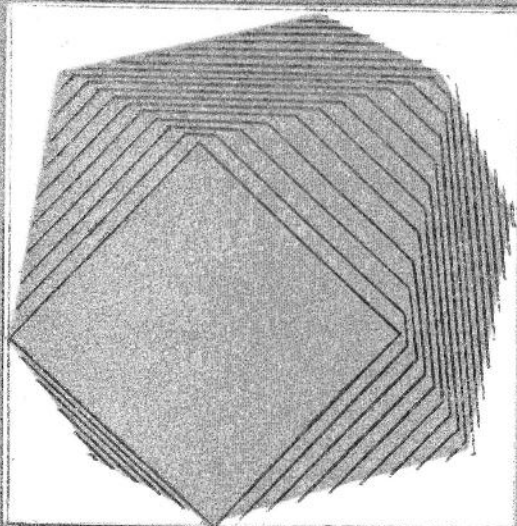


УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК **19**



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
тематический
научный
сборник

ОСНОВАН В 1965 Г.

ВЫПУСК 19

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
1976

Сборник подготовлен редакционной коллегией при Харьковском государственном университете.

Редакционная коллегия:

проф. Я. П. Бланк (зам. отв. редактора), доц. Д. З. Гордевский, проф. Н. И. Кованцов, доц. Е. А. Косачевская, доц. А. С. Лейбин (отв. секретарь), канд. физ.-мат. наук А. Д. Милка, доц. В. И. Михайловский, акад. АН УССР А. В. Погорелов (отв. редактор), доц. Е. П. Сенькин, проф. Н. С. Синюков, доц. В. Н. Скрыдлов, доц. М. А. Улановский.

Адрес редакционной коллегии:

310077, Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет. Тел.: 40-17-24.

Редакция естественнонаучной литературы
И. о. зав. редакцией Н. Н. Сорокун

Украинский геометрический сборник. Респ. межвед. темат. науч. сборник. Вып. 19. X., «Вища школа», Изд-во при Харьк. ун-те, 1976.
155,5 с. Списки лит. в конце статей.

Статьи сборника посвящены геометрии «в целом» в евклидовом, неевклидовых, римановом пространствах (вопросы погружения, изгибания, оценки кривизны и других функций на поверхности, свойства кривых на поверхности и т. п.), геометрии обобщенных пространств, геометрии неголономных многообразий, линейчатой геометрии.

Предназначен для научных работников математических специальностей.

20 203 — 395
У — М226(04) — 76 — 404 — 76

О НЕОГРАНИЧЕННОСТИ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Известен общий вопрос С. С. Черна [1]: будет ли неограничено в пространстве полное во внутренней метрике минимальное подмногообразие евклидова пространства? В этой работе мы устанавливаем неограниченность минимальной поверхности при условии ограниченности интегральной кривизны. Некоторые другие результаты получены в [2].

Теорема. Пусть F^2 — полная минимальная поверхность в n -мерном полном односвязном римановом пространстве R^n неположительной кривизны. Пусть интегральная гауссова кривизна F^2 ограничена. Тогда поверхность неограничена в пространстве.

Заметим, что условие односвязности пространства необходимо, так как в противном случае можно взять компактные локально евклидовы пространства, в которых существуют, как это легко видеть, компактные минимальные поверхности.

Для доказательства установим две леммы. Пусть H — вектор средней кривизны некоторого подмногообразия F^m риманова пространства R^n . Из точки $x \in F^m$ проведем n геодезических линий l_i пространства R^n , ортогональных друг другу, причем при $i=1, \dots, m$ геодезическая l_i касается F^m в точке x , а при $i=m+1, \dots, n$ кривая l_i ортогональна F^m . Дифференцирование вдоль них по длине дуги обозначим через $\partial/\partial t_i$.

Лемма 1. Пусть ∇_2 и $\tilde{\nabla}_2$ — операторы Бельтрами для R^n и F^m соответственно, и пусть f — некоторая регулярная функция класса C^2 , заданная в R^n . Тогда

$$\nabla_2 f = \tilde{\nabla}_2 f - m (H \operatorname{grad} f) + \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2}. \quad (1)$$

Здесь $\operatorname{grad} f$ — градиент функции f в пространстве R^n . Возьмем m геодезических линий подмногообразия F^m , выходящих из точки x и касающихся l_i , $i=1, \dots, m$. Вторую производную по длине дуги этой линии обозначим через $\partial^2/\partial s_i^2$. Тогда легко найти

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s_i^2} - (k_i \operatorname{grad} f), \quad i=1, \dots, m,$$

где k_i — вектор кривизны геодезической линии F^m , рассматриваемой как кривая в пространстве R^n . Суммируя эти соотношения от 1 до m и замечая, что $\sum k_i = Hm$, мы получим (1).

Рассмотрим теперь подмногообразие F^m в полном односвязном пространстве неположительной кривизны R^n и зафиксируем точку $0 \in R^n$. Тогда для каждой точки $P \in R^n$ существует единственная кратчайшая, соединяющая P с 0 . Длину этой кратчайшей обозначим через $u(P)$. Рассмотрим

функцию $\rho = \frac{u^2}{2}$ и ее ограничение на F^m .

Лемма 2. Для подмногообразия F^m в полном односвязном римановом пространстве неположительной кривизны имеет место неравенство

$$\tilde{\nabla}_2 \rho \geq m + m(H \operatorname{grad} \rho). \quad (2)$$

Заметим, что эта лемма позволяет перенести без всякого изменения оценки диаметра, полученные в [2], на подмногообразия, в пространстве неположительной кривизны. Другой путь получения этих оценок при $m \geq 3$ указан в [3].

Применим лемму 1 к гиперсферам $u = \text{const}$ и к функции ρ , градиент которой направлен по внешней нормали ν к гиперсфере. Так как ρ постоянно на гиперсфере, то $\tilde{\nabla}_2 \rho = 0$. Гиперсферы в пространстве неположительной кривизны выпуклы, поэтому их вектор средней кривизны направлен внутрь. Если обозначить через λ_p , $p=1, \dots, n-1$ главные кривизны гиперсферы, считая их положительными, то вектор средней кривизны

$$H(u = \text{const}) = - \frac{\nu}{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p.$$

Следовательно,

$$\tilde{\nabla}_2 \rho = u \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p + 1. \quad (3)$$

Применяя эту лемму второй раз к функции ρ и к подмногообразию F^m и используя (3), получаем

$$\tilde{\nabla}_2 \rho = u \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p + 1 - \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t_i^2} + m(H \operatorname{grad} \rho). \quad (4)$$

Рассмотрим сумму $\sum_{i=m+1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t_i^2}$. Пусть n_i — геодезические

поля в R^n , такие что в точке $x \in F^m$ они касаются l_i . Эта точка считается фиксированной. Тогда можно записать

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_i} = (\text{grad } \rho)_i = u v_j n_i^j, \quad i = m+1, \dots, n,$$

где n_i^j есть j -я контрвариантная компонента вектора n_i . Для второй производной имеем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t_i^2} = (v n_i)^2 + u v_{j,k} n_i^j n_i^k + u v_j n_{i,k}^j n_i^k. \quad (5)$$

Последний член справа равен нулю, так как поле n_i — геодезическое. Пусть τ_p , $p=1, \dots, n-1$ — главные направления гиперсферы $u=\text{const}$ и λ_p — соответствующие главные кривизны. Запишем разложение

$$n_i = a_{ni} v + \sum_{p=1}^{n-1} a_{pi} \tau_p.$$

Матрица $\|a_{ij}\|$ ортогональная. Подставляя выражение компонент вектора n_i и используя то обстоятельство, что τ_p — главные направления, получим

$$v_{j,k} n_i^j n_i^k = \sum_{p=1}^{n-1} a_{pi}^2 \lambda_p. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t_i^2} = a_{ni}^2 + u \sum_{p=1}^{n-1} a_{pi}^2 \lambda_p. \quad (7)$$

После подстановки этих выражений в (4) находим

$$\tilde{\nabla}_2 \rho = u \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p \left(1 - \sum_{i=m+1}^n a_{pi}^2 \right) + 1 - \sum_{i=m+1}^n a_{ni}^2 + m (H \text{ grad } \rho).$$

Используя же ортогональность матрицы $\|a_{ij}\|$, это можно записать так:

$$\tilde{\nabla}_2 \rho = u \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p \sum_{i=1}^m a_{pi}^2 + \sum_{i=1}^m a_{ni}^2 + m (H \text{ grad } \rho). \quad (8)$$

Докажем теперь, что в пространстве неположительной кривизны $u \lambda_p > 1$. Для этого воспользуемся леммой из нашей работы [4, § 1], согласно которой производная вдоль линии тока гео-

дезического поля, в качестве которого возьмем ν , от главной кривизны поля определяется следующим выражением:

$$\frac{d\lambda_\nu}{du} = -\lambda_p^2 - K(\nu, \tau_p),$$

где $K(\nu, \tau_p)$ — кривизна пространства R^n по площадке, проведенной через ν и τ_p . Так как $K(\nu, \tau_p) \leq 0$, то $d\lambda_p/du \geq -\lambda_p^2$. Поэтому функция $f = 1/\lambda_p$ удовлетворяет неравенству $df/du \leq 1$. Интегрируя это неравенство и замечая, что $f(0) = 0$, получим $f(u) \leq u$ или $u\lambda_p \geq 1$. С помощью этого неравенства и (8) имеем

$$\tilde{\nabla}_2 \rho \geq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{p=1}^{n-1} a_{pi}^2 + a_{ni}^2 \right) + m(H \operatorname{grad} \rho) = m + m(H \operatorname{grad} \rho),$$

причем для евклидова пространства здесь имеет место равенство. Лемма доказана. Для минимального подмногообразия F в полном односвязном пространстве неположительной кривизны $\tilde{\nabla}_2 \rho \geq m$.

Пусть теперь F^2 — полная минимальная поверхность в пространстве неположительной кривизны; K — ее гауссова кривизна метрики; K_e — внешняя кривизна; K_{R^n} — кривизна R^n для площадки, касательной к F^2 . Имеет место формула $K = K_e + K_{R^n}$. Так как поверхность минимальна, то $K_e \leq 0$. Следовательно, гауссова кривизна неположительна. Далее, по теореме А. Хубера [5] из условия ограниченности интегральной гауссовой кривизны вытекает, что F^2 конечносвязно. Можем рассматривать F^2 как двумерное компактное многообразие с конечным числом выброшенных точек p_i , которые будут бесконечно удаленными в метрике F^2 . Окружим каждую точку замкнутой кривой Γ_i , длину которой обозначим через L_i . Конечную область, ограниченную кривыми Γ_i , обозначим через D . Так как для минимальной поверхности $F^2 \subset R^n$ имеет место неравенство $\tilde{\nabla}_2 \rho \geq 2$, то интегрируя его по области D , получим

$$\sum_i \int_{\Gamma_i} \rho_i ds \geq 2S(D),$$

где ρ_i — производная по внешней нормали к кривой Γ_i , S — площадь. Допустим, поверхность содержится в шаре радиуса R . Возьмем точку O в центре этого шара. Тогда очевидно $|\rho_i| \leq R$. Следовательно,

$$R \sum L_i \geq 2S(D).$$

Предположим сначала, что F^2 гомеоморфно плоскости. Пусть область D — геодезический круг радиуса r , площадь которого обозначим через $S(r)$ и длину окружности через $L(r)$. Рассмот-

рим функцию $y(r) = \frac{S}{L}$, заданную на полуоси $[0, \infty)$. Замечая, что $S' = L$ и L' равно интегралу от геодезической кривизны окружности, имеем

$$y' = \frac{S'L - L'S}{L^2} = 1 - \frac{S}{L^2} \left(2\pi - \int_D K dS \right).$$

Имеются две возможности: либо существует последовательность $r_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, что

$$\frac{S(r_n)}{L^2(r_n)} \geq C_1 > 0,$$

где C_1 — постоянная, либо $\lim_{r \rightarrow \infty} S(r)/L^2(r) = 0$. В первом случае, так как на поверхности неположительной кривизны $L(r_n) \rightarrow \infty$ при $r_n \rightarrow \infty$, имеем

$$y(r_n) = \frac{S(r_n)}{L^2(r_n)} L(r_n) \geq C_1 L(r_n) \rightarrow \infty,$$

и поэтому из неравенства (9) следует неограниченность поверхности. Во втором случае, в силу ограниченности полной кривизны, следует, что при достаточно большом r $y'(r) > 1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Поэтому и в данном случае $y(r)$ неограничено, что влечет в силу неравенства (9) неограниченность поверхности.

Пусть теперь F^2 гомеоморфно цилиндру и пусть p_1 и p_2 — бесконечно удаленные точки. Из неравенства (9) следует, что при стягивании Γ_i к p_i $\lim (L_1 + L_2) > 0$. Если для какой-нибудь точки, например, для p_1 при стягивании кривой к этой точке имеет место $0 < \lim L_1 < \text{const}$, то площадь бесконечной области, содержащей точку p_1 , равна бесконечности. Возьмем две гомотопные кривые: Γ_0 — фиксированная кривая с длиной L_0 и переменная кривая Γ_1 , которая стягивается к p_1 . При этом будем считать, что Γ_1 при стягивании к p_1 пробегает последовательность кривых, для которых нижний предел длин меньше бесконечности. Пусть D — переменная область, ограниченная Γ_0 и Γ_1 . Так как $S(D) \rightarrow \infty$, а $L_0 + L_1$ ограничено сверху, то $R \rightarrow \infty$.

Если же при стягивании к обоим точкам p_i выполнено $\lim L_i = \infty$, то на F^2 существует замкнутая геодезическая γ . Пусть ее длина равна l . Выпуская ортогонально к ней геодезические, мы получим на F^2 , в силу неположительности гауссовой кривизны, регулярную полугеодезическую сеть. В этом случае доказательство проводится так же, как в случае F^2 гомеоморфно плоскости, если положить

$$y(r) = \frac{S(r)}{l + L(r)},$$

где $L(r)$ — длина эквидистанты кривой γ на расстоянии r , которая стремится к бесконечности; $S(r)$ — площадь области, ограниченной этой эквидистантой и γ .

Поэтому остается возможность: $\lim L_1 = \infty$, $\lim L_2 = 0$, т. е. F^2 является чашей, содержащей рог, по терминологии [6]. Окрестность точки p_1 является собственно чашей. В работе [7] доказано, что на всей гиперболической чаше можно ввести полугеодезические координаты (r, φ) , причем линии $r = \text{const}$ являются эквидистантами. В этом случае, выбрав какую-либо эквидистанту за линию $r=0$, положим

$$y(r) = \frac{S(r)}{L(0) + L(r)},$$

где $S(r)$ — площадь области, заключенной между эквидистантами; $L(r)$ — длина эквидистанты. Так как $\lim L_1 = \infty$ при стягивании L_1 к p_1 , то $L(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому, проведя доказательство так же, как в случае F^2 гомеоморфного плоскости, получим неограниченность.

Пусть теперь число точек p_i больше двух. Тогда каждая точка p_i определяет гомотопический класс кривых для каждой точки p_i свой. Пусть для каждой точки p_i нижняя грань длин среди гомотопных кривых достигается при стягивании к p_i , т. е. ни в одном гомотопическом классе не существует замкнутой геодезической, минимальной в своей окрестности. В силу неравенства (9) хотя бы для одной бесконечно удаленной точки, например, для p_i , имеет место $\lim L_1 > 0$. Следовательно, площадь окрестности p_1 бесконечна, а это опять, в силу неравенства (9) и условия на нижнюю грань длин, влечет неограниченность поверхности. Следовательно, мы можем предположить, что для некоторой точки p_i в определяемом ею гомотопическом классе существует замкнутая геодезическая минимальной длины. Тогда в окрестности p_i строим регулярную полугеодезическую сеть. Условие неположительности гауссовой кривизны влечет неограниченность длин эквидистант замкнутой геодезической. Как и выше, с помощью функции $y(r)$ доказывается неограниченность поверхности.

В заключение отметим, что метрику пространства можно считать класса регулярности C^4 , а класс регулярности рассматриваемых поверхностей — C^2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chern S. S. The geometry of G-structures, Bull. — «Amer. Math. Soc», 1966, v. 72, № 2, p. 167—219.
2. Аминов Ю. А. Внешний диаметр погруженного риманова многообразия. — «Матем. сб.», 1973, т. 92, № 3, с. 456—460.
3. Бурого Ю. Д. Об одной теореме Ю. А. Аминова. — В сб.: Вопросы глобальной геометрии. Записки научных семинаров ЛОМИ, 1974, т. 45, с. 18—24.

4. Аминов Ю. А. Об оценках диаметра и объема подмногообразия евклидова пространства. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 18, Харьков, 1975, с. 3—15.
5. Huber A. On subharmonic functions and differential geometry in the large. — «Comm. math. Helv», 1957, v. 32, p. 13—72.
6. Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., Физматгиз, 1959. 333 с.
7. Вернер А. Л. Полугеодезическая координатная сеть на трубках неположительной кривизны. — «Труды Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова», 1965, т. 76, с. 130—140.

Поступила 29 мая 1975 г.

УДК 513

А. А. БОРИСЕНКО

О КОМПАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

На топологический тип компактной l -мерной поверхности отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве R^{2l-1} существуют большие ограничения: эйлерова характеристика поверхности F^l равна нулю; универсальная накрывающая поверхность является параллелизуемым многообразием [1]. Топологические ограничения влекут за собой ограничения на внутреннюю кривизну поверхности отрицательной внешней кривизны.

В работе доказаны следующие три теоремы.

Теорема 1. Пусть F^4 — компактное риманово многообразие, кривизна которого по двумерным площадкам удовлетворяет неравенству $0 < K < 1$. Тогда многообразие F^4 нельзя изометрично вложить в риманово пространство R^7 , кривизна которого по двумерным площадкам > 1 .

Теорема 2. Пусть F^4 — компактное риманово многообразие отрицательной кривизны по двумерным площадкам. Тогда F^4 нельзя изометрично вложить в риманово пространство R^7 неотрицательной кривизны.

Доказательство теорем 1, 2. Допустим противное. Тогда поверхность F^4 в римановом пространстве R^7 является поверхностью отрицательной внешней кривизны. Из заметки [1] следует, что эйлерова характеристика поверхности F^4 равна нулю. Но по теореме, доказанной Милнором [2], эйлерова характеристика поверхности F^4 отлична от нуля. Мы пришли к противоречию.

Теоремы 1, 2 доказаны лишь при $l=4$, хотя они, наверное, справедливы при любом l .

Теорема 3. Пусть F^l — компактная l -мерная поверхность постоянной кривизны по двумерным направлениям в сферическом пространстве S^{2l-1} . Если кривизна поверхности F^l меньше единицы, то она равна нулю, и поверхность локально изометрична евклидову пространству.

Лемма. Пусть F — компактная l -мерная поверхность отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве R^{2l-1} .

О КОМПАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

На топологический тип компактной l -мерной поверхности отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве R^{2l-1} существуют большие ограничения: эйлерова характеристика поверхности F^l равна нулю; универсальная накрывающая поверхности является параллелизуемым многообразием [1]. Топологические ограничения влекут за собой ограничения на внутреннюю кривизну поверхности отрицательной внешней кривизны.

В работе доказаны следующие три теоремы.

Теорема 1. Пусть F^4 — компактное риманово многообразие, кривизна которого по двумерным площадкам удовлетворяет неравенству $0 < K < 1$. Тогда многообразие F^4 нельзя изометрично вложить в риманово пространство R^7 , кривизна которого по двумерным площадкам ≥ 1 .

Теорема 2. Пусть F^4 — компактное риманово многообразие отрицательной кривизны по двумерным площадкам. Тогда F^4 нельзя изометрично вложить в риманово пространство R^7 неотрицательной кривизны.

Доказательство теорем 1, 2. Допустим противное. Тогда поверхность F^4 в римановом пространстве R^7 является поверхностью отрицательной внешней кривизны. Из заметки [1] следует, что эйлерова характеристика поверхности F^4 равна нулю. Но по теореме, доказанной Милнором [2], эйлерова характеристика поверхности F^4 отлична от нуля. Мы пришли к противоречию.

Теоремы 1, 2 доказаны лишь при $l=4$, хотя они, наверное, справедливы при любом l .

Теорема 3. Пусть F^l — компактная l -мерная поверхность постоянной кривизны по двумерным направлениям в сферическом пространстве S^{2l-1} . Если кривизна поверхности F^l меньше единицы, то она равна нулю, и поверхность локально изометрична евклидову пространству.

Лемма. Пусть F — компактная l -мерная поверхность отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве R^{2l-1} .

Тогда поверхность F имеет компактное параллелизуемое накрывающее многообразие.

В касательном пространстве произвольной точки Z поверхности F имеется 2^l единичных касательных асимптотических векторов $v_i(Z)$. Среди векторов $v_i(Z)$ имеется l линейно независимых векторов, которые образуют базис касательного пространства в точке Z . В окрестности каждой точки Z совокупность векторов $v_i(Z)$ распадается на регулярные векторные поля V_i [1]. Пусть $F^{(1)} \subset TF$ — компактное дифференцируемое многообразие в касательном расслоении TF поверхности F , которое состоит из единичных асимптотических векторов $v_i(Z)$, где Z — произвольная точка поверхности F . Многообразие $F^{(1)}$ является конечнократным компактным накрывающим пространством для поверхности F . Поэтому на многообразии $F^{(1)}$ в каждой точке индуцируется 2^l касательных векторов $v_i^1(Z)$. В окрестности каждой точки многообразия F^1 совокупность векторов $v_i^1(Z)$ также распадается на регулярные векторные поля V_i^1 . На многообразии $F^{(1)}$ из локальных векторных полей V_i^1 можно выделить регулярное невырожденное векторное поле V_1^1 , заданное на всем многообразии $F^{(1)}$ [1]. Остальные векторные поля могут между собой перепутываться.

Пусть $TF^{(1)}$ — касательное расслоение многообразия $F^{(1)}$; $F^{(2)} \subset TF^{(1)}$ — компактное дифференцируемое многообразие, которое состоит из касательных векторов $v_i^1(Z)$ ($i = 2, \dots, 2^l$). Сюда не входят векторы $v_1^1(Z)$, которые образуют глобальное векторное поле V_1^1 . На многообразии $F^{(2)}$ также можно выделить глобальное векторное поле V_2^1 . Кроме того, на многообразии $F^{(2)}$ определено и векторное поле V_1^1 , так как $F^{(2)}$ является накрывающим пространством многообразия $F^{(1)}$. Повторив эту процедуру максимально 2^l раз, мы получим многообразие Φ , на котором определено 2^l глобальных векторных полей V_i^l . В каждой точке многообразия Φ существует l линейно независимых векторных полей V_i^l . Отсюда следует, что многообразие Φ параллелизуемо [1]. Многообразие Φ является конечнократным накрывающим пространством поверхности F^l . Максимальная кратность накрытия 2^l .

Доказательство теоремы 3. Невозможность случая $1 > K > 0$ доказана Муром [3]. Допустим, что кривизна поверхности F^l неположительна. В сферическом пространстве S^{2l-1} поверхность F^l является поверхностью отрицательной внешней кривизны. Пусть Φ — компактное параллелизуемое накрывающее многообразие поверхности F^l , существование которого следует из леммы 1. На многообразии Φ естественным образом индуцируется метрика неположительной постоянной кривизны. Параллелизацию многообразия Φ образуют асимптотические векторные поля. В окрестности каждой точки многообразия Φ интегральные тра-

ектории векторных полей, которые параллелизуют многообразие Φ , можно брать за координатные линии, так как скобка Ли двух асимптотических векторных полей на поверхности, удовлетворяющей условию теоремы, равна нулю [3]. Отсюда следует, что на многообразии Φ можно ввести локально-евклидову метрику. Накрывающим пространством для компактного локально-евклидова многообразия является тор T^1 [4]. Тор T^1 является накрывающим пространством и для поверхности F^1 . Поэтому на торе T^1 также индуцируется метрика постоянной неположительной кривизны, локально изометричная метрике на поверхности F^1 . Но если на торе T^1 задана метрика неположительной кривизны, то она плоская [5]. Отсюда следует, что поверхность имеет нулевую кривизну.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенко А. А. Об эйлеровой характеристике компактных поверхностей отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве. — «Укр. геометр. сб.», Вып. 18, Харьков, 1975, с. 20—25.
2. Bishop R., Goldberg S. Some implications of the generalized Gauss—Bonnet theorems. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1964, vol. 112, p. 508—535.
3. Moor J. D. Isometric immersions of space forms in space forms. — «Pacif. J. of Math.», 1972, vol. 40, N 1, p. 157—166.
4. Kobayashi S., Nomizu K. — «Foundations of Differential geometry». New York, 1963, vol. 1, p. 37—47.
5. Lawson H., Yau S. Compact manifolds nonpositive curvature. — «J. Diff. geom.», 1972, vol. 7, N 1—2, p. 211—229.

Поступила 25 мая 1975 г.

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ПОГРУЖЕНИИ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Известно, что псевдориманово пространство постоянной кривизны изометрично некоторой гиперповерхности псевдоевклидова пространства. Пусть $E_{p',q'}^n$ — n -мерное псевдоевклидово пространство с квадратичной формой

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{p'} dx_i^2 - \sum_{j=1}^{q'} dx_{p'+j}^2 \quad (1)$$

$V_{p,q}^l$ — псевдориманово l -мерное многообразие с метрикой, которая определяется квадратичной формой, имеющей p положительных и q отрицательных собственных значений. Тогда в $E_{p',q'}^n$ гиперповерхности второго порядка

$$\sum_{i=1}^{p'} x_i^2 - \sum_{j=1}^{q'} x_{p'+j}^2 = \pm 1 \quad (2)$$

являются псевдоримановыми многообразиями постоянной положительной (отрицательной) кривизны. В частном случае, когда $q'=1$ и в правой части уравнения (2) стоит -1 , получаем пространство Лобачевского [1, с. 243].

Следует заметить, что $p' > p$ для многообразия положительной кривизны $V_{p'-1, q'}^{n-1}$ и $q' > q$ для многообразия отрицательной кривизны $V_{p', q'-1}^{n-1}$. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем рассматривать псевдоримановы многообразия отрицательной кривизны, так как для многообразий положительной кривизны верны двойственные аналогичные результаты. Для псевдоримановых многообразий постоянной отрицательной кривизны написанное выше переформулируем следующим образом: многообразие $V_{p, q}^l$ глобально изометрично вкладывается в $E_{p', q'}^n$, если $p' \geq p$, $q' > q$. Естественно, возникает вопрос об изометричном локальном (глобальном) погружении $V_{p, q}^l$ при $q' = q$, т. е. в $E_{p', q}^n$. На вопрос о локальном погружении отвечает

Теорема 1. Пусть $V_{p, q}^l$ — псевдориманово пространство постоянной отрицательной кривизны, $E_{p', q}^n$ — псевдоевклидово пространство. Если $n < 2l - 1$, то многообразие $V_{p, q}^l$ локально изометрично не погружается в $E_{p', q}^n$, если $n = 2l - 1$, то локально изометричное погружение существует.

Аналогичная теорема справедлива для многообразия постоянной положительной кривизны при условии $p = p'$ вместо $q = q'$.

Когда $q = 0$, то получается следующая известная теорема: l -мерное пространство Лобачевского нельзя локально изометрично вложить в евклидово пространство E^{2l-2} и существует локально изометрическое вложение в E^{2l-1} . Эту теорему открыл Э. Картан в 1919 году, в 1938 году ее переоткрыл А. Е. Либер; пример локального вложения построил Ф. Шур в 1886 году. На вопрос о глобальном погружении полного псевдориманова пространства постоянной отрицательной кривизны частично отвечает

Теорема 2. Пусть $V_{p, q}^l$ — полное связное псевдориманово многообразие постоянной отрицательной кривизны. Если $q \neq 0, 1, 3, 7$, то многообразие $V_{p, q}^l$ не погружается изометрично в $E_{p', q}^{2l-1}$.

