \quad (11)$$

Рассмотрим бесконечную сетку на плоскости, которая определяется разверткой многогранника (рис. 5). Легко доказать, что на рассматриваемом многограннике образ прямой  $a = \{1, 2, 6, 4, 5, 7, 9, 10\}$  является плоской ломаной линией  $a'$ , а стороны  $\{11, 19\}$ ,  $\{3, 17\}$  и  $\{8, 18\}$  параллельны между собой и перпендикулярны плоскости, в которой лежит  $a'$ .

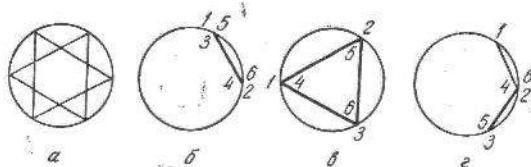


Рис. 6.

Это вытекает из строения звезды вершины многогранника и того факта, что многогранник вписан в сферу. Отсюда и из симметрии развертки многогранника относительно прямой  $a$  заключаем, что плоскость ломаной  $a'$  проходит через центр описанной сферы.

Тогда образы точек 11, 3 и 8 располагаются по одну сторону от плоскости линии  $a'$  на одном и том же расстоянии. Следовательно, они лежат в плоскости, параллельной плоскости линии  $a'$ . Аналогичное утверждение справедливо для точек 12, 13 и 14.

Рассуждая как и в предыдущем случае, получим, что плоскость образа линии  $AB$  на многограннике параллельна плоскости, в которой лежат точки 12, 13 и 14. Следовательно, плоскости линии  $a'$  и образа линии  $AB$  параллельны и, значит, совпадают, так как каждая из них проходит через центр сферы.

Таким образом, вершинная фигура должна быть вписана в большой круг сферы, т. е.  $R = r$ , что по (10) и (11) невозможно.

В этом случае многогранника не существует.

Рассмотрим звезду 17. Возможны четыре типа вершинных фигур.

1. Многогранник с вершинной фигурой, изображенной на рис. 6, а, распадается на тетраэдры.

2. Вершинная фигура (рис. 6, б) вырождается в отрезок, который шесть раз покрывается стороной треугольника. Многогранник вырождается в шесть раз покрытый правильный треугольник.

3. Вершинная фигура (рис. 6, в) вырождается в треугольник, каждая сторона которого дважды покрыта. Многогранник вырождается в тетраэдр с дважды покрытыми гранями.

4. Вершинная фигура (рис. 6, г) вырождается в угол, одна сторона которого дважды покрыта, другая — четырежды. Многогранник вырождается в двугранный угол, грани которого покрыты правильными треугольниками дважды и четырежды.

§ 3. Нами рассмотрены все возможные случаи для многогранников с выпуклыми гранями. Замена выпуклых граней правильными звездчатыми многоугольниками возможна только в случаях звезд 3, 4 и 10. Получаем четыре типа звезд вершин, гранями которых являются соответственно:

- 1) квадрат, восьмиугольник и восьмиугольная звезда;
- 2) квадрат и две восьмиугольные звезды;
- 3) треугольник и две двенадцатиугольные звезды;
- 4) квадрат, шестиугольник и двенадцатиугольная звезда.

Как нетрудно заметить, в звездах вершин, представляющих собой выпуклые трехгранные углы, во всех четырех случаях сумма двух меньших плоских углов равна большему углу, т. е. звезда вершины плоская, и, следовательно, многогранников не существует.

Теорема доказана полностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet-Higgins, J. C. P. Miller. Uniform polyhedra. Philos. trans. roy. soc., London, 246, № 916, ser. A, 401—450, 1954.
2. H. S. M. Coxeter. Regular polytopes. London, 1948.
3. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Поступила в редакцию 7 октября 1965 г.

## ОТОБРАЖЕНИЕ БИАКСИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ КОМПЛЕКСА НА ПРОСТРАНСТВО ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Г. Станилов (София)

Пусть  $j$  и  $k$  — базисные прямые биаксиального пространства  $B_3$ . Мы ограничимся рассмотрением случая, когда они действительны. Выберем подвижной тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  так, чтобы эти прямые определялись плюckerовыми координатами

$$j = [A_1, A_2 + A_3], \quad k = [A_3, A_4 + A_1].$$

Из равенств

$$dj \equiv 0 \pmod{j}, \quad dk \equiv 0 \pmod{k},$$

обеспечивающих инвариантность прямых, будут следовать восемь уравнений для форм  $\omega_i^j$ , участвующих в деривационных уравнениях проективного пространства:

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Вводя подходящие обозначения, можно получить следующие формулы для инфинитезимальных преобразований координат вершин тетраэдра:

$$\begin{aligned} dA_1 &= (\theta_4 - \theta_7) A_1 - \theta_1 (A_2 + A_3), \\ dA_2 &= \theta_5 A_1 + \theta_3 A_2 + \theta_6 A_3 + \theta_2 A_4, \\ dA_3 &= (\theta_3 - \theta_6) A_3 - \theta_2 (A_4 + A_1), \\ dA_4 &= \theta_7 A_1 + \theta_1 A_2 + \theta_5 A_3 + \theta_4 A_4. \end{aligned} \tag{1}$$

Внешнее дифференцирование (1) приводит к уравнениям структуры пространства  $B_3$ .

$$\begin{aligned} D\theta_1 &= [\theta_1, \theta_3 - \theta_4 + \theta_7], \quad D\theta_2 = [\theta_2, \theta_4 - \theta_3 + \theta_6], \\ D\theta_3 &= [\theta_1, \theta_5 - \theta_2], \quad D\theta_4 = [\theta_2, \theta_8 - \theta_1], \\ D\theta_5 &= [\theta_2, \theta_6 + \theta_7] + [\theta_5, \theta_4 - \theta_3 - \theta_7], \\ D\theta_6 &= D\theta_7 = [\theta_1, \theta_5] + [\theta_2, \theta_8], \\ D\theta_8 &= [\theta_1, \theta_6 + \theta_7] + [\theta_8, \theta_3 - \theta_4 - \theta_6]. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть ребро тетраэдра  $A_2A_3$  описывает комплекс прямых. Тогда формы  $\theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8$  являются главными. Оказывается, что

$$p = (\theta_6 + \theta_7)^2 - 4\theta_5\theta_8, \tag{3}$$

$$r = \theta_6\theta_7 - \theta_5\theta_8, \tag{4}$$

являются относительными инвариантными квадратическими формами. Уравнение  $r = 0$  дает торсы, а  $p = 0$  — параболические поверхности комплекса [2].

Пусть теперь фундаментальная квадратическая форма некоторого пространства  $S$  постоянной кривизны  $K$  представлена как сумма квадратов линейных форм:

$$\psi = (\psi^1)^2 + (\psi^2)^2 + (\psi^3)^2, \quad (5)$$

где  $\psi^i$  — базисные формы пространства  $S$ .

В качестве базисных форм биаксиального комплекса можно принять формы  $\theta_5, \theta_8, \theta_6 + \theta_7$ , а дифференциальное уравнение комплекса записать в виде

$$\theta_6 = a\theta_5 + b\theta_8 + c(\theta_6 + \theta_7). \quad (6)$$

Н. И. Кованцов в [1] рассматривал отображение проективной структуры комплекса на пространство  $S$  при помощи формы (4). Таким же путем он нашел важные классы комплексов. Эта задача может быть поставлена и теперь. Ее решение, конечно, не приводит к новым классам комплексов. Он поставил перед нами задачу использовать другие квадратичные формы. Мы воспользуемся формой  $p$ .

Определим отображение комплекса пространства  $B_3$  на пространство  $S$  с помощью следующей линейной подстановки базисных форм:

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \alpha_1\psi^1 + \alpha_2\psi^2 + \alpha_3\psi^3, \\ \theta_8 &= \beta_1\psi^1 + \beta_2\psi^2 + \beta_3\psi^3, \\ \theta_6 + \theta_7 &= \gamma_1\psi^1 + \gamma_2\psi^2 + \gamma_3\psi^3. \end{aligned} \quad (7)$$

При отображении каждому лучу комплекса соответствовала бы определенная точка пространства  $S$ , и чтобы найти это отображение в явном виде, следует проинтегрировать (7). Мы будем рассматривать те отображения, при которых имеет место соотношение

$$\psi = \lambda^2 p, \quad (8)$$

где  $\lambda$  — некоторый множитель пропорциональности. Отсюда, принимая во внимание (3), (5) и используя подстановку (7), получим следующие соотношения между параметрами  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ :

$$\begin{aligned} \lambda^2\gamma_1^2 - 4\alpha_1\beta_1 &= 1, \quad \gamma_1\gamma_2 - 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = 0, \\ \lambda^2\gamma_2^2 - 4\alpha_2\beta_2 &= 1, \quad \gamma_1\gamma_3 - 2(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) = 0, \\ \lambda^2\gamma_3^2 - 4\alpha_3\beta_3 &= 1, \quad \gamma_2\gamma_3 - 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуя тетраэдр пространства  $S$ , подстановку (7) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \frac{1}{2\lambda}(-\psi^2 + i\psi^1), \\ \theta_8 &= \frac{1}{2\lambda}(\psi^2 + i\psi^1), \quad (i^2 = -1), \\ \theta_6 + \theta_7 &= \frac{1}{\lambda}\psi^3 \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} \psi^1 &= -\lambda i(\theta_5 + \theta_8), \\ \psi^2 &= -\lambda(\theta_5 - \theta_8), \\ \psi^3 &= \lambda(\theta_6 + \theta_7). \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь наша задача формулируется так. Будем искать те комплексы в биаксиальном пространстве  $B_3$ , которые допускают отображение вида

(11) на пространство  $S$  постоянной кривизны  $K$ . Решение этой задачи оказывается неожиданным: любой комплекс можно отобразить на пространство  $S$ .

Продифференцируем внешним образом (11), учитя, что формы  $\theta_5, \theta_8, \theta_6 + \theta_7$  удовлетворяют уравнениям структуры (2) биаксиального пространства, а формы  $\psi^i$  — уравнениям структуры пространства  $S$ :

$$\begin{aligned} D\psi^i &= [\psi^i_j], \quad \psi^i_j + \psi^i_j = 0, \\ D\psi^j_i &= [\psi^s_i \psi^j_s] - K[\psi^i \psi^j], \end{aligned} \quad (12)$$