Есть основания считать, что при $q = 0, 1, 3, 7$ теорема 2 также справедлива, но доказательство ее в этом случае автору не известно. Теоремы 1, 2 обобщаются естественным образом на случай, когда объемлющим пространством является псевдориманово многообразие постоянной кривизны. Справедлива

Теорема 3. Пусть $V_{p, q}^l$ — полное связное псевдориманово многообразие постоянной кривизны c , $V_{p', q}^{2l-1}$ — связное псевдориманово многообразие постоянной кривизны C , причем $c < C$. Если многообразие $V_{p, q}^l$ является регулярной по-

поверхностью в $V_{p,q}^{2l-1}$ и $p, q \neq 0, 1, 3, 7$, то $C > 0$, $c = 0$ и многообразие $V_{p,q}^l$ локально изометрично псевдоевклидову пространству.

Заметим, что в римановом пространстве имеет место родственная теорема.

Пусть F^l — компактная l -мерная регулярная поверхность постоянной кривизны c по двумерным площадкам в римановом пространстве R^{2l-1} постоянной кривизны C . Если $c < C$, то $C > 0$, $c = 0$ и поверхность F^l локально изометрична евклидову пространству [2].

Теорема 1 также обобщается на вложение псевдоримановых многообразий непостоянной кривизны. Доказана

Теорема 4. Пусть $V_{p,q}^l$ — псевдориманово многообразие, кривизна которого по двумерным площадкам меньше $-a^2$. Если $n < 2 \max(p, q)$, то многообразие $V_{p,q}^l$ локально не погружается в $E_{p,q}^n$.

В теореме 4 оценка для n слабее, чем в теореме 1, и только, когда $p=1$ или $q=1$, она совпадает с оценкой n в теореме 1.

В римановом случае имеет место теорема: l -мерное риманово пространство отрицательной секционной кривизны нельзя локально изометрично вложить в евклидово пространство E^{2l-2} [3].

В дальнейшем для доказательства теорем понадобятся следующие две леммы. Пусть задана система квадратичных уравнений с l неизвестными:

$$A_{ij}^m x^i x^j = 0 \quad (i, j = 1, \dots, l), \quad (m = 1, \dots, N). \quad (3)$$

Обозначим: $A(x, x)$ — вектор с компонентами $A_{ij}^m x^i x^j$, $A(x, y)$ — вектор с компонентами $A_{ij}^m x^i y^j$, где x, y — l -мерные векторы с компонентами x^i, y^i .

Лемма 1. Если в системе N уравнений (3) $N \leq l-1$ и для любых x, y

$$A(x, x) A(y, y) - A^2(x, y) \leq 0, \quad (4)$$

то система уравнений (1) имеет нетривиальное решение.

Лемму 1 для общего случая доказал Отзуки [4]. Вторая лемма очевидна.

Лемма 2. Пусть билинейная симметричная форма $A_{ij} x^i y^j = 0$ для произвольного вектора y . Тогда ранг формы меньше l .

Пусть E^l — действительное l -мерное векторное пространство и $A^1, \dots, A^l$ — симметричные билинейные формы на E^l . Формы A^m называются внешне ортогональными, если

$$\sum_{m=1}^l [A^m(x, y) A^m(z, w) - A^m(x, w) A^m(z, y)] = 0 \quad (5)$$

для произвольных $x, y, z, w \in E^l$. Для внешне ортогональных форм Эли Картан доказал следующее утверждение.

Теорема. Картан [4] Пусть $A^1, \dots, A^l$ внешние ортогональные симметричные билинейные формы на пространстве E^l , для которых выполняется следующее свойство: если вектор $x \in E^l$ такой, что $A^m(x, y) = 0$ для всех $(1 \leq m \leq l)$ и для всех векторов $y \in E^l$, то $x = 0$. Тогда существует действительная ортогональная матрица a_k^m и l линейных функционалов $\varphi^1, \dots, \varphi^l$ таких, что

$$A^m = \sum_k a_k^m (\varphi^k)^2.$$

Говоря другими словами, в пространстве E^l существует такой базис, в котором формы принимают диагональный вид. Из доказательства теоремы следует, что такой базис единственный. Псевдориманово многообразие называется полным, если каждая геодезическая продолжается до произвольного значения аффинного параметра. Д. Вольф доказал следующую теорему.

Теорема. Вольф [5]. Пусть $V_{p,q}^l$ — полное псевдориманово многообразие постоянной кривизны K . Универсальной накрывающей многообразия $V_{p,q}^l$ является гиперповерхность

$$a) \sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 - \sum_{j=1}^q x_{p+1+j}^2 = K \frac{1}{2} \text{ в пространстве } E_{p+1,q}^{l+1}, \text{ если } p \neq 1,$$

$$K > 0;$$

$$б) \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=1}^{q+1} x_{p+j}^2 = -(-K) \frac{1}{2} \text{ в пространстве } E_{p,q+1}^{l+1}, \text{ если}$$

$$q \neq 1, K < 0 \text{ и псевдоевклидово пространство } E_{p,q}^l, \text{ если } K = 0.$$

Доказательство теоремы 1. Допустим противное: пусть $V_{p,q}^l$ — регулярная l -мерная поверхность постоянной отрицательной секционной кривизны в $E_{p',q}^{2l-2}$. Не ограничивая общности, можно считать кривизну по двумерным площадкам равной -1 . Пусть Q — произвольная точка поверхности $V_{p,q}^l$; T_Q — касательное пространство в точке Q ; $x = (x^1, \dots, x^l)$ — произвольный вектор в T_Q ; $g = g_{ij}x^i x^j$ — метрическая форма поверхности в точке Q . Ранг квадратичной формы g в каждой точке равен l , $A^m = A_{ij}^m x^i x^j$ — вторая квадратичная форма поверхности в точке Q , соответствующая нормали $n_m (m=1, \dots, l-2)$. Так как $q = q'$, то все нормали поверхности являются пространственноподобными векторами. Поэтому нормали n_m возьмем так, чтобы они были взаимно ортогональными с нормью, равной 1. По формуле Гаусса тензор кривизны поверхности $V_{p,q}^l$ равен

$$R_{ijkl} = \sum_m (A_{ik}^m A_{jl}^m - A_{il}^m A_{jk}^m). \quad (6)$$

Так как поверхность $V_{p,q}^l$ является пространством постоянной отрицательной кривизны, то

$$R_{ijkl} = - (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (7)$$

Из (6) и (7) непосредственно следует

$$\sum_m (A_{ik}^m A_{jl}^m - A_{il}^m A_{jk}^m) + (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим систему $l-1$ уравнений:

$$\begin{aligned} A_{ij}^m x^i x^j &= 0 \quad (m = 1, \dots, l-2), \\ g_{ij} x^i x^j &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из условия (8) следует, что система (9) удовлетворяет условию леммы 1. Значит, система (9) имеет нетривиальное решение x_0 . Тогда из уравнения (8) следует

$$-\sum_m (A^m(x_0, y))^2 - g^2(x_0, y) = 0 \quad (10)$$

для любого $y \in T_0$.

Из (10) следует, что $g(x_0, y) = 0$ для любого $y \in T_0$. Это значит, что квадратичная форма g имеет ранг меньше l . Мы пришли к противоречию.

Если $n = 2l - 1$, то локальное изометрическое вложение многообразия $V_{p,q}^l$ постоянной отрицательной кривизны в пространство $E_{p',q}^{2l-1}$ задается следующим образом:

$$y_{2l-1} = \begin{cases} a_i e^{u_i} \cos \frac{u_i}{a_i}, & \text{если } 1 \leq i \leq p-1; \\ a_i e^{u_i} \operatorname{ch} \frac{u_i}{a_i}, & \text{если } p \leq i \leq l-1; \end{cases}$$

$$y_{2i} = \begin{cases} a_i e^{u_i} \sin \frac{u_i}{a_i}, & \text{если } 1 \leq i \leq p-1; \\ a_i e^{u_i} \operatorname{sh} \frac{u_i}{a_i}, & \text{если } p \leq i \leq l-1; \end{cases}$$

$$y_{2l-1} = \int_0^{u_e} \sqrt{1 - e^{2u}} du, \quad \text{где } y_1, \dots, y_{2l-1} \text{ — координаты в } E_{p',q}^{2l-1},$$

$a_1, \dots, a_l$ — действительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_i a_i^2 = 1.$$

При доказательстве теоремы 2 достаточно ограничиться случаем, когда $V_{p,q}^l$ — полное односвязное псевдориманово многообразие постоянной отрицательной кривизны. Действительно, если в пространство $E_{p',q}^{2l-1}$ изометрично погружается полное многообразие $V_{p,q}^l$, то изометрично погружается в $E_{p',q}^{2l-1}$ универсальное накрывающее многообразие.

Доказательство теоремы 2. Допустим противное: пусть $V_{p,q}^l$ — полная односвязная поверхность постоянной отрицательной кривизны в $E_{p',q}^{2l-1}$. Из уравнения (9) следует, что в каждой точке поверхности симметричные билинейные формы $A^m = A_{ij}^m x^i y^j$, $g = g_{ij} x^i y^j$ ($m = 1, \dots, l-1$) внешне ортогональны. Так как ранг формы g равен l , то билинейные формы A^m , g удовлетворяют условию теоремы Картана. Поэтому в каждой точке Q поверхности $V_{p,q}^l$ в касательном пространстве T_Q существует единственный базис, в котором формы A^m , g диагональны. Базис образуют ортогональные векторы $e_1, \dots, e_{p+q}$, так как форма g — диагональна. Заметим, что векторы $e_1, \dots, e_p$ пространственноподобны, а векторы $e_{p+1}, \dots, e_{p+q}$ времениподобны, так как их норма $g_{ij} e_k^i e_k^j > 0$ при $k \leq p$ и < 0 при $k > p$. По теореме Вольфа многообразие $V_{p,q}^l$ глобально изометрично гиперповерхности $S_{p,q}^l$, заданной уравнением

$$\sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=1}^{q+1} x_{p+j}^2 = -1$$

в псевдоевклидовом пространстве $E_{p,q+1}^{l+1}$. Рассмотрим сферу S^q , расположенную на гиперповерхности $S_{p,q}^l$ и заданную уравнениями $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, p$). Пусть $T^q \subset T_Q$ — касательное пространство к сфере S^q в точке Q . Оно состоит из времениподобных векторов. Выберем в касательном пространстве T_Q следующий ортогональный базис: времениподобные векторы $r_{p+1}, \dots, r_{p+q}$ образуют ортогональный базис в плоскости T^q , пространственноподобные векторы $r_1, \dots, r_p$ расположены в ортогональном дополнении к T^q . Тогда

$$l_{p+j} = \sum_{i=1}^l \lambda_{p+j}^i r_i \quad (j = 1, \dots, q).$$

Докажем, что

$$\det(\lambda_{p+j}^{p+i}) \neq 0 \quad (i, j = 1, \dots, q). \quad (11)$$

Допустим, что это не так. Тогда существует ненулевой

вектор $e = \sum_{j=1}^q \mu_j e_{p+j} = \sum_{i=1}^p \nu_i r_i$, который, с одной стороны,

является линейной комбинацией независимых времениподобных векторов e_{p+j} , с другой стороны — независимых пространственноподобных векторов r_i ($i=1, \dots, p$).

Поэтому вектор e одновременно является пространственноподобным и времениподобным, чего не может быть. Векторы e_{p+j} ($j=1, \dots, q$) спроектируем ортогонально в смысле псевдоевклидовой метрики касательного пространства T_Q на подпространство T_q . Из неравенства нулю детерминанта (11) следует, что векторы e_{p+j} перейдут в линейно независимые векторы e'_{p+j} , касательные к сфере S^q . Они параллелизуют сферу S^q . По теореме Адамса параллелизуемы только сферы S^1, S^3, S^7 [6] и $q=1, 3, 7$. Мы пришли к противоречию с нашим предположением.

Доказательство теоремы 3. Полная односвязная поверхность $V_{p,q}^l$ является поверхностью постоянной отрицательной внешней кривизны в многообразии $V_{p',q}^{2l-1}$. По формуле Гаусса тензор кривизны поверхности $V_{p,q}^l$ равен

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^{l-1} (A_{ik}^m A_{jl}^m - A_{il}^m A_{jk}^m) + C (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}). \quad (12)$$

Из формул (7) и (12) следует, что билинейные формы A^m ($m=1, \dots, l-1$), g являются внешне ортогональными. Единственный базис, в котором формы диагональны, параллелизует поверхность $V_{p,q}^l$. Дальнейшее доказательство невозможности случая $c < 0$ аналогично доказательству теоремы 2. При доказательстве невозможности случая $c > 0$ надо учесть, что поверхность $V_{p,q}^l$ глобально изометрична гиперповерхности

$$\sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 - \sum_{j=1}^q x_{p+1+j}^2 = c \frac{1}{2}$$

в псевдоевклидовом пространстве $E_{p+1,q}^{l+1}$. При доказательстве мы параллелизуем сферу S^p , заданную уравнениями $x_{p+1+j}=0$ ($j=1, \dots, q$). Поэтому получаются ограничения и на p .

Пусть $S_{p',q}^{2l-1}$ — гиперповерхность в $E_{2l-q,q}^{2l}$, заданная уравнением

$$\sum_{k=1}^{2p} x_k^2 + \sum_{i=1}^q x_{2p+2i-1}^2 - \sum_{j=1}^q x_{2p+2j}^2 = 1.$$

Пусть $V_{p,q}^l$ — l -мерная полная поверхность в многообразии $S_{p',q}^{2l-1}$, заданная уравнениями

$$x_{2i-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cos u_i, & \text{если } 1 \leq i \leq p; \\ \frac{1}{\sqrt{2l}} \operatorname{ch} u_i, & \text{если } p+1 \leq i \leq l; \end{cases}$$

$$x_{2i} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2l}} \sin u_i, & \text{если } 1 \leq i \leq p; \\ \frac{1}{\sqrt{2l}} \operatorname{sh} u_i, & \text{если } p+1 \leq i \leq l. \end{cases}$$

Секционная кривизна поверхности $V_{p,q}^l$ тождественно равна нулю, кривизна гиперповерхности $S_{p',b}^{2l-1}$ равна 1. Этот пример реализует случай, который допускает теорема 3.

Доказательство теоремы 4. Пусть для определенности $p \geq q$. Допустим, что многообразие $V_{p,q}^l$, удовлетворяющее условию теоремы, локально вкладывается в $E_{p',q}^{2p-1}$. Пусть Q — произвольная точка поверхности $V_{p,q}^l$; $T^p \subset T_Q$ — p -мерная плоскость в касательном пространстве, состоящая из пространственноподобных векторов. По формуле Гаусса кривизна $K(x, y)$ в направлении двумерной площадки, натянутой на ортогональные единичные векторы $x, y \in T^p$, равна $K(x, y) = A(x, x) \times A(y, y) - A^2(x, y) < -a^2$. По лемме 1 система уравнений $A_{ij}^m x^i x^j = 0$ ($m=1, \dots, p-1$; $i, j=1, \dots, p$), $x \in T^p$ имеет нетривиальное решение x_0 . Пусть y_0 — времениподобный вектор — ортогонален x_0 . Тогда кривизна

$$K(x_0, y_0) = \frac{A^2(x_0, y_0)}{x_0^2 y_0^2} > 0,$$

что противоречит предположению.

Автор выражает благодарность Ю. А. Аминову за полезные замечания при обсуждении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйзенхарт Л. Риманова геометрия. М., Гостехиздат, 1948. 316 с.
2. Борисенко А. А. О компактных поверхностях отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве. — См. статью в настоящем сборнике.
3. Борисенко А. А. О классе римановых пространств строго отрицательной кривизны. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 13, Харьков, 1972, с. 15—17.
4. Moor J. D. Isometric immersions of space forms in space forms. — «Pacific J. of Math.», 1972, vol. 40, № 1, p. 157—166.
5. Wolf J. A. Homogenous manifolds of constant curvature. — «Comment. Math. Helv.», 1961, vol. 36, № 2, p. 112—148.
6. Adams J. F. Vector fields on spheres. — «Ann. of Math.», 1962, vol. 75, p. 98—112.

Поступила 25 октября 1975 г.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ИЗГИБАНИЯ ОБЩЕЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В [1] Е. П. Сенькиным доказана теорема о том, что при изгибании общей выпуклой поверхности, не содержащей прямолинейных отрезков, оба конца которых лежат на границе, на границе поверхности найдется пара точек, расстояние между которыми при изгибании поверхности увеличивается, и найдется пара точек, расстояние между которыми уменьшается. В работе [2] подобное свойство установлено для бесконечно малых изгибаний общих строго выпуклых поверхностей.

В [3] рассмотрен случай, когда границей поверхности является простая замкнутая кривая l . Показано, что точки a, b на l , расстояние между которыми при изгибании поверхности увеличивается, и точки c, d , расстояние между которыми уменьшается (существование таких двух пар точек a, b и c, d на l установлено в [1] и [2]), всегда могут быть указаны таким образом, чтобы пары a, b и c, d разделялись.

Последнее означает, что при обходе кривой l в одном из двух направлений, начиная, например, от точки a , встречаются последовательно точки c, b, d и снова a .

В настоящей заметке, с помощью преобразований А. В. Погорелова [4], результаты, установленные в [1, 2] и [3], переносятся на случай выпуклых поверхностей эллиптического пространства. Показано, что имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть F_1 и F_2 — изометричные общие выпуклые поверхности эллиптического пространства, границами которых являются простые замкнутые кривые L_1 и L_2 . Поверхности не содержат прямолинейных отрезков, оба конца которых лежат на границе (отрезки, целиком состоящие из граничных точек, допускаются). Тогда, если F_1 не равна F_2 , то на границе L_1 найдутся пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1 такие, что $r(A_1B_1) > r(A_2B_2)$, $r(C_1D_1) < r(C_2D_2)$, и пары A_1, B_1 и C_1, D_1 разделяются.

Здесь A_2, B_2, C_2, D_2 — точки на L_2 , отвечающие по изометрии точкам A_1, B_1, C_1, D_1 , а r — расстояние в пространстве.

Теорема 2. Пусть F — общая строго выпуклая поверхность эллиптического пространства, границей которой является простая замкнутая кривая L . При нетривиальном бесконечно малом изгибании поверхности F на L найдутся пары точек A, B и C, D такие, что при $t=0$ $\dot{r}(A, B) > 0$, $\dot{r}(C, D) < 0$, и пары A, B и C, D разделяются.

Здесь r — расстояние в пространстве, а точка обозначает дифференцирование по времени.

Докажем теорему 1. Пусть R — эллиптическое пространство с кривизной $K=1$. Введем в R вейерштрассовы координаты

$x_i (i=0, 1, 2, 3)$, сопоставляя каждой точке x пространства R пару точек четырехмерного евклидова пространства с координатами x_i и $(-x_i)$, ($i=0, 1, 2, 3$), удовлетворяющими условию

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Эти точки заполняют единичную сферу. Удалим из R плоскость $x_0=0$, и оставшуюся часть пространства обозначим R_0 . В области R_0 вейерштрассовы координаты можно подчинить дополнительному условию $x_0>0$ и добиться, таким образом, их полной однозначности. Тогда сопоставление точке эллиптического пространства из R_0 с вейерштрассовыми координатами x_i точки четырехмерного евклидова пространства с теми же декартовыми координатами представляет собой изометрическое отображение R_0 на единичную полусферу $x^2=1$, $x_0>0$.

Пусть F_1 и F_2 — изометричные одинаково ориентированные общие выпуклые поверхности, расположенные в области R_0 эллиптического пространства R , однозначно проектирующиеся из точки $e_0(1, 0, 0, 0)$ и видимые из этой точки изнутри. Такое расположение поверхностей может быть получено с помощью движения и зеркального отражения, так что эти условия не ограничивают общности теоремы. F_1 и F_2 не содержат прямолинейных отрезков, оба конца которых лежат на границе. Простые замкнутые кривые L_1 и L_2 являются границами поверхностей F_1 и F_2 . И пусть F_1 не равна F_2 .

Преобразования А. В. Погорелова [4] сопоставляют паре поверхностей F_1 и F_2 из R_0 пару выпуклых изометричных поверхностей Φ_1 и Φ_2 трехмерного евклидова пространства E_0 ($x_0=0$). Поверхности Φ_1 и Φ_2 неконгруэнтны, так как они конгруэнтны тогда и только тогда, когда конгруэнтны F_1 и F_2 [4]. Обозначим через l_1 и l_2 простые замкнутые кривые, являющиеся границами Φ_1 и Φ_2 . На Φ_1 и Φ_2 нет прямолинейных отрезков, оба конца которых лежат на границе, так как по условию теоремы таких отрезков не содержат поверхности F_1 и F_2 , а при преобразованиях А. В. Погорелова прямолинейным отрезком на F_1 и F_2 отвечают прямолинейные отрезки на Φ_1 и Φ_2 , и наоборот. Тогда по теореме Е. П. Сенькина [1] на l_1 найдутся две пары точек a_1, b_1 и c_1, d_1 такие, что

$$\rho(a_1b_1) > \rho(a_2b_2); \rho(c_1d_1) < \rho(c_2d_2), \quad (1)$$

где a_2, b_2, c_2, d_2 — точки на l_2 , отвечающие по изометрии точкам a_1, b_1, c_1, d_1 , а ρ — расстояние в пространстве E_0 . Как показано в [3], такие пары точек a_1, b_1 и c_1, d_1 всегда могут быть найдены так, чтобы пары a_1, b_1 и c_1, d_1 разделялись.

Согласно преобразованиям А. В. Погорелова, точкам $y_1 \in \Phi_1$ и $y_2 \in \Phi_2$ из E_0 отвечают точки $x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$ из R_0 , задаваемые уравнениями

$$x_1 = \alpha(2y_1 + e_0(1 - y_1^2 + y_2^2)); x_2 = \alpha(2y_2 + e_0(1 - y_2^2 + y_1^2)), \quad (2)$$

где α — нормирующий множитель, определяемый условием $x^1 = x_1^2 = 1$.

Пусть точки a_i, b_i поверхности Φ_1 имеют координаты a_{1i}, b_{1i} , где $i = 1, 2, 3$. На Φ_2 этим точкам отвечают по изометрии точки a_2, b_2 с координатами a_{2i}, b_{2i} , $i = 1, 2, 3$. Для точек a_1, b_1, c_1, d_1 выполнено условие $\rho(a_1 b_1) > \rho(a_2 b_2)$. Согласно (2), точкам a_1, b_1, a_2, b_2 поверхностей Φ_1, Φ_2 пространства E_0 отвечают точки A_1, B_1, A_2, B_2 поверхностей F_1, F_2 пространства R_0 с вейерштрассовыми координатами $A_{1i}, B_{1i}, A_{2i}, B_{2i}$ ($i = 0, 1, 2, 3$):

$$A_1 = \alpha(2a_1 + e_0(1 - a_1^2 + b_1^2)); B_1 = \beta(2b_1 + e_0(1 - b_1^2 + a_1^2)); A_2 = \alpha(2a_2 + e_0(1 - a_2^2 + b_2^2)); B_2 = \beta(2b_2 + e_0(1 - b_2^2 + a_2^2)).$$

Имеем: $(A_1 - B_1)^2 - (A_2 - B_2)^2 = 4\alpha\beta[(a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2]$. Так как $\rho(a_1 b_1) > \rho(a_2 b_2)$, а α и β — положительные нормирующие множители, то отсюда следует, что $(A_1 - B_1)^2 - (A_2 - B_2)^2 > 0$. Но тогда и $r(A_1 B_1) > r(A_2 B_2)$, где r — расстояние в пространстве R_0 . Аналогично получается, что $r(C_1 D_1) < r(C_2 D_2)$, если $\rho(c_1 d_1) < \rho(c_2 d_2)$.

Очевидно также, что формулы (2) сохраняют порядок следования точек на кривых L_1 и L_2 , соответствующий порядку следования точек на l_1 и l_2 . Поэтому пары A_1, B_1 и C_1, D_1 разделяются. Теорема доказана.

Докажем теорему 2. Пусть F — строго выпуклая поверхность в R_0 , простая замкнутая кривая L — ее граница, а z — нетривиальное изгибающее поле на F . Преобразования А. В. Погорелова [4] сопоставляют поверхности F в R_0 с изгибающим полем ξ выпуклую поверхность Φ в R_0 с изгибающим полем ζ . Поле ζ нетривиально, так как ξ тривиально тогда и только тогда, когда тривиально z [4]. По теореме Е. П. Сенькина [2] на границе l поверхности Φ найдутся пары точек a, b и c, d такие, что при $t = 0$

$$\dot{\rho}(a, b) > 0; \dot{\rho}(c, d) < 0. \quad (3)$$

Здесь ρ — расстояние в пространстве E_0 , а точка обозначает дифференцирование по времени. Как показало в [3], точки a, b, c, d , удовлетворяющие (3), всегда могут быть указаны таким образом, чтобы пары a, b и c, d разделялись.

Точке $y \in \Phi$ из E_0 отвечает, согласно преобразованиям А. В. Погорелова, точка $x \in F$ в R_0 :

$$x = \frac{y + e_0}{\sqrt{1 + y^2}}. \quad (4)$$

Так как формула (4) представляет собой проектирование из центра сферы на касательную плоскость к ней в точке $(1, 0, 0, 0)$, то для точек A, B и C, D на L , отвечающих точкам a, b, c, d , согласно (4), выполняется при $t = 0$: $\dot{r}(A, B) > 0$; $\dot{r}(C, D) < 0$. Здесь

r — расстояние в пространстве R_0 . Пары A, B и C, D разделяются, так как разделяются соответствующие им при проектировании пары a, b и c, d . Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенькин Е. П. Об изгибании общих выпуклых поверхностей с границей. — «Вестник Ленингр. ун-та», 1960, № 19, с. 88—94.
2. Сенькин Е. П. О свойстве бесконечно малого изгибания общей выпуклой поверхности с границей. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 2, Харьков, 1966, с. 86—87.
3. Гулида Л. Л. Об одной теореме изгибания общей выпуклой поверхности с границей. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 17, Харьков, 1975, с. 50—53.
4. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969, с. 309—368.

Поступила 26 мая 1975 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ($n-2$)-Й ФУНКЦИИ КРИВИЗНЫ

Пусть A — выпуклое ограниченное замкнутое тело в n -мерном евклидовом пространстве E^n . Предположим, что тело A регулярно, т. е. имеет в каждой точке своей границы не равные нулю главные радиусы кривизны $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$, которые являются непрерывными функциями нормали u . Назовем m -й функцией кривизны тела A элементарно-симметрическую функцию главных радиусов кривизны степени m . Обозначим m -ю функцию кривизны через $D_m(A, u)$.

А. Д. Александров [1, с. 240] доказал теорему об однозначной определенности выпуклого тела с заданной m -й функцией кривизны. Если два выпуклых регулярных тела имеют одинаковые функции кривизны данного порядка m , то эти тела равны и параллельно расположены.

До настоящего времени теоремы устойчивости, соответствующие этой теореме однозначной определенности, были доказаны для случаев $m=1$ [2] и $m=n-1$ [3, 4].

Рассмотрим случай $m=n-2$ ($n \geq 4$).

Теорема. Если для любого $u \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|D_{n-2}(A, u) - D_{n-2}(B, u)| < \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \text{то } \delta(A, B) < C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2n-4}}.$$

Здесь Ω — единичная сфера в E^n с центром в начале координат — граница единичного шара E ; $\delta(A, B)$ — отклонение тел A и B .

Через $C_1, C_2, \dots, C_{36}$, ε_0 обозначены величины, зависящие только от n , радиуса r наибольшего шара, который можно вписать в тела A и B , радиуса R наименьшего шара, который можно описать около A и B .

Предварительно докажем шесть лемм.

Пусть $H_1, \dots, H_n$ — выпуклые тела в E^n ; $V(H_1, \dots, H_n)$ — их смешанный объем [6, с. 59]. Положим

$$V_i(H_1, H_2) = V(\underbrace{H_1, \dots, H_1}_{n-i}, \underbrace{H_2, \dots, H_2}_i),$$

$$V_{ij}(H_1, H_2, H_3) = V(\underbrace{H_1, \dots, H_1}_{n-i-j}, \underbrace{H_2, \dots, H_2}_i, \underbrace{H_3, \dots, H_3}_j).$$

Для произвольного множества $\omega \in \Omega$ обозначим через

$$F_i(A, \omega) = F(\underbrace{A, \dots, A}_i, E, \dots, E, \omega)$$

любую обобщенную функцию кривизны тела A [5, с. 965]; $F(\omega)$ — площадь ω ; $h_A(u)$ — опорная функция тела A ; $H(\theta) = (1-\theta)A + \theta B$ ($0 \leq \theta \leq 1$) — смешение тел A и B .

Лемма 1. Если для любого множества $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство $|F_{n-2}(A, \omega) - F_{n-2}(B, \omega)| < \varepsilon F(\omega)$, то

$$|V_{11}(A, B, E) - V_1(B, E)| < C_2 \varepsilon, |V_{11}(B, A, E) - V_1(A, E)| < C_2 \varepsilon,$$

$$|V_1(A, E) - V_1(B, E)| < C_3 \varepsilon, |V_1(H(\theta), E) - V_1(A, E)| < C_4 \varepsilon.$$

Доказательство. Известно [5, с. 964], что смешанный объем тел $H_1, \dots, H_n$ выражается через смешанную поверхностную функцию так:

$$V(H_1, \dots, H_n) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H_n(u) F(H_1, \dots, H_{n-1}, d\omega).$$

В частных случаях [5, с. 965]

$$V_{11}(A, B, E) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} h_B(u) F_{n-2}(A, d\omega),$$

$$V_1(B, E) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} h_B(u) F_{n-2}(B, d\omega).$$

Отсюда

$$|V_{11}(A, B, E) - V_1(B, E)| = \frac{1}{n} \left| \int_{\Omega} h_B(u) (F_{n-2}(A, d\omega) - F_{n-2}(B, d\omega)) \right| \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} |h_B(u)| \varepsilon F(d\omega) \leq \frac{2R}{n} \varepsilon F(\Omega) \leq C_2 \varepsilon. \quad (1)$$

Из обобщенного неравенства Брунна — Минковского [6, с. 67] имеем

$$V_{11}^{n-1}(A, B, E) \geq V_1^{n-2}(A, E) V_1(B, E).$$

Подставляя в последнее неравенство оценку сверху (1) для $V_{11}(A, B, E)$, получим

$$(V_1(B, E) + C_2\varepsilon)^{n-1} \geq V_1^{n-2}(A, E) V_1(B, E).$$

Отсюда $V_1(B, E) \geq V_1(A, E) - C_3\varepsilon$.

Меняя местами в предыдущих рассуждениях тела A и B , приходим к неравенствам

$$|V_{11}(B, A, E) - V_1(A, E)| < C_2\varepsilon, \quad V_1(A, E) \geq V_1(B, E) - C_3\varepsilon.$$

Тем самым доказано и неравенство

$$|V_1(A, E) - V_1(B, E)| \leq C_3\varepsilon. \quad (2)$$

Докажем последнее неравенство леммы. Рассмотрим функцию

$$f(\theta) = V_1^{\frac{1}{n-1}}(H(\theta), E) - (1-\theta) V_1^{\frac{1}{n-1}}(A, E) - \theta V_1^{\frac{1}{n-1}}(B, E).$$

Из общей теоремы Брунна—Минковского [6, с. 67] следует, что $f(\theta)$ выпукла вверх при $0 \leq \theta \leq 1$. Поэтому при $0 \leq \theta \leq 1$ для $f(\theta)$ справедливы неравенства $0 \leq f(\theta) \leq f'(0)$. Так как

$$f'(0) = \frac{V_{11}(A, B, E) - V_1^{\frac{n-2}{n-1}}(A, E) V_1^{\frac{1}{n-1}}(B, E)}{V_1^{\frac{n-2}{n-1}}(A, E)},$$

то из (1) и (2) имеем $f'(0) < C_5\varepsilon$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} (1-\theta) V_1^{\frac{1}{n-1}}(A, E) + \theta V_1^{\frac{1}{n-1}}(B, E) &\leq V_1^{\frac{1}{n-1}}(H(\theta), E) \leq \\ &\leq (1-\theta) V_1^{\frac{1}{n-1}}(A, E) + \theta V_1^{\frac{1}{n-1}}(B, E) + C_5\varepsilon. \end{aligned}$$

Из этих неравенств и неравенства (2) вытекает последнее неравенство леммы.

Лемма 1 доказана.

Пусть A и B — регулярные выпуклые тела в E^n .

Лемма 2. Если для любого $u \in \Omega$ выполнено неравенство

$$|D_{n-2}(A, u) - D_{n-2}(B, u)| < \varepsilon, \text{ то } |V_2(H(\theta), E) - V_2(A, E)| < C_6\varepsilon.$$

В частности, $|V_2(B, E) - V_2(A, E)| < C_6\varepsilon$.

Доказательство. Известно [7, с. 63], что

$$V_2(H(\theta), E) = \frac{1}{n(n-1)} \int_{\Omega} D_{n-2}(H(\theta), u) d\omega.$$

Как доказал А. Д. Александров [1, с. 236],

$$\sqrt[n-2]{D_{n-2}(H(\theta), u)} \geq (1-\theta) \sqrt[n-2]{D_{n-2}(A, u)} + \theta \sqrt[n-2]{D_{n-2}(B, u)}.$$

Из условия леммы и последнего неравенства имеем

$$D_{n-2}(H(\theta), u) > D_{n-2}(A, u) - C_7 \varepsilon. \quad (3)$$

Из определения смещения выпуклых тел A и B следует [7, с. 29], что $h_{H(\theta)}(u) = (1-\theta)h_A(u) + \theta h_B(u)$. Рассмотрим интеграл $I = \frac{1}{n} \int_{\Omega} h_{H(\theta)}(D_{n-2}(H(\theta), u) - D_{n-2}(A, u) + C_7 \varepsilon) d\omega$.

С одной стороны, применяя лемму 1, получаем

$$I = (n-1) V_1(H(\theta), E) - \frac{1}{n} \int_{\Omega} [(1-\theta)h_A(u) + \theta h_B(u)] \times \\ \times D_{n-2}(A, u) d\omega + C_7 \varepsilon F(\Omega) = (n-1)[V_1(H(\theta), E) - V_1(A, E) + \\ + \theta V_1(A, E) - \theta V_{11}(A, B, E)] + C_7 \varepsilon F(\Omega) < C_8 \varepsilon.$$

Пусть начало координат находится в центре шара, вписанного в тело $H(\theta)$. Из определения смещения выпуклых тел следует, что радиус шара, вписанного в $H(\theta)$, не меньше r . Применяя к I теорему о среднем, а это можно сделать из-за неравенства (3), получим, с другой стороны,

$$I \geq \frac{r}{n} \int_{\Omega} (D_{n-2}(H(\theta), u) - D_{n-2}(A, u) + C_7 \varepsilon) d\omega = (n-1)r \times \\ \times (V_2(H(\theta), E) - V_2(A, E)) + \frac{r}{n} C_7 F(\Omega) \varepsilon.$$

Из оценок для I получаем неравенство в утверждении леммы. Лемма 2 доказана.

Пусть вектор $n \in \Omega$. Обозначим через $T(n)$ некоторую гиперплоскость, ортогональную к n ; через $A_n, B_n, E_n, H_n(\theta)$ — проекции тел $A, B, E, H(\theta)$ на $T(n)$; через Ω_n — границу E_n .

Лемма 3. Если для любого $u \in \Omega$ выполнено неравенство $|D_{n-2}(A, u) - D_{n-2}(B, u)| < \varepsilon$, то $|V_1(H_n(\theta), E_n) - V_1(A_n, E_n)| <$

$C_9 \varepsilon$. В частности, $|V_1(B_n, E_n) - V_1(A_n, E_n)| < C_9 \varepsilon$.

Доказательство. Известно [8, с. 1223], что

$$V_1(A_n, E_n) = \frac{1}{2(n-1)} \int_{\Omega} |nu| D_{n-2}(A_n, u) d\omega, \quad (4)$$

где $u, n \in \Omega$, причем n — фиксированный вектор. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |n, u| (D_{n-2}(H(\theta), u) - D_{n-2}(A, u) + C_7 \varepsilon) d\omega = (n-1) \times \\ \times (V_1(H_n(\theta), E_n) - V_1(A_n, E_n)) + C_7 \varepsilon V(E_n).$$

Из (3) вытекает, что $I_1 > 0$. С другой стороны, из (3), леммы 2 и неравенства $|nu| \leq 1$

$$I_1 \leq \int_{\Omega} (D_{n-2}(H(\theta), u) - D_{n-2}(A, u) + C_7 \varepsilon) d\omega = n(n-1) \times \\ \times (V_2 H(\theta), E) - (V_2(A, E)) + C_7 \varepsilon F(\Omega) < C_{10} \varepsilon.$$

Из неравенств для I получаем утверждение леммы 3.

Лемма 4. Пусть для линейной комбинации

$$\alpha(u) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i V_i(A_u, B_u)$$

величин $V_i(A_u, B_u)$ при любом u справедливы неравенства

$$\alpha(u) \geq -C_{11} \varepsilon^a \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} \alpha(u) d\omega \leq C_{12} \varepsilon^b.$$

Тогда при любом u справедливо неравенство

$$\alpha(u) \leq C_{13} \varepsilon^{\frac{m}{n}}, \quad \text{где } m = \min(a, b).$$

Доказательство. Формула (4) может быть записана в виде

$$V_i(A_u, B_u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |un| F_i(A, B, d\omega) \quad (5)$$

[8, с. 1223], где $F_i(A, B, \omega) = F(\underbrace{A, \dots, A}_{n-i-1}, \underbrace{B, \dots, B}_i, \omega) - i$ -я

смешанная поверхностная функция тел A и B .

Для векторов $u, v \in \Omega$ имеем

$$|V_i(A_u, B_u) - V_i(A_v, B_v)| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} ||nu| - |nv|| F_i(A, B, d\omega) \leq \\ \leq \frac{1}{2} |nu - nv| F_i(A, B, d\omega) = \int_{\Omega} \left| \sin \frac{\widehat{nu} + \widehat{nv}}{2} \sin \frac{\widehat{nu} - \widehat{nv}}{2} \right| \times \\ \times F_i(A, B, d\omega) \leq \frac{\varphi_0}{2} n V_n(A, B, E) \leq \frac{\varphi_0}{2} n V(E) R^{n-1} = C_{14} \varphi_0, \quad (6)$$

где $\widehat{nu}$ — угол между векторами n и u ; $\varphi_0 = \widehat{uv}; \int_{\Omega} F_i(A, B, d\omega) =$

$= nV_n(A, B, E)$ [5, с. 964]; C_{14} зависит от n и R и не зависит от i .

Пусть $\alpha(u_0) = \max_{u \in \Omega} \alpha(u)$. Из (5) видно, что $\alpha(u)$ непрерывна от u , поэтому $\max \alpha(u)$ и u_0 существуют.

Рассмотрим на Ω сегмент Ω' с центром в точке u_0 , для точек u которого выполнено неравенство $\widehat{uu}_0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Используя (6), имеем

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \alpha(u_0) + (\alpha(u) - \alpha(u_0)) = \alpha(u_0) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i (V_i(A_u, B_u) - \\ &- V_i(A_{u_0}, B_{u_0})) \geq \alpha(u_0) - \sum_{i=0}^{n-1} |p_i| n C_{14} \varphi_0 = \alpha(u_0) - C_{15} \varphi_0. \end{aligned}$$

Из условий леммы

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha(u) + C_{11} \varepsilon^a) d\omega &\leq \int_{\Omega} (\alpha(u) + C_{11} \varepsilon^a) d\omega \leq C_{12} \varepsilon^b + C_{11} \varepsilon^a F(\Omega) < \\ &< C_{16} \varepsilon^m, \quad \text{где } m = \min(a, b). \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $\alpha(u) \geq \alpha(u_0) - C_{15} \varphi_0$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} (\alpha(u) + C_{11} \varepsilon^a) d\omega &\geq \alpha(u) d\omega \geq (\alpha(u_0) - C_{15} \varphi_0) F(\Omega') \geq (\alpha(u_0) - \\ &- C_{15} \varphi_0) V(E_u) \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Сравнивая оценки для $\int_{\Omega'} (\alpha(u) + C_{11} \varepsilon^a) d\omega$, получим

$$\alpha(u_0) \leq C_{17} \frac{\varepsilon^m}{\varphi_0^{n-1}} + C_{15} \varphi_0.$$

Возьмем $\varphi_0 = \varepsilon^{\frac{m}{n}}$. Тогда

$$\alpha(u) \leq \alpha(u_0) \leq C_{17} \varepsilon^{\frac{m}{n}} + C_{15} \varepsilon^{\frac{m}{n}} \leq C_{18} \varepsilon^{\frac{m}{n}}.$$

Лемма 4 доказана.

Обозначим через $\rho(H_1, H_2)$ расстояние между телами H_1 и H_2 .

Лемма 5. Пусть векторы $u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in \Omega_u$ и попарно ортогональны. Если $\delta(A_u, B_u) < \varepsilon$ и $|h_{A_u}(u_i) - h_{B_u}(u_i)| < \varepsilon$, то для любого $n \in \Omega_u$ будет $|h_{A_u}(n) - h_{B_u}(n)| < C_{18} \varepsilon$.

В леммах 5 и 6 $n \geq 3$.

Доказательство. Так как $\delta(A_u, B_u) < \varepsilon$, то существует такой параллельный сдвиг тела A_u на вектор $a = \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i$, при котором тело A_u переходит в A'_u и $\rho(A'_u, B_u) < \varepsilon$. При этом для $n \in \Omega_u$ имеем

$$h_{A'_u}(n) = h_{A_u}(n) + na, \quad |h_{A'_u}(n) - h_{B_u}(n)| < \varepsilon.$$

Так как $h_{A'_u}(u_i) = h_{A_u}(u_i) + a_i$, то $|h_{A_u}(u_i) - h_{B_u}(u_i) + a_i| < \varepsilon$, откуда $|a_i| = |h_{A_u}(u_i) - h_{B_u}(u_i)| < \varepsilon$. Из условия леммы имеем $|a_i| < 2\varepsilon$. Тогда для любого $n \in \Omega_u$ будет $|h_{A_u}(n) - h_{B_u}(n)| = |h_{B_u}(n) - h_{A'_u}(n) + na| < \varepsilon + |na| < \varepsilon + |n||a| < \varepsilon + 2\varepsilon \sqrt{n-1} = C_{18}\varepsilon$.

Лемма 6. Если для любого $u \in \Omega$ будет $\delta(A_u, B_u) < \varepsilon$, то $\delta(A, B) < C_{18}\varepsilon$.

Лемма 6 является усилением соответствующей леммы единственности: если для любого $u \in \Omega$ будет $\delta(A_u, B_u) = 0$, то и $\delta(A, B) = 0$ [8, с. 1222].

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in \Omega$ и $u_1 \perp u_2$. Из $\delta(A_{u_1}, B_{u_1}) < \varepsilon$ следует существование такого параллельного сдвига тела A в тело A' , при котором для любого вектора $n \in \Omega_{u_1}$ выполняется неравенство $|h_{A'_{u_1}}(n) - h_{B_{u_1}}(n)| < \varepsilon$.

Сдвинем тело A' параллельно вектору u_1 так, чтобы для результата сдвига тела A'' выполнялось неравенство

$$|h_{A''}(u_1) - h_B(u_1)| < \varepsilon. \quad (7)$$

При этом для $n \in \Omega_{u_1}$ будет иметь место и неравенство

$$|h_{A''_{u_1}}(n) - h_{B_{u_1}}(n)| < \varepsilon, \quad (8)$$

так как опорные плоскости в направлении $n \in \Omega_{u_1}$ к телам A' и A'' совпадают.

Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого $n \in \Omega$ найдется $u \in \Omega$ такой, что $u \perp n$ и

$$|h_{A''_u}(n) - h_{B_u}(n)| < C_{18}\varepsilon. \quad (9)$$

Действительно, $h_{A''_u}(n) - h_{B_u}(n) = h_{A''}(n) - h_B(n)$, поскольку опорные плоскости к телам A'' и B , перпендикулярные к n , проектируются в опорные плоскости к телам A''_u и B_u , перпендикулярные к вектору n . Поэтому из (9) имеем $|h_{A''_u}(n) -$

$|h_n(n)| < C_{18}\epsilon$. А из последнего неравенства для произвольного $n \in \Omega$ следует, что

$$\rho(A'', B) = \max_{n \in \Omega} |h_{A''}(n) - h_B(n)| < C_{18}\epsilon,$$

откуда $\delta(A, B) < C_{18}\epsilon$.

Переходим к доказательству неравенства (9). Пусть $n \in \Omega$. Запишем $n = n_1 + n_2$, где n_1 — составляющая n на u_1 ; n_2 — составляющая на $T(u_1)$. Возьмем в $T(u_1)$ вектор $u \perp n_2$, если $n_2 = 0$, то u — любой вектор из Ω_{u_1} .

Вектор u всегда существует, так как размерность $T(u_1)$ больше единицы. В пространстве $T(u_1) \cap T(u)$ выберем базис из $(n-2)$ взаимно перпендикулярных единичных векторов $t_1, \dots, t_{n-2}$. Тогда векторы $t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1} = u$ образуют базис из взаимно перпендикулярных единичных векторов в $T(u)$. Из (7) и (8) имеем $|h_{A''_u}(t_i) - h_{B_u}(t_i)| < \epsilon$, $(i=1, \dots, n-1)$.

По лемме 5 тогда $|h_{A''_u}(n) - h_{B_u}(n)| < C_{18}\epsilon$ для любого $n \in \Omega_u$, следовательно, и для взятого n . Неравенство (9), а вместе с ним и лемма 6 доказаны.

Доказательство теоремы. Воспользуемся неравенством для смешанных объемов, полученным Боннезеном [7, с. 96]:

$$-(n-1)V_0(A, B) + n\tau V_1(A, B) - \tau^n V_n(A, B) \geq 0.$$

Этому неравенству удовлетворяют значения τ , для которых τ^{n-1} является отношением объемов проекций тел A и B на одну и ту же произвольную $(n-1)$ -мерную плоскость. Так как площадь поверхности тела с точностью до постоянной равна интегралу от объемов проекций на всевозможные $(n-1)$ -мерные плоскости, то этому неравенству удовлетворяет $\tau = \sqrt[n-1]{\frac{S(A)}{S(B)}}$, где $S(A)$, $S(B)$ — площади поверхностей тел A и B .

Запишем неравенство Боннезена для тел A_u и B_u :

$$-(n-2)V_0(A_u, B_u) + (n-1)\tau V_1(A_u, B_u) - \tau^{n-2}V_{n-1}(A_u, B_u) \geq 0. \quad (10)$$

Неравенству (10) удовлетворяет $\tau = \sqrt[n-2]{\frac{\sigma_0}{\sigma_1}}$, где σ_0 и σ_1 — площади проекций тел A_u и B_u на произвольную $(n-2)$ -мерную плоскость в $T(u)$. Неравенству (10) удовлетворяет $\tau =$

$$= \sqrt[n-2]{\frac{V_1(A_u, E_u)}{V_1(B_u, E_u)}}, \text{ так как}$$

$$V_1(A_u, E_u) = \frac{1}{n-1} S(A_u).$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(\tau, u) = - (n-2) V_0(A_u, B_u) + (n-1) \tau V_1(A_u, B_u) - \\ - \tau^{n-1} V_{n-1}(A_u, B_u).$$

Покажем, что $|\psi(1, u)| < C_{19} \varepsilon^{\frac{1}{n}}$ для любого u .
По лемме 3 для любого u имеем

$$\left| \frac{V_1(A_u, E_u)}{V_1(B_u, E_u)} - 1 \right| < \frac{C_9 \varepsilon}{r^n V(E_u)}.$$

Отсюда для $\tau_0 = \sqrt[n-2]{\frac{V_1(A_u, E_u)}{V_1(B_u, E_u)}}$ получим оценки $1 -$

$$-C_{20} \varepsilon \leq \tau_0 \leq 1 + C_{20} \varepsilon.$$

Подставляя τ_0 в (10) и используя оценки для τ_0 , получим

$$- (n-2) V_0(A_u, B_u) + (n-1) V_1(A_u, B_u) (1 + C_{20} \varepsilon) - \\ - V_{n-1}(A_u, B_u) (1 - C_{20} \varepsilon)^{n-1} \geq 0.$$

$$\text{Отсюда } \psi(1, u) = - (n-2) V_0(A_u, B_u) + (n-1) V_1(A_u, B_u) - \\ - V_{n-1}(A_u, B_u) \geq -C_{21} \varepsilon.$$

Оценим сверху $\int_{\Omega} \psi(1, u) d\omega$. Для этого используем выраже-

ния для смешанных объемов [7, с. 49] и лемму 1.

Имеем

$$\int_{\Omega} \psi(1, u) d\omega = - (n-2) \int_{\Omega} V_0(A_u, B_u) d\omega + (n-1) \int_{\Omega} V_1(A_u, \\ B_u) d\omega - \int_{\Omega} V_{n-1}(A_u, B_u) d\omega = [- (n-2) V_1(E, A) + (n-1) \times \\ \times V_{11}(A, B, E) - V_1(B, E)] n V(E_u) \leq C_{22} \varepsilon,$$

где C_{22} зависит от r, R, n и не зависит от u .

Таким образом, величина $\alpha_1(u) = \psi(1, u)$ удовлетворяет условиям $\alpha_1(u) \geq -C_{21} \varepsilon$ и $\int_{\Omega} \alpha_1(u) d\omega \leq C_{22} \varepsilon$. К тому же $\alpha_1(u)$ является линейной комбинацией величин $V_i(A_u, B_u)$. Поэтому $\alpha_1(u)$ удовлетворяет условиям леммы 4. На основании леммы $\psi(1, u) \leq C_{23} \varepsilon^{\frac{1}{n}}$, так как в этом случае $m=1$. Итак,

$$|\psi(1, u)| < C_{19} \varepsilon^{\frac{1}{n}}. \quad (11)$$

Рассмотрим подробнее функцию $\psi(\tau, u)$ при фиксированном u . Имеем

$$\psi'_{\tau}(\tau, u) = (n-1) V_1(A_u, B_u) - (n-1) \tau^{n-2} V_{n-1}(A_u, B_u), \\ \psi''_{\tau\tau}(\tau, u) = - (n-1) (n-2) \tau^{n-3} V_{n-1}(A_u, B_u).$$

Видим, что $\psi''_{\tau\tau} < 0$ при всех $\tau > 0$. Поэтому $\psi(\tau, u)$ выпукла вверх при $\tau > 0$. Так как

$$\psi(0, u) = -(n-2)V_0(A_u, B_u) < 0$$

и существуют значения τ , при которых $\psi(\tau, u) \geq 0$, то $\psi(\tau, u)$ обращается в нуль не менее чем в одной, но не более чем в двух точках τ_1, τ_2 ($\tau_1 \leq \tau_2$).

Предположим, что $|\psi'_\tau(1, u)| < \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$. Тогда из выражения для $\psi'_\tau(1, u)$ имеем

$$|V_1(A_u, B_u) - V(B_u)| < \frac{\frac{1}{\varepsilon^{2n}}}{n-1}. \quad (12)$$

Из неравенства (11) и (12) получаем $|V(A_u) - V(B_u)| < C_{24} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$. Из последнего неравенства и неравенства (12) для величины

$$\Delta(A_u, B_u) = V_1^{n-1}(A_u, B_u) - V^{n-2}(A_u) V(B_u)$$

имеем оценку $\Delta(A_u, B_u) < C_{25} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$. Тогда по лемме 3 работы [9, с. 672]: если $\Delta(A, B) < \varepsilon$, $V(A) = V(B)$, то $\delta(A, B) < C \varepsilon^{\frac{1}{n}}$, получим $\delta(A_u, B_u) < C_{26} \frac{1}{\varepsilon^{2n^2}}$.

Рассмотрим второй возможный случай. Пусть $|\psi'(1, u)| \geq \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$. Из (11) имеем $\psi(1, u) < C_{19} \frac{1}{\varepsilon^n}$. Поэтому при $\psi(1, u) \geq 0$ и $\psi'(1, u) \geq \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$ имеем $\tau_1 \geq 1 - C_{27} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$.

Действительно, график $\psi(\tau, u)$ лежит под касательной, проведенной к $\psi(\tau, u)$ в точке $(1, \psi(1, u))$. Касательная пересекает ось τ в точке τ_3 , для которой $\tau_3 \geq 1 - C_{27} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$. При $\psi(1, u) \geq 0$ и $\psi'(1, u) \leq -\frac{1}{\varepsilon^{2n}}$ получаем $\tau_2 \leq 1 + C_{27} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$.

Если же $\psi(1, u) < 0$, то в этом случае, очевидно, либо $\tau_3 < 1$, либо $\tau_1 > 1$. Поэтому при $|\psi'(1, u)| \geq \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$ всегда $\tau_1 \geq 1 - C_{27} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$, либо $\tau_2 \leq 1 + C_{27} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$.

Предположим для определенности, что $\tau_1 \geq 1 - C_{27} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$. Случай $\tau_2 \leq 1 + C_{27} \frac{1}{\varepsilon^{2n}}$ рассматривается аналогично.

Обозначим через a_v и b_v проекции тел A_u и B_u на $(n-2)$ -мерную плоскость пространства $T(u)$, перпендикулярную к вектору $v \in \Omega_u$. Величина $\tau(V) = \sqrt[n-2]{\frac{v(a_v)}{v(b_v)}}$ удовлетво-

ряет неравенству $\psi(\tau, u) \geq 0$ для каждого $v \in \Omega_u$. Поэтому $\tau(v) \geq \tau_1 \geq 1 - C_{27}\varepsilon^{2n}$, откуда

$$V(a_v) - V(b_v) \geq -C_{28}\varepsilon^{\frac{1}{2n}}. \quad (13)$$

Так как

$$\int_{\Omega_u} V(a_v) d\omega_u = C_{29} V_1(A_u, E_u), \quad \int_{\Omega} V(b_v) d\omega_u = C_{29} V_1(B_u, E_u)$$

[7, с. 48], то по лемме 3 $\int_{\Omega_u} (V(a_v) - V(b_v)) d\omega_u < C_{29} \cdot C_9 \varepsilon$.

Таким образом, для величины $\alpha_2(v) = V(a_v) - V(b_v)$ выполнены условия леммы 4.

Из леммы 4 имеем

$$|V(a_v) - V(b_v)| \leq C_{30}\varepsilon^{\frac{1}{2n^2}}, \quad (14)$$

так как в этом случае $m = \frac{1}{2n}$. Пусть $e_v(\theta) = (1 - \theta)a_v + \theta b_v$. По теореме Брунна—Минковского

$$V^{\frac{1}{n-2}}(e_v(\theta)) \geq (1 - \theta) V^{\frac{1}{n-2}}(a_v) + \theta V^{\frac{1}{n-2}}(b_v).$$

Отсюда и из неравенства (14) видим

$$V(e_v(\theta)) - V(a_v) \geq -C_{31}\varepsilon^{\frac{1}{2n^2}}.$$

Так как

$$\int_{\Omega_u} (V(e_v(\theta)) - V(a_v)) d\omega_u = C_{29} (V_1(H_u(\theta), E_u) - V_1(A_u, E_u))$$

[7, с. 49], то по лемме 3 имеем $\int_{\Omega_u} (V(e_v(\theta)) - V(a_v)) d\omega_u < C_{32}\varepsilon$.

Следовательно, для величины $\alpha_3(v) = V(e_v(\theta)) - V(a_v)$ выполнены условия леммы 4. Поэтому $|\alpha_3(v)| \leq C_{33}\varepsilon^{\frac{1}{2n^3}}$, так как в этом случае

$$m = \frac{1}{2n^2}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \Phi(a_v, b_v, \theta) &= V^{\frac{1}{n-2}}(e_v(\theta)) - (1 - \theta) V^{\frac{1}{n-2}}(a_v) - \theta V^{\frac{1}{n-2}}(b_v) \leq \\ &\leq C_{34}\varepsilon^{\frac{1}{2n^3}}, \end{aligned}$$

то C_{34} не зависит от u, v, θ .