где  $K$  — кривизна пространства  $S$ . Получим следующие квадратические уравнения:

$$\begin{aligned} [-\lambda\psi_1^2 + id\lambda + \lambda i(\theta_3 - \theta_4 + \theta_7), \theta_5] + [\lambda\psi_1^2 + id\lambda + \lambda i(\theta_4 - \theta_3 + \theta_8), \theta_8] + \\ + [\lambda\psi_1^2 + \lambda i(\theta_1 + \theta_2), \theta_6 + \theta_7] = 0, \\ [\lambda i\psi_1^2 + d\lambda + \lambda(\theta_3 - \theta_4 + \theta_7), \theta_5] + [\lambda i\psi_1^2 - d\lambda + \lambda(\theta_3 - \theta_4 - \theta_6), \theta_8] + \\ + [\lambda i\psi_2^2 + \lambda(\theta_2 - \theta_1), \theta_6 + \theta_7] = 0, \\ [-\lambda i\psi_1^2 - \lambda\psi_2^2 + 2\lambda\theta_1, \theta_5] + [-\lambda i\psi_1^2 + \lambda\psi_2^2 + 2\lambda\theta_2, \theta_8] + [d\lambda, \theta_6 + \theta_7] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, по лемме Кардана,

$$\begin{aligned} -\lambda\psi_1^2 + id\lambda + \lambda i(\theta_3 - \theta_4 + \theta_7) &= a_1\theta_5 + a_2\theta_8 + a_3(\theta_6 + \theta_7), \\ \lambda\psi_1^2 + id\lambda + \lambda i(\theta_4 - \theta_3 + \theta_8) &= b_1\theta_5 + b_2\theta_8 + b_3(\theta_6 + \theta_7), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \lambda\psi_1^2 + \lambda i(\theta_1 + \theta_2) &= c_1\theta_5 + c_2\theta_8 + c_3(\theta_6 + \theta_7); \\ \lambda i\psi_1^2 + d\lambda + \lambda(\theta_3 - \theta_4 + \theta_7) &= p_1\theta_5 + p_2\theta_8 + p_3(\theta_6 + \theta_7), \\ \lambda i\psi_1^2 - d\lambda + \lambda(\theta_3 - \theta_4 - \theta_6) &= q_1\theta_5 + q_2\theta_8 + q_3(\theta_6 + \theta_7), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda\psi_2^2 + \lambda(\theta_2 - \theta_1) &= r_1\theta_5 + r_2\theta_8 + r_3(\theta_6 + \theta_7); \\ -\lambda i\psi_1^2 - \lambda\psi_2^2 + 2\lambda\theta_1 &= s_1\theta_5 + s_2\theta_8 + s_3(\theta_6 + \theta_7), \\ -\lambda i\psi_1^2 + \lambda\psi_2^2 + 2\lambda\theta_2 &= t_1\theta_5 + t_2\theta_8 + t_3(\theta_6 + \theta_7), \end{aligned} \quad (15)$$

$$d\lambda = u_1\theta_5 + u_2\theta_8 + u_3(\theta_6 + \theta_7),$$

причем

$$\begin{aligned} a_2 &= b_1, \quad a_3 = c_1, \quad b_3 = c_2, \\ p_2 &= q_1, \quad p_3 = r_1, \quad q_3 = r_2 \\ s_2 &= t_1, \quad s_3 = u_1, \quad t_3 = u_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Из девяти равенств (13), (14), (15) только четыре оказываются независимыми. Эти последние могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} d\ln\lambda &= \lambda_1\theta_5 + \lambda_2\theta_8 + \lambda_3(\theta_6 + \theta_7), \\ \psi_1^2 &= i(\theta_3 - \theta_4) + \frac{1}{2}i(\theta_7 - \theta_6) - i\lambda_1\theta_5 + i\lambda_2\theta_8, \\ \psi_1^2 &= -i(\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2}i(1 + 2\lambda_3)(\theta_5 + \theta_8) + \frac{1}{2}i(\lambda_1 + \lambda_2)(\theta_6 + \theta_7), \\ \psi_2^2 &= \theta_1 - \theta_2 + \frac{1}{2}(1 + 2\lambda_3)(\theta_5 - \theta_8) + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)(\theta_6 + \theta_7). \end{aligned} \quad (17)$$

Продолжим равенство (17<sub>1</sub>):

$$\begin{aligned} d\lambda_1 + \lambda_1(\theta_3 - \theta_4 + \theta_7) + 2\lambda_3\theta_1 &= \lambda_{11}\theta_5 + \lambda_{12}\theta_8 + \lambda_{13}(\theta_6 + \theta_7), \\ d\lambda_2 + \lambda_2(\theta_4 - \theta_3 + \theta_6) + 2\lambda_3\theta_2 &= \lambda_{12}\theta_5 + \lambda_{22}\theta_8 + \lambda_{23}(\theta_6 + \theta_7), \\ d\lambda_3 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\theta_1 &= \lambda_{13}\theta_5 + \lambda_{23}\theta_8 + \lambda_{33}(\theta_6 + \theta_7), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\lambda_{ij}$  — параметры продолжения. Продифференцируем также и остальные (17). Так как формы  $\theta_5, \theta_8, \theta_6 + \theta_7$  — независимые, получим

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= \lambda_1^2, \quad \lambda_{22} = \lambda_2^2, \quad \lambda_{12} = K\lambda^2 + \frac{1}{4}(1+2\lambda_3)^2, \\ \lambda_{13} &= \frac{1}{2}(1+2\lambda_3)\lambda_1, \quad \lambda_{23} = \frac{1}{2}(1+2\lambda_3)\lambda_2, \\ \lambda_{33} &= \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{4}(1+2\lambda_3) + \frac{1}{8}(1+2\lambda_3)^2 - \frac{1}{2}K\lambda^2.\end{aligned}\quad (19)$$

Продифференцируем теперь внешним образом равенства (18). Имея в виду (19), получим тождества. Это означает, что система (11), (17), (18) вполне интегрируема. Присоединим к этой системе еще дифференциальное уравнение (6) комплекса. Покажем, что полученная система — в инволюции. Действительно, продолжим уравнение (6)

$$[\varphi_1, \theta_5] + [\varphi_2, \theta_8] + [\varphi_3, \theta_6 + \theta_7] = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= da + a(\theta_3 - \theta_4 + \theta_7) + (2c - 1)\theta_1, \\ \varphi_2 &= db + b(\theta_4 - \theta_3 + \theta_6) + (2c - 1)\theta_2, \\ \varphi_3 &= dc + a\theta_2 + b\theta_1.\end{aligned}$$

Развертывая (20) по лемме Картана, получим

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= x_1\theta_5 + x_2\theta_8 + x_3(\theta_6 + \theta_7), \\ \varphi_2 &= x_2\theta_5 + x_4\theta_8 + x_5(\theta_6 + \theta_7), \\ \varphi_3 &= x_3\theta_5 + x_5\theta_8 + x_6(\theta_6 + \theta_7).\end{aligned}$$

Мы имеем таким образом  $s_1 = 1$  ковариант,  $q = 3$  характеристических форм  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . При невозрастающих характеристиках, из равенства  $s_1 + s_2 + s_3 = q$  имеем  $s_2 = s_3 = 1$ . Следовательно, число Картана  $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 6$ . Но таково же и число  $N = 6$  параметров  $x_i$ . Следовательно, система в инволюции и широта решения этой системы определяется с произволом  $s_3 = 1$  функции трех аргументов. Но с таким же произволом определяется и комплекс. Тогда имеет место следующая

**Теорема.** Любой комплекс можно отобразить при помощи квадратичной формы  $r$  на пространство постоянной кривизны.

Заметим, что система (17<sub>1</sub>), (18) определяет  $\lambda, \lambda_i$  с произволом четырех произвольных констант. Положим  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Эти равенства имеют место только в том случае, когда  $\lambda$  — константа. Из равенств (18) следует, что  $\lambda_{ij} = 0$ . Теперь равенства (19) дадут нам

$$K = -\frac{1}{4\lambda^2}, \quad (21)$$

т. е. отображение (11), если  $\lambda$  — константа, является отображением на пространство постоянной отрицательной кривизны.

Выясним характер отображения (11). Подстановка (11) показывает, что системе  $\psi^i = 0$  соответствует система

$$\theta_5 = \theta_8 = \theta_6 + \theta_7 = 0. \quad (22)$$

Присоединим к этой системе уравнение (6) комплекса. Это даст  $\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$ . Уравнения (1) показывают, что луч комплекса закреплен. Это означает, что точка пространства  $S$  отображается в луч комплекса биаксиального пространства. Справедливо и обратное утверждение.

Рассмотрим систему (22) вне всякой связи с комплексом. Она определяет линейчатую поверхность в биаксиальном пространстве. Чем ха-

рактеризуется эта поверхность? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим произвольную линейчатую поверхность

$$\theta_6 = a\theta_7, \quad \theta_8 = b\theta_7, \quad \theta_9 = c\theta_7. \quad (23)$$

Соприкасающаяся квадрика к этой поверхности определяется уравнениями

$$\begin{aligned} A_2A_2 &= 0, \quad A_2A_4 = 0, \quad A_4A_4 = 0, \\ d(A_2A_2) &= 0, \quad d(A_2A_4) = 0, \quad d(A_4A_4) = 0, \\ d^2(A_2A_2) &= 0, \quad d^2(A_2A_4) = 0, \quad d^2(A_4A_4) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $PP = 0$  — уравнение квадрики с текущей точкой  $P$ . Потребуем, чтобы она совпала с основной квадрикой поверхности (23), т. е. чтобы она содержала абсолютные прямые. Это немедленно приводит к равенствам  $a = c = b + 1 = 0$  и тогда выполняются равенства (22). Следующие дифференцирования (24) дают тождества. Следовательно, поверхность (22) является квадрикой. Обозначим ее символом  $P_2$ . Можно высказать следующее предположение.

**Теорема.** Отображение (11) точек пространства  $S$  на прямые биаксиального пространства неоднозначно. Каждая точка отображается на целую поверхность  $P_2$  и наоборот. В случае, когда комплекс не распадается в двупараметрическое семейство  $P_2$ -поверхностей, его отображение на  $S$  взаимно однозначно. В противном случае он отображается в поверхность пространства  $S$ .

Комплексы, которые распадаются в двупараметрические семейства  $P_2$ -поверхностей назовем  $P$ -комплексами. Легко можно показать, что любой  $P$ -комплекс можно представить уравнением одного из следующих трех видов:

$$\theta_6 + \theta_7 = a\theta_3 + b\theta_8, \quad (25)$$

$$\theta_3 = \theta_8, \quad (26)$$

$$\theta_3 = 0. \quad (27)$$

Комплексы  $\{A_2A_4\}$ , определенные уравнением (25), геометрически определяются следующим образом. Комплекс  $\{A_2A_4\}$  и его сопряженный образ  $\{A_2\bar{A}_4\}$  в биаксиальной инволюции образуют пару  $T$ -комплексов. Комплексы (26) обладают двумя семействами параболических торсов, а (27) — только одним.

Отметим, что возможность отображения  $P_2$ -поверхностей на неевклидовы пространства обнаружено Н. И. Кованцовым в одной еще не опубликованной работе. Мы, кроме того, нашли аналитически это отображение и применили его для отображения биаксиальной структуры комплекса на пространства постоянной кривизны.

Наконец, я хочу выразить сердечную благодарность Н. И. Кованцову, который со своими цепными замечаниями способствовал улучшению работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Изометрическое отображение проективной структуры комплекса на пространство постоянной кривизны. «Изв. вузов, серия математическая», № 4, 1960.
2. Г. Станилов. К биаксиальной теории конгруэнции прямых. Comment. Math. Univ. Carolinae Praha 4, 3. 1963.

Поступила в редакцию 14 декабря 1964 г.

---

## О ФОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ КРИВЫХ 3-ГО ПОРЯДКА

*E. C. Столова* (Ровно)

В статье излагаются некоторые фокальные свойства кривых 3-го порядка по аналогии с фокальными свойствами конических сечений.

Фокусом  $F$  кривой называется, как известно, точка пересечения двух касательных, проведенных к ней из циклических точек. Прямая, соединяющая мнимые точки касания кривой с этими двумя касательными, является директрисой кривой (по аналогии с директрисами конических сечений). Директриса, соответствующая действительному фокусу  $F$ , действительна; мнимому же фокусу соответствует и мнимая директриса. Если фокус находится на оси симметрии кривой, то директриса перпендикулярна ей, так как соответствующие точки касания комплексно сопряжены. Отрезок директрисы между точками касания является полярной хордой точки  $F$  (у конического сечения директриса служит также полярой соответствующего фокуса).

Исследования производятся над циркулярной (проходящей через циклические точки) кривой 3-го порядка — монодиаметральной недостаточной или дефективной гиперболой, имеющей два фокуса  $F_1(\alpha, 0)$  и  $F_2(\beta, 0)$ .

Уравнение рассматриваемой кривой приведено к канонической форме (Ньютона)

$$xy^2 = -x^3 + 2bx^2 + cx + d. \quad (1)$$

Каждое коническое сечение имеет известный инвариант, равный отношению длины фокального радиуса — вектора любой точки кривой к ее расстоянию от соответствующей директрисы и называемый эксцентриситетом.

В статье доказывается, что для любой точки кривой 3-го порядка также существует некоторый своеобразный инвариант.

Одновременно устанавливается зависимость между коэффициентами уравнения (1) и координатами фокусов.

1°. Для того, чтобы точка  $F_1(\alpha, 0)$  служила фокусом циркулярной кривой (1), необходимо и достаточно, чтобы каждая изотропная прямая, проходящая через точку  $F_1$ , являлась касательной к кривой (1), т. е. она должна иметь две совпадающие общие точки с кривой, кроме общей циклической точки. А это требование удовлетворяется при наличии зависимости

$$d = \frac{(\alpha^2 + c)^2}{8(b - \alpha)}, \quad (2)$$

при которой уравнение рассматриваемой кривой приводится к следующему виду

$$xy^2 = -x^3 + 2bx^2 + cx + \frac{(x^2 + c)^2}{8(b-a)}, \quad (3)$$

а уравнение директрисы, соответствующей фокусу  $F_1$  — к виду

$$4(b-a)x + x^2 + c = 0. \quad (4)$$

Фокальный радиус вектор  $\rho_1$  любой точки  $M(x, y)$  кривой (3) равен  $\frac{4(b-a)x + x^2 + c}{2\sqrt{2(b-a)x}}$ , а расстояние  $d_1$  той же точки  $M$  от директрисы (4) равно  $\frac{4(b-a)x + x^2 + c}{4(b-a)}$ . Отношение  $\frac{\rho_1}{d_1}$ , равное

$$\sqrt{\frac{2(b-a)}{x}}, \quad (5)$$

обозначим  $\varepsilon_1$  по аналогии с эксцентриситетом конического сечения (в равенстве (5)  $x$  обозначает абсциссу взятой точки  $M$ ).

Аналогично для той же точки  $M$  относительно второго фокуса  $F_2(3, 0)$  и соответствующей ему директрисы  $4(b-\beta)x + \beta^2 + c = 0$  имеет место равенство

$$\frac{\rho_2}{d_2} = \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{2(b-\beta)}{x}}. \quad (6)$$

Отношение  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ , равное  $\sqrt{\frac{b-a}{b-\beta}}$  и представляющее собой ангармоническое отношение четырех отрезков

$$\frac{\rho_1}{d_1} : \frac{\rho_2}{d_2},$$

является инвариантом кривой (3) и может быть названо квазиэксцентриситетом кривой 3-го порядка.

2°. Применяя равенство (2) ко второму фокусу  $F_2(3, 0)$ , получим следующие зависимости между коэффициентами уравнения (3) и координатами фокусов  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{b-\beta} &= \left(\frac{x^2 + c}{\beta^2 + c}\right)^2, \\ c &= \frac{x^2 \sqrt{b-\beta} - \beta^2 \sqrt{b-a}}{\sqrt{b-a} - \sqrt{b-\beta}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как ни на коэффициенты уравнения (3), ни на координаты фокусов  $F_1$  и  $F_2$  кривой не наложены никакие ограничения, то доказанные фокальные свойства и соотношения (7) можно считать общими для всех циркулярных кривых 3-го порядка.

В качестве примера рассмотрим циркулярную монодиаметральную дефективную гиперболу [1]

$$xy^2 = -x^3 + \frac{4mn}{m^2 - n^2} x^2 + \frac{4mn}{(m-n)^2} x - \frac{(m+n)^3}{(m-n)^3},$$

имеющую два действительных фокуса

$$F_1\left(\frac{2n}{m-n}, 0\right), F_2\left(\frac{2m}{m-n}, 0\right)$$

и две действительные директрисы

$$2n(m-n)x - (m+n)^2 = 0, \quad 2m(m-n)x - (m+n)^2 = 0.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{2n(m-n)x - (m+n)^2}{(m-n)\sqrt{(n^2-m^2)x}}, \quad \rho_2 = \frac{2m(m-n)x - (m+n)^2}{(m-n)\sqrt{(n^2-m^2)x}}; \\ d_1 &= \left| \frac{2n(m-n)x - (m+n)^2}{2n(m-n)} \right|, \quad d_2 = \left| \frac{2m(m-n)x - (m+n)^2}{2m(m-n)} \right|; \\ \varepsilon_1 &= \frac{\rho_1}{d_1} = \frac{2n}{\sqrt{(n^2-m^2)x}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho_2}{d_2} = \frac{2m}{\sqrt{(n^2-m^2)x}}; \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. С. Столова. Образование кривой 3-го порядка как геометрического места точек по аналогии с коническими сечениями. Труды Укр. ин-та инженеров водного хозяйства, вып. 10, 1963, 136—139.
2. А. С. Смогоржевский и Е. С. Столова. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. Физматгиз, М., 1961.

Поступила в редакцию 12 октября 1964 г.

## О ПЛОСКОСТЯХ И УГЛАХ МЕЖДУ ОБЪЕКТАМИ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

**Ф. В. Томашевич** (Запорожье), **С. У. Куртяков** (Киев)

Определим векторное линейное метрическое пространство как множество элементов двух родов — точек и векторов, — удовлетворяющих определенным соотношениям, причем над векторами определены операции сложения, умножения на вещественное число, скалярного умножения. Точнее, примем аксиомы групп I, II, IV, данные в работе ([1], гл. 1, § 6), кроме аксиомы III размерности. Определенное таким образом векторное пространство не предполагается конечномерным или сепарабельным.

1°.  $n$  векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \quad (1)$$

линейно независимы, если определитель Грама

$$g(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n) = |(\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j)| \neq 0.$$

Если

$$\operatorname{rang}((\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j))_{i, j=1, \dots, n} = m < n,$$

то среди векторов (1) имеется точно  $m$  линейно независимых.

Пусть заданы

$$\left. \begin{array}{l} s\text{-плоскость } \mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad (2') \\ \text{и } t\text{-плоскость } \mathbf{r} = \mathbf{r}_t + \sum_{i=s+1}^{s+t} \lambda_i \mathbf{a}_i. \quad (2'') \end{array} \right\} \quad (2)$$

**Теорема.** Пусть

$$\operatorname{rang}((\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j))_{i, j=1, \dots, s+t} = m < s+t, \quad (3)$$

Примем, что линейно независимы векторы  $\mathbf{a}_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ ;  $g = g(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m) \neq 0$ . Обозначим

$$\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_s = \mathbf{a}_0. \quad (4)$$

Вектор

$$\mathbf{a} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m \\ (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0) & (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1) & \dots & (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{a}_m \mathbf{a}_0) & (\mathbf{a}_m \mathbf{a}_1) & \dots & (\mathbf{a}_m \mathbf{a}_m) \end{vmatrix} \quad (5)$$

является общим перпендикуляром к плоскостям (2) с концами, принадлежащими этим плоскостям и определяемыми векторами

$$\begin{aligned} r_1 &= r_s - \frac{1}{g} \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_s & 0 & \dots & 0 \\ (\alpha_1 \alpha_0) & (\alpha_1 \alpha_1) & \dots & (\alpha_1 \alpha_s) & (\alpha_1 \alpha_{s+1}) & \dots & (\alpha_1 \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_m \alpha_0) & (\alpha_m \alpha_1) & \dots & (\alpha_m \alpha_s) & (\alpha_m \alpha_{s+1}) & \dots & (\alpha_m \alpha_m) \end{vmatrix}, \\ r_2 &= r_t + \frac{1}{g} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{s+1} & \dots & \alpha_m \\ (\alpha_1 \alpha_0) & (\alpha_1 \alpha_1) & \dots & (\alpha_1 \alpha_s) & (\alpha_1 \alpha_{s+1}) & \dots & (\alpha_1 \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_m \alpha_0) & (\alpha_m \alpha_1) & \dots & (\alpha_m \alpha_s) & (\alpha_m \alpha_{s+1}) & \dots & (\alpha_m \alpha_m) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

**Доказательство.** Так как  $(\alpha \alpha_k) = 0$ , ( $k = 1, \dots, m$ ), то вектор  $\alpha$  является общим перпендикуляром к плоскостям (2). Справедливость теоремы подтверждается разложением (5), которое согласно (4) и (6) представляется в виде

$$\alpha = r_2 - r_1.$$

*Следствия*

1. Расстояние между плоскостями (2)

$$d = \sqrt{\langle \alpha \alpha \rangle} = \sqrt{\langle \alpha \alpha_0 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{g} g(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m)}^* \quad (7)$$

2. Условие пересечения плоскостей (2)

$$g(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m) = 0. \quad (8)$$

3. Если  $t = 0$  (тогда  $m = s$ ), то

$$\alpha_0 = \alpha'_0 + \alpha, \quad (9)$$

где

$$\alpha'_0 = -\frac{1}{g} \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_s \\ (\alpha_1 \alpha_0) & (\alpha_1 \alpha_1) & \dots & (\alpha_1 \alpha_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_s \alpha_0) & (\alpha_s \alpha_1) & \dots & (\alpha_s \alpha_s) \end{vmatrix} \quad (10)$$

— проекция вектора  $\alpha_0$  на  $s$ -плоскость,

$$g = g(\alpha_1 \dots \alpha_s) \neq 0.$$

4. Если вектор  $\alpha_0$  линейно зависим с векторами  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , то  $\alpha_0 = \alpha'_0$  и согласно (10) получаем разложение вектора  $\alpha_0$  по векторам  $\alpha_i$ :

$$\alpha_0 = -\frac{1}{g} \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_s \\ (\alpha_1 \alpha_0) & (\alpha_1 \alpha_1) & \dots & (\alpha_1 \alpha_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_s \alpha_0) & (\alpha_s \alpha_1) & \dots & (\alpha_s \alpha_s) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

5. Пусть

$$\text{rang } ((\alpha_i \alpha_j))_{i,j=1,\dots,s} = m < s,$$

Примем, что линейно независимы векторы  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Тогда каждый из остальных векторов системы  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  согласно (11)

\* Формула (7) приводится в работе (2) (31.17) для векторного пространства с конечной размерностью.

будет такой линейной комбинацией первых:

$$\alpha_l = -\frac{1}{g} \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ (\alpha_1 \alpha_l) & (\alpha_1 \alpha_1) & \dots & (\alpha_1 \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_m \alpha_l) & (\alpha_m \alpha_1) & \dots & (\alpha_m \alpha_m) \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где  $l = m + 1, \dots, s$ ,  $g = g(\alpha_1 \dots \alpha_s) \neq 0$ .

### 6. Уравнение проекции $t$ -поверхности

$$r = r(\mu_1, \dots, \mu_t)$$

на  $s$ -плоскость (2') согласно (10)

$$r = r_s - \frac{1}{g} \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_s \\ (\alpha_1, \alpha_0(\mu_1, \dots, \mu_t)) & (\alpha_1 \alpha_1) & \dots & (\alpha_1 \alpha_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_s, \alpha_0(\mu_1, \dots, \mu_t)) & (\alpha_s \alpha_1) & \dots & (\alpha_s \alpha_s) \end{vmatrix},$$

где

$$\alpha_0(\mu_1, \dots, \mu_t) = r(\mu_1, \dots, \mu_t) - r_s, \quad g = g(\alpha_1 \dots \alpha_s) \neq 0.$$

7. Внутреннее уравнение поверхности пересечения  $t$ -поверхности (13) с  $s$ -плоскостью (2')

$$g(\alpha_0(\mu_1, \dots, \mu_t), \alpha_1 \dots \alpha_s) = 0$$

(левая часть равна расстоянию точки поверхности (13) от  $s$ -плоскости, умноженному на  $g$ ).