По теореме работы [9, с. 669]: если $\Phi(A, X, t) \leq \varepsilon$ при $t \in [0, 1]$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $V(A) = V(X)$, то $\delta(A, X) < C\varepsilon^{\frac{1}{n}}$, имеем

$$\delta(a_v, b_v) < C_{35} \varepsilon^{\frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}}}.$$

Итак, если $|\varphi'(1, u)| \geq \varepsilon^{\frac{1}{2n}}$, то $\delta(a_v, b_v) \leq C_{35} \varepsilon^{\frac{1}{1n^{\frac{1}{4}}}}$.

Тогда по лемме 6 в этом случае имеем

$$\delta(A_u, B_u) < C_{36} \varepsilon^{\frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}}}.$$

Следовательно, для любого $u \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\delta(A_u, B_u) < C_{36} \varepsilon^{\frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}}}.$$

Тогда из леммы 6 получаем утверждение теоремы

$$\delta(A, B) < C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2n^{\frac{1}{4}}}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Д. К теории смешанных выпуклых тел. — «Мат. сб.», 1939, т. 3 (45), № 2, с. 227—249.
2. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 759 с.
3. Волков Ю. А. Устойчивость решения проблемы Минковского. — «Вестник ЛГУ», Ленинград, 1963, № 1, с. 33—43.
4. Дискант В. И. Оценки отклонения выпуклых тел через изопериметрическую разность. — «Сиб. мат. журн.», 1972, т. XIII, № 4, с. 767—772.
5. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. — «Мат. сб.», 1937, т. 2 (44), № 5, с. 947—970.
6. Визман Г. Выпуклые поверхности. М., «Наука», 1964. 238 с.
7. Роллсен Т. und Fenchel W. Theorie der konvexen Körper. Berlin, 1934. 164 S.
8. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. — «Мат. сб.», 1937, т. 2 (44), № 6, с. 1205—1235.
9. Дискант В. И. Устойчивость решения уравнения Минковского. «Сиб. мат. журн.», 1973, т. XIV, № 3, с. 669—673.

Поступила 9 декабря 1975 г.

В. Ф. ИГНАТЕНКО

**О КОНСТРУКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРЕНОСА**

В статье [1] дано обобщение теоремы Зейдевича для алгебраической $(m-1)$ -мерной поверхности F_n порядка n пространства D^m и найдены его модификации для алгебраических по-

верхностей переноса, полученных в работах [2] (ср. [3]) и [4]. При этом точки F_n с координатой $x_1=0$ в общем случае не рассматриваются. Настоящая заметка является дополнением [1], в ней указанное ограничение снимается.

1°. Запишем уравнение

$$\sum_{l=1}^{r-k} x_{k+l} B_{kl}(x_{k+1}, \dots, x_m) = 0, \quad (1)$$

где $k=0, \dots, r-2$ ($1 < r \leq m$); многочлены B_{ki} , зависящие от переменных $x_{k+1}, \dots, x_m$, удовлетворяют условиям:

1) отношение любых двух многочленов из B_{ki} не постоянно;

$$2) \quad (\omega - 1) B_{k1} + \sum_{j=1}^{r-k-1} (\omega \lambda'_{kj} - \lambda_{kj}) B_{k,j+1} \neq 0;$$

λ_{kj} , λ'_{kj} и $\omega \neq 0$ принадлежат комплексной плоскости C .

Пусть координатная $(m-k)$ -плоскость $\Pi^{m-k}(x_{k+1}, \dots, x_m)$ пересекать поверхность F_n по $(m-k-1)$ -поверхности F_{nk} порядка n_k . Если $k=0$, то Π^m совпадает с пространством E^m и число $n_0=n$. При определенном выборе координатной системы и числа r уравнение $(m-k-1)$ -поверхности F_{nk} , содержащей начало координат, в $(m-k)$ -плоскости Π^{m-k} можно записать в виде (1). На основании условия 1, если $k>0$, число $n_k>1$.

В [1] параметры связок A и B , образующих поверхность F_n , принадлежат расширенной числовой прямой; но для общей поверхности F_n справедливы п. 2°, 3° и в расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$, которая получается присоединением к C элемента ∞ . Поэтому F_{nk} в комплексном пространстве E^m может быть образована при помощи двух биективных связок

$$S_k: \quad \begin{aligned} x_1 = \dots = x_k &= 0; \\ x_{k+j+1} + \lambda_{kj} x_{k+1} &= 0 \quad (j=1, \dots, r-k-1), \end{aligned}$$

$$Q_k: \quad B_{k1} - \sum_{j=1}^{r-k-1} \lambda_{kj} B_{k,j+1} = 0;$$

в случае $k=0$ уравнения $x_1 = \dots = x_k = 0$ исключаются. Каждая из этих связок зависит от $r-k-1$ параметров λ_{kj} , принадлежащих либо C , если $r-k>2$, либо $\bar{C}$, если $r-k=2$. Плоскости связки S_k имеют размерность $m-r+1$; связка Q_k состоит из t -цилиндров, порядок которых не превосходит n_k-1 ($k \leq t$). Если не выполняется условие 1, то биективность связок S_k и Q_k в общем нарушается [1].

Будем считать, что параметры $\lambda_{kj} \in C$, $j=1, \dots, r-1$ ($r>2$). При $r>2$ и $k=0$ точки поверхности F_n , имеющие координату

$x_1=0$, не рассматриваются. Но все они получаются при образовании $(m-2)$ -поверхности F_{n_1} (за исключением тех, у которых $x_2=0$, если $r>3$) и т. д. Так как параметр $\lambda_{r-2,1} \in C$, то $(m-r+1)$ -поверхность $F_{n_{r-2}}$ рассматривается уже полностью.

Положим $S = \bigcup_k S_k$, $Q = \bigcup_k Q_k$ ($k=0, \dots, r-2$). Тогда имеем следующее обобщение теоремы Зейдевича.

Произвольная поверхность F_n в комплексном пространстве E^m есть множество всех $(m-r)$ -поверхностей пересечения соответственных элементов связки S $(m-r+1)$ -плоскостей и биективной ей связки Q поверхностей порядка $h \leq n-1$.

Например, в E^6 для поверхности $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_4(x_4 + x_5 + x_6) = 0$, $r=4$ находим $B_{01} = x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, $B_{02} = B_{11} = x_2(x_2^2 + x_3^2)$, $B_{03} = B_{12} = B_{21} = x_3^3$, $B_{04} = B_{13} = B_{22} = x_4 + x_5 + x_6$.

Рассмотрим теперь поверхности переноса 1—14 табл. 1 [1]. Плоскость $x_1=0$ пересекает поверхности 2, 4, 8 и 11 по прямой, а 1, 3 и 6 в $\Pi^2(x_2, x_3)$ — по распадающейся кривой второго порядка $x_2 x_3 = 0$ и $x_2(x_2 + 2) = 0$ соответственно. Во всех этих случаях координатную систему нужно изменить (п. 1°). Для этого в уравнении поверхности 1 (соответственно 3) переменные x_1, x_2, x_3 заменим x_3, x_2, x_1 (соответственно x_3, x_1, x_2); в других уравнениях вместо x_1 поставим линейную функцию $u = x_1 + x_2$ при неизменных x_2 и x_3 .

Новые уравнения поверхностей и их Q_k ($r=3$; $k=0,1$) приведены в таблице, где параметры $\lambda_1 = \lambda_{01}$, $\lambda_2 = \lambda_{02}$ — вещественны, а параметр $\mu = \lambda_{11}$ принадлежит расширенной числовой прямой. Как и в [1], связки Q_0 состоят из цилиндров. Связки S_k (поверхности 1—14) задаются уравнениями:

$$(S_0) \quad x_2 + \lambda_1 x_1 = 0, \quad x_3 + \lambda_2 x_1 = 0,$$

$$(S_1) \quad x_1 = 0, \quad x_3 + \mu x_2 = 0.$$

Запишем Q_1 для поверхностей переноса, не представленных в таблице; при этом воспользуемся их уравнениями табл. 1 [1]:

$$(5) \quad 3\mu x_2 - 2 = 0;$$

$$(7) \quad x_2 + 2\mu = 0;$$

$$(10) \quad x_2 + \mu = 0;$$

$$(12) \quad \mu(\alpha x_3 + 1) + 1 = 0, \quad \alpha \neq 0;$$

$$(13) \quad \mu(3x_3 + 1) + 3 = 0;$$

$$(14) \quad x_2 - \mu - 1 = 0.$$

Из этих уравнений и таблицы видно, что для любой поверхности переноса связка Q_1 распадается на параллельные плоскости (отдельные из них — мнимые); Q_1 содержит мнимые плоскости только в случаях 2—4, 8, 9 и 11.

Тип по- верх- ности	Уравнение поверхности	Связка Q_0 цилиндров	Параллельные плоскости Q_1
1	$x_2(x_1+x_3)-x_3=0$	$x_2-\lambda_1x_3+\lambda_2=0$	$x_3+\mu=0$
2	$u^3-3ux_2+2x_3=0$	$x_1^2+3x_2(u-1)-$ $-\lambda_1x_2(x_2-3)-2\lambda_2=0$	$x_2^2-3x_2-2\mu=0$
3	$x_2(x_3^2-x_1)-2x_3=0$	$x_2+\lambda_1x_3^2-2\lambda_2=0$	$x_3^2+2\mu=0$
4	$ux_2x_3+x_1+2x_2+x_3=0$	$x_2x_3+1-2\lambda_1-\lambda_2(x_2^2+$ $+1)=0$	$\mu(x_2^2+1)-2=0$
6	$u^4-4ux_3+3x_2(x_3+2)=0$	$x_1^3+4x_2(x_1^2+x_2^2)-\lambda_1\times$ $\times(x_2^3+6x_1^2x_2+3x_2+6)+$ $+4\lambda_2u=0$	$x_2^3+3(x_2+2)+$ $+4\mu x_2=0$
8	$u^5-5ux_2^2+4x_3=0$	$x_1^4+5x_1^3x_2+10ux_1x_2^2+$ $+5x_2^4-\lambda_1(x_2^4-5ux_2)-$ $-4\lambda_2=0$	$x_2^4-5x_2^2-4\mu=0$
9	$u^5+20u^3-5ux_2^2+180u+$ $+4x_3=0$	$x_1^4+5x_1^3x_2+10ux_1x_2^2+$ $+5x_2^4+20(x_2^2+3ux_2)+$ $+180-\lambda_1(x_2^4+20x_2^2-$ $-5ux_2+180)-4\lambda_2=0$	$x_2^4+15x_2^2+180-$ $-4\mu=0$
11	$u^2(x_2x_3+1)-x_2=0$	$x_1+2x_2-\lambda_1(x_2-1)-$ $-\lambda_2u^2x_2=0$	$\mu x_2^3-x_2+1=0$

Таким образом, каждая из поверхностей переноса 1—14 есть множество всех точек пересечения соответственных элементов связки S прямых и биективной ей связки Q , состоящей из связки Q_0 цилиндров порядка $h \leq n-1$ и пучка параллельных плоскостей Q_1 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатенко В. Ф. Некоторые конструктивные свойства алгебраических поверхностей переноса. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 18, Харьков, 1975, с. 59—65.
2. Gambier B. Surfaces de translation de Sophus Lie. — «Comptes rendus», 1920, т. 170, р. 1370—1374.
3. Eiesland J. On a Certain Class of Algebraic Translation-Surfaces. — «Amer. J. of Math.», 1907, v. 29, р. 363—386.
4. Бланк Я. П. Решение проблемы Энгеля о поверхностях переноса. «Зап. ин-та мат. и мех. ХГУ и Харьк. мат. об-ва», 1948, сер. 4, т. 19, с. 121—140.

Поступила 10 мая 1975 г.

**БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РОДА $p > 0$
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ С КРАЕВЫМ
УСЛОВИЕМ ОБОБЩЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ**

Введение. А. В. Погорелов в монографии [1] построил примеры поверхностей рода $p > 0$ положительной внешней кривизны и доказал жесткость замкнутых поверхностей рода $p = 1$. Там же им поставлена задача дальнейшего изучения свойств поверхностей ненулевого рода.

В. Т. Фоменко в работе [2] получил новые результаты относительно жесткости и однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $p > 0$ положительной внешней кривизны.

В настоящей работе изучаются бесконечно малые (б. м.) изгибания поверхностей рода $p > 0$ положительной внешней кривизны с границей при краевом условии обобщенного скольжения. Устанавливается, что б. м. изгибания поверхности существенно зависят от индекса краевого условия, числа компонент границы и рода поверхности.

Работа состоит из двух параграфов. В первом параграфе изучается задача о б. м. изгибаниях путем сведения ее к краевой задаче Гильберта для обобщенных аналитических функций на римановой поверхности.

Во втором параграфе решается вопрос о существовании на замкнутой римановой поверхности абелевой коварианты, не имеющей нулей и полюсов на заданном гладком контуре. Вопрос этот возникает при сведении задачи о б. м. изгибаниях к краевой задаче для обобщенных аналитических функций.

§ 1. Б. м. изгибания поверхностей рода $p > 0$ положительной внешней кривизны с краевым условием обобщенного скольжения. В трехмерном римановом пространстве R_3 , метрический тензор которого принадлежит классу C_α^3 , $0 < \alpha < 1$, рассмотрим поверхность R_2^p положительной внешней кривизны $K_e \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, рода $p > 0$, граница которой Γ состоит из $(m+1)$ простых, замкнутых, попарно непересекающихся кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, класса C_α^1 , $0 < \alpha < 1$. (Здесь и далее для классов кривых, поверхностей, функций используются обозначения книги [3].) Будем считать, что R_2^p есть строго внутренняя часть поверхности S_0 положительной внешней кривизны $K_l \geq k_0 > 0$, $S_0 \in C_\alpha^3$, $0 < \alpha < 1$. На S_0 в окрестности каждой ее точки может быть введена сопряженно-изотермическая параметризация $(u^1; u^2)$, в которой вторая основная форма поверхности S_0 (также и поверхности R_2^p) имеет вид (см. [3 гл. 2]):

$$II = b_{11}[(du^1)^2 + (du^2)^2].$$

Не нарушая общности, будем считать $b_{11} > 0$.

При введенной локальной параметризации и предположении $b_{11} > 0$ поверхность R_2^p можно рассматривать как риманову поверхность $\tilde{R}_2^p$ рода p с краем Γ (см. [2]). Для объектов римановой поверхности будем использовать обозначения книги [4]. В пространстве R_3 , в окрестности поверхности R_2^p введем полугеодезическую систему координат с базисной поверхностью R_2^p .

Будем изучать б. м. изгибания поверхности R_2^p при выполнении на Γ краевого условия обобщенного скольжения

$$\xi \cdot l = \gamma, \quad (1.1)$$

где $\xi = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ — изгибающее поле поверхности R_2^p ; $l = (l^1; l^2; l^3)$ — заданное на Γ векторное поле класса C_α^1 , $0 < \alpha < 1$, принадлежащее поверхности R_2^p ; γ — заданная на Γ скалярная функция класса C_α^1 , $0 < \alpha < 1$.

Известно, что уравнения б. м. изгибаний поверхности R_2^p в окрестности точки $s \in R_2^p$ во введенной выше параметризации приводятся к виду (см. [2])

$$\partial_z \bar{w} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0, \quad (1.2)$$

где $A(z)$, $B(z)$ — известные тензорные величины класса C_α на римановой поверхности $\tilde{R}_2^p$, $w(z) = \xi_1 + i\xi_2$, z — локальная унифицирующая римановой поверхности $\tilde{R}_2^p$ в окрестности точки s .

Краевое условие (1.1) после введения функции $w(z)$ запишется в виде

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(t)} w(t) \} = \gamma, \quad (1.3)$$

где $\lambda(t) = l^1 + il^2$, t — локальный аффикс точки контура Γ (Γ здесь рассматривается как граница римановой поверхности R_2^p).

„Дырку“ римановой поверхности $\tilde{R}_2^p$, ограниченную контуром Γ_j , заклеим кругом K_j , $j = 0, 1, 2, \dots, m$. (О локально-конформном склеивании см. [5, 6]). Получившуюся замкнутую риманову поверхность рода p обозначим $\tilde{R}_2^p$. Введем далее следующее обозначение

$$\kappa = \sum_{j=0}^m \operatorname{ind}_{\Gamma_j} \lambda(t),$$

причем в этой сумме при вычислении каждого слагаемого на Γ_j считаем заданным единый параметр — параметр круга K_j (о по-

итии индекса см. [7, гл. 2]). При введенных обозначениях основной результат можно сформулировать следующим образом (о степенях свободы решения задачи о б. м. изгибаниях см. [3, гл. 5]).

Теорема 1. *Задача о б. м. изгибании поверхности R_2^p с однородным краевым условием $\xi \cdot l = 0$ при $\kappa > 4p + m - 3$ разрешима с $2\kappa - 6p - m + 5$ степенями свободы; при $3p + \frac{m}{2} - 2 \leq \kappa \leq 4p + m - 3$ число решений может изменяться между $2\kappa - 6p - m + 5$ и $2\kappa - 4p + 5$ (задача разрешима); при $2p - 2 \leq \kappa \leq 3p + \frac{m}{2} - 2$ число решений может изменяться от 0 до $2\kappa - 4p + 5$. При $\kappa < 2p - 2$ поверхность R_2^p с однородным краевым условием (1.1) будет жесткой.*

При $\kappa > 4p + m - 3$ поверхность R_2^p , подчиненная неоднородной связи (1.1), имеет семейство б. м. изгибаний, непрерывно зависящее от $2\kappa - 6p - m + 5$ вещественных параметров при любой функции $\gamma \in C_0^1$, $0 < \alpha < 1$. Из теоремы 1 вытекает следующая теорема относительно втулочных связей (о втулочных связях см. [3, гл. 5, § 8]).

Теорема 2. *При ортогональных втулочных связях на всех контурах Γ_j поверхность R_2^p при $m < 2p - 3$ жесткая; при $m \geq 6p - 6$ не жесткая, количество степеней свободы б. м. изгибания может изменяться от $m - 6p + 7$ до $2m - 4p + 7$; при $2p - 3 \leq m < 6p - 6$ количество степеней свободы б. м. изгибания может изменяться от 0 до $2m - 4p + 7$.*

Интересно отметить, что $6p - 6$ — при $p > 1$ — число конформных типов замкнутых римановых поверхностей рода p .

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi(z)$ — абелева коварианта римановой поверхности R_2^p , нули и полюса которой не лежат на Γ (о существовании такой коварианты см. § 2).

Дивизор нулей и полюсов $\varphi(z)$, лежащих в $\tilde{R}_2^p$, обозначим D_1 ; в $\bigcup_{j=0}^m K_j$ — через D_2 . Дивизор нулей и полюсов $\varphi(z)$ на римановой поверхности R_2^p обозначим через D . Таким образом

$$D = D_1 + D_2. \quad (1.4)$$

Сделав замену

$$\tilde{w}(z) = \frac{w(z)}{\sqrt{g} \sqrt{K_e}} \cdot \varphi(z),$$

где g — дискриминант метрического тензора поверхности R_2^p , соотношения (1.2), (1.3) приведем к виду ([2])

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} \bar{w} + \bar{A} \bar{w} + \bar{B} \bar{w} = 0 \\ \operatorname{Re}\{\bar{\lambda} \bar{w}\} = \gamma \\ (\bar{w}) \geq D_1, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$ — ковариант по $\bar{z}$ на $\bar{R}_2^p$, функция $\bar{w}$ — конформный инвариант на $\bar{R}_2^p$.

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{\lambda(t)}{\varphi(t)} \cdot \sqrt{g V K_{le}} - \quad (1.6)$$

инвариант относительно замены униформизирующих на $\bar{R}_2^p$ (это следует из инвариантности γ и $\bar{w}$).

Итак, задача о б. м. изгибаниях поверхности R_2^p при условии (1.1) сведена к краевой задаче (1.5) для обобщенных аналитических функций на римановой поверхности R_2^p кратных дивизору D_1 .

Очевидно, что однородные задачи (1.2) — (1.3) и (1.5) имеют одинаковое число линейно-независимых решений и соответствующие неоднородные задачи имеют общие решения, зависящие от одинакового числа произвольных вещественных постоянных.

Индексом задачи (1.5) называется число $\kappa = \operatorname{ind}_1 \bar{\lambda}(t)$. Подсчитаем κ . Учитывая (1.6) и то, что при изменении направления обхода контура индекс функции, заданной на контуре, меняет знак, получим

$$\kappa = \kappa - \operatorname{ord} D_2. \quad (1.7)$$

Решение задачи (1.5), кратное в $\bar{R}_2^p$ дивизору D_1 , представим в $\bar{R}_2^p$ в виде

$$\bar{w}(z) = \Delta(z) \cdot \hat{w}(z), \quad (1.8)$$

где $\Delta(z)$ — аналитическая в $\bar{R}_2^p$ функция, нули и полюса которой определяются дивизором D_1 , а $\hat{w}(z)$ регулярна в $\bar{R}_2^p$ (см. [8, гл. 4]). Задача (1.5) эквивалентна задаче для регулярных функций (см. там же):

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} \hat{w} + \bar{A} \hat{w} + \bar{B}_1 \hat{w} = 0 \\ \operatorname{Re}\{\bar{\lambda} \hat{w}\} = \gamma, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\text{где } \hat{\lambda}(t) = \tilde{\lambda}(t) \cdot \overline{\Delta(t)}; \quad \tilde{B}_1(z) = \tilde{B}(z) \cdot \frac{\overline{\Delta(z)}}{\Delta(z)}.$$

Подсчитаем индекс задачи (1.9): $\hat{\kappa} = \text{ind}_{\Gamma} \hat{\lambda}(t) = \tilde{\kappa} - \text{ord } D_1$.
 Из (1.7) и (1.4) получим $\hat{\kappa} = \kappa - \text{ord } D$.
 Но $\text{ord } D = 2p - 2$ (см. [4, с. 64]). Следовательно

$$\hat{\kappa} = \kappa - 2p + 2. \quad (1.10)$$

Известна следующая теорема, установленная Ю. Л. Родным (см. [8, гл. 4]).

Теорема. Однородная задача (1.9) при $\hat{\kappa} > 2p + m - 1$ имеет ровно $2\hat{\kappa} - 2p - m + 1$ линейно независимых в действительном смысле решений. При $p + \frac{2}{m} \leq \hat{\kappa} \leq 2p + m - 1$ число решений может изменяться от $2\hat{\kappa} - 2p - m + 1$ до $2\hat{\kappa} + 1$. В случае $0 \leq \kappa < p + \frac{m}{2}$ число решений может изменяться от 0 до $2\hat{\kappa} + 1$. При $\hat{\kappa} < 0$ однородная задача неразрешима. При $\hat{\kappa} > 2p + m - 1$ неоднородная задача (1.9) имеет решение, зависящее от $2\hat{\kappa} - 2p - m + 1$ произвольных вещественных постоянных.

Теорема 1 следует из соотношения (1.10) и предыдущей теоремы.

§ 2. Существование абелевой коварианты, не имеющей нулей и полюсов на заданном контуре. 1. Рассмотрим замкнутую риманову поверхность R рода p и контур Γ на R , состоящий из конечного числа простых, гладких, замкнутых кривых. Наша цель — построить на R абелеву коварианту, не имеющую на Γ нулей и полюсов. Для случая $p = 1$ единственная неравная тождественно нулю абелева коварианта 1-го рода в нуль не обращается и решает нашу задачу. В дальнейшем считаем $p \geq 2$.

Пусть $\varphi(z)$ — абелева коварианта 1-го рода, имеющая нуль в точке $P_0 \in \Gamma$. Предположим, что $\hat{f}(z)$ — рациональная на R функция, имеющая в точке P_0 простой полюс и не имеющая на Γ нулей и других полюсов. Если n — кратность нуля коварианты $\varphi(z)$ в точке P_0 , то абелева коварианта $\hat{\varphi}(z) = [\hat{f}(z)]^n \varphi(z)$ имеет на Γ нули в тех же точках, что и $\varphi(z)$, за исключением точки P_0 , и не имеет на Γ полюсов. В предположении существования соответствующих рациональных функций, проделав аналогичное рассуждение для каждого нуля коварианты $\varphi(z)$, лежащего на Γ , получим абелеву коварианту, не имеющую на Γ нулей и полюсов.

Таким образом, наша задача сводится к построению на R рациональной функции $\hat{f}(z)$, имеющей полюс кратности единица в точке P_0 и не имеющей на Γ нулей и других полюсов.

2. Построение функции $\hat{f}(z)$. Пусть $P_1, \dots, P_\rho$ — различные точки римановой поверхности R , не лежащие на Γ и такие, что параметрический круг D_j , $j = 1, 2, \dots, \rho$ с центром в точке

P_j не пересекает Γ . Обозначим через (Δ_0) дивизор $\sum_{j=0}^{\rho} (P_j)$.

Покажем, что точки P_j , $j = 1, 2, \dots, \rho$ с большим произволом можно выбрать так, чтобы

$$\dim(W - \Delta_0 + P_j) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \rho, \quad (2.1)$$

где W — класс дифференциалов.

Через $\Omega(P_m \dots P_k)$ будем обозначать пространство абелевых ковариант, кратных дивизору $(P_m) + \dots + (P_k)$. Известно, что $\dim(W - P_0) = \rho - 1$ (см. [9, гл. 10, § 6]). Выберем точку P_1 так, чтобы выполнялось соотношение

$$\dim(W - \sum_{j=0}^1 (P_j)) = \rho - 2. \quad \text{Имеем } \Omega(P_0 P_1) \subset \Omega(P_0), \text{ и если}$$

$$\dim(W - \sum_{j=0}^1 (P_j)) = \rho - 1,$$

то $(\rho - 1)$ линейно независимых ковариант из $\Omega(P_0)$ обращаются в нуль в точке P_1 . Но эти коварианты образуют базис для $\Omega(P_0)$, следовательно, каждая коварианта из $\Omega(P_0)$ обращается в нуль в точке P_1 . Так как $\rho \geq 2$, то существует по крайней мере одна коварианта в $\Omega(P_0)$, не равная тождественно нулю. Обозначим ее через $\psi_1(z)$. Возьмем в качестве P_1 точку, в которой $\psi_1(z)$ не равна нулю. Следовательно, в качестве P_1 можно брать любую точку из $R \setminus \Gamma$, за исключением конечного их числа. Точку P_2 выбираем так, чтобы выполнялись соотношения

$$1) \dim(W - (P_0) - (P_2)) = \rho - 2;$$

$$2) \dim(W - (P_1) - (P_2)) = \rho - 2;$$

$$3) \text{ в случае } \rho \geq 3 \dim(W - \sum_{j=0}^2 (P_j)) = \rho - 3.$$

Из предыдущих рассуждений следует, что для удовлетворения условий 1 и 2 в качестве P_2 можно взять любую точку из $R \setminus \Gamma$ за исключением конечного их числа. Для удовлетворения условия 3 проводим рассуждения, аналогичные проведенным для точки P_1 . В итоге за P_2 можно взять любую точку из $R \setminus \Gamma$, за исключением конечного их числа. Аналогично устанавливается, что в качестве $P_3, \dots, P_\rho$ можно брать любые точки римановой поверхности R , не лежащие на Γ , за исключением конечного числа.

Итак, пусть $P_j, j=1, 2, \dots, \rho$ выбраны таким образом, что выполняется (2.1). По теореме Римана-Роха имеем (см. [9, гл. 10, § 5])

$$\dim(\Delta_0) = \dim(W - \Delta_0) + \text{ord}(\Delta_0) - \rho + 1 = 2, \quad (2.2)$$

то есть на R существует рациональная функция $f(z) \neq \text{const}$, кратная $(-\Delta_0)$. В то же время из (2.1) имеем

$$\dim(\Delta_0 - P_j) = \dim(W - \Delta_0 + P_j) + 1 = 1, \quad j=0, 1, \dots, \rho. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что полюса функции $f(z)$ определяются дивизором (Δ_0) . Через (Δ) обозначим дивизор нулей функции $f(z)$:

$$(\Delta) = \sum_{j=0}^{\rho} (Q_j).$$

Если ни одна точка $Q_j, j=0, 1, \dots, \rho$ не лежит на Γ , положим $f(z) = f(z)$.

Пусть $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ лежат на Γ и $\{\varphi_j(z)\} j=1, 2, \dots, \rho$ — комплексный базис абелевых ковариант 1-го рода на римановой поверхности R . По теореме Абеля (см. [9, гл. 10, § 7]) на R существует особая 1-цепь γ такая, что $\partial\gamma = (\Delta) - (\Delta_0)$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \varphi_j &= 0, \quad j=1, 2, \dots, \rho; \\ \gamma &= \sum_{j=0}^{\rho} \gamma_j, \quad \partial\gamma_j = (P_j) - (Q_j). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Равенство (2.4) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{\rho} \int_{\gamma_i} \varphi_i = \sum_{j=0}^{\rho} \int_{Q_j}^{P_j} \varphi_j, \quad i=1, 2, \dots, \rho. \quad (2.5)$$

Очевидно, сумма (2.5) есть регулярная (многозначная) функция точек Q_j . Через $Q_0^*, Q_1^*, \dots, Q_k^*$ обозначим достаточно близкие к $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ точки римановой поверхности R , не лежащие на Γ . Точнее, выберем их так, чтобы величины

$$c_i = \sum_{j=0}^k \int_{Q_j^*}^{P_j} \varphi_i + \sum_{j=k+1}^{\rho} \int_{Q_j}^{P_j} \varphi_i = \sum_{j=0}^{\rho} \int_{\gamma_j^*} \varphi_i = \int_{\gamma^*} \varphi_i, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \partial\gamma_j^* &= (P_j) - (Q_j^*), \quad j=0, 1, \dots, k; \quad \gamma_j^* = \gamma_j, \quad j=k+1, \dots, \rho; \quad \gamma^* = \\ &= \sum_{j=0}^{\rho} \gamma_j^*, \end{aligned}$$

удовлетворяли соотношениям

$$|c_i| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.7)$$

где ε — заданное положительное число. Такой выбор возможен в силу регулярности суммы (2.5) относительно точек Q_j .

Рассмотрим дивизор $\sum_{i=1}^p (P_i)$ и топологическое произведение параметрических кругов, имеющих центрами точки P_i : $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_p = D$.

Из (2.1) при $j=0$ будем иметь

$$\dim(W - \sum_{i=1}^p (P_i)) = 0. \quad (2.8)$$

Пусть z_j — локальный параметр в круге D_j , $z_j = \Phi_j(P)$, $\Phi_j(P_j) = 0$. В силу (2.8) отображение топологического произведения D в K^p (K^p — пространство p комплексных переменных), осуществляемое по формуле

$$h(z_1, \dots, z_p) = (\int_{\tilde{\gamma}} \varphi_1; \int_{\tilde{\gamma}} \varphi_2; \dots \int_{\tilde{\gamma}} \varphi_p),$$

где

$$\tilde{\gamma} = \sum_{j=1}^p \tilde{\gamma}_j, \quad \partial \tilde{\gamma}_j = (P'_j) - (P_j), \quad \Phi_j(P'_j) = z_j,$$

биективно в ε -окрестности точки $(0; 0; \dots; 0)$ пространства K_p при достаточно малом ε (см. [9, гл. 10, § 8]). Под ε -окрестностью мы понимаем множество векторов $(a_1, a_2; \dots; a_p)$ таких, что $|a_i| < \varepsilon$.

Пусть ε в неравенстве (2.7) таково, что биекция обеспечена. Тогда в D существует набор точек $(P_1^*, P_2^*, \dots, P_p^*)$ такой, что

$$\int_{\tilde{\gamma}^*} \varphi_i = -c_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

где

$$\tilde{\gamma}^* = \sum_{j=1}^p \tilde{\gamma}_j^*, \quad \partial \tilde{\gamma}_j^* = (P_j^*) - (P_j). \quad (2.9)$$

Если через γ_1 обозначим 1-цепь $\gamma_1 = \gamma^* + \gamma^*$, то из (2.6) и (2.9) будем иметь: $\int_{\gamma_i} \varphi_i = 0, i = 1, 2, \dots, \rho,$

$$\partial\gamma_1 = (P_0) + \sum_{i=1}^{\rho} (P_i^*) - \sum_{i=0}^k (Q_i^*) - \sum_{i=k+1}^{\rho} (Q_i) = (\Delta_1).$$

По теореме Абеля на римановой поверхности R существует рациональная функция $\hat{f}(z)$, нули и полюса которой определяются дивизором (Δ_1) .

Функция $\hat{f}(z)$ имеет в точке P_0 простой полюс и не имеет на R нулей и других полюсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потгорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 759 с.
2. Фоменко В. Т. О жесткости и однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $\rho \leq 1$ в римановом пространстве. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 1, с. 45—48.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
4. Шиффер М., Спенсер Д. К. Функционалы на конечных римановых поверхностях, М., ИЛ, 1957.
5. Зверович Э. И. — «Сиб. мат. журн.», 1966, т. 7, № 4, с. 804—819.
6. Зверович Э. И., Литвинчук Г. С. Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения. — «Усп. мат. наук», 1968, т. 23, вып. 3 (141), с. 67—121.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963. 639 с.
8. Родин Ю. Л. Эллиптические системы дифференциальных уравнений 1-го порядка на замкнутых римановых поверхностях. — Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук, Тбилиси, 1965. 10 с.
9. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. Изд-во иностр. лит. М., 1960. 342 с.

Поступила 23 ноября 1975 г.

ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РОДА $p \geq 0$ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ

Введение. Прежде чем говорить о содержании настоящей работы, приведем краткий обзор результатов по изгибаниям поверхностей ненулевого рода.

А. В. Погореловым построены примеры замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ с положительной внешней кривизной и доказана жесткость таких поверхностей в случае $p=1$ при наличии точечной связи (см. [1, гл. § 12]). Там же им намечено доказательство жесткости таких поверхностей в случае $p > 1$.

В работе [2] В. Т. Фоменко доказана жесткость замкнутых поверхностей рода $p > 1$ положительной внешней кривизны методом превращения таких поверхностей в римановы поверхности рода p . В этой же работе сформулирована теорема об однозначности определенности поверхностей рода $p \geq 1$, расположенных в пространстве постоянной кривизны, с сохранением $4p-3$ точек конгруэнтности, доказательство которой приведено в работе [3].

Наша работа посвящена доказательству изгибаемости поверхностей положительной внешней кривизны, рода $p \geq 0$, с краем, расположенных в трехмерном римановом пространстве.

Используя идею В. Т. Фоменко о рассмотрении таких поверхностей как римановых поверхностей рода p (см. [2]), вопрос об изгибаниях мы сводим к вопросу о существовании однопараметрических семейств функций, аналитических на некоторой римановой поверхности с краем, с непрерывным изменением формы этих функций при непрерывном изменении параметра.

Точную формулировку основного результата мы откладываем до § 2, которую дадим после введения необходимых для этого понятий.

Работа состоит из шести параграфов. В § 1 мы исследуем свойства одного интегрального оператора на римановой поверхности. Результаты этого параграфа являются обобщением известной теоремы И. Н. Векуа (см. [4, гл. 1, § 8]) и используются в дальнейшем изложении. В § 2 мы вводим некоторые вспомогательные понятия, выводим уравнение изометрических преобразований и формулируем основную теорему.

Следующие параграфы содержат в себе доказательство основной теоремы. § 3 посвящен получению априорных оценок, используемых при решении уравнения изометрических преобразований. В § 4 проводится решение уравнения изометрических преобразований. Метод решения аналогичен методу, использованному А. В. Погореловым при решении задачи об изометричности погружения многообразия, близкого к погружаемому (см. [1, гл. 6, § 7]). В § 5 решается вопрос о непрерывных изгибаниях

рассматриваемой поверхности. В § 6 мы строим упоминавшиеся выше семейства аналитических функций и показываем, что множество таких семейств бесконечно и несчетно.

Для функциональных пространств и норм в этих пространствах в работе используются обозначения книги [4]. Основным результатом настоящей работы является докладываемый на шестой Всесоюзной геометрической конференции в г. Вильнюсе.

§ 1. Некоторые свойства оператора Tf на римановой поверхности. Изложению основного результата мы предположим доказательство необходимых нам фактов из теории функций на римановых поверхностях. С используемыми при этом понятиями можно ознакомиться в работах [4—10].

Рассмотрим замкнутую риманову поверхность R рода $\rho \geq 0$ и область G на ней ($\bar{G}$ — замыкание G — будем также рассматривать как конечную риманову поверхность рода $h \leq \rho$). Границу G обозначим Γ . Считаем, что Γ состоит из конечного числа простых попарно непересекающихся кривых.

Возьмем конечное покрытие римановой поверхности R параметрическими кругами $\{W_k\}$, такое, что контур Γ пересекают только круги, центр которых лежит на Γ .

Пусть $\{\varphi_k\}$ — разбиение единицы класса C^∞ на R , подчиненное покрытию $\{W_k\}$. $\{W_k\} \cap \bar{G}$ — покрытие римановой поверхности $\bar{G}$ с краем Γ ($\bar{G} = G \cup \Gamma$). Обозначим его $\{W_k^*\}$.

Семейство соответствующих сужений функций φ_k будет разбиением единицы на $\bar{G}$, подчиненным покрытию $\{W_k^*\}$. Обозначим его $\{\varphi_k^*\}$. Далее в этом параграфе считаем покрытие и подчиненное ему разбиение единицы фиксированными.

Введение нормы в пространстве $C_\alpha^m(\bar{G})$. Пусть $f(z)$ — некоторая функция или тензорная величина класса $C_\alpha^m(\bar{G})$ (т.е. в каждом параметрическом круге с локальной униформизирующей $z = x + iy$ $f(z)$ имеет частные производные по x и по y порядка m , причем эти частные производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем α), $m \geq 0$, $0 < \alpha < 1$. Норма $f(z)$ в $\bar{W}_k^*$ (в замыкании W_k^*) определяется следующим образом:

$$C_\alpha^m(f, \bar{W}_k^*) = \max \left\{ \max_{n=0, \dots, m} \max_{l=0, \dots, n} \max_{z \in \bar{W}_k^*} \left| \frac{\partial^n f(z)}{\partial z^l \partial \bar{z}^{n-l}} \right|, \right. \\ \left. \max_{l=0, \dots, m} H \left(\frac{\partial^m f(z)}{\partial z^l \partial \bar{z}^{m-l}}, \alpha, \bar{W}_k^* \right) \right\}, \quad (1.1)$$

где $H(\varphi, \alpha, \bar{W}_k^*)$ — постоянная Гельдера для $\varphi \in C_\alpha(\bar{W}_k^*)$ (используем обозначения книги [4]).

Норму $f(z)$ на $\bar{G}$ вводим так:

$$C_\alpha^m(f, \bar{G}) = \max_k C_\alpha^m(f, \bar{W}_k^*). \quad (1.2)$$

Выполнение аксиом нормы очевидно.

Докажем, что полученное нормированное пространство будет полным, т. е. всякая последовательность Коши будет иметь предел, принадлежащий этому пространству.

Пусть $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши функций или тензорных величин класса $C_a^m(\bar{G})$, $m \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, т. е. $C_a^m(f_{n+p} - f_n, \bar{G}) < \varepsilon$ для $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p$ — натурального и для всех достаточно больших n . Тогда из (1.2) следует, что $C_a^m(f_{n+p} - f_n, \bar{G}) < \varepsilon$ для $\forall W_k^*$.

Поскольку сужение пространства $C_a^m(\bar{G})$ на $\bar{W}_k^*$ с нормой (1.1) есть полное пространство (см. [4, гл. 1, §1]), последовательность сужений $f_n(z)$ на $\bar{W}_k^*$ будет иметь предел $f(z) \in C_a^m(\bar{W}_k^*)$.

Из (1.2) вытекает, что $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ в норме пространства $C_a^m(\bar{G})$. Так как $f(z) \in C_a^m(\bar{W}_k^*)$ для $\forall W_k^*$, то $f(z) \in C_a^m(\bar{G})$.

Очевидно, что при замене покрытия римановой поверхности введенная нами норма, вообще говоря, изменится, но будет эквивалентна исходной.

Отметим одно неравенство. Если $f, g \in C_a^m(\bar{G})$, то произведение $fg \in C_a^m(\bar{G})$, причем

$$C_a^m(fg, \bar{G}) \leq C_a^m(f, \bar{G}) \cdot C_a^m(g, \bar{G}). \quad (1.2a)$$

(1.2a) вытекает из (1.2) и неравенства (1.6a) § 1, гл. 1, книги [4].

Свойства оператора Tf. Пусть $M(t, z)$ — ядро Коши для римановой поверхности R , дивизор особенностей которого расположен в $R/\bar{G}$, причем можем считать, что точки дивизора особенностей не попадают в параметрические круги, покрывающие Γ (см. [8, 9]). Пусть $f(z)$ — коварианта по z на римановой поверхности $\bar{G}$ (о ковариантах см. [6, гл. 3]).

Рассмотрим оператор

$$Tf \equiv T_g f = -\frac{1}{\pi} \iint_{\bar{G}} f(t) M(t, z) dt \quad (1.3)$$

и докажем следующие его свойства.

Теорема 1. Пусть $\Gamma \in C_a^{m+1}$, $f(z) \in C_a^m(\bar{G})$, $0 < \alpha < 1$, $m \geq 0$. Тогда функция $g(z) = Tf$ принадлежит классу $C_a^{m+1}(\bar{G})$, причем Tf вполне непрерывно отображает пространство ковариант по z класса $C_a^m(\bar{G})$ в пространство функций класса $C_a^m(\bar{G})$. Справедлива оценка

$$C_a^{m+1}(Tf, \bar{G}) \leq k \cdot C_a^m(f, \bar{G}), \quad (1.4)$$

где константа $\bar{k}$ от f не зависит. Теорема 1 является обобщением известной теоремы И. Н. Векуа, доказанной для случая, когда G — плоская область (см. [4, гл. 1, § 8]).

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1, докажем лемму.

Лемма 1. Пусть D — область конечной римановой поверхности $\bar{G}$ (может быть $D=G$); $f(t)$ — непрерывная в $\bar{D}$ коварианта по $\bar{t}$; $M(t, z)$ — непрерывная в $\bar{D}$ коварианта по t и аналитическая в $G(G/\bar{D})$ функция по z . Тогда функция

$$I(z) = \iint_D f(t) M(t, z) dT$$

аналитична в $G(G/\bar{D})$.

Доказательство леммы 1. Покажем, что $I(z)$ имеет обычную производную по z в каждой точке, принадлежащей $G(G/\bar{D})$. Возьмем точку $z_0 \in G(G/\bar{D})$ и W — параметрическую окрестность этой точки. Все рассуждения, касающиеся переменной z , ведем в этой окрестности.

$$\begin{aligned} & \frac{I(z_0 + \Delta z) - I(z_0)}{\Delta z} = \iint_D f(t) [M(t, z_0)]'_z dT = \\ &= \iint_D f(t) \left\{ \frac{M(t, z_0 + \Delta z) - M(t, z_0)}{\Delta z} - [M(t, z_0)]'_z \right\} dt = \quad (1.5) \\ &= \sum_k \iint_{W_k^*} \varphi_k^*(t) f(t) \left\{ \frac{M(t, z_0 + \Delta z) - M(t, z_0)}{\Delta z} - [M(t, z_0)]'_z \right\} dT, \end{aligned}$$

где W_k^* — элементы покрытия $\bar{D}$, $\{\varphi_k^*(t)\}$ — разбиение единицы на $\bar{D}$, подчиненное этому покрытию. Сумма в (1.5) конечна ввиду компактности $\bar{G}$.

Слагаемые в (1.5) можно рассматривать как обычные двойные интегралы в плоскости соответствующего параметра. В этой плоскости W_k^* имеет конечную площадь и ввиду непрерывности $\varphi_k^*(t) \cdot f(t)$ по t в $\bar{W}_k^*$ и аналитичности $M(t, z)$ по z каждое слагаемое в сумме (1.5) может быть сделано сколь угодно малым за счет уменьшения Δz . Но слагаемых конечное число, следовательно, вся сумма стремится к нулю, когда $\Delta z \rightarrow 0$. Переходя к пределу в (1.5) при $\Delta z \rightarrow 0$, получим

$$I'_z(z_0) = \iint_D f(t) [M(t, z_0)]'_z dT.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. По определению двойного интеграла на римановой поверхности имеем:

$$T_G f = -\frac{1}{\pi} \sum_k \left(\iint_{W_k^*} \varphi_k^*(t) f(t) M(t, z) dT \right). \quad (1.6)$$

Рассмотрим одно слагаемое суммы (1.6)

$$T_k f = \iint_{W_k^*} \varphi_k^*(t) f(t) M(t, z) dT.$$

Обозначим через U_k^* круг (полукруг) такой, что

$$\overline{\text{supp } \varphi_k^*} \subset U_k^* \subset W_k^*.$$

Здесь $\text{supp } \varphi_k^*$ — носитель функции φ_k^* , $\overline{\text{supp } \varphi_k^*}$ — замыкание этого множества. $\{U_k^*\}$ — покрытие римановой поверхности $\bar{G}$ (это следует из определения разбиения единицы);

$$T_k f = \iint_{W_k^*} \varphi_k^*(t) f(t) \frac{dT}{t-z} + \iint_{W_k^*} \varphi_k^*(t) f(t) M_1(t, z) dT = I_1(z) + I_2(z),$$

где $M_1(t, z)$ аналитична по z в W_k (без звездочки!) (см. [8, 9]). Отметим, что в силу свойств разбиения единицы в интеграле $T_k f$ действительная область интегрирования не W_k^* , а $\text{supp } \varphi_k^*$, но можно рассматривать $T_k f$ и как интеграл по W_k^* , причем $\varphi_k^*(t) f(t) \in C_\alpha^m(\bar{W}_k^*)$.

Известно, что $I_1(z) \in C_\alpha^{m+1}(\bar{U}_k^*)$ (см. [4, с. 73]). По лемме 1 $I_2(z)$ аналитична в W_k . Следовательно,

$$T_k f \in C_\alpha^{m+1}(\bar{U}_k^*). \quad (1.7)$$

Если $z \in (\bigcup_k W_k) \setminus \overline{\text{supp } \varphi_k^*}$ (где объединение производится по тем же индексам, что и суммирование в формуле (1.6)), $t \in \text{supp } \varphi_k^*$, то $M(t, z)$ аналитична по z (см. [8, 9]). По лемме 1 $T_k f$ аналитична в $(\bigcup_k W_k) \setminus \overline{\text{supp } \varphi_k^*}$.

Отсюда и из (1.7)

$$T_k f \in C_\alpha^{m+1}(\bar{G}). \quad (1.8)$$

Из (1.8) и (1.6) получим $T_G f \in C_\alpha^{m+1}(\bar{G})$.

Докажем неравенство (1.4):

$$\begin{aligned} C_\alpha^{m+1}(T_G f, \bar{G}) &\leq \sum_i C_\alpha^{m+1}(T_{W_i^*} f, \bar{G}) \leq \sum_{i,j} C_\alpha^{m+1}(T_{W_i^*} f, \bar{W}_j^*) \leq \\ &\leq k_1 \sum_i C_\alpha^m(f, \bar{W}_i^*) \leq k \cdot C_\alpha^m(f, \bar{G}). \end{aligned}$$

Здесь использовано соответствующее неравенство для плоской области (см. [1, стр. 78]).

Покажем, что оператор T_{Gf} вполне непрерывен. Из неравенства (1.4) имеем:

$$C_a^{m+1}(T_{Gf}, \bar{W}_i^*) \leq k \cdot C_a^m(f, \bar{G}). \quad (1.9)$$

Докажем, используя формулу (1.9) и теорему Арцела, что сужение функции T_{Gf} на $\bar{W}_i^*$, которое обозначим $(T_{Gf})_i$, есть вполне непрерывный оператор, отображающий пространство ковариант по $\bar{z}$ класса $C_a^m(\bar{G})$ в пространство функций класса $C_a^m(\bar{W}_i^*)$.

Рассмотрим множество функций $(T_{GE})_i$, где E — единичный шар пространства $C_a^m(\bar{G})$. Через $(T_{GE})_i^{(k)}$ ($k=0, 1, \dots, m+1$) обозначим множество, составленное из производных k -го порядка от функций, принадлежащих множеству $(T_{GE})_i$.

Для доказательства полной непрерывности оператора $(T_{Gf})_i$ достаточно, в силу теоремы Арцела, установить равномерную ограниченность и равномерную непрерывность множества $(T_{GE})_i^{(k)}$, где k пробегает значения $0, 1, 2, \dots, (m+1)$.

Равномерная ограниченность $(T_{GE})_i^{(k)}$ вытекает из неравенства (1.9).

Далее, для $\forall z_1, z_2 \in \bar{W}_i^*$ и $\forall f \in E$ имеем $|(T_{Gf})_i^{(k)}(z_1) - (T_{Gf})_i^{(k)}(z_2)| \leq C_a^{m+1}(T_{Gf}, \bar{W}_i^*) \cdot |z_1 - z_2|$, $k=0, 1, 2, \dots, m$, $|(T_{Gf})_i^{(m+1)}(z_1) - (T_{Gf})_i^{(m+1)}(z_2)| \leq C_a^{m+1}(T_{Gf}, \bar{W}_i^*) \cdot |z_1 - z_2|^2$, откуда следует равномерная непрерывность множества $(T_{GE})_i^{(k)}$, $k=0, 1, \dots, (m+1)$.

Таким образом, оператор $(T_{Gf})_i$ вполне непрерывно отображает $C_a^m(\bar{G})$ в $C^{m+1}(\bar{W}_i^*)$, а следовательно и в $C_a^m(\bar{W}_i^*)$. В силу этого, для образа единичного шара $E: C_a^m(f, \bar{G}) < 1$ (при действии на $E(T_{Gf})_i$) существует конечная ε -сеть. Обозначим ее $\{\psi_{ij}\}$, $j=1, 2, \dots, k(i)$. Набор функций $\{\varphi_i^* \psi_{ij}\}$, $j=1, 2, \dots, k(i)$ будет конечной ε -сетью для множества функций $\varphi_i^* \cdot (T_{Gf})_i$, $f \in E$.

Доопределим функции $\varphi_i^* \psi_{ij}$ вне $\bar{W}_i^*$ нулем и сохраним за ними прежние обозначения. Тогда функции $\varphi_i^* \psi_{ij}$ будут функциями класса $C_a^m(\bar{G})$.

Через $\{\Psi_\beta\}$ обозначим набор функций, образованных следующим образом: функция Ψ_β есть сумма элементов ε -сетей $\{\varphi_i^* \psi_{ij}\}$ по одному из каждой ε -сети. $\{\Psi_\beta\}$ — набор всевозможных сумм такого рода, конечный в силу конечности покрытия $\{W_i^*\}$ римановой поверхности $\bar{G}$.

По построению множество функций $\{\Psi_\beta\}$ — конечная ε -сеть образа шара E при действии на этот шар оператора T_{Gf} .

Таким образом, $T_G f$ переводит единичный шар E в компактное множество пространства. $C_a^m(\bar{G})$, т. е. оператор $T_G f$ вполне непрерывен.

Теорема 1 доказана.

Следствие из теоремы 1. Пусть $A(z)$ — коварианта по классу $C_a^m(\bar{G})$, $f(z)$ — функция класса $C_a^m(\bar{G})$. Тогда оператор $P_G f \equiv T_G(Af)$ будет вполне непрерывным оператором в пространстве функций класса $C_a^m(\bar{G})$, причем $P_G f \in C_a^{m+1}(\bar{G})$.

Доказательство следствия. В силу (1.4) $C_a^{m+1}(P_G f, G) \leq k \cdot C_a^m(Af, G)$.

Но, используя неравенство (1.2a), получим

$$C_a^{m+1}(P_G f, \bar{G}) \leq k C_a^m(A, \bar{G}) \cdot C_a^m(f, \bar{G}) \leq k' \cdot C_a^m(f, \bar{G}). \quad (1.10)$$

Полная непрерывность $P_G f$ доказывается при помощи неравенства (1.10) дословным повторением рассуждений, приведенных при доказательстве полной непрерывности $T_G f$. Следствие доказано. В заключение параграфа установим следующую лемму.

Лемма 2. Если род римановой поверхности $R_p \geq 1$, то на поверхности $\bar{G}$ существует регулярная коварианта по $\bar{z}$, не обращающаяся в нуль на G .

Доказательство. На поверхности R , так как род ее $p \geq 1$, существует абелева коварианта первого рода $\varphi(z) \neq 0$ (см. [5, гл. 10, § 2]). Обозначим через z_i , $i=1, 2, \dots, n$ ее нули, лежащие в G (каждый нуль считаем столько раз, какова его кратность). Через $P[z_i]$, $i=1, 2, \dots, n$ обозначим аналитическую в $\bar{G}$ функцию, имеющую нуль кратности единица в точке z_i и не имеющую других нулей в G . Построение таких функций см. в [10].

Коварианта

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{\prod_{i=1}^n P[z_i]}$$

регулярна в $\bar{G}$ и не обращается в $\bar{G}$ в нуль. $\overline{\varphi_1(z)}$ (коварианта, комплексно сопряженная $\varphi_1(z)$) удовлетворяет требованиям леммы. Лемма 2 доказана.

§ 2. Постановка задачи. Формулировка основной теоремы. Вспомогательные построения и вывод уравнения изометрических преобразований. Пусть S — конечная поверхность рода $p \geq 0$, являющаяся строго внутренней частью поверхности S_0 положительной внешней кривизны $K_i \geq k_0 > 0$, расположенной в римановом пространстве R_3 . Границу S будем считать состоящей из конечного числа простых, гладких, замкнутых, попарно непересекающихся кривых L_i , $i=1, 2, \dots, m$, $m \geq 1$ и будем обозначать ее че-

рез $L = \bigcup_{i=1}^n L_i$. Через $g_{\alpha\beta}$ обозначим метрический тензор пространства R_3 .

Будем считать выполненными следующие предположения о регулярности: $g_{\alpha\beta} \in C^k_\alpha$; $S_0 \in C^k_\alpha$, $k \geq 5$, $0 < \alpha < 1$. Наша цель — доказать изгибаемость поверхности S . Основным моментом при осуществлении этой цели будет доказательство существования решений уравнения изометрических преобразований поверхности S .

Прежде чем приступить к выводу уравнения изометрических преобразований, сделаем некоторые предварительные построения. На $S_0/(S \cup Z)$ зафиксируем контур $\Gamma \in C^{k-2}_\alpha$, $k \geq 5$, $0 < \alpha < 1$, состоящий из m простых, замкнутых, попарно непересекающихся кривых Γ_i , таких, что Γ_i гомотопна L_i . Конечную поверхность, содержащую S и ограниченную контуром Γ , обозначим через S_1 . Очевидно, поверхность S_1 имеет тот же род, что и S .

В окрестности каждой своей точки поверхность S_0 может быть задана уравнением $x^2 = x^2$ (u^1, u^2), $\alpha = 1, 2, 3$, где (u^i) — сопряженно-изотермическая параметризация. Обозначим $z = u^1 + iu^2$. Поверхность S_0 можно рассматривать как риманову поверхность $\tilde{S}_0$ с локальной униформизирующей z . Поверхности S и S_1 можно рассматривать как римановы поверхности $\tilde{S}$ и $\tilde{S}_1$ с краями L и Γ (см. [3, 7]). Везде в дальнейшем запись $\tilde{S}$ или $\tilde{S}_1$ обозначает риманову поверхность с присоединенной к ней границей.

Рассмотрим покрытие римановой поверхности $\tilde{S}_0$ параметрическими кругами $|z| < 3$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) контур $L(\Gamma)$ пересекается только с кругами, имеющими центр на $L(\Gamma)$; 2) круги, имеющие центры на L и Γ , покрывают соответственно L и Γ ; 3) круги $|z| < 1$ покрывают $\tilde{S}_0$, причем круги, имеющие центры на L и Γ , покрывают соответственно L и Γ . О существовании такого покрытия см. [11, гл. 2, § 4].