2°. Пусть заданы

$$s\text{-плоскость } r = r_s + \sum_{i=1}^s \lambda_i \alpha_i, \quad (14')$$

$$t\text{-плоскость } r = r_t + \sum_{j=1}^t \mu_j b_j, \quad (14'')$$

причем  $t \leq s$ . Можно ввести понятие углов между плоскостями (14) в векторном пространстве, как и в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, посредством стационарных значений квадрата косинусов углов, каждый из которых образован вектором  $s$ -плоскости и вектором  $t$ -плоскости. Тогда ([1], гл. 1, § 14; [2], § 31.5) 2-плоскость каждого из углов между плоскостями (14) 1-перпендикулярна<sup>1</sup> обеим плоскостям (14)<sup>2</sup>.

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы вектором

$$b = \sum_{j=1}^t \mu_j b_j$$

$t$ -плоскости вместе со своей проекцией

$$b' = \sum_{j=1}^t \mu_j b'_j$$

<sup>1</sup> Или  $\frac{1}{2}$  = перпендикулярна, если  $t \geq 2$ , согласно [2], § 30.

<sup>2</sup> Это предложение естественно принять за определение угла между плоскостями (14). Такое определение, представляющее собою обобщение понятия линейного угла двугранного угла является геометрическим по своему существу, не требует никаких предварительных негеометрических понятий (как производная, частная производная, стационарные значения функции и др.).

на  $s$ -плоскость был образован один из углов  $\alpha = (\widehat{\mathbf{b}_k \mathbf{b}_l})$  между плоскостями (14), является перпендикулярность вектора  $\mathbf{b}' - \omega \mathbf{b}$   $t$ -плоскости, т. е. система

$$(\mathbf{b}' - \omega \mathbf{b}, \mathbf{b}_j) = 0, \quad j = 1, \dots, t, \quad (15)$$

где  $\omega = \cos^2 \alpha$ .

Введем обозначения:

$$(\mathbf{b}_k \mathbf{b}_l) = b_{kl}, \quad (\mathbf{b}'_k \mathbf{b}'_l) = (\mathbf{b}_k \mathbf{b}'_l) = b'_{kl}, \quad (\mathbf{b}''_k \mathbf{b}''_l) = (\mathbf{b}_k \mathbf{b}''_l) = b''_{kl},$$

где

$$\mathbf{b}''_k = \mathbf{b}_k - \mathbf{b}'_k,$$

а также

$$\sigma = \sin^2 \alpha, \quad \tau = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

**Теорема.** Квадраты косинусов, синусов, тангенсов углов между  $t$ - и  $s$ -плоскостями (14) являются соответственно корнями уравнений

$$|b'_{kl} - \omega b_{kl}| = 0, \quad (16')$$

$$|b''_{kl} - \sigma b_{kl}| = 0, \quad (16'')$$

$$|b''_{kl} - \tau b'_k| = 0 \quad (16''')$$

(левые части представляют определители),  $k, l = 1, \dots, t$ .

**Доказательство.** Перепишем (15) в виде

$$\sum_{k=1}^t (b'_{kl} - \omega b_{kl}) \mu_k = 0, \quad l = 1, \dots, t. \quad (17)$$

Условием существования неупорядоченного решения  $\mu_1, \dots, \mu_t$  системы (17) является равенство (16') нулю определителя этой системы.

**Следствие.** Введем обозначения для косинусов углов между векторами:

$$\cos(\widehat{\mathbf{b}_k \mathbf{b}_l}) = \rho_{kl}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{b}'_k \mathbf{b}'_l}) = \rho_{kl'}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{b}''_k \mathbf{b}''_l}) = \rho_{kl''}.$$

Тогда согласно (16') посредством деления на  $|\mathbf{b}_k| \cdot |\mathbf{b}_l|$  получим такую связь между косинусами углов (без посредства линейных элементов):

$$\begin{vmatrix} \rho_1^2 - \omega & \rho_2 \rho_{12} - \omega \rho_{12} & \dots & \rho_t \rho_{1t} - \omega \rho_{1t} \\ \rho_1 \rho_{21} - \omega \rho_{21} & \rho_2^2 - \omega & \dots & \rho_t \rho_{2t} - \omega \rho_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_1 \rho_{t1} - \omega \rho_{t1} & \rho_2 \rho_{t2} - \omega \rho_{t2} & \dots & \rho_t^2 - \omega \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

**Теорема.** Обозначим  $t$ -мерные объемы параллелепипедов, построенных на векторах  $\mathbf{b}_k$ , через  $V_t$ , на векторах  $\mathbf{b}'_k$  — через  $V_{(c)}$ , на векторах  $\mathbf{b}''_k$  — через  $V_{(s)}$ . Тогда

$$\frac{V_{(c)}}{V_t} = \prod_{i=1}^t \cos \alpha_i *, \quad (19')$$

$$\frac{V_{(s)}}{V_t} = \prod_{i=1}^t \sin \alpha_i, \quad (19'')$$

где  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ) — все углы между  $t$ - и  $s$ -плоскостями.

\* См. [2] (31.34)

**Доказательство.** Согласно (16') для произведения корней имеем

$$\frac{g(b'_1 \cdots b'_t)}{g(b_1 \cdots b_t)} = \prod_{i=1}^t \cos^2 z_i. \quad (20)$$

А так как определитель Грама равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на образующих векторах, то из (20) следует (19'). Аналогично, из (16'') вытекает (19'').

**Следствие.** Обобщение теоремы Пифагора:

$$V_{(t)}^2 + V_{(s)}^2 = V_t^2 \left( \prod_{i=1}^t \cos^2 z_i + \prod_{i=1}^t \sin^2 z_i \right).$$

**Теорема 1.** Для правильного  $n$ -мерного симплекса

1) если  $s$ - и  $t$ -грани симплекса не имеют общих вершин, то эти грани вполне перпендикулярны;

2) если  $s$ - и  $t$ -грани имеют общие вершины, то существует лишь один угол между ними, отличный от прямого, для которого

$$\omega = \frac{s}{s+1} \cdot \frac{t}{t+1}$$

при наличии только одной общей вершины или

$$\omega = \frac{s-p}{s+1} \cdot \frac{t-p}{t+1}$$

при наличии общей  $p$ -грани.

Доказывается путем вычисления определителя (16').

**Следствие.** Для объемов правильных симплексов справедлива рекуррентная формула

$$V_t = \frac{a}{t\sqrt{2}} V_{t-1} \sqrt{1 + \frac{1}{t}},$$

где  $a$  — длина ребра симплекса.

**Определение.** Если для любого вектора  $\mathbf{b}$   $t$ -плоскости угол  $(\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{b}') = \alpha = \text{const}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 90^\circ$ , то  $t$ -плоскость называется равнона-клонной к  $s$ -плоскости. Если некоторая  $p$ -плоскость ( $p < t$ ) параллельна  $t$ -плоскости и равноклонна к  $s$ -плоскости, причем не существует такой  $(p+1)$ -плоскости, то  $t$ -плоскость называется частично равноклонной, точнее,  $p$  — равнопаклонной к  $s$ -плоскости.

Можно доказать следующие предложения.

**Теорема. 1)** Пусть  $\omega_0$  — корень уравнения (16'). Если

$$\text{rang}(b'_{kl} - \omega_0 b_{kl}) = t - p, \quad (22)$$

$$k, l = 1, \dots, t,$$

где  $0 < p \leq t$ , то корень  $\omega_0$  имеет кратность  $p$ , а  $t$ -плоскость  $p$  — равноклонна к  $s$ -плоскости (или  $p$  — перпендикулярна при  $\omega_0 = 0$  или  $p$  — параллельна<sup>2</sup> при  $\omega_0 = 1$ ), и обратно (из  $p$ -равноклонности  $t$ - к  $s$ -плоскости следует (22)).

<sup>1</sup> Выведена Г. И. Житомирским.

<sup>2</sup>  $\frac{p}{t}$ -параллельна по [2], § 5.

2) Для равнонаклонности  $t$ -к  $s$ -плоскости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства между углами

$$(b_k \widehat{b}_k') = (b_l' b_l),$$

$$(b_k' \widehat{b}_l') = (b_k b_l)$$

при всех  $k, l = 1, \dots, t$ .

*Следствие* (из (19') и (19'')). Если  $t$ -плоскость равнонаклонна к  $s$ -плоскости, то

$$\sqrt[t]{V_{(c)}^2} + \sqrt[t]{V_{(s)}^2} = \sqrt[t]{V_t^2}.$$

*Замечание.* С начала п. 2° было принято, что  $t \leq s$ . Если же  $s < t$ , то существует  $(t-s)$ -плоскость, параллельная  $t$ -плоскости и перпендикулярная  $s$ -плоскости (т. е. плоскость большей размерности  $t$  к плоскости меньшей размерности  $s$  всегда частично, по крайней мере,  $(t-s)$ -перпендикулярна).

3°. Пусть для  $s$ -поверхности

$$r = a(u_1, \dots, u_s), \quad (23)$$

$$a_k = \frac{\partial a}{\partial u_k}, \quad k = 1, \dots, s, \quad (24)$$

$$g(a_1, \dots, a_s) \neq 0$$

и для  $t$ -поверхности

$$r = b(v_1, \dots, v_t), \quad (25)$$

$$b_k = \frac{\partial b}{\partial v_k}, \quad k = 1, \dots, t, \quad (26)$$

$$g(b_1, \dots, b_t) \neq 0$$

Если поверхности имеют общую точку  $P$ , то углы между ними измеряются углами между касательными  $s$ - и  $t$ -плоскостями в точке  $P$ , т. е. эти углы вычисляются из уравнения

$$|b'_{kl} - \omega b_{kl}| = 0, \quad (16')$$

в котором  $b'_{kl}$  и  $b_{kl}$  составляются из направляющих векторов (24) и (26) касательных плоскостей.

Пусть  $s$ - и  $t$ -поверхности (23), (25) лежат на  $n$ -поверхности

$$r = r(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

и их внутренними уравнениями будут

$$\xi_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_s)$$

и

$$\xi_i = \psi_i(v_1, \dots, v_t),$$

где  $i = 1, \dots, n$ .

Согласно принятым обозначениям

$$b_{kl} = (b_k b_l)$$

и согласно (10)

$$b'_{kl} = (b_k b'_l) = -\frac{1}{g(a_1 \dots a_s)} \begin{vmatrix} 0 & (b_k a_1) & \dots & (b_k a_s) \\ (a_1 b_l) & (a_1 a_1) & \dots & (a_1 a_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_s b_l) & (a_s a_1) & \dots & (a_s a_s) \end{vmatrix},$$

$k, l = 1, \dots, t.$

**Теорема.** Коэффициенты уравнения (16') выражаются через коэффициенты квадратической формы

$$\sum_{i, i=1}^n g_{ii} d\zeta_i d\zeta_i$$

$n$ -поверхности согласно равенствам

$$(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_{l'}) = \sum_{i, j=1}^n g_{ij} \frac{\partial \zeta_i}{\partial u_k} \frac{\partial \zeta_j}{\partial u_{l'}}, \quad (27)$$

$k', l' = 1, \dots, s;$

$$(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_l) = \sum_{i, j=1}^n g_{il} \frac{\partial \zeta_i}{\partial u_k} \frac{\partial \zeta_j}{\partial v_l}, \quad (28)$$

$$(\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_l) = \sum_{i, j=1}^n g_{il} \frac{\partial \zeta_i}{\partial v_k} \frac{\partial \zeta_j}{\partial v_l}. \quad (29)$$

В самом деле,

$$\mathbf{a}(u_1, \dots, u_s) = \mathbf{r}[\varphi_1(u_1, \dots, u_s), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_s)]$$

и, следовательно,

$$\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial u_k}; \quad (30)$$

аналогично

$$\mathbf{b}_i = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_l} \frac{\partial \zeta_l}{\partial v_i}. \quad (31)$$

Из (30), (31) вытекают равенства (27), (28), (29), ибо

$$g_{il} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_l} \right).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Розенфельд. Невклидовы геометрии. Гостехиздат, М.—Л., 1955.
2. П. А. Широков. Тензорное исчисление. Гостехиздат, М., 1934.