Зафиксируем конечное покрытие римановой поверхности $\tilde{S}$ кругами $|z| < 3$, состоящее из кругов с центрами на L и кругов с центрами внутри $\tilde{S}$. Обозначим его $\{W^3_i\}$. Аналогично зафиксируем конечное покрытие римановой поверхности $\tilde{S}_1$ и обозначим его $\{V^3_j\}$. Можно считать, что $\{W^3_i\} \subset \{V^3_j\}$ и оба эти покрытия удовлетворяют свойствам 1—3. Соответствующие покрытия поверхностей $\tilde{S}$ и $\tilde{S}_1$ кругами $|z| < 1$ будем обозначать $\{W^1_i\}$, $\{V^1_j\}$. Можно считать, что $\{W^3_i\} \cap \Gamma = \emptyset$.

При рассмотрении $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}$ как отдельных римановых поверхностей с краем, к их покрытиям будем относить только те „половинки“ кругов из $\{V^3\}$ и $\{W^3\}$ с центрами на Γ и L , которые лежат соответственно в $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}$. Покрытия римановых поверхностей $\tilde{S}$ и $\tilde{S}_1$, состоящие из кругов и „половинок“, будем обозначать соответственно $\{\tilde{W}_i^3\}$ и $\{\tilde{V}_j^3\}$. Таким образом,

$$\tilde{S} = \bigcup_i \tilde{W}_i^3 = \bigcup_i \tilde{W}_i^1; \quad \tilde{S}_1 = \bigcup_j \tilde{V}_j^3 = \bigcup_j \tilde{V}_j^1.$$

Введем также следующие обозначения:

$$\hat{\tilde{S}}_2 = \bigcup_i \bar{W}_i^3; \quad \tilde{S}_2 = \bigcup_i \bar{W}_i^1;$$

R — дубль римановой поверхности $\tilde{S}_1$ (о дубле римановой поверхности см. [7, гл. 2, § 2]). Зафиксированные на $\tilde{S}_1$ покрытия $\{\tilde{V}_j^3\}$ и $\{\tilde{V}_j^1\}$ порождают соответствующие покрытия римановой поверхности R .

Рассмотрим на R разбиения единицы, подчиненные этим порожденным покрытиям. Сужения элементов этих разбиений на $\tilde{S}_1$ обозначим через $\tilde{\varphi}_j^3, \tilde{\varphi}_j^1$. Нормы функций и тензорных величин на введенных римановых поверхностях будем определять с использованием покрытий как кругами $|z| < 3$, так и кругами $|z| < 1$ (а также соответствующими «половинками»).

Обозначать эти нормы будем соответственно $\hat{C}_\alpha^m(f, \tilde{S})$ и $C_\alpha^m(f, \tilde{S})$ (здесь поверхность $\tilde{S}$ взята для примера). Эти нормы эквивалентны (см. § 1). Мы ввели все понятия, необходимые для формулировки основной теоремы.

Теорема 2 (основная теорема). 1) Пусть $\Phi(z) \neq 0$ — аналитическая на $\tilde{S}_1$ функция. Существует константа K такая, что если $C_\alpha^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) < K$, то функции $\Phi(z)$ соответствует нетривиальное изометрическое преобразование поверхности S в семействе близких поверхностей, в котором это преобразование функцией $\Phi(z)$ определяется однозначно. Поверхность, изометричная поверхности S , будет принадлежать классу регулярности C_α^{k-2} . 2) Если $\{\Phi_t(z)\}, t \in [0, 1]$ — множество аналитических на $\tilde{S}_1$ функций такое, что $C_\alpha^{k-2}(\Phi_t, \tilde{S}_1)$ непрерывно зависит от t , $C_\alpha^{k-2}(\Phi_t, \tilde{S}_1) < K$, $\forall t \in [0, 1]$ и $\Phi_0(z) \equiv 0$, то этому множеству соответствует непрерывное изгибание поверхности S в семействе близких поверхностей с сохранением класса регулярности C_α^{k-2} .

Займемся теперь выводом уравнения изометрических преобразований. Введем в окрестности поверхности S_0 полугеодезическую систему координат с базисной поверхностью S_0 , параметризованной в окрестности каждой своей точки указанным выше способом.

Пусть S_1^* — изометричная S_1 и близкая к ней поверхность (лежащая в области невырожденности введенных нами полу-геодезических координат). Через ξ^1, ξ^2, ξ^3 обозначим разности контравариантных координат соответствующих по изометрии точек и положим $\xi = (\xi^1; \xi^2; \xi^3)$. (Отметим, что функция ξ^3 будет инвариантна относительно замены униформизирующих на римановой поверхности $\tilde{S}_1$). Тогда функции $\xi^i, i=1, 2, 3$ удовлетворяют на римановой поверхности $\tilde{S}_1$ следующему уравнению:

$$L(\xi) = \Omega(\xi), \quad (2.1)$$

где

$$L(\xi) = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha du^\beta + g_{\alpha\beta} d\xi^\beta du^\alpha + \xi^k \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^k} du^\alpha du^\beta, \quad (2.2)$$

$$\Omega(\xi) = -(dr_\alpha \cdot dr_\beta \xi^\alpha \xi^\beta + dg_{\alpha\beta} \xi^\alpha d\xi^\beta + g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta) = a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta + a'_{\alpha\beta} \xi^\alpha a^\beta + a''_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.3)$$

$$r = (x^1, x^2, x^3), \quad r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial u^\alpha},$$

причем в формуле (2.2) индексы α и β пробегает значения 1 и 2, а в (2.3) — 1, 2, 3 (см. [1, гл. 6, § 7]).

Если рассматривать (2.1) как дифференциальное уравнение относительно ξ , то каждому его решению, не равному тождественно нулю, соответствует изометрическое преобразование поверхности S_1 , и наоборот. Уравнение (2.1) будем называть уравнением изометрических преобразований. Сейчас мы преобразуем его к виду, более удобному для дальнейшего использования. Соотношение (2.1) есть равенство квадратичных форм относительно du^1, du^2 . Приравнявая коэффициенты этих форм и вводя в рассмотрение ковариантные координаты вектора ξ — $\xi_i = g_{i\alpha} \xi^\alpha$, получим

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^1} + \frac{\partial \xi_j}{\partial u^2} - 2\Gamma_{ij}^k \xi_k - 2b_{ij} \xi_3 = \omega_{ij}, \quad (2.4)$$

где ω_{ij} — коэффициенты квадратичной формы $\Omega(\xi)$; Γ_{ij}^k — символы Христовфеля второго рода поверхности S_1 ; b_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S_1 ; i, j, k пробегает значения 1, 2. В нашей параметризации поверхности S_1 $b_{ij} = \delta_{ij} v$, где δ_{ij} — тензор Кронекера.

Исключая ξ_3 из левой части (2.4), будем иметь

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} - (\Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{22}^\alpha) \xi_\alpha = \frac{\omega_{11} - \omega_{22}}{2}$$

$$-\frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} - 2\Gamma_{12}^a \xi_a = \omega_{12}. \quad (2.5)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнения (2.4) по u^i , u^j , почленным сложением и вычитанием получим

$$\begin{aligned} -\Delta(\nu \xi_3) = & \frac{\partial^2}{(\partial u^2)^2} \left(\Gamma_{11}^k \xi_k + \frac{\omega_{11}}{2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} \left(\Gamma_{12}^k \xi_k + \frac{\omega_{12}}{2} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2} \left(\Gamma_{22}^k \xi_k + \frac{\omega_{22}}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где k пробегает значения 1, 2, $\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial u^2)^2}$ — оператор Лапласа. Вводя обозначения $w(z) = \xi_1 + i\xi_2$; $\frac{\partial}{\partial z} =$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right);$$

$$A(z) = \frac{1}{4} \{ (\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \}; \quad B(z) =$$

$$= \frac{1}{4} \{ (\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2) - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1) \}; \quad F = \frac{\omega_{11} - \omega_{22}}{4} + \\ + i \frac{\omega_{12}}{2};$$

запишем систему (2.5) в комплексном виде:

$$\bar{\partial}_z w + A w + \bar{B} \bar{w} = F. \quad (2.7)$$

Величины, входящие в уравнение (2.7), при переходе на римановой поверхности $\tilde{S}_1$ от локальной унифицирующей z к z' преобразуются по следующим законам:

$$\begin{aligned} w(z') &= w(z) \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'}; \quad B(z') = B(z) \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} \right)^2 \cdot \frac{dz'}{dz}; \\ A(z') &= A(z) \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'}; \quad F(z') = F(z) \cdot \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

О законах преобразования A и B см. [2]. Законы преобразования w и F вытекают из того, что ξ_i и ω_{ij} — ковариантные тензоры соответственно первого и второго ранга (о преобразованиях ковариантных тензоров при замене унифицирующей см. [2]).

Пусть $\varphi(z)$ — регулярная, не обращающаяся в нуль на $\tilde{S}_1$ коварианта по $\bar{z}$ (о ее существовании см. лемму 2). Сделаем в уравнении (2.7) замену искомой функции по формуле

$$w_1 = \frac{w}{\varphi}$$

(в случае $p=0, m=1$ положим $\varphi \equiv 1$).

Функция w_1 будет инвариантной относительно замены униформизирующих на $\tilde{S}_1$ и будет удовлетворять уравнению

$$\partial_{\bar{z}} w_1 + A_1 w_1 + B_1 \bar{w}_1 = F_1, \quad (2.9)$$

где A_1, B_1 — известные коварианты по $\bar{z}$ класса $C_a^{k-2}(\tilde{S}_1)$, а F_1 — коварианта по z , зависящая от ξ . Каждому изометрическому преобразованию S_1 в классе близких поверхностей будет соответствовать решение уравнения (2.9) и наоборот. Очевидно, справедливо аналогичное утверждение относительно сужения уравнения (2.9) (а также уравнения (2.1)) на риманову поверхность $\tilde{S}$.

§ 3. Априорные оценки. Первую часть основной теоремы мы будем доказывать, решая методом последовательных приближений уравнение изометрических преобразований (2.1). При этом нам понадобятся некоторые свойства решений уравнения

$$L(\xi) = \Omega, \quad (3.1)$$

где Ω — известная квадратичная форма класса $C_a^{k-3}(\tilde{S})$, а также оценки нормы решения этого уравнения. В настоящем параграфе мы установим нужные свойства и оценки, а также введем необходимые нам при доказательстве основной теоремы вспомогательные функции.

Уравнения для первых двух ковариантных компонент вектора ξ — решения уравнения (3.1) — после соответствующих преобразований приводятся к виду (см. (2.5), (2.9)):

$$\bar{d}_z w_1 + A_1 w_1 + B_1 \bar{w}_1 = F_1, \quad (3.2)$$

где A_1, B_1, F_1 — известные коварианты по $\bar{z}$ класса $C_a^{k-3}(\tilde{S}_1)$.

Рассмотрим на римановой поверхности $\tilde{S}_1$ следующее интегральное уравнение

$$w_1(z) - \frac{1}{\pi} \iint_{\tilde{S}_1} (A_1 w_1 + B_1 \bar{w}_1) M(t, z) dT = \Phi(z) + T_{\tilde{S}_1} F_1. \quad (3.3)$$

Здесь $S_1 M(t, z)$ — ядро Коши на римановой поверхности $\tilde{R}$ (дубле $\tilde{S}_1$) такое, что дивизор его особенностей лежит вне $\tilde{S}_1$, и такое, что уравнение

$$w_1(z) - \frac{1}{\pi} \iint_{\tilde{S}_1} (A_1(t) w_1(t) + B_1(t) \overline{w_1(t)}) M(t, z) dT = 0 \quad (3.4)$$

имеет только нулевое решение (о существовании такого ядра см. [8], гл. 4); $\Phi(z)$ — аналитическая на $\tilde{S}_1$ функция. Уравнение (3.3) в дальнейшем будем записывать в виде:

$$w_1 + Pw_1 = \Phi + TF_1. \quad (3.5)$$

Если обратимся теперь к следствию теоремы 1, то легко убедиться, что Pw_1 — вполне непрерывный оператор, отображающий

$$C_{\alpha}^{k-3}(\tilde{S}_1) \text{ в } C_{\alpha}^{k-2}(\tilde{S}_1).$$

Правая часть уравнения (3.5) принадлежит классу $C_{\alpha}^{k-2}(\tilde{S}_1)$ (см. теорему 1). Так как уравнение (3.4) имеет только нулевое решение, то существует оператор $(I + P)^{-1}$, переводящий $C_{\alpha}^{k-2}(\tilde{S}_1)$ в $C_{\alpha}^{k-2}(\tilde{S}_1)$. Следовательно, уравнение (3.5) однозначно разрешимо и его решение принадлежит классу $C_{\alpha}^{k-2}(\tilde{S}_1)$, а для нормы этого решения имеем оценку:

$$C_{\alpha}^{k-2}(w_1, \tilde{S}_1) \leq k_1 C_{\alpha}^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) + k_2 C_{\alpha}^{k-2}(TF_1, \tilde{S}_1).$$

(Здесь и далее константы, входящие в оценки, не зависят от искомых решений и правых частей уравнений, причем в различных оценках мы, чтобы не загромождать обозначений, иногда будем обозначать константы одними и теми же буквами, хотя, по существу дела, в различных оценках они могут иметь различные значения).

Отсюда, воспользовавшись неравенством (1.4), получим

$$C_{\alpha}^{k-2}(w_1, \tilde{S}_1) \leq k_1 C_{\alpha}^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) + k_2 C_{\alpha}^{k-3}(F_1, \tilde{S}_1). \quad (3.6)$$

Таким образом, уравнение (3.3) каждой аналитической на $\tilde{S}_1$ функции ставит в однозначное соответствие решение уравнения (3.2) (см. [8]), а следовательно и решение уравнения (3.1) (третья компонента вектора ξ , когда известны первые две, находится из соотношения (2.4), где ω_{ij} , по нашему предположению, известный тензор). При этом, очевидно, $\xi^{\gamma} \in C_{\alpha}^{k-2}(\tilde{S}_1)$, $\gamma =$

$= 1, 2$. Из (3.6) для первых двух компонент вектора ξ — решения уравнения (3.1) — будем иметь:

$$C_a^{k-2}(\xi^i, \tilde{S}_1) \leq k_1 C_a^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) + k_2 C_a^{k-3}(\Omega, \tilde{S}_1). \quad (3.7)$$

$\gamma=1,2$

Напоминаем, что норма квадратичной формы определяется как максимум норм ее коэффициентов. Отметим, что наряду с (3.7) выполняется следующее неравенство, не вытекающее из (3.7):

$$C_a^{k-2}(\xi^i, \overline{W}_i^3) \leq k_1 C_a^{k-2}(\Phi, \overline{W}_i^3) + k_2 C_a^{k-3}(\Omega, \overline{W}_i^3). \quad (3.8)$$

$\gamma=1,2$

Рассмотрим теперь вопрос о дифференциальных свойствах компоненты ξ^3 . Покажем, что $\xi^3 \in C_a^{k-2}(\tilde{S}_1 \setminus \Gamma)$ при условии, что $\Omega \in C_a^{k-3}(\tilde{S}_1)$ и Ω имеет вид $ad\lambda d\mu$, где a, λ, μ — некоторые функции переменных u^1 и u^2 , $a \in C_a^{k-2}(\tilde{S}_1)$ (т. е. когда Ω имеет структуру (2.3)).

Легко видеть, что третьи производные λ и μ в выражении $\Delta(v\xi_3)$ не входят (см. (2.6)). Поэтому ξ_3 будет удовлетворять уравнению $\Delta(v\xi_3) = f$, где $f \in C_a^{k-4}(\tilde{S}_1)$. По известной теореме Шаудера (см. [12, гл. 3, §1]) $\xi_3 \in C_a^{k-2}(\tilde{V}_1^* \setminus \Gamma)$, $\forall V_1$. Отсюда $\xi_3 \in C_a^{k-2}(\tilde{S}_1 \setminus \Gamma)$.

Оценим норму функции ξ_3 .

Из известной априорной оценки Шаудера для решения эллиптического уравнения (см. [12, гл. 3, ф-ла (1.12)]), формул (2.4), (2.6), (3.8) и с учетом того, что $\Omega = ad\lambda d\mu$ и третьи производные λ и μ в правую часть (2.6) не входят, получим (из (2.4) с использованием (3.8), имеем оценку для $\max |\xi_3|$):

$$C_a^{k-2}(\xi_3, \overline{W}_i^1) \leq k_3 C_a^{k-2}(\Phi, \overline{W}_i^3) + k_4 C_a^{k-2}(a, \overline{W}_i^3) \cdot C_a^{k-3}(d\lambda d\mu, \overline{W}_i^3). \quad (3.9)$$

В левой части (3.9), очевидно, вместо ξ_3 можно писать ξ^3 .

Из (3.9) и (1.2) получим $C_a^{k-2}(\xi^3, \tilde{S}_2) \leq k_3 \cdot \hat{C}_a^{k-2}(\Phi, \hat{S}_2) + k_4 \cdot \hat{C}_a^{k-2}(a, \hat{S}_2) \cdot \hat{C}_a^{k-3}(d\lambda d\mu, \hat{S}_2)$.

Отсюда, с учетом эквивалентности норм, определяемых на $\tilde{S}_1$ с использованием различных покрытий, имеем:

$$C_a^{k-2}(\xi^3, \tilde{S}_2) \leq k_3 C_a^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) + k_4 C_a^{k-2}(a, \tilde{S}_1) \cdot C_a^{k-3}(d\lambda d\mu, \tilde{S}_1). \quad (3.10)$$

Введем следующее обозначение:

$$\rho(z) = \sum_i^* \varphi_i^1(z), \quad (3.11)$$

где φ_i^1 — сужение на $\tilde{S}_1$ элемента разбиения единицы на дуге римановой поверхности $\tilde{S}_1$, описанного в §2, а суммирование производится по тем же индексам, по которым производится объединение в формуле $\tilde{S}_2 = \bigcup_i \bar{W}_i^1$. Таким образом, $\rho(z) \equiv 1$ на $\tilde{S}$, $\rho(z) \equiv 0$ на $\tilde{S}_1 \setminus \tilde{S}_2$ и $\rho(z) \in C^\infty(\tilde{S}_1)$.

Положим

$$(\xi^i)^* = \rho(z) \xi^i, \quad i=1, 2, 3, \quad (3.12)$$

где ξ^i — компоненты вектора-решения уравнения (3.1).

Отсюда

$$(\xi^i(z))^* = \xi^i(z), \quad z \in \tilde{S}, \quad (\xi^i(z))^* = 0, \quad z \in (\tilde{S}_1 \setminus \tilde{S}_2), \quad (3.13)$$

причем $(\xi^i)^* \in C_a^{k-2}(\tilde{S}_1)$. Из (3.12), (3.7) и (3.10) имеем:

$$C_a^{k-2}((\xi^1)^*, \tilde{S}_1) \leq k_1 C_a^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) + k_2 C_a^{k-3}(\Omega, \tilde{S}_1), \quad i=1, 2, \quad (3.14)$$

$$C_a^{k-2}((\xi^3)^*, \tilde{S}_1) \leq k_3 C_a^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) + k_4 C_a^{k-2}(a, \tilde{S}_1) \cdot C_a^{k-3}(d\lambda d\mu, \tilde{S}_1). \quad (3.15)$$

§ 4. Решение уравнения изометрических преобразований (доказательство первой части основной теоремы). В этом параграфе по произвольно заданной, аналитической на $\tilde{S}_1$ функции $\Phi(z)$, ограниченной в норме пространства $C_a^{k-2}(\tilde{S}_1)$ некоторой достаточно малой константой, мы построим на римановой поверхности $\tilde{S}$ сходящуюся в норме пространства $C_a^{k-2}(\tilde{S}_1)$ последовательность векторов такую, что сужение предела этой последовательности на $\tilde{S}$ будет решением уравнения изометрических преобразований поверхности S , принадлежащим классу $C_a^{k-2}(\tilde{S})$. Покажем также, что различным функциям $\Phi(z)$ будут соответствовать различные решения и что функция $\Phi(z)$ определяет решение уравнения изометрических преобразований поверхности S однозначно (при условии малости нормы $\Phi(z)$).

Итак, займемся построением упомянутой последовательности векторов.

Положим на $\tilde{S}_1$ $\xi_0^* \equiv 0$. ξ_1 определим как решение уравнения $L(\xi) = \Omega(\xi_0^*)$, соответствующее аналитической функции $\Phi(z)$. Такое решение существует и единственно (см. § 3).

Затем положим $(\xi_1^*) = \rho(z)\xi_1$ (определение $\rho(z)$ см. в § 3). ξ_2 определим как решение уравнения $L(\xi) = \Omega(\xi_1^*)$, соответствующее аналитической функции $\Phi(z)$, и положим

$$\bar{\xi}_2^* = \rho(z)\bar{\xi}_2.$$

И так далее. Таким образом мы получим последовательность векторов $\{\xi_n^*\}_{n=0}^\infty$, все члены которой однозначно определяются функцией $\Phi(z)$ и принадлежат классу $C_{\alpha}^{k-2}(\tilde{S}_1)$.

Мы утверждаем, что последовательность

$$\{\bar{\xi}_n^*\}_{n=0}^\infty \quad (4.1)$$

при достаточно малой $C_{\alpha}^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1)$ сходится. Докажем сначала ограниченность последовательности (4.1) при условии малости нормы функции $\Phi(z)$.

Из (3.14) и (3.15), принимая во внимание характер зависимости $\Omega(\xi)$ от ξ , получим:

$$C_{\alpha}^{k-2}(\bar{\xi}_n^*, \tilde{S}_1) \leq k_1 C_{\alpha}^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) + k_2 [C_{\alpha}^{k-2}(\bar{\xi}_{n-1}^*, \tilde{S}_1)]^2 \quad (4.2)$$

для $n=1, 2, \dots$, причем k_1 и k_2 не зависят от n . (Под нормой вектора мы понимаем максимум норм его компонент). Пусть ε — некоторое положительное число, точнее которое определим ниже. При выполнении условия

$$C_{\alpha}^{k-2}(\Phi, \tilde{S}_1) < \frac{\varepsilon}{2k_1} \quad (4.3)$$

будем иметь $C_{\alpha}^{k-2}(\bar{\xi}_1^*, \tilde{S}_1) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Далее, при достаточно малом ε будет выполнено неравенство

$$2k_2\varepsilon < 1. \quad (4.4)$$

Следовательно, при достаточно малом ε и при выполнении условия (4.3) из (4.2) будем иметь

$$C_{\alpha}^{k-2}(\bar{\xi}_2^*, \tilde{S}_1) < \varepsilon.$$

Методом индукции легко доказывается, что при выполнении соотношений (4.3) и (4.4) будем иметь

$$C_{\alpha}^{k-2}(\bar{\xi}_n^*, \tilde{S}_1) < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Докажем теперь, что при достаточно малой норме функции $\Phi(z)$ (при достаточно малом ε) последовательность (4.1) сходится.

Имеем

$$L(\xi_{n+1}) = \Omega(\xi_n^*), \quad L(\xi_n) = \Omega(\xi_{n-1}^*).$$

Отсюда (см. § 3, (3.5))

$$(\varpi_1)_{n+1} + P(\varpi_1)_{n+1} = \Phi + TF_1(\xi_n^*)$$

$$(\varpi_1)_n + P(\varpi_1)_n = \Phi + TF_1(\xi_{n-1}^*).$$

Вычтем эти равенства почленно. Получим

$|(\varpi_1)_{n+1} - (\varpi_1)_n| + P|(\varpi_1)_{n+1} - (\varpi_1)_n| = T[F_1(\xi_n^*) - F_1(\xi_{n-1}^*)]$, откуда, повторяя соответствующие рассуждения § 3 и принимая во внимание форму зависимости $\Omega(\xi)$ от ξ будем иметь

$$C_a^{k-2}(\xi_{n+1}^* - \xi_n^*, \tilde{S}_1) \leq k(\varepsilon) C_a^{k-2}(\xi_n^* - \xi_{n-1}^*, \tilde{S}_1), \quad (4.6)$$

где постоянная $k(\varepsilon)$ сколь угодно мала, если достаточно мало ε . Выберем ε таким малым, чтобы $k(\varepsilon) < 1$. Тогда, в силу полноты пространства $C_a^{k-2}(\tilde{S}_1)$ (см. §1), последовательность (4.1) имеет предел $\xi^* \in C_a^{k-2}(\tilde{S}_1)$, причем, в силу (4.5), $C_a^{k-2}(\xi^*, \tilde{S}_1) \leq \varepsilon$.

Поскольку для сужений вектор-функций ξ_{n-1}^* и ξ_n^* на $\tilde{S}$ имеем

$$L(\xi_n^*) = \Omega(\xi_{n-1}^*), \quad \text{то на } \tilde{S}$$

$L(\xi^*) = \Omega(\xi^*)$, т. е. сужение ξ^* на $\tilde{S}$ есть решение уравнения изометрических преобразований поверхности S .

Применяя тот же прием, что и при получении неравенства (4.6), нетрудно показать, что при достаточно малом ε ξ^* не зависит от начального приближения при построении последовательности, имеющей своим пределом ξ^* (при условии, что начальное приближение удовлетворяет условию $C_a^{k-2}(\xi_0^*, \tilde{S}_1) < \varepsilon$). Таким образом, вектор ξ^* определяется функцией $\Phi(z)$ однозначно.

Покажем, что различным аналитическим функциям будут соответствовать различные изометрические преобразования поверхности S .

Предположим противное. Пусть $\Phi_1(z) \neq \Phi_2(z)$ на $\tilde{S}_1$ и функциям $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ соответствует одно и то же изометрическое преобразование поверхности S , определяемое вектором ξ^* . Пусть $\{\xi_n^1\}$ — последовательность векторов, определяемая функцией $\Phi_1(z)$ и такая, что $\{\xi_n^1\} \rightarrow \xi^*$; $\{\xi_n^2\}$ — последовательность векторов, определяемая функцией $\Phi_2(z)$ и такая, что $\{\xi_n^2\} \rightarrow \xi^*$.

На римановой поверхности $\tilde{S}_1$ будем иметь:

$$\begin{aligned}({}^1w_1)_n + P_{\tilde{S}}({}^1w_1)_n + P_{\tilde{S}_1 \setminus \tilde{S}}({}^1w_1)_n &= \Phi_1(z) + T_{\tilde{S}_1} F_1({}^1\xi_n^*), \\({}^2w_1)_n + P_{\tilde{S}}({}^2w_1)_n + P_{\tilde{S}_1 \setminus \tilde{S}}({}^2w_1)_n &= \Phi_2(z) + T_{\tilde{S}_1} F_1({}^2\xi_n^*).\end{aligned}$$

Вычитая эти равенства почленно и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\tilde{w} + P_{\tilde{S}_1 \setminus \tilde{S}} \tilde{w} = \Phi_1(z) - \Phi_2(z), \quad (4.7)$$

где $\tilde{w} = \lim_{n \rightarrow \infty} [({}^1w_1)_n - ({}^2w_1)_n]$ (в существовании этого предела легко убедиться, проделав подробно указанные выше действия).

Из (4.7) вытекает, что $\tilde{w}$ есть обобщенная аналитическая функция в $\tilde{S}_1 \setminus \tilde{S}$, равная нулю на L . Отсюда получаем, что $\tilde{w} \equiv 0$ на $\tilde{S}_1 \setminus \tilde{S}$, т. е. $\Phi_1(z) \equiv \Phi_2(z)$ на $\tilde{S}_1 \setminus \tilde{S}$. Но в силу аналитичности функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ на $\tilde{S}_1$.

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

§ 5. Рассмотрение вопроса о непрерывных изгибаниях поверхности S (доказательство второй части основной теоремы). С учетом изложенного в § 4, для доказательства второй части основной теоремы достаточно установить справедливость следующих двух утверждений.

Лемма 3. Пусть $\{\Phi_t(z)\}$, $t \in [0, 1]$ — множество аналитических на $\tilde{S}_1$ функций, такое, что $C_{\alpha}^{k-2}(\Phi_t, \tilde{S}_1)$ изменяется непрерывно при непрерывном изменении t и

$$C_{\alpha}^{k-2}(\Phi_t, \tilde{S}_1) < K \quad \forall t \in [0, 1],$$

где константа K достаточно мала. Тогда, если $\{\xi_t^*\}$, $t \in [0, 1]$ — множество векторов таких, что вектор ξ_t построен по аналитической функции $\Phi_t(z)$ методом, описанным в § 4, то $C_{\alpha}^{k-2}(\xi_t^*, \tilde{S}_1)$ изменяется непрерывно при непрерывном изменении t .