Поступила в редакцию 30 сентября 1965 г.

## К ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ СВЯЗУЮЩИХ АФФИНОРЫ

*C. M. Чашечников* (Кировоград)

Теория относительных инвариантов связующих аффиноров представляет интерес в связи с изучением  $m$ -поверхности в аффинном и проективном пространствах.

Пусть  $H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r}$  — некоторый связующий аффинор аффинных пространств  $A_n$  и  $A_m$  различной размерности, а  $W$  — некоторый его относительный инвариант. Веса  $k_1$  и  $k_2$  относительного инварианта  $W$  связаны соотношением

$$k_1 n (s - r) = k_2 m (q - p). \quad (1)$$

Действительно, рассматривая полную производную Ли [1] от относительного инварианта  $W$ , будем иметь

$$LW = k_1 C_\omega^\omega W + k_2 *C_e^e W. \quad (2)$$

С другой стороны, имеем

$$LW = \frac{\partial W}{\partial H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r}} LH_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r}. \quad (3)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} LH_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} &= C_{\beta_1}^\omega H_{\omega}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} + \dots + C_{\beta_q}^\omega H_{\beta_1 \dots \beta_{q-1}}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} - \\ &- C_{\omega}^{a_1} H_{\beta_1 \dots \beta_{q-1}}^{a_2 \dots a_p a_1 \dots a_r} - \dots - C_{\omega}^{a_p} H_{\beta_1 \dots \beta_{q-1}}^{a_1 \dots a_{p-1} a_1 \dots a_r} + \\ &+ *C_{b_1}^e H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} + \dots + *C_{b_s}^e H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} - \\ &- *C_{e}^{a_1} H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} - \dots - *C_{e}^{a_r} H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r}, \end{aligned} \quad (4)$$

на основании соотношений (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} C_1^\omega \left\{ \frac{\partial W}{\partial H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r}} (\delta_{\beta_1}^\omega H_{\omega}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} + \dots + \delta_{\beta_q}^\omega H_{\beta_1 \dots \beta_{q-1}}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} - \right. \\ \left. - \delta_{\omega}^{a_1} H_{\beta_1 \dots \beta_{q-1}}^{a_2 \dots a_p a_1 \dots a_r} - \dots - \delta_{\omega}^{a_p} H_{\beta_1 \dots \beta_{q-1}}^{a_1 \dots a_{p-1} a_1 \dots a_r}) - k_1 \delta_\omega^\omega W \right\} + \\ + *C_e^e \left\{ \frac{\partial W}{\partial H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r}} (\delta_{b_1}^e H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} + \dots + \right. \\ \left. + \delta_{b_s}^e H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} - \delta_e^{a_1} H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r} - \dots - \right. \\ \left. - \delta_e^{a_r} H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_p a_1 \dots a_r}) - k_2 \delta_e^e W \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как соотношение (5) выполняется при любых значениях постоянных  $C_{\beta}^{\alpha}$  и  $*C_{\beta}^{\alpha}$ , то выражения, заключенные в фигурные скобки, равны нулю. Свертывая эти выражения по парам индексов  $\omega, \gamma$  и  $c, e$  получим

$$H(q-p) - k_1 n W = 0; H(s-r) - k_2 m W = 0, \quad (6)$$

где

$$H = \frac{\partial W}{\partial H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_r} H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_r} b_1 \dots b_s}. \quad (7)$$

Из соотношений (6) и следует соотношение (1).

Так как веса  $k_1$  и  $k_2$  относительного инварианта связаны соотношением (1), то отыскание системы относительных инвариантов связующего аффинора сводится к отысканию одного представителя этой системы. Все остальные относительные инварианты найдутся возведением в степень и умножением на скалярные множители.

Если  $p=q$  и  $r=s$ , то  $k_1=k_2=0$ , т. е. в этом случае связующий аффинор имеет только абсолютные инварианты. Один из них может быть определен соотношением

$$W = H_{\beta_1 \dots \beta_p}^{a_1 \dots a_r} b_1 \dots b_s. \quad (8)$$

Пусть  $p \neq q$  и  $r \neq s$ . Предположим для определенности, что  $q > p$  и  $r > s$ . Свертывая связующий аффинор по максимально возможному числу пар индексов, получим связующий аффинор  $B_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_k}$  как функцию связующего аффинора  $H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_r} b_1 \dots b_s$ , где  $v = q-p$ , а  $k = r-s$ . Относительный инвариант связующего аффинора  $B_{\beta_1 \dots \beta_v}^{a_1 \dots a_k}$  будет также относительным инвариантом связующего аффинора  $H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_r} b_1 \dots b_s$ . Таким образом, отыскание относительных инвариантов связующего аффинора  $H_{\beta_1 \dots \beta_q}^{a_1 \dots a_r} b_1 \dots b_s$  можно свести к отысканию относительных инвариантов связующего аффинора  $B_{\beta_1 \dots \beta_v}^{a_1 \dots a_k}$ .

Если  $v$  четное, то объект

$$\begin{aligned} B^{a_1^{(1)} \dots a_k^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_k^{(2)} \dots a_1^{(n)} \dots a_k^{(n)}} = \\ = B_{\substack{(1) \dots (1) \\ (2) \dots (v)}}^{(a_1^{(1)} \dots a_k^{(1)})} B_{\substack{(2) \dots (2) \\ (2) \dots (v)}}^{(a_1^{(2)} \dots a_k^{(2)})} \dots B_{\substack{(n) \dots (n) \\ (2) \dots (v)}}^{(a_1^{(n)} \dots a_k^{(n)})}, \end{aligned} \quad (9)$$

где альтернирование проводится по каждому  $i$ -тому индексу всех сомножителей отдельно ( $2 \leq i \leq v$ ), а симметрирование по объединенному индексу  $\{a_1^{(i)} \dots a_k^{(i)}\}$ , является аффинором в  $A_m$  и относительным инвариантом веса  $(-v)$  в  $A_n$ . В самом деле, пусть допустимые преобразования координат пространств  $A_m$  и  $A_n$  имеют соответственно вид

$$y^{a'} = P_a^{a'} y^a + P^{a'}, \text{ где } \delta = \text{Det}(P_a^{a'}) \neq 0. \quad (10)$$

$$x^{a'} = A_a^{a'} x^a + A^{a'}, \text{ где } \Delta = \text{Det}(A_a^{a'}) \neq 0. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} B_{\substack{(1) \dots (1) \\ (2) \dots (v)}}^{(a_1^{(1)} \dots a_k^{(1)})} B_{\substack{(2) \dots (2) \\ (2) \dots (v)}}^{(a_1^{(2)} \dots a_k^{(2)})} \dots B_{\substack{(n) \dots (n) \\ (2) \dots (v)}}^{(a_1^{(n)} \dots a_k^{(n)})} = \\ = A_{\substack{(1) \dots (1) \\ (1) \dots (n')}}^{a_1^{(1)} \dots a_1^{(n)}} A_{\substack{(2) \dots (2) \\ (1) \dots (n')}}^{a_2^{(1)} \dots a_2^{(n)}} \dots A_{\substack{(n) \dots (n) \\ (1) \dots (n')}}^{a_n^{(1)} \dots a_n^{(n)}} \times \\ \times B_{\substack{(1) \dots (1) \\ (1) \dots (v)}}^{(a_1^{(1)} \dots a_k^{(1)})} B_{\substack{(2) \dots (2) \\ (1) \dots (v)}}^{(a_1^{(2)} \dots a_k^{(2)})} \dots B_{\substack{(n) \dots (n) \\ (1) \dots (v)}}^{(a_1^{(n)} \dots a_k^{(n)})}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для любого  $i$  ( $2 \leq i \leq v$ )

$$A_{[1']}^{a_i^{(1)}} A_{[2']}^{a_i^{(2)}} \cdots A_{[n']}^{a_i^{(n)}} = 0, \quad (13)$$

если среди индексов  $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots, a_i^{(n)}$  имеются хотя бы два одинаковые, и

$$A_{[1']}^{a_i^{(1)}} A_{[2']}^{a_i^{(2)}} \cdots A_{[n']}^{a_i^{(n)}} = \frac{\epsilon}{n!} \Delta^{-1}, \quad (14)$$

если все индексы  $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots, a_i^{(n)}$  различны), где  $\epsilon = \pm 1$ , в зависимости от четности подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_i^{(1)} a_i^{(2)} & \cdots & a_i^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что правая часть равенства (12) может быть представлена в виде

$$A_1^{a_1^{(1)}} \cdots A_n^{a_n^{(n)}} (\Delta^{-1})^{v-1} B_{\substack{[1] \cdots [1] \\ (2) \quad (v)}}^{\{a_1^{(1)} \cdots a_k^{(1)}\}'} \cdots B_{\substack{[n] \cdots [n] \\ (2) \quad (v)}}^{\{a_1^{(n)} \cdots a_k^{(n)}\}'}. \quad (16)$$

Так как  $v$  четное, то выражение

$$B_{\substack{[1] \cdots [1] \\ (2) \quad (v)}}^{\{a_1^{(1)} \cdots a_k^{(1)}\}'} \cdots B_{\substack{[n] \cdots [n] \\ (2) \quad (v)}}^{\{a_1^{(n)} \cdots a_k^{(n)}\}'}. \quad (17)$$

кососимметрично по индексам  $a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n)}$ , а поэтому окончательно получаем

$$B^{\{a_1^{(1)} \cdots a_k^{(1)}\}'} \cdots \{a_1^{(n)} \cdots a_k^{(n)}\}' = P_{a_1^{(1)}}^{\prime a_1^{(1)}} \cdots P_{a_k^{(1)}}^{\prime a_k^{(1)}} \cdots P_{a_1^{(n)}}^{\prime a_1^{(n)}} \cdots P_{a_k^{(n)}}^{\prime a_k^{(n)}} \Delta^{-v} B^{a_1^{(1)} \cdots a_k^{(1)} \cdots a_1^{(n)} \cdots a_k^{(n)}}. \quad (18)$$

Если  $k$  или  $n$  четное, то пространственная матрица (9) будет иметь четную размерность, а поэтому ее гипердетерминант

$$B = h \det(B^{a_1^{(1)} \cdots a_k^{(1)} \cdots a_1^{(n)} \cdots a_k^{(n)}}) \quad (19)$$

будет относительным инвариантом веса  $kn$  в  $A_m$  (см. Соколов [2], стр. 122). Отсюда и следует, что

$$B' = \Delta^{-vm} \delta^{nk} B. \quad (20)$$

Рассмотренный способ может быть применен и в том случае, когда  $v$  нечетное, а  $k$  и  $m$  четные.

Во всех остальных случаях вводится в рассмотрение связующий аффинор

$$*B_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \beta_1 \cdots \beta_v}^{a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_k} = B_{\alpha_1 \cdots \alpha_v}^{a_1 \cdots a_k} B_{\beta_1 \cdots \beta_v}^{b_1 \cdots b_k} \quad (21)$$

и отыскание относительных инвариантов связующего аффинора  $H_{\beta_1 \cdots \beta_q \alpha_1 \cdots \alpha_r}^{a_1 \cdots a_p a_1 \cdots a_r}$  сводится к отысканию относительных инвариантов связующего аффинора (21). Так как аффинор (21) имеет четное число верхних и нижних индексов, то найти его относительные инварианты можно ранее рассмотренным способом.