Лемма 4. По аналитической на $\tilde{S}_1$ функции $\Phi(z) \equiv 0$ схемой, описанной в § 4, определяется вектор $\xi^* \equiv 0$ на S_1 .

Доказательство леммы 3. Рассмотрим два значения параметра $t - t_1$ и t_2 из промежутка $[0, 1]$ и соответствующие этим значениям аналитические функции $\Phi_{t_1}(z)$ и $\Phi_{t_2}(z)$. Последовательность векторов, построенную методом § 4 с ис-

использованием функции $\Phi_{t_1}(z)$, обозначим $\{\xi_n^*\}_{n=0}^\infty$, а последовательность векторов, построенную с использованием функции $\Phi_{t_2}(z)$, обозначим $\{\xi_n^*\}_{n=0}^\infty$. Используя метод, аналогичный примененному при выводе неравенства (4.6), получим

$$C_a^{k-2}(\xi_n^* - \xi_n^*, \tilde{S}_1) \leq k_1 C_a^{k-2}(\Phi_{t_1} - \Phi_{t_2}, \tilde{S}_1) + k_2(\varepsilon) C_a^{k-2}(\xi_{n-1}^* - \xi_{n-1}^*, \tilde{S}_1), \quad (5.1)$$

где $k_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будем предполагать ε (а следовательно и константу K в формулировке леммы 3) таким малым, что $k_2(\varepsilon) < 1$ и последовательности $\{\xi_n^*\}$ и $\{\xi_n^*\}$ имеют пределы, которые мы обозначим через ξ^* и ξ^* . Тогда, переходя в (5.1) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$C_a^{k-2}(\xi^* - \xi^*, \tilde{S}_1) \leq k_1 C_a^{k-2}(\Phi_{t_1} - \Phi_{t_2}, \tilde{S}_1) + k_2(\varepsilon) C_a^{k-2}(\xi^* - \xi^*, \tilde{S}_1).$$

Отсюда

$$C_a^{k-2}(\xi^* - \xi^*, \tilde{S}_1) \leq \frac{k_1}{1 - k_2(\varepsilon)} C_a^{k-2}(\Phi_{t_1} - \Phi_{t_2}, \tilde{S}_1). \quad (5.2)$$

Так как правая часть неравенства (5.2) стремится к нулю при $t_1 \rightarrow t_2$, то $C_a^{k-2}(\xi^* - \xi^*, \tilde{S}_1) \rightarrow 0$.

Отсюда вытекает утверждение леммы 3.

Доказательство леммы 4. Пусть последовательность векторов $\{\xi_n^*\}_{n=0}^\infty$ построена методом § 4 при помощи функции $\Phi(z) \equiv 0$. Через ξ^* обозначим ее предел. Из (4.2) получим

$$C_a^{k-2}(\xi_n^*, \tilde{S}_1) \leq k_2(\varepsilon) C_a^{k-2}(\xi_{n-1}^*, \tilde{S}_1). \quad (5.3)$$

Будем считать ε таким, что $k_2(\varepsilon) < 1$. Переходя к пределу в (5.3) при $n \rightarrow \infty$, получим

$$C_a^{k-2}(\xi^*, \tilde{S}_1) \leq k_2(\varepsilon) C_a^{k-2}(\xi^*, \tilde{S}_1),$$

откуда $\xi^* \equiv 0$ на $\tilde{S}_1$. Лемма 4 доказана.

§ 6. Построение семейств аналитических на $\tilde{S}_1$ функций с непрерывным изменением нормы. Рассмотрим риманову поверхность R — дубль $\tilde{S}_1$. На R рассмотрим ядро Коши $M(\tau, z)$, дивизор особенностей которого лежит вне $\tilde{S}_1$, и зафиксируем точку

τ вне S_1 . При этом мы получим функцию от z , аналитическую на $\tilde{S}_1$. Перемещая точку τ по $R/\tilde{S}_1$, получим бессчетное множество функций, аналитических на $\tilde{S}_1$, которое обозначим $\{\Phi_\tau(z)\}$. Семейство функций, аналитических на $\tilde{S}_1$, с нормой, непрерывно зависящей от параметра t , такое, что значению $t=0$ соответствует функция, тождественно равная нулю, можно построить следующим образом:

$$F_t(z) = t \cdot \Phi_{\tau_1}(z), \tau_1 = \text{const}; \text{ или } F_t(z) = t \cdot \Phi_{\tau_1}(z) + t^2 \Phi_{\tau_2}(z), \\ \tau_1 \neq \tau_2; \text{ или } F_t(z) = t \cdot \Phi_{\tau_1}(z) + t^2 \cdot \Phi_{\tau_2}(z) + t^3 \cdot \Phi_{\tau_3}(z), \tau_i \neq \tau_j, \\ i \neq j,$$

и т. д. Равномерной ограниченности функций этого семейства при $t \in [0, 1]$ достаточно малой константной можно добиться умножением $F_t(z)$ на достаточно малый по модулю постоянный множитель. Ясно, что множество семейств $F_t(z)$ несчетно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 750 с.
2. Фоменко В. Т. О жесткости и однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ в римановом пространстве. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 1, с. 45—48.
3. Фоменко В. Т. Об однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ в пространстве постоянной кривизны. — «Мат. заметки», 1974, т. 16, вып. 3, с. 441—445.
4. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959. 628 с.
5. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., Изд-во иностр. лит. 1960. 342 с.
6. Неванlinna Р. Униформизация. М., Изд-во иностр. лит. 1955. 435 с.
7. Шиффер М., Спенсер Д. К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. М., Изд-во иностр. лит. 1957. 380 с.
8. Родин Ю. Л. Эллиптические системы дифференциальных уравнений 1-го порядка на замкнутых римановых поверхностях. Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук, Тбилиси, 1965. 10 с.
9. Гусман С. Я., Родин Ю. Л. Ядро интеграла типа Коши на замкнутых римановых поверхностях. — «Сиб. мат. журн.», 1962, т. 3, № 4, с. 527—531.
10. Родин Ю. Л. Краевые задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях конечного рода. Исследования по современным проблемам ТФКП. М., Физматгиз, 1960, с. 436—442.
11. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., «Мир», 1970. 412 с.
12. Ладженская О. Л., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973. 576 с.

Поступила 23 ноября 1975 г.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ К-РАССЛОЕНИЯ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ
В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Настоящая заметка является продолжением статьи [1]. Перечислим кратко необходимые формулы и факты, содержащиеся в [1], которые понадобятся нам в этой статье.

Уравнения комплекса прямых, отнесенного к нормальному трехграннику [2], имеют вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1; \quad \omega_1^2 = p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2; \quad dk = \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2; \quad -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \quad (0.1)$$

Расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции определяется вполне интегрируемой системой

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2; \quad \omega^3 + dt = 0. \quad (0.2)$$

При условиях (0.2) точка $M = A + te_3$ будет описывать поверхность σ , ортогональную лучам соответствующей нормальной конгруэнции. Кривизна этой базисной поверхности σ в точке ее пересечения с лучом нормальной конгруэнции определяется формулой

$$K = \frac{1}{t^2 + at - k^2}. \quad (0.3)$$

При K -расслоении кривизна поверхности σ зависит только от параметров луча комплекса и не зависит от абсциссы точки пересечения поверхности σ с этим лучом. Т. е. имеет место $dK = l\omega^1 + m\omega_3^1 + n\omega_3^2$.

Из (0.3) определим a :

$$a = \frac{1 - K(t^2 - k^2)}{Kt},$$

и внесем его в (0.2).

Условия полной интегрируемости уравнений K -расслоения, найденные в [1], имеют вид $p=0$, $\alpha=0$, $q+2k\beta=0$, $n=2K^2k\gamma - lk$, $r(1+Kk^2)=0$.

Случай

$$1 + Kk^2 = 0 \quad (0.4)$$

нами был назван специальным.

В настоящей заметке дано безынтегральное представление класса комплексов прямых, допускающих специальное K -расслоение, и дано функциональное расслоение таких комплексов в нормальные конгруэнции.

1. **Безынтегральное представление комплекса.** Для специального случая K -расслоения система (0.2) будет вполне интегрируемой при $p=0$, $\alpha=0$, $q+2k\beta=0$, $1+Kk^2=0$, $n=2K^2k\gamma - lk$. Рассмотрим, таким образом, класс комплексов

$$p=0, \alpha=0, q=-2k\beta \quad (1.1)$$

и расслоения этих комплексов в нормальные конгруэнции. В соответствии с (0.4) кривизна поверхностей, ортогональных к нормальным конгруэнциям комплекса, определяется равенством

$$K = -\frac{1}{k^2}. \quad (1.2)$$

Поскольку кривизна таких поверхностей зависит лишь от параметров луча комплекса, то, очевидно, из равенства (1.2) будут следовать остальные равенства системы (1.1). Следовательно, расслоение в указанные нормальные конгруэнции возможно также лишь для комплексов, удовлетворяющих условиям (1.1).

Условия (1.1) можно получить иначе. Потребуем, чтобы при расслоении комплекса (0.1) в нормальные конгруэнции для кри-

визны ортогональных поверхностей имело место (1.2). В таком случае из

$$-\frac{1}{k^2} = \frac{1}{t^2 + at - k^2}$$

получим $t(t+a)=0$. Случай $t=0$ мы рассмотрим в п. 3. Сейчас же будем считать $a+t=0$, т. е.

$$a=-t. \quad (1.3)$$

Мы по-прежнему считаем, что система (0.2) должна быть вполне интегрируемой. Дифференцируя внешним образом (0.2) и учитывая (1.3), получим одно условие

$$[\omega_3^1 \omega_3^2](pt^2 - 2at + 2k\beta + 2pk^2 + q) = 0,$$

которое должно обращаться в тождество относительно t . Это приводит к равенствам $p=0$, $\alpha=0$, $2k\beta+q=0$, что совпадает с (1.1). Уравнения комплекса принимают вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1; \quad \omega_1^2 = \beta\omega_3^2; \quad dk = -2k\beta\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2; \quad -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \quad (1.4)$$

Для определения произвола существования комплекса (1.4) дифференцируем внешним образом три последних уравнения. Получим три новых формы

$$d\beta = -(1+\beta^2)\omega_3^1 + x_1\omega_3^2; \quad d\gamma = -(2kx_1 + 3\beta\gamma)\omega_3^1 + x_2\omega_3^2; \quad dr = x_1\omega^1 + (x_2 - 2\beta r)\omega_3^1 + x_3\omega_3^2 \quad (1.5)$$

и три новых параметра — x_1 , x_2 , x_3 . Комплексы (1.4) существуют с произволом три функции одного аргумента [3]. Можно убедиться в том, что $D\omega_3^1=0$, $D(\sqrt{1+\beta^2}\omega_3^2)=0$. Это означает, что формы ω_3^1 и $\sqrt{1+\beta^2}\omega_3^2$ являются полными дифференциалами $\omega_3^1=du$, $\sqrt{1+\beta^2}\omega_3^2=d\theta$.

Введем в рассмотрение вектор $k = \frac{-e_1 + \beta e_3}{\sqrt{1+\beta^2}}$,

где e_1 и e_3 — орты главной нормали и луча комплекса соответственно.

Определим дифференциал этого вектора

$$dk = \frac{x_1}{1+\beta^2}(\sqrt{1+\beta^2}e_3 - \beta k)\omega_3^2. \quad (1.6)$$

Вектор k постоянен для лучей конгруэнций, определяемых условием

$$\omega_3^2=0, \text{ т. е. } \theta=\text{const.}$$

Определим смещение центра луча комплекса (1.4)

$$dA = \omega^1(e_1 - \beta e_3) + \omega_3^1(ke_2 - \gamma e_3) + \omega_3^2(k\beta - r)e_3.$$

При $\omega_3^2 = 0$ точка A описывает цилиндр, образующие которого параллельны вектору k .

Из (1.5) при $d\theta = 0$ получаем $\beta = -\operatorname{tg}(u + c)$, при $\theta = \operatorname{const}$ C есть постоянная величина. Значит для всех лучей комплекса

$$\beta = -\operatorname{tg}(u + f_1(\theta)). \quad (1.7)$$

$f_1(\theta)$ — произвольная функция.

Из (1.7) и (1.5) можно определить x_1

$$x_1 = \frac{f_1'(\theta)}{\cos^2(u + f_1(\theta))}. \quad (1.8)$$

При $d\theta = 0$ $dk = -2k\beta du$, таким образом, на цилиндре $\theta = \operatorname{const}$ функция k имеет вид

$$k = \frac{C}{\cos^2(u + f_1(\theta))}.$$

А для всех лучей комплекса нужно считать C произвольной функцией одного аргумента θ

$$k = \frac{f_2(\theta)}{\cos^2(u + f_1(\theta))}. \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.5), пользуясь уже найденными выражениями для k , β , ω_3^1 , ω_3^2 , находим γ :

$$\gamma = \frac{-f_2' \cdot \cos(u + f_1) - 2f_2 f_1' \sin(u + f_1)}{\cos^4(u + f_1)}. \quad (1.10)$$

Для исследования строения цилиндра $\theta = \operatorname{const}$ необходимо некоторое вспомогательное построение. Сравнивая

$$de_1 = \beta \omega_3^2 e_2 - \omega_3^1 e_3; \quad de_2 = -\omega_3^2(\beta e_1 + e_3); \quad de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \quad (1.11)$$

с формулой (1.6), которую запишем так: $dk = \omega_3^2 \frac{x_1}{1 + \beta^2} \times$

$\times \frac{e_1 \beta + e_3}{\sqrt{1 + \beta^2}}$, заключаем, что вектор e_2 есть постоянный вектор на всем цилиндре $\theta = \operatorname{const}$. Легко заметить также, что $ak \parallel de_2$

всюду в комплексе. Введем в рассмотрение тройку векторов $k = e_1 \cos(u + f_1) + e_3 \sin(u + f_1); i = e_1 \sin(u + f_1) - e_3 \cos(u + f_1); j = e_2.$ (1.12)

Используя (1.11) и (1.12), определим дифференциалы этих векторов

$$dk = -\frac{x_1}{1+\beta^2} \omega_3^2 i; \quad di = -\frac{x_1}{1+\beta^2} \omega_3^2 k + \sqrt{1+\beta^2} \omega_3^2 j, \quad dj = -\sqrt{1+\beta^2} \omega_3^2 i. \quad (1.13)$$

Присоединим к системе (1.13) уравнение $dM = k d\theta$ и заменим β, x_1 их найденными выражениями по формулам (1.7), (1.8). Полученная система

$$dM = k d\theta; \quad dk = -i f_1' d\theta; \quad di = k f_1' d\theta + j d\theta; \quad dj = -i d\theta \quad (1.14)$$

определяет в пространстве кривую L_1 , сопровождающим трехгранником которой служат векторы k, i, j . На кривой L_1 длиной дуги является параметр θ . Векторы k, i, j постоянны для всех лучей, центры которых лежат на фиксированном цилиндре θ_0 . Строение цилиндра $\theta = \text{const}$ удобно исследовать в репере i, j, k , неподвижном именно для данного цилиндра. Пусть оси неподвижной системы координат имеют направления i, j, k . Справедливы формулы

$$e_1 = i \sin(u + f_1) + k \cos(u + f_1); \quad e_2 = j; \quad e_3 = -i \cos(u + f_1) + k \sin(u + f_1). \quad (1.15)$$

Выпишем уравнение, определяющее смещение точки A при $d\theta = 0$, в следующем виде $dA = i \omega_3^1 \gamma \cos(u + f_1) + j \omega_3^1 k + k \left(\omega^1 \frac{1}{\cos(u + f_1)} - \omega_3^1 \gamma \sin(u + f_1) \right)$. Цилиндр пересекает плоскость XOY по кривой, определяемой уравнениями

$$\frac{dx}{du} = \cos(u + f_1) \gamma; \quad \frac{dy}{du} = k. \quad (1.16)$$

Внесем в (1.16) значения k и γ , определяемые формулами (1.9), (1.10):

$$\frac{dx}{du} = \frac{-f_2'}{\cos^2(u + f_1)} - 2f_2 f_1' \frac{\sin(u + f_1)}{\cos^3(u + f_1)}; \quad \frac{dy}{du} = f_2 \frac{1}{\cos^2(u + f_1)}.$$

После интегрирования получаем

$$x = -f_2' \operatorname{tg}(u + f_1) - f_2 f_1' \frac{1}{\cos^2(u + f_1)} + C_1; \quad y = f_2 \operatorname{tg}(u + f_1) + C_2, \quad (1.17)$$

где C_1 и C_2 — некоторые функции от θ . Производя замену $v = \operatorname{tg}(u + f_1)$, перепишем (1.17) в виде $x = -f_2 f_1' v^2 - f_2' v - f_2 f_1' + C_1$; $y = f_2 v + C_2$.

Таким образом, каждый цилиндр $\theta = \text{const}$ пересекается с соответствующей плоскостью XOY по параболе. Форма цилиндров уже известна. Необходимо теперь определить их взаимное положение. Для этого поступим следующим образом. На каждом цилиндре выделим по образующей, определяемой равенством $u=0$, Все такие образующие дадут некоторую линейчатую поверхность σ_1 . Выделим на этой поверхности какую-нибудь кривую L_2 , ортогональную образующим. Для отыскания кривой L_2 на общем смещении точки A

$$dA = i \{ \omega_3^1 \gamma \cos(u + f_1) - \omega_3^2 (k\beta - r) \cos(u + f_1) \} + j \omega_3^1 k + + k \{ \omega_1^1 \frac{1}{\cos(u + f_1)} - \omega_3^1 \gamma \sin(u + f_1) + \omega_3^2 (k\beta - r) \sin(u + f_1) \} \quad (1.18)$$

надо наложить ограничения

$$\omega_3^1 = 0 \quad (u = 0) \quad (dAk) = 0. \quad (1.19)$$

Движение точки A определится уравнением $dA = i \omega_3^2 (-k\beta + r) \cos f_1$, которое после замены k , β и ω_3^2 их найденными выражениями принимает вид

$$dA = i \{ -f_2 \operatorname{tg} f_1 - r \cos^2 f_1 \} d\theta. \quad (1.20)$$

При условиях (1.19) r будет функцией только одного аргумента θ . Используем теперь следующий факт. При построении цепи интегральных элементов [3] на первом шаге было $\omega_3^2 \neq 0$, $\omega_3^1 = 0$.

Параметры продолжения x_1 , x_2 , x_3 определяются с произволом в три функции одного аргумента. Можно считать, что такими произвольными функциями могут быть только функции, зависящие от переменной θ (но не от переменной u). А если это так, то и β , γ , r будут полностью определяться выбором трех произвольных функций $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $\psi(\theta)$. Если r существенно зависит от функции $\psi(\theta)$, а это так и должно быть (см. третье уравнение (1.5)), то можно в уравнении (1.20) считать r произвольной функцией $r = \psi^*(\theta)$. (Тогда $\psi(\theta)$ будет выражаться через $\psi^*(\theta)$). Проинтегрировав уравнение (1.20), которое можно записать в виде $dA = i f_3(\theta) d\theta$, получим искомую кривую L_2 . Функцию $f_3(\theta)$ можно было бы выразить через $\psi^*(\theta)$. Но мы этого делать не будем, и в дальнейшем тремя произвольными функциями одного аргумента, определяющими произвольное существование комплекса (1.4), будем считать $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$.

К каждой точке кривой L_2 , определяемой параметром θ , присоединим тройку векторов $i(\theta)$, $j(\theta)$, $k(\theta)$. В плоскости XOY проведем параболу (1.17). Так как при $u=0$ эта парабола проходит через начало координат, то

$$0 = -f_2 \operatorname{tg} f_1 - f_2 f_1' \frac{1}{\cos^2 f_1} + C_1; \quad 0 = f_2 \operatorname{tg} f_1 + C_2. \quad (1.21)$$

Из (1.21) определим C_1 и C_2 .

$$C_1 = f_2' \operatorname{tg} f_1 + f_2 f_1' \frac{1}{\cos^2 f_1}, \quad C_2 = -f_2 \cdot \operatorname{tg} f_1.$$

Таким образом, цилиндр $\theta = \text{const}$ пересекает соответствующую плоскость XOY по параболе

$$\begin{aligned} x &= -f_2 \operatorname{tg}(u + f_1) - f_2 f_1' \frac{1}{\cos^2(u + f_1)} + f_2' \operatorname{tg} f_1 + f_2 f_1' \frac{1}{\cos^2 f_1}; \\ y &= f_2 \operatorname{tg}(u + f_1) - f_2 \operatorname{tg} f_1. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Началом координат в этой плоскости является точка $M(0)$, принадлежащая кривой L_2 . Теперь можно дать безынтегральное построение комплекса (1.4).

Чтобы построить комплекс (1.4), надо взять в пространстве кривую L_1 (произвол — одна функция одного аргумента $f_1(0)$). Векторы k, i, j — векторы ее сопровождающего трехгранника. Построим кривую L_2 (произвол — одна функция одного аргумента $f_2(0)$). К каждой точке $M(0)$ кривой L_2 присоединим сопровождающий трехгранник кривой L_1 . Через каждую точку $M(0)$ проведем параболический цилиндр, направляющей которого является парабола (1.22), лежащая в плоскости Mij , а образующие параллельны вектору k (произвол — одна функция одного аргумента $f_2(0)$). В каждой касательной плоскости этого цилиндра проведем пучок параллельных прямых, образующих с вектором k угол

$$\varphi = u + f_1(0) - \frac{\pi}{2}.$$

Двупараметрическая совокупность таких пучков и образует рассматриваемый комплекс (1.4).

Чтобы убедиться в правильности данного безынтегрального представления, надо, отправляясь от геометрического задания комплекса, получить его дифференциальные уравнения. Эти уравнения должны совпасть с системой (1.4). На каждом луче естественным образом выделяется точка A — точка касания этого луча с соответствующим цилиндром $\theta = \text{const}$. Положение точки A произвольного луча построенного комплекса можно определить тремя величинами θ, u, z . Величина θ определяет параболический цилиндр (1.22), u — образующую этого цилиндра, z определяет расстояние от точки A до плоскости XOY . Таким образом, $A = M(\theta) + ix + jy + kz$.

Здесь $M(0)$ — радиус-вектор точки кривой L_2 , x и y определяют равенствами (1.22). Смещение точки $dA = if_2 \cdot d\theta + idu + x \times di + jdy + y \cdot dj + kdz + zdk$ после некоторых упрощений (используем (1.14) и (1.22)) можно представить в виде

$$dA = i(\dots) + j \frac{f_2}{\cos^2(u + f_1)} du + k(\dots). \quad (1.23)$$

Точками обозначены члены, которые нас не интересуют. Заменив в выражении $dA = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3$ векторы e_1, e_2, e_3 по формулам (1.15), получим

$$dA = i(\dots) + j\omega^2 + k(\dots). \quad (1.24)$$

Формулы (1.23) и (1.24) определяют одно и то же смещение точки A , поэтому для всех лучей построенного комплекса

$$\omega^2 = \frac{f_2}{\cos^2(u + f_1)} du. \quad (1.25)$$

Дифференцируя правые и левые части двух уравнений системы (1.15), получим

$$de_2 = -i d\theta; de_3 = i \sin(u + f_1) du - j \cos(u + f_1) d\theta + k \cos(u + f_1) du. \quad (1.26)$$

Заменив в системе

$$de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3; de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2$$

векторы e_1, e_2, e_3 по формулам (1.15), будем иметь новые выражения дифференциалов тех же векторов e_2 и e_3 :

$$de_2 = i \{ -\omega_1^2 \sin(u + f_1) + \omega_3^2 \cos(u + f_1) \} + k \{ -\omega_1^2 \cos(u + f_1) - \omega_3^2 \sin(u + f_1) \}; de_3 = i \omega_3^1 \sin(u + f_1) + j \omega_3^2 + k \omega_3^1 \cos(u + f_1). \quad (1.27)$$

Сравнивая равенства (1.26) и (1.27), заключаем, что для всех лучей построенного комплекса

$$\omega_3^2 = -\cos(u + f_1) d\theta; \omega_3^1 = du; \omega_1^2 = -\operatorname{tg}(u + f_1) \omega_3^2. \quad (1.28)$$

Равенство (1.25) означает [2], что точка A является центром луча комплекса и тройка векторов (1.15) образует нормальный трехгранник этого луча. Заменим du на ω_3^1 и продифференцируем внешним образом уравнение (1.25). Учитывая равенства (1.28), получим

$$\omega_1^2 = -\operatorname{tg}(u + f_1) \omega_3^2; d \frac{f_2}{\cos^2(u + f_1)} = 2f_2 \frac{\sin(u + f_1)}{\cos^3(u + f_1)} \omega_3^1 + \gamma \omega_3^2; -\omega^3 + \frac{f_2}{\cos^2(u + f_1)} \omega_1^2 = -\operatorname{tg}(u + f_1) \omega^1 + \gamma \omega_3^1 + r \omega_3^2. \quad (1.29)$$

После введения обозначений

$$h = \frac{f_2}{\cos^2(u + f_1)}, \quad \beta = -\operatorname{tg}(u + f_1)$$

система (1.29) полностью совпадает с системой (1.4). А это означает, что, выбирая определенным образом $f_1(\theta), f_2(\theta), f_3(\theta)$,

мы можем построить любой комплекс, заданный системой (1.4).

Используя результаты монографии [2], можно легко показать, что комплекс (1.4) имеет тройной бесконечно удаленный инфлекционный центр и что любой комплекс с тройным бесконечно удаленным инфлекционным центром определяется системой (1.4). Таким образом, в этом параграфе найдено безынтегральное представление комплексов с тройным бесконечно удаленным инфлекционным центром.

2. Расслоение комплекса (1.4) в нормальные конгруэнции. Для специального случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, уравнения расслоения принимают вид

$$\omega^1 = -t\omega_3^1 + k\omega_3^2; \quad (2.1)$$

$$\omega^3 + dt = 0. \quad (2.2)$$

Определим из последнего уравнения системы (1.4) форму ω^3 :

$$\omega^3 = -\beta\omega^1 - \gamma\omega_3^1 + (k\beta - r)\omega_3^2$$

и внесем ее в (2.2). Учитывая (2.1), для определения t получим уравнение $dt = (\gamma - \beta t)\omega_3^1 + r\omega_3^2$, которое запишем так

$$dt = (\gamma - \beta t)du - r\cos(u + f_1)d\theta. \quad (2.3)$$

На цилиндре $\theta = \text{const}$ функция t удовлетворяет уравнению

$$\frac{dt}{du} = \gamma - \beta t.$$

Заменяя β и γ по формулам (1.7) и (1.10), получим

$$\frac{dt}{du} = t \cdot \text{tg}(u + f_1) - \frac{f_2 \cos(u + f_1) + 2f_2 f_1' \sin(u + f_1)}{\cos^4(u + f_1)}.$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения есть

$$t(u) = \frac{1}{\cos(u + f_1)} \left(-f_2' \text{tg}(u + f_1) - f_2 f_1' \frac{1}{\cos^3(u + f_1)} + C \right).$$

На каждом цилиндре $\theta = \text{const}$ величина C постоянна. Следовательно, в комплексе C нужно считать некоторой функцией, зависящей от переменной θ . И для всех цилиндров будем иметь

$$t(u, \theta) = \frac{1}{\cos(u + f_1)} \left(-f_2' \text{tg}(u + f_1) - f_2 f_1' \frac{1}{\cos^3(u + f_1)} + f_4(\theta) \right). \quad (2.4)$$

Функция $f_4(\theta)$ не может быть произвольной, но определить ее из уравнения (2.3) мы не можем, так как неизвестна функция r . В настоящем параграфе будет найдена функция $f_4(\theta)$ и получены уравнения поверхностей, ортогональных лучам нормальных конгруэнций.