Рассмотренные способы построения относительных инвариантов могут быть применены и для отыскания относительных инвариантов связующих аффинорных плотностей. При этом веса  $k_1$  и  $k_2$  относительного инварианта будут связаны соотношением

$$k_1 n(s - r + \tilde{k}_2 m) = k_2 m(q - p + k_1 n), \quad (22)$$

где  $\tilde{k}_1$  и  $\tilde{k}_2$  — веса связующей аффинорной плотности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Либер. О геометрических объектах и ковариантном дифференцировании связующих аффиноров в составных многообразиях. Уч. зап. Саратовск. ун-та, т. 70, 1961, 73—105.
2. Н. П. Соколов. Пространственные матрицы и их приложения. Физматгиз, М., 1960.

*Поступила в редакцию 25 июля 1965 г.*

---

## ЛИНЕЙЧАТАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Р. Н. Щербаков* (Томск), *Н. И. Кованцов* (Киев),

*Р. М. Гейдельман* (Москва)

Доклад на 2-й Всесоюзной геометрической конференции 17—23 сентября 1964 г.

### Метрическая, аффинная и проективная линейчатая дифференциальная геометрия трехмерного пространства

1. Линейчатая дифференциальная геометрия трехмерного пространства разрабатывается уже в течение полутора веков, и в ней продолжают возникать новые методы и задачи. Это подтверждается анализом материала, отраженного в РЖМат за 10 лет. Из четырех крупных монографий, посвященных специально рассматриваемой ветви геометрии, одна [1] дает исчерпывающее изложение тензорного построения теории конгруэнций и комплексов с использованием плюккера перенесения, а в трех — [2], [3], [4] — изложение тех же вопросов ведется методом подвижного репера с привлечением аппарата внешних форм. Сравнение этих книг явно показывает силу метода внешних форм. Кроме двух небольших специальных монографий [5] и [6], некоторые новые результаты по линейчатой геометрии получили освещение и в общих сочинениях по дифференциальной геометрии [7—11]. В [6—8] изложение ведется методом внешних форм.

Из 750 работ 230 авторов по линейчатой дифференциальной геометрии более 600 относятся к рассматриваемому разделу. Наибольшее число работ (более 300) посвящено теории конгруэнций и пар конгруэнций. Пока еще сравнительно мало разработаны аффинная линейчатая геометрия и теория векторных полей, хотя именно эти области имеют наиболее обещающие выходы в приложения к механике сплошных сред. Разработка теории векторных полей тормозилась отсутствием до самого последнего времени достаточно глубокой теории голономных и неголономных комплексов. Советские геометры занимают ведущее положение в рассматриваемом разделе науки, а аффинная линейчатая геометрия и теория комплексов разрабатываются главным образом их усилиями. Представленные на конференцию доклады дают некоторое представление о том, что сделано за последние годы.

2. В течение 10 лет группа томских геометров исследовала основные линейчатые геометрические образы (конгруэнцию, пару конгруэнций, пару, состоящую из конгруэнций и секущей поверхности, комплекс, пару комплексов) с точки зрения метода репеража подмногообразий, основная идея которого сформулирована в [12]. Для большинства из этих образов построены метрические эквивариантные, центроаффинные и проективные полуканонические (в смысле [12]) реперы, что дало возможность изучить важнейшие голономные и неголономные подмногообразия, а также классы

геометрических образов, характеризующиеся наличием подмногообразий определенного вида. Эти результаты содержатся в диссертациях Р. Н. Щербакова, М. Б. Пергаменщикова, Е. Т. Ивлева, Н. М. Маськина, Н. М. Онищук, А. А. Лучинина, Л. И. Магазинникова, В. А. Романовича и публиковались главным образом в «Геометрических сборниках» [13]. Аналогичное исследование в неевклидовых трехмерных пространствах провел В. И. Машанов. Следующим объектом исследования стала «неголономная поверхность», т. е. геометрический образ, элементом которого является плоскость с заданной в ней точкой (В. В. Вассин).

3. Особенный интерес представляет изучение трехпараметрического геометрического образа  $\Phi_3$ , элементом которого является прямая с заданной на ней точкой. Это есть не что иное, как векторное поле, все векторы которого единичны. Если же мы хотим рассматривать общее векторное поле, то достаточно считать элементом прямую с заданной на ней парой точек. Эти рассмотрения сразу ведут к геометрии стационарного потока жидкости. Для нестационарного потока должна, видимо, служить геометрия четырехпараметрических образов  $\Phi_4$  с теми же элементами. На первый взгляд для приложений к гидромеханике особенно важной является метрическая теория этих образов. Однако недостаток вторичных параметров затрудняет применение методов подвижного репера и репеража подмногообразий. Проективная же теория этих образов (успешно разрабатываемая ясской геометрической школой) слишком далека от современных задач механики сплошных сред. Вот почему, по нашему мнению, наиболее перспективна аффинная теория. В. В. Слухаев подверг систематическому изучению эквивалентную геометрию трехпараметрического векторного поля и построил на этом пути аффинную теорию потока жидкости, охарактеризовав целый ряд новых частных случаев стационарного течения жидкости. А. А. Лучинин получил первые результаты по аффинной теории четырехпараметрического векторного поля. Соответствующие метрические теории развиваются В. П. Долговых и В. М. Финкельштейн. Последний дал полную метрическую классификацию трехпараметрических подмногообразий  $\Phi_3$  (т. е. дополнительно оснащенных неголономными комплексами) образа  $\Phi_4$  и подробно исследовал поля, у которых все  $\Phi_3$  имеют одинаковую кривизну, получив для некоторых из них безынтегральные представления.

4. Различным аспектам теории пар конгруэнций посвящен другой цикл сообщений. Г. Н. Макеев (Оренбург) исследовал новые классы фокальных пар конгруэнций. В. А. Романович (Томск) дал безынтегральное построение одного из двух классов пар конгруэнций, все подмногообразия которых параболические. В. В. Смирнова (Оренбург) доказала существование тройки конгруэнций, содержащей две расслояемые пары, и рассмотрела возникающие здесь особые случаи. А. В. Ковтун (Киев) изучает «трансверсальные системы» конгруэнций, т. е. системы конгруэнций, описываемых лучами квадрик, определяемых соответственными лучами тройки конгруэнций, при условии коллинеарности фокусов. Л. И. Магазинников вводит понятие центроаффинной расслояемости пар конгруэнций и подробно изучает ряд возникающих здесь задач. Некоторые другие проблемы, связанные с расслоением пар конгруэнций и комплексов излагаются в третьей части доклада.

Два сообщения посвящены метрической теории пары «конгруэнция плюс поверхность». В. Н. Рыбаков (Москва) решает задачу отыскания всех конгруэнций, допускающих квазинормальные семейства секущих поверхностей заданного вида. С. В. Дениско (Львов) рассматривает бес-

конечно малые преобразования пары и ее подмногообразия, которые остаются стационарными.

5. Резюмируя изложенное, следует констатировать, что дифференциально-геометрическое исследование линейчатых образов трехмерного пространства продолжает оставаться актуальным и сосредоточено на изучении, с одной стороны, все более сложных конструкций, а с другой — на исследовании подмногообразий. Метод внешних форм и связанные с ним приемы канонизации реперов и репеража подмногообразий являются в настоящее время наиболее эффективными в рассматриваемой области исследования, что подтверждается и тем, что из всех авторов, представивших сообщения на конференцию, только С. В. Дениско и Л. Г. Хрусталева (ее сообщение входит в доклад А. П. Нордена, В. И. Шуликовского и А. П. Широкова) применяют другие методы.

### Линейчатая дифференциальная геометрия многомерного проективного пространства

Следует отметить, что в выборе терминологии для линейчатых многообразий в многомерном пространстве нет единобразия. Так, по аналогии с трехмерным пространством линейчатой поверхностью в многомерном пространстве называют всякое однопараметрическое многообразие прямых линий, конгруэнцией — двупараметрическое многообразие и комплексом — трехпараметрическое многообразие прямых. Многообразия, размерность которых на единицу меньше линейчато-геометрической размерности всего пространства, получили название гиперкомплексов [14]. Более целесообразна, однако, терминология (не новая, но почему-то не привившаяся у нас), в соответствии с которой линейчатое  $m$ -мерное многообразие  $L$  в  $n$ -мерном линейчатом пространстве должно быть названо:

поверхностью, если не через каждую точку  $P_n$ , вмещающую линейчатое пространство, проходит образующая многообразия  $L$  ( $m < n - 1$ ); конгруэнцией, если таких образующих проходит конечное число ( $m = n - 1$ ); комплексом, если эти образующие составляют непрерывное семейство ( $m > n - 1$ ).

Наиболее благоприятное положение вещей складывается для конгруэнции, поскольку так определенная конгруэнция в многомерном пространстве оказывается носительницей целого ряда свойств конгруэнции трехмерного проективного пространства. Для лиц, занимающихся теорией комплексов, представило бы интерес исследование комплексов в многомерных пространствах при любом  $m > n - 1$ . Может быть выделен ряд интересных классов в зависимости от того, какие свойства обыкновенного комплекса трехмерного пространства обобщаются. Например:

1°.  $m = n$ . На текущем лучше имеем обыкновенное нормальное соответствие; из всех комплексов многомерного пространства такой комплекс имеет минимальную линейчато-геометрическую размерность.

2°.  $m = 2n - 3$ . Такие комплексы изучались К. И. Гриневичем под именем гиперкомплексов.

3°.  $m = \frac{3}{2}(n - 1)$ . Это возможно лишь при нечетном  $n$ ; такой комплекс занимает промежуточное положение между минимальным 1° и максимальным 2°. Попарное совпадение комплексов имеет место лишь при  $n = 3$ .

В представленной на конференции работе В. В. Гольдберга «Отображение последовательностей Лапласа из обобщенных сопряженных сетей

Розе пространства  $P_n$  на неподвижную гиперплоскость  $P_{n-1}$  среди прочего автор определяет ассоциированные точки лучей и, в частности, из последовательностей Лапласа с образующими сетями Розе выделяет те, у которых последовательность ассоциированных точек в свою очередь образует последовательность Лапласа (ассоциированную последовательность).

В. Г. Сычева в работе «Канонические реперы конгруэнций прямых в четырехмерном проективном пространстве  $P_4$ » называет конгруэнцией трехпараметрическое многообразие прямых в  $P_4$ . Она дает классификацию многообразий и рассматривает двойственные образы.

В заметке Л. А. Туулметс «Некоторые классы линейчатых гиперповерхностей в четырехмерном евклидовом пространстве  $R_4$ » двухпараметрическое семейство прямых названо квазиконгруэнцией. Автор ставит и решает задачу проследить связь между свойствами многообразия, которое рассматривается, с одной стороны, как линейчатое двухпараметрическое многообразие, с другой — как трехпараметрическое точечное.

В сообщении «О двумерных поверхностях четырехмерного пространства» В. С. Лисняк обращается к неевклидову четырехмерному пространству. Проводя в каждой нормальной плоскости двумерной поверхности пучок нормалей к поверхности, получают трехпараметрическое многообразие прямых, которое при  $n > 3$  должно быть названо конгруэнцией. Свойства этой конгруэнции и рассматриваются. Автор ограничивается только случаем вполне ортогональной конгруэнции, т. е. такой конгруэнции, которая допускает двухпараметрическое семейство ортогональных двумерных поверхностей. Случай, когда уравнения, определяющие поверхности, не образуют вполне интегрируемой системы, приводит к неголономным поверхностям.

В. С. Ваксман («Гиперповерхности  $\Sigma_3$  в  $P_4$  с линейчатыми и плоскостными образующими») выделяет те многообразия четырехмерного пространства, которые, с одной стороны, являются точечными гиперповерхностями этого пространства, с другой — двухпараметрическими совокупностями прямых или однопараметрическими совокупностями двумерных плоскостей.

### Многообразия с образующим элементом, отличным от прямой

Обстоятельная теория линейчатых многообразий, в которых за образующий элемент принимается кривая или поверхность второго порядка, создана томскими геометрами, начиная с Н. Г. Туганова [15]. Н. М. Онищук представила сообщение «Конгруэнции центральных кривых второго порядка», в котором конгруэнция рассматривается в центроаффинном пространстве. Конгруэнция характеризуется двумя относительными инвариантами, обращение которых в нуль выделяет два геометрически интересных класса.

### Дифференциальная геометрия многообразий, погруженных в пространства с другими фундаментальными группами

М. Р. Вайнтруб («Циклические и сферические многообразия в конформной геометрии») применил метод подвижного репера к многообразиям, уже изученным другими методами.

Сообщения Б. Г. Салаевой и В. И. Машанова посвящены линейчатым (с плоскими образующими) многообразиям пространств постоянной кри-

визны (общих — у Машанова и гиперболического — у Салаевой). Салаева изучает конгруэнцию прямых пространства Лобачевского с помощью двух квадратичных форм методом, использованным в работе [16]. Машанов рассматривает однопараметрические семейства двумерных плоскостей в любом трехмерном пространстве постоянной кривизны. Находятся инварианты семейства, с помощью которых выделяются семейства, огибающие конус, имеющие ребром возврата линию откоса, и т. д.

Общие вопросы теории комплексов в симплектическом пространстве рассматриваются в сообщении А. Н. Боровец. Симплектическое пространство представлено как проективное, в котором действует симплектическая подгруппа. Независимо от Боровец и несколько ранее ее основные результаты первоначальной теории были получены Н. К. Варначевой.

Следует сказать, что теория комплексов как в симплектическом, так и в ряде других неевклидовых пространств, начала развиваться лишь в последнее время. Надо думать, что исследования в этой области будут в достаточной мере результативными.

Не лишено интереса перенесение результатов, полученных для классических пространств, на пространства с произвольной фундаментальной группой (с соответствующим видоизменением понятия прямой линии), а также на пространства с фундаментально-групповой связностью.

### О расслоении многообразий

1. Проблема расслоения, поставленная 40 лет назад для пары конгруэнций прямых Фубини и Бианки, стала источником многочисленных исследований. Ведущую роль в развитии проективной теории расслоений пар сыграли работы С. П. Финикова и его школы [17]. Первый шаг в обобщении понятия расслоения на многообразия прямых и плоскостей многомерного проективного пространства был сделан В. И. Коровиным в 1950 г. [18]. Общая проблема расслоения  $(m+1)$ -параметрических семейств (псевдоконгруэнций)  $m$ -мерных плоскостей в  $n$ -мерном проективном пространстве  $P_n$  была исследована Р. М. Гейдельманом [19, 20]. Двустороннеे расслояемые пары псевдоконгруэнций  $m$ -мерных плоскостей лежат в  $(2m+1)$ -мерной плоскости. При  $m \geq 2$  обе псевдоконгруэнции будут вполне фокальными — их плоскости касаются  $m+1$   $m$ -сопряженной системы. Одностороннее расслоение пары может быть реализовано в пространстве любой размерности  $n \geq 2m+1$ . При этом если  $m > 2$ , то обе псевдоконгруэнции также будут вполне фокальными и образуют сопряженную пару  $T_1$ .

Одностороннее расслоение в классическом смысле в  $P_n$  допускают также пары, составленные конгруэнцией и псевдоконгруэнцией —  $m$ -параметрическими семействами  $(n-m)$ -мерных и  $(m-1)$ -мерных плоскостей. Частный случай таких пар в  $n$ -мерных неевклидовых пространствах, когда соответствующие плоскости полярно сопряжены, был рассмотрен Р. М. Гейдельманом [21].

В  $P_4$  такие пары рассматривались М. А. Войтенко [22], исследовавшей многие интересные с геометрической точки зрения классы этих пар.

Проблема расслоения конгруэнций окружностей и сфер в конформных пространствах была поставлена и рассмотрена Р. М. Гейдельманом [23]. С помощью перенесения Дарбу из работы [23] может быть получено решение проблемы расслоения пар псевдоконгруэнций и конгруэнций плоскостей в неевклидовых пространствах [24].

Обобщения понятия расслоения на более широкие классы прямых и плоскостей в  $P_3$  были сделаны С. П. Финиковым [25], [26], К. И. Гриневичусом, Г. Г. Бикматовой, Н. В. Лактановой, а для пространств  $P_4$  и  $P_n$  Коровиным, К. И. Дуничевым и чехословацкими геометрами К. Швейцом и Свободой.

2. В докладе, представленном на настоящую конференцию, Р. М. Гейдельман предложил исследовать такие пары многообразий, у которых инвариантно связанные с многообразиями геометрические образы описывают семейства, расслояемые в классическом смысле. Реализация этой идеи для случая четырехмерного пространства методом внешних форм проводится в представленных докладах М. А. Войтенко и В. С. Фокина.

М. А. Войтенко рассматривает пары, образованные конгруэнцией прямых и псевдоконгруэнций двумерных плоскостей, когда инвариантно присоединенная пара расслоема. В случае, когда развертывающиеся поверхности обоих семейств соответствуют, даны интересные геометрические характеристики этих пар. В. С. Фокин рассмотрел расслояемые в этом смысле пары конгруэнций прямых в  $P_4$ . Они реализуются в виде двух классов. У одного класса этих пар две пары фокальных гиперповерхностей представляют гиперконусы с общей вершиной. Асимптотические многообразия на этих гиперконусах и на обоих семействах расслаивающих гиперповерхностей соответствуют друг другу. У второго класса пар обе конгруэнции имеют фокальными гиперповерхностями одну и ту же тройку линейчатых гиперповерхностей, причем асимптотические многообразия у них соответствуют.

В представленном докладе В. И. Коровина исследуются циклически расслояемые конфигурации из  $n$  псевдоконгруэнций  $(m - 1)$ -мерных плоскостей  $(L_1), (L_2), \dots, (L_n)$ . Все псевдоконгруэнции в конфигурации — вполне фокальные псевдоконгруэнции  $R$ .

### Об изгибании семейств прямых

На конференцию представлены следующие работы по изгиблению семейств прямых в смысле Картана, выполненные методом внешних форм. Н. К. Варначевой ставится и решается проблема симплектического изгиблания комплекса прямых в трехмерном пространстве. Изгибание первого порядка допускает два типа комплексов, обладающих определенной геометрической структурой.

Р. М. Гейдельман и Л. П. Бочина показывают, что изгибание первого порядка конгруэнции прямых в четырехмерных неевклидовых пространствах возможно в трех случаях: 1) когда конгруэнция расслаивается на  $\infty^1$  гиперконусов; 2) когда конгруэнция расслаивается на  $\infty^1$  линейных конгруэнций  $P_3$ , директрисы которых лежат на абсолюте; 3) когда конгруэнция расслаивается на  $\infty^1$  двупараметрических семейств прямых, лежащих в двумерной плоскости.

Г. Станилов (Болгария) показал, что любая конгруэнция прямых трехмерного пространства допускает биаксиальное изгибание первого порядка, но не любая пара допускает биаксиальное наложение. Комплекс прямых биаксиально неизгибаem.

### Теория семейств плоскостей

Начало общей теории семейств плоскостей положили работы В. В. Вагнера [27]. Основы теории подпространств для широкого класса однородных пространств были заложены работами Б. А. Розенфельда [28], Р. М. Гейдель-

ман построил инвариантную теорию семейств плоскостей в неевклидовых пространствах [24]. В последней работе была предложена фокальная классификация семейств. В одном из представленных докладов С. Е. Карапетян применяет к проективно-дифференциальной геометрии семейств плоскостей теорию матричных многообразий. В сообщении показывается, что с дифференциальной окрестностью первого порядка семейства связано шесть матричных многообразий, связанных с фокальными свойствами семейства. В другом сообщении С. Е. Карапетян прилагает методы теории семейств плоскостей к проективно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей. Доказано, что фундаментальный объект порядка  $p+2$ , где  $p$  наибольший порядок касательного подпространства, вложенного в исходное проективное пространство, определяет поверхность. Находятся относительно инвариантные трилинейные формы и выясняется их геометрический смысл.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. V. Hlavaty. Differential line geometry. Groningen, 1953.
2. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнций. Гостехиздат, М., 1956.
3. S. P. Finikow. Theorie der Kongruenzen. Berlin, 1959.
4. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Изд-во Киевск. ун-та, 1963.
5. А. Канапе. Elemente din teoria congruentelor de drepte. Bucuresti, 1956.
6. Л. Я. Березина. Введение в теорию конгруэнций пространства Лобачевского. Рига, 1960.
7. J. Favard. Cours de géométrie différentielle locale. Paris, 1957.
8. Р. Н. Щербаков. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Изд-во Томского ун-та, 1960.
9. Е. Кирра. Analytische und Konstruktive Differential geometrie. Wien, 1957.
10. П. А. Широков, А. П. Широков. Аффинная дифференциальная геометрия. Физматгиз, М., 1959.
11. В. И. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия в тезисном изложении. Физматгиз, М., 1963.
12. Р. Н. Щербаков. Геометрический сборник, З. Труды Томского ун-та, 168, 1963, 5—11.
13. Геометрический сборник, вып. 1—4. Труды Томского ун-та, 160, 161, 168, 176, 1962—1964.
14. К. И. Гриневич. Дифференциальная окрестность второго порядка луча комплекса в многомерном проективном пространстве. Матем. сб., т. 52/94 : 4, 1960, 991—1020.
15. В. С. Малаховский. Автореферат докт. дисс., Томск, 1963.
16. М. С. Бродский. Конгруэнции прямых эллиптического пространства. Изд-во «Сов. наука», М., 1941.
17. С. П. Фиников. Теория конгруэнций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
18. В. И. Коровин. Расслоение пары комплексов двумерных плоскостей в пятимерном проективном пространстве. ДАН СССР, 72, 1950, 837—840.
19. Р. М. Гейдельман. Расслоение двупараметрических семейств прямых в многомерном проективном пространстве. ДАН СССР, 93, 1953, 956—960.
20. Р. М. Гейдельман. Расслоение  $k$ -параметрических семейств ( $k-1$ )-мерных плоскостей. Матем. сб., 34 (76), 1954, 499—524.
21. Р. М. Гейдельман. К теории псевдоконгруэнций и конгруэнций плоскостей многомерного конформного пространства. Матем. сб., 36(78), 1955, 209—232.
22. М. А. Войтенко. Об одностороннем расслоении трехпараметрических семейств многообразий в  $P_4$ . Геометрический сборник. Труды МИИТ, М., 1964.
23. Р. М. Гейдельман. Расслоение конгруэнций окружностей и сфер. Матем. сб., 43(85), 1957, 295—322.
24. Р. М. Гейдельман. Автореферат докт. дисс., МГУ, 1958.
25. С. П. Филиков. Пара линейчатых поверхностей, расслояемых двумя семействами кривых. Изв. АН СССР, серия математическая, 9, 1945, 79—112.
26. С. П. Филиков. К проблеме расслоения пары комплексов. УМН, 9 : 1(59), 1954, 125—130.
27. B. B. Вагнер. Differential geometry of the family of  $R_k$  in  $R_n$  and of the family of totally geodesic  $S_{k-1}$  in  $S_{n-1}$  of positive curvature. Матем. сб., 10(52), 1942, 165—212.
28. Б. А. Розенфельд. Автореферат докт. дисс., МГУ. 1946.

Поступила в редакцию 14 декабря 1964 г.

## ПОПРАВКА К СТАТЬЕ Ю. С. СЛОБОДЯНА «О ТРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ»<sup>1</sup>.

В указанной статье из расположения вполне геодезических поверхностей сделан неверный вывод о подвижности пространства.

Теорема, сформулированная в конце статьи, верна только в том случае, когда все вполне геодезические поверхности семейства проходят через одну точку.

Имеет место следующая

**Теорема.** *Если никакие две «оси» однопараметрических пучков вполне геодезических поверхностей не пересекаются между собою, то линейный элемент пространства имеет вид*

$$dS^2 = dx^{1^2} + \varphi(x^1) dS_2^2,$$

где  $dS_2^2$  — линейный элемент некоторой поверхности, не зависящий от  $x^1$ .

**Доказательство.** На каждой вполне геодезической поверхности лежит однопараметрическое семейство  $\{L\}$  геодезических линий  $l$ , каждая из которых служит «осью» однопараметрического пучка вполне геодезических поверхностей. Если мы возьмем на линии  $l_1$  семейства  $\{L\}$  точку  $M$  и проведем через некоторую другую линию  $l_2$  этого же семейства и точку  $M$  вполне геодезическую поверхность  $F$ , то линия  $l_1$  будет целиком лежать на поверхности  $F$ .

Пусть семейство  $\{L\}$  лежит на поверхности  $\Phi$ . Проведем ортогональную траекторию  $\gamma$  линий семейства  $\{L\}$ , выходящую из точки  $M$ . Аналогично построение проведем на каждой вполне геодезической поверхности, проходящей через  $l_1$ . Получим семейство  $\{\Gamma\}$  ортогональных траекторий  $\gamma$ . Семейство  $\{\Gamma\}$  образует некоторую аналитическую поверхность  $\Phi$ . «Оси» однопараметрических пучков вполне геодезических поверхностей ортогональны линиям  $\gamma$ . Проведем из точки  $X$  поверхности  $\Phi$  ортогональную траекторию  $\gamma_1$  всех вполне геодезических поверхностей, проходящих через ось  $l_1$ . Линия  $\gamma_1$  лежит на поверхности  $\Phi$ . В самом деле, если бы  $\gamma_1$  не лежала на поверхности  $\Phi$ , то она пересекала бы какую-либо ось не ортогонально, чего быть не может. Вектор, касательный к «оси», ортогонален двум взаимно ортогональным векторам — вектору, касательному к  $\gamma$ , и вектору, касательному к  $\gamma_1$ . Отсюда следует, что вектор касательный к «оси» ортогонален касательной плоскости поверхности  $\Phi$ . Все «оси» пересекаются с поверхностью  $\Phi$  ортогонально. В пространстве мы имеем однопараметрическое семейство  $\{\Phi\}$  таких поверхностей. Никакие две поверхности семейства  $\{\Phi\}$  не пересекаются.

Мы можем [1] ввести в пространстве в окрестности поверхности  $\Phi$  полугеодезическую параметризацию, для которой поверхности семейства  $\{\Phi\}$  служат координатными поверхностями, а одним из семейств координатных линий — «оси» однопараметрических пучков вполне геодезических поверхностей. Линейный элемент пространства при этом будет иметь следующий вид:

$$dS^2 = dx^{1^2} + g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) dx^\alpha dx^\beta, \quad (\alpha, \beta = 2, 3).$$

Докажем, что функции  $g_{\alpha\beta}$  имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = \varphi(x^1) g'_{\alpha\beta}(x^2, x^3).$$

Докажем сначала, что линии  $\gamma$  являются геодезическими линиями в смысле метрики поверхности  $\Phi$ . Достаточно заметить, что для того, чтобы вектор  $a$ , касательный

<sup>1</sup> См. Вестник Харьковского ун-та, № 3, серия механико-математическая, т. 31, Изд-во Харьковск. ун-та, 1964, 111—118.

к  $\gamma$  в точке  $M$ , перенести параллельно в бесконечно близкую точку  $M'$  линии  $\gamma$  в смысле метрики поверхности, достаточно перенести вектор  $a$  в точку  $M'$  вдоль  $\gamma$  в смысле метрики пространства и полученный при этом вектор  $a'$  спроектировать ортогонально на касательную плоскость к поверхности  $\Phi$  в точке  $M'$ . Линия  $\gamma$  лежит на вполне геодезической поверхности. Поэтому вектор  $a'$  лежит в касательной плоскости к вполне геодезической поверхности. Так как вполне геодезическая поверхность ортогонально пересекает поверхность  $\Phi$ , то проекция  $a$  вектора  $a'$  коллинеарна касательному вектору  $a''$  линии  $\gamma$  в точке  $M'$ . С точностью до бесконечно малых второго порядка длины векторов  $a$  и  $a''$  в метрике поверхности  $\Phi$  совпадают. Это и означает, что линия  $\gamma$  является геодезической для поверхности  $\Phi$ .

Найдем вид функций  $g_{\alpha\beta}$ .

Зафиксируем две близкие поверхности семейства  $\{\Phi\}$ . Обозначим их  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . На поверхности  $\Phi_1$  возьмем две близкие точки  $M_1$  и  $N_1$ . Соединим их отрезком геодезической  $\gamma_1$  и вычислим его длину  $|\gamma_1|$ . Возьмем на  $\Phi_1$  еще две точки  $M_2$  и  $N_2$  так, чтобы длина соединяющего их отрезка геодезической  $\gamma_2$  была равна  $|\gamma_1|$ . Пусть через геодезическую  $\gamma_2$  проходит вполне геодезическая поверхность  $F_2$ , а через  $\gamma_1$  вполне геодезическая поверхность  $F_1$ . Соединим точки  $M_1$  и  $M_2$  произвольной кривой  $\delta$ , лежащей на поверхности, но такой, чтобы она была ортогональна линиям  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Мы можем найти однопараметрическое семейство  $\{F\}$  вполне геодезических поверхностей, для которого линия  $\delta$  будет служить ортогональной траекторией. Через точку  $M$  проходит некоторая «ось». Она пересекает поверхность  $\Phi_2$  в точке  $M'_1$ . «Ось», проходящая через  $N_1$ , пересекает  $\Phi_2$  в точке  $N'_1$ . Отрезку  $\gamma_1$  на  $\Phi_2$  отвечает отрезок  $\gamma'_1$ . Аналогично, отрезку  $\gamma_2$  на  $\Phi_2$  отвечает отрезок  $\gamma'_2$ . Ортогональные траектории семейства  $\{F\}$  устанавливают между поверхностями его изометрическое соответствие. Так как длины отрезков  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  равны, то будут равны длины отрезков  $\gamma'_1$  и  $\gamma'_2$ . Точки  $M_1$ ,  $M'_1$ ,  $N_1$ ,  $N'_1$  были произвольны. Двум равным отрезкам на  $\Phi_1$  соответствуют два равные отрезка на поверхности  $\Phi_2$ . Преобразование конформное. Линейный элемент  $\Phi_1$  только множителем отличается от линейного элемента  $\Phi_2$ . Отсюда следует, что

$$g_{\alpha\beta} = \varphi(x^1) g'_{\alpha\beta}(x^2, x^3), \quad (\alpha, \beta = 2, 3),$$

что и требовалось доказать.

**Обратная теорема.** Если линейный элемент пространства имеет вид (1), то пространство допускает двупараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей.

**Доказательство.** Мы выберем на поверхности  $\Phi_1$  полугеодезическую параметризацию так, чтобы линии  $x^3 = \text{const}$  были геодезическими линиями поверхности  $\Phi_1$ . При этом

$$\Gamma_{ij}^3 = 0, \quad (i, j = 1, 2),$$

$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  — символы Кристоффеля.

Поверхности  $x^3 = \text{const}$  — вполне геодезические. Но мы можем взять произвольную геодезическую поверхность  $\Phi$  за координатную линию, откуда и следует утверждение.

Я искренне благодарен Михаилу Александровичу Улановскому за указанную мне ошибку.

Ю. С. Слободян

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Лекции по дифференциальной геометрии. Изд-во Харьков. ун-та, 1963.
2. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. Изд-во иностр. лит., 1936.
3. Скоутен и Дж. Стройк. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II. Изд-во иностр. лит., 1948.

Поступила в редакцию 12 октября 1965 г.

---

## ПОПРАВКА К СТАТЬЕ Г.И. СТУДЕНЦОВА «К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ»<sup>1</sup>

В § 5 этой статьи допущена следующая ошибка.

Известно, что отношение квадратичных форм, определяющих асимптотические линии на поверхностях пары, представляет собой некоторую функцию  $\psi(u, v)$ . Ошибочно считалось, что нормированием одной из вершин координатного тетраэдра эту функцию можно привести к единице, т. е.

$$\psi(u, v) = 1.$$

Как установлено автором, эта функция является инвариантной относительно нормирования вершин координатного тетраэдра, т. е. инвариантной относительно преобразования координат. Поэтому § 5 представляет собой частный случай пары проективно налагающихся поверхностей, для которой  $\psi(u, v) = 1$ .

Г. И. Студенцов

Поступила в редакцию 20 марта 1965 г.

---

<sup>1</sup> См. Вестник Харьковского ун-та, № 3, серия механико-математическая, т. 31, Изд-во Харьковск. ун-та, 1964, 119—132.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
В. Н. Боровик. Об одной проективной классификации кривых 6-го порядка . . . . .	4
В. И. Денисов. О законах сохранения в общей теории относительности . . . . .	11
Л. А. Дубровин. О регулярности изометрического погружения двумерного риманова многообразия в трехмерное риманово пространство . . . . .	19
А. И. Иванов. О выпуклых поверхностях переноса . . . . .	28
Н. И. Кованцов. Об абсолюте евклидовой плоскости . . . . .	32
Л. Т. Кондратьев. О движениях в общих пространствах путей $A_3(x, \dot{x})$ . . . . .	35
Е. А. Косачевская. К вопросу о винтовых поверхностях квазипереноса . . . . .	43
Н. П. Макуха. Связь внутреннего и внешнего диаметров общей замкнутой выпуклой поверхности . . . . .	49
А. И. Медианик. О центральной симметрии замкнутой строго выпуклой поверхности . . . . .	52
А. Д. Милка. О внутренней метрике выпуклых гиперповерхностей . . . . .	59
А. П. Мокляк. Об эквицентроаффинных инвариантах пространственных кривых . . . . .	70
Л. Т. Моторный. Об обобщенных поверхностях переноса . . . . .	77
Е. П. Сенькин. Об одном свойстве бесконечно малого изгибания общей выпуклой поверхности с границей . . . . .	86
Е. П. Сенькин. Об устойчивости ширины общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения интегральной средней кривизны . . . . .	88
Ю. С. Слободяни. О четырехмерных римановых пространствах, допускающих семейства вполне геодезических гиперповерхностей . . . . .	90
С. П. Соловьев. Одна теорема об однопородных многогранниках . . . . .	98
Г. Станилов. Отображение биаксиальной структуры комплекса на пространство постоянной кривизны . . . . .	107
Е. С. Столова. О фокальных свойствах кривых 3-го порядка . . . . .	112
Ф. В. Томашевич, С. У. Куртяков. О плоскостях и углах между объектами векторного пространства . . . . .	115
С. М. Чашечников. К теории относительных инвариантов связующих аффиноров . . . . .	122
Р. Н. Щербаков, Н. И. Кованцов, Р. М. Гейдельман. Линейчатая дифференциальная геометрия . . . . .	126
Поправка к статье Ю. С. Слободяни «О трехмерных римановых пространствах, допускающих семейства вполне геодезических поверхностей» . . . . .	133
Поправка к статье Г. И. Студенцова «К проективно-дифференциальной геометрии пары поверхностей» . . . . .	135

Редактор *Л. А. Гавrilova*

Техредактор *Л. Т. Момот*

Корректор *А. П. Гужва*

Сдано в набор 2/IV 1966 г. Подписано к печати 23/IX 1966 г. БЦ 34954. Формат 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Объем: 8,5 физ. л., 11,9 усл. печ. л., 9,8 уч.-изд. л. Заказ 6-150. Тираж 700.

Цена 66 коп.

Св. ТП научной и технической литературы. 1966 г. п. 194.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в типографии № 16 Областного управления по печати. Харьков, Университетская, 16. Зак. 4382.