Точка A , лежащая на лучах конгруэнции (2.1), описывает опорную поверхность σ^* этой нормальной конгруэнции. Определим линию L_3 пересечения цилиндра $\theta = \text{const}$ с поверхностью σ^* . Эта линия задается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -f'_2 \frac{1}{\cos^2(u+f_1)} - 2f_2 f'_1 \frac{\sin(u+f_1)}{\cos^3(u+f_1)}; \\ \frac{dy}{du} &= f'_2 \frac{1}{\cos^2(u+f_1)}; \quad \frac{dz}{du} = f'_2 \frac{\sin(u+f_1)}{\cos^3(u+f_1)} + 2f_2 f'_1 \times \\ &\times \frac{1}{\cos^4(u+f_1)} - 2f_2 f'_1 \frac{1}{\cos^2(u+f_1)} - t \frac{1}{\cos(u+f_1)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Чтобы получить систему (2.5), нужно на перемещение точки A (1.18) наложить два ограничения: (2.1), которое означает, что точка A движется по поверхности σ^* , и $\omega_3^2 = 0$, означающее, что точка A движется по цилиндру $\theta = \text{const}$. Внесем в третье уравнение (2.5) значение t из (2.4). При интегрировании первых двух уравнений (2.5) постоянные интегрирования однозначно определяются геометрическим положением данного цилиндра. А постоянную, возникающую при интегрировании третьего уравнения (2.5), в общем случае для всех цилиндров нужно считать некоторой функцией от θ . Обозначим ее $f_5(\theta)$. При сделанных соглашениях результат интегрирования системы (2.5) примет вид.

$$\begin{aligned} x &= -f'_2 \text{tg}(u+f_1) - f_2 f'_1 \text{tg}^2(u+f_1) + f'_2 \text{tg} f_1 + f_2 f'_1 \text{tg}^2 f_1; \\ y &= f_2 \text{tg}(u+f_1) - f_2 \text{tg} f_1; \quad z = f'_2 \frac{1}{\cos^2(u+f_1)} + f_2 f'_1 \times \\ &\times \frac{\sin(u+f_1)}{\cos^3(u+f_1)} - f_4(\theta) \cdot \text{tg}(u+f_1) + f_5(\theta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Определим теперь линию L_4 пересечения поверхности σ^* с линейчатой поверхностью $\sigma_1(u=0)$. Для этого на общее смещение точки A (1.18) надо наложить ограничения (2.1) и $u=0$. Получим

$$dA = i \cos^2 f_1 (k\beta - r) d\theta + k (r \sin f_1 \cos f_1 - f_2) d\theta. \quad (2.7)$$

Заметим, что при указанных двух ограничениях функция r становится функцией только одного аргумента θ . Но уравнение движения точки A , описывающей на поверхности σ_1 кривую L_4 , можно получить иным способом. Поскольку кривая L_4 лежит на поверхности σ_1 , то

$$A = M(\theta) + k(\theta) z(\theta), \quad (2.8)$$

где $M(\theta)$ — радиус-вектор точки кривой L_2 , а $z(\theta)$ — некоторая функция. Определим dA :

$$dA = i (f_3 - f'_1 \cdot z(\theta)) d\theta + k z'(\theta) \cdot d\theta. \quad (2.9)$$

равнивая правые части (2.7) и (2.9), получим

$$\cos^2 f_1 (k\beta - r) = f_3 - f_1' z; \quad (2.10)$$

$$r \sin f_1 \cos f_1 - f_2 = z'. \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.10) определим r

$$r = k\beta + \frac{-f_3 + f_1' z}{\cos^2 f_1} \quad (2.12)$$

и внесем его в уравнение (2.11). После некоторых преобразований получим

$$\frac{dz}{d\theta} = f_1' \operatorname{tg} f_1 z - f_2 \frac{1}{\cos^2 f_1} - f_3 \operatorname{tg} f_1.$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$z = \frac{1}{\cos f_1} \left\{ C_3 - \int \left(\frac{f_2}{\cos f_1} + f_3 \sin f_1 \right) d\theta \right\}, \quad (2.13)$$

где C_3 — произвольная постоянная. Внося найденное выражение для z в (2.8), получим значение функции r на этой кривой. Для определения функции $f_4(\theta)$ найдем t на кривой L_4 . Внесем (2.12) в (2.3). Так как сейчас $u=0$, то (2.3) примет вид

$$dt = \left(f_2 \frac{\sin f_1}{\cos^2 f_1} + \frac{f_3}{\cos f_1} - f_1' \frac{1}{\cos f_1} z \right) d\theta.$$

Заменяя z по формуле (2.13), получим

$$\frac{dt}{d\theta} = f_2 \frac{\sin f_1}{\cos^2 f_1} + \frac{f_3}{\cos f_1} - f_1' \frac{C_3}{\cos^2 f_1} + \frac{f_1'}{\cos^2 f_1} \int \left(\frac{f_2}{\cos f_1} + f_3 \sin f_1 \right) d\theta.$$

Отсюда

$$t(0, \theta) = \Phi(\theta) - C_3 \operatorname{tg} f_1 + C_4, \quad (2.14)$$

где C_4 — произвольная постоянная, а $\Phi(\theta)$ введено для обозначения следующей функции:

$$\Phi(\theta) = \int f_2 \frac{\sin f_1}{\cos^2 f_1} d\theta + \int \frac{f_3}{\cos f_1} d\theta + \int \frac{f_1'}{\cos^2 f_1} \left[\int \left(\frac{f_2}{\cos f_1} + f_3 \sin f_1 \right) d\theta \right] d\theta.$$

Положив в (2.4) $u=0$, мы должны получить равенство (2.14)

$$\begin{aligned} -f_2' \operatorname{tg} f_1 \frac{1}{\cos f_1} - f_2 f_1' \frac{1}{\cos^3 f_1} + f_4 \frac{1}{\cos f_1} = \\ = \Phi(\theta) - C_3 \operatorname{tg} f_1 + C_4. \end{aligned}$$

Из этого уравнения можем найти

$$f_4(\theta) = \Phi(\theta) \cdot \cos f_1 + f_2' \operatorname{tg} f_1 + \frac{f_2 f_1'}{\cos^2 f_1} - C_3 \sin f_1 + C_4 \cos f_1.$$

Таким образом, функция f_4 определяется с произволом в две постоянные (C_3, C_4).

Для построения поверхности σ^* нужно через каждую точку кривой L_4 провести кривую (2.6). Однопараметрическая совокупность кривых (2.6) и составит поверхность σ^* . Чтобы кривая L_3 проходила через точку A , лежащую на кривой L_4 , необходимо потребовать

$$f_2' \frac{1}{\cos^2 f_1} + f_2 f_1' \frac{\sin f_1}{\cos^3 f_1} - f_4 \operatorname{tg} f_1 + f_5 = C_3 \frac{1}{\cos f_1} - \\ - \frac{1}{\cos f_1} \left[\int \left(\frac{f_2}{\cos f_1} + f_3 \sin f_1 \right) d\theta \right].$$

Из этого уравнения определим f_5 .

$$f_5 = C_3 \frac{1}{\cos f_1} - \frac{1}{\cos f_1} \int \left(\frac{f_2}{\cos f_1} + f_3 \sin f_1 \right) d\theta - \\ - f_2' \frac{1}{\cos^2 f_1} - f_2 f_1' \frac{\sin f_1}{\cos^3 f_1} + \Phi(\theta) \operatorname{tg} f_1 - \\ - C_3 \sin f_1 \int \frac{f_1'}{\cos^3 f_1} d\theta - C_4 \sin f_1.$$

Уравнение поверхности σ^* есть

$$R = M(\theta) + i \{ -f_2' \operatorname{tg}(u + f_1) - f_2 f_1' \operatorname{tg}^2(u + f_1) + f_2 \operatorname{tg} f_1 + \\ + f_2 f_1' \operatorname{tg}^2 f_1 \} + j \{ f_2 \operatorname{tg}(u + f_1) - f_2 \operatorname{tg} f_1 \} + k \left\{ f_2' \frac{1}{\cos^2(u + f_1)} + \right. \\ \left. + f_2 f_1' \frac{\sin(u + f_1)}{\cos^3(u + f_1)} - f_4(\theta) \operatorname{tg}(u + f_1) + C_3 \frac{1}{\cos f_1} \int \left(\frac{f_2}{\cos f_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + f_3 \sin f_1 \right) d\theta - f_2' \frac{1}{\cos^2 f_1} - f_2 f_1' \frac{\sin f_1}{\cos^3 f_1} + f_4(\theta) \operatorname{tg} f_1 \right\}.$$

Если от каждой точки A , лежащей на поверхности σ^* , в направлении вектора e_3 отложить отрезок t , определяемый равенством (2.4), то получим новую поверхность σ . Покажем, что вектор e_3 ортогонален к σ . Уравнение поверхности σ

$$R = M(\theta) + i \{ -f_2' \operatorname{tg}(u + f_1) - f_2 f_1' \operatorname{tg}^2(u + f_1) + f_2 \operatorname{tg} f_1 + \\ + f_2 f_1' \operatorname{tg}^2 f_1 \} + j \{ f_2 \operatorname{tg}(u + f_1) - f_2 \operatorname{tg} f_1 \} + k \left\{ f_2' \frac{1}{\cos^2(u + f_1)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + f_2 f_1' \frac{\sin(u + f_1)}{\cos^3(u + f_1)} - f_4(0) \operatorname{tg}(u + f_1) + C_3 \frac{1}{\cos f_1} - \\
& - \frac{1}{\cos f_1} \int \left(\frac{f_2}{\cos f_1} + f_3 \sin f_1 \right) d\theta - f_2' \frac{1}{\cos^2 f_1} - f_2 f_1' \frac{\sin f_1}{\cos^3 f_1} + \\
& + f_4(0) \operatorname{tg} f_1 \} + i \{ f_2' \operatorname{tg}(u + f_1) + f_2 f_1' \frac{1}{\cos^2(u + f_1)} - f_4(0) \} + \\
& + k \operatorname{tg}(u + f_1) \{ -f_2 \operatorname{tg}(u + f_1) - f_2 f_1' \frac{1}{\cos^2(u + f_1)} + f_4(0) \}
\end{aligned}$$

перепишем в сокращенном виде

$$R(u, \theta) = M(\theta) + ix + jy + kz - i \cos(u + f_1)t + k \sin(u + f_1)t. \quad (2.15)$$

Здесь x , y , z и t определяются равенствами (2.6) и (2.4). Про- дифференцировав обе части (2.15) по u , определим вектор R_u и составим скалярное произведение

$$(R_u e_3) = -x_u \cos(u + f_1) + z_u \sin(u + f_1) + t_u.$$

После ряда несложных, но громоздких преобразований получим $(R_u e_3) \equiv 0$ для любого выбора параметров C_3 и C_4 . Прделавав аналогичные выкладки для вектора R_θ , получим $(R_\theta e_3) \equiv 0$. Для поверхности (2.16) нами была найдена полная кривизна. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательную формулу

$$K = - \frac{\cos^4(u + f_1)}{f_2^2} = - \frac{1}{k^2},$$

т. е. полная кривизна поверхностей (2.16), ортогональных к лучам комплекса, определяется только лучом, не зависит от параметров C_3 и C_4 и равняется $-\frac{1}{k^2}$. Это доказывает утверждение.

3. Расслоение комплекса при $t=0$. При $t=0$ уравнения (0.2) принимают вид

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2; \quad (3.1)$$

$$\omega^3 = 0. \quad (3.2)$$

Каждое из этих двух уравнений определяет расслоение комплекса в нормальные конгруэнции. Требование того, чтобы нормальные конгруэнции, определяемые уравнением (3.1), совпадали с нормальными конгруэнциями, определяемыми уравнением (3.2), приводит к двум условиям

$$a = \frac{\gamma - k\alpha}{kp - \beta}, \quad k = \frac{r - k^3}{kp - \beta},$$

из которых получим одно ограничение на коэффициенты второй дифференциальной окрестности

$$r = k^2 p. \quad (3.3)$$

Поскольку теперь уравнения (3.1) и (3.2) эквивалентны, т. е. определяют одно и то же расслоение комплекса в нормальные конгруэнции, то будем в дальнейшем использовать только одно из них, например, (3.2). Условием полной интегрируемости уравнения (3.2) является (3.3). Уравнения искомого комплекса имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1; \quad \omega_1^2 = p\omega^1 + a\omega_3^1 + \beta\omega_3^2; \quad dk = a\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2; \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + k^2 p\omega_3^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В отличие от общего [1] и специального случаев K -расслоения, уравнение (3.2) определяет единственное расслоение комплекса (3.4) в нормальные конгруэнции. Полная кривизна ортогональных поверхностей, описываемых при таком расслоении центрами лучей комплекса, определяется равенством

$$K = -\frac{1}{k^2}.$$

Следуя известному методу [3], можно показать, что комплексы (3.4), допускающие расслоение в нормальные конгруэнции $\omega^3=0$, существуют с произволом две функции двух аргументов. Вопрос о безынтегральном представлении и геометрическом построении ортогональных поверхностей комплекса (3.4) пока остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кованцов Н. И., Мягков В. И. О K -расслоении комплекса прямых. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 18, 1975, с. 74—84.
2. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 292 с.
3. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1948. 432 с.

Поступила 7 октября 1974 г.

**РАССЛОЕНИЕ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ В НОРМАЛЬНЫЕ
КОНГРУЭНЦИИ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ
ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ**

В работе [1] были даны уравнения комплекса прямых
 $\omega^3 = k\omega_3^1$; $\omega_1^2 = p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2$; $dk = \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2$; $-\omega^3 +$
 $+ k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2$, (1)

расслаивающих его нормальных конгруэнций
 $\omega^1 = \alpha\omega_3^1 + k\omega_3^2$ (2)

и поверхностей σ , ортогональных к лучам этих конгруэнций

$$\omega^3 + dt = 0. \quad (3)$$

Поверхность σ описывается точкой

$$M = A = te_3, \quad (4)$$

где A — центр луча комплекса, e_3 — единичный вектор, параллельный этому лучу. Полная и средняя кривизны поверхности определяются следующими формулами:

$$K = \frac{1}{t^2 + at - k^2}, \quad (5)$$

$$H = \frac{2t + a}{t^2 + at - k^2}. \quad (6)$$

Случай $K=0$ исключен из рассмотрения (см. (5)). Поверхности, для которых $K=\text{const}$, были рассмотрены нами в работе [2]. В настоящей заметке мы остановимся на поверхностях $H=\text{const}$ и в особенности на минимальных поверхностях. Для последних, в частности, найдем в квадратурах уравнения, отличные от известных уравнений Вейерштрасса и Шварца.

Из (6) находим

$$a = \frac{2t - H(t^2 - k^2)}{Ht - 1}. \quad (7)$$

Внесем (7) в (2) и продифференцируем получающееся уравнение внешним образом; учтя (1) и (3), придем к следующему уравнению 4-й степени относительно t :

$$pH^2t^4 - 2H(\alpha H + 2p)t^3 + [H^2(q + 2k\beta) + 6\alpha H + 4p]t^2 - 2[H^2k\gamma + H(q + 2k\beta) + 2\alpha]t + H^2k^2r + 2Hk\gamma + q + r + 2k\beta + k^2p = 0. \quad (8)$$

Если положить здесь

$$H = \sqrt{K}, \quad t = t' + \frac{1}{\sqrt{K}}, \quad (9)$$

то придем к уравнению

$$pKt'^4 - 2\alpha Kt'^3 + (Kq - 2p + 2k\beta K)t'^2 - 2(k\gamma K - \alpha)t' + \frac{1}{K}(p + Kr)(1 + k^2K) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) в точности совпадает с уравнением (2.20), определяющим точки ортогональности постоянной кривизны K (см. [1]). Совпадение уравнений есть, очевидно, следствие теоремы Бонне, согласно которой всякая конгруэнция, образованная нормальными к поверхности постоянной средней кривизны H

$-\frac{1}{\tau}$, является в то же время конгруэнцией нормалей к поверхностям постоянной положительной кривизны $K = \frac{1}{\tau^2}$ [3].

Система уравнений (2), (3) будет вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда уравнение (8) тождественно исчезает. Возможны два случая.

1. $H \neq 0$.

В этом случае $p=0$, $\alpha=0$, $q+2k\beta=0$, $\gamma=0$, $r=0$. Уравнения (1) принимают вид (записываем вместе с продолжением)

$$\omega^2 = k\omega_3^1; \omega_1^2 = \beta\omega_3^2; dk = -2k\beta\omega_3^1; -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega_1^1; d\beta + (1 + \beta^2)\omega_3^1 = 0. \quad (11)$$

Это уравнения линейного комплекса. Этого и следовало ожидать, так как функциональное расслоение в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной кривизны, допускает линейный комплекс, и только он.

Конечные уравнения поверхностей постоянной средней кривизны имеют вид

$$\begin{aligned} x &= -\operatorname{tg} u \cos \theta + \left(t + \frac{1}{\sqrt{K}}\right) \cos u \sin \theta; \\ y &= -\operatorname{tg} u \sin \theta - \left(t + \frac{1}{\sqrt{K}}\right) \cos u \cos \theta; \\ z &= -\theta + F(u) + \left(t + \frac{1}{\sqrt{K}}\right) \sin u + c_3, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$F(u) = \int \frac{\frac{1 + Kk^2}{Kt} - t}{\cos u} du, \quad c_3 = \text{const}, \quad (13)$$

функция t определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dt}{du} = \operatorname{tg} u \left(t - \frac{1 + Kk^2}{Kt} \right), \quad (14)$$

а

$$k = \frac{1}{\cos^2 u} \quad (15)$$

(равенства (12) — (15) взяты из работы [4]). Средняя кривизна поверхности (12) равна $\sqrt{K}$.

Равенства (9) возможны именно в рассматриваемом случае, т. е. при условии $H \neq 0$, так как случай $K=0$, а потому по (9)

и $H=0$, как уже было упомянуто, из рассмотрения исключен. Случай минимальных поверхностей $H=0$ составляет содержание последующих страниц.

II. $H=0$.

Поверхности σ — минимальные. Имеем $a=-2t$. В этом случае уравнение (8) исчезает при выполнении лишь следующих равенств

$$p=0, \alpha=0, q+2k\beta+r=0. \quad (16)$$

Система (1) принимает вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1, \quad \omega_1^2 = \beta\omega_3^2, \quad dk = q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \quad -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 - (q + 2k\beta)\omega_3^2.$$

Продолжим второе и третье уравнения:

$$d\beta + (1 + \beta^2)\omega_3^1 = h\omega_3^2, \quad dq = A\omega_3^1 + (b + \gamma\beta)\omega_3^2, \quad d\gamma = b\omega_3^1 + c\omega_3^2.$$

Внешнее дифференцирование четвертого уравнения приводит к равенствам $h=0$, $A+c+5\beta q-2k+4k\beta^2=0$.

Уравнения комплекса принимают вид:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_3^2, \\ dk &= q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 - (q + 2k\beta)\omega_3^2, \\ d\beta + (1 + \beta^2)\omega_3^1 &= 0, \\ dq &= A\omega_3^1 + (b + \gamma\beta)\omega_3^2, \\ d\gamma &= b\omega_3^1 + c\omega_3^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Широта класса комплексов — две функции одного аргумента. Для каждого из таких комплексов система уравнений

$$\begin{aligned} \omega^1 &= -2t\omega_3^1 + k\omega_3^2; \\ \omega^3 + dt &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

является вполне интегрируемой. Чем отличается этот случай от общего, когда уравнения (16) места не имеют? Положив в (8) $H=0$, будем иметь

$$4pt^2 - 4\alpha t + q + 2k\beta + r + k^2p = 0. \quad (19)$$

Пусть t_1 — какой-нибудь корень этого уравнения. Поскольку все коэффициенты последнего уравнения являются функциями трех параметров, определяющих луч комплекса, то функцией этих же параметров будет и t_1 . Это означает, что на каждом луче точка M (см. (4)) может занимать лишь одно положение, определяемое параметром t_1 : $M_1 = A + t_1 e_3$.

Внесем t_1 во второе уравнение (18) и приравняем нулю коэффициенты при ω_3^1, ω_3^2 (при этом следует учесть первое уравнение (18)). Получим два условия на коэффициенты третьей дифференциальной окрестности луча комплекса (1) (эти коэффициенты входят в правые части продолжения системы (1)). Система (1), расширенная ее продолжением с двумя указанными условиями, имела бы решение, определяемое двумя функциями двух аргументов. С такой широтой существуют комплексы, допускающие расслоение в нормальные конгруэнции, ортогональные к минимальным поверхностям. Сам по себе этот факт следует считать ожидаемым. В самом деле, с помощью указанной выше процедуры мы получаем произвольный комплекс, допускающий такое расслоение. Такой комплекс можно рассматривать как совокупность нормалей к произвольному однопараметрическому семейству минимальных поверхностей. Минимальная поверхность определяется с произволом в две функции одного аргумента. Чтобы получить произвольное однопараметрическое семейство таких поверхностей, следует каждую из упомянутых функций заменить произвольной функцией двух аргументов, взяв в качестве второго аргумента параметр, определяющий поверхность в семействе. Тем самым класс однопараметрических семейств минимальных поверхностей имеет широту в две функции двух аргументов, что совпадает со сказанным выше.

Уравнение $\omega^1 = -2t_1\omega_3^1 + k\omega_3^2$ является вполне интегрируемым (условие его полной интегрируемости есть (19)). Решение его зависит от одной произвольной функции одного аргумента. Это означает, что в общем случае комплекс прямых, ортогональных к минимальным поверхностям, допускает единственное расслоение на нормальные конгруэнции указанного вида, а каждая такая конгруэнция ортогональна к единственной минимальной поверхности.

Иное положение — в случае комплексов (16). Если u, v, ω — параметры, определяющие положение луча, то, интегрируя вполне интегрируемую систему (18), получим

$$w = w(u, v, c_1, c_2); t = t(u, v, c_1, c_2); c_1 c_2 = \text{const.} \quad (20)$$

Это означает, что комплекс допускает расслоение в однопараметрические семейства конгруэнций указанного вида не единственным, а бесконечным множеством способов. Чтобы задать такое расслоение, можно положить

$$c_2 = c_2(c_1), \quad (21)$$

где $c_2(c_1)$ — произвольная функция. Тогда (см. (20))

$$w = w(u, v, c_1, c_2(c_1)), t = t(u, v, c_1, c_2(c_1)).$$

Для каждого c_1 имеем определенную нормальную конгруэнцию и определенную нормальную к ней минимальную поверхность.

ность. Расслоение каждого комплекса существует с произволом в одну функцию одного аргумента (21). При переходе от одного расслоения к другому точка M на луче не остается неподвижной. Таково отличие общего случая от случая (16).

Так как сейчас $D(\omega_3^1) = 0$, $D(\sqrt{1 + \beta^2} \omega_3^2) = 0$, то можно положить

$$\omega_3^1 = du, \quad \sqrt{1 + \beta^2} \omega_3^2 = d\theta. \quad (22)$$

Теперь так же

$$\beta = -\operatorname{tg} u \quad (23)$$

(постоянную интегрирования внесли в аргумент u). Из (17) находим

$$dk = q du + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}} d\theta,$$

т. е.

$$q = k_u, \quad \gamma = \sqrt{1 + \beta^2} k_\theta. \quad (24)$$

Продифференцировав четвертое уравнение (17) и приравняв нулю коэффициент при $[\omega_3^1, \omega_3^2]$ (а только один этот коэффициент мы и получим в результате дифференцирования), придем к следующему дифференциальному уравнению второго порядка на функцию $k(u, \theta)$:

$$\frac{1}{\cos^2 u} k_{\theta\theta} + k_{uu} - 5 \operatorname{tg} u k_u + 4 \operatorname{tg}^2 u k - 2k = 0. \quad (25)$$

Это уравнение имеет решение, зависящее от двух произвольных функций одного аргумента, а это еще раз доказывает, что класс комплексов (17) существует с такой именно широтой. Решив уравнение (25), следует найденное значение k подставить в уравнение (17). Проинтегрировав его, найдем соответствующий комплекс. При этом формы ω_3^1, ω_3^2 связаны с переменными u, θ равенствами (22). Величины β, q, γ определяются равенствами (23), (24). Тогда получаем следующую вполне интегрируемую систему

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k \omega_3^1, \quad \omega_1^2 = -\operatorname{tg} u \omega_3^2; \quad \omega_3^1 = du, \quad \omega_3^2 = -\cos u d\theta; \quad -\omega^3 + k \omega_1^2 = \\ &= -\operatorname{tg} u \omega^1 - \frac{k_\theta}{\cos u} \omega_3^1 - (k_u - 2k \operatorname{tg} u) \omega_3^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Независимыми переменными являются u, θ и, например, x^3 . Искомые функции — $x^1, x^2, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ ($\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ — углы Эйлера). Из вполне интегрируемой системы уравнений (26) находим с точностью до положения в пространстве искомым комплекс.

Легко видеть, что единичный вектор

$$\mathbf{p} = \frac{-\mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \cos u \mathbf{e}_1 + \sin u \mathbf{e}_3 \quad (27)$$

постоянен в комплексе. При $\omega_3^1 = 0$ имеем

$$dA = -\sqrt{1 + \beta^2} \omega^1 \mathbf{p} + (q + 3k\beta) \omega_3^2 \mathbf{e}_3.$$

Это означает, что точка A описывает цилиндр (обозначим u), образующие которого параллельны вектору (27). При $\omega_3^1 = \omega^3 = 0$ точка A описывает на этом цилиндре линию γ , касательную к вектору $\mathbf{e}_1$. Угол, образуемый вектором $\mathbf{e}_1$ с $\mathbf{p}$, равен u . Следовательно, линия γ есть линия откоса.

Вдоль образующей цилиндра u векторы $\mathbf{e}_1$ (а потому и $\mathbf{e}_3$) параллельны друг другу, т. е. цилиндры комплекса (цилиндры, образованные лучами комплекса, их не надо путать с цилиндрами u), вырождаются в плоскости, касательные к цилиндрам u (напомним, что для каждого цилиндра u имеем $u = \text{const}$). Вектор $\mathbf{e}_2$ нормален к цилиндру u .

Положим $\mathbf{e} = -\mathbf{e}_2 = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, $\mathbf{p} = k(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ — орты неподвижной прямоугольной декартовой системы координат). Тогда

$$\mathbf{e}' = \frac{d\mathbf{e}}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

С другой стороны, вектор $\mathbf{e}'$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{k}$, при этом $[\mathbf{e}, \mathbf{e}'] = \mathbf{k}$ (векторное произведение находится по правилу левого винта), следовательно, $\mathbf{e}' = \sin u \mathbf{e}_1 - \cos u \mathbf{e}_3$.

Таким образом, имеем две левых тройки векторов $\mathbf{e}, \mathbf{e}', \mathbf{k}$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, причем

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{k} \cos u - (\sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j}) \sin u, \quad \mathbf{e}_2 = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{k} \sin u + (\sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j}) \cos u.$$

Найдем кривые, по которым цилиндры u пересекают плоскость $xy(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. При $du = \omega_3^3 = 0$ имеем $dA = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^1 \mathbf{e}_3$. Для искомой кривой этот вектор должен быть параллелен вектору $\mathbf{e}'$, следовательно,

$$\frac{\omega^1}{\sin u} = \frac{\omega^3}{-\cos u}.$$

Отсюда $\omega^1 = \beta \omega^3$. Учитывая (17), получим

$$\omega^1 = \beta \frac{q + 3k\beta}{1 + \beta^2} \omega_3^2; \quad \omega^3 = \frac{q + 3k\beta}{1 + \beta^2} \omega_3^2; \quad dA = (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \frac{q + 3k\beta}{1 + \beta^2} d\theta,$$

откуда (см. (23), (24))

$$\frac{dx}{d\theta} = -(k_u - 3 \operatorname{tg} u k) \cos^2 u \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = (k_u - 3 \operatorname{tg} u k) \cos^2 u \cos \theta \quad (28)$$

Это и есть дифференциальные уравнения искомой линии. Чтобы найти эти линии, сюда вместо k следует подставить решение уравнения (25). Поскольку k в общем случае есть функция двух переменных u и θ , то кривые (28), вообще говоря, не являются окружностями. Проинтегрировав уравнения (28), найдем однопараметрическое семейство кривых. Вдоль каждой из таких кривых $u = \text{const}$. Проведем через найденные кривые цилиндры u , образующие которых параллельны вектору k , а на каждом из цилиндров — линии откоса, наклоненные под углом u к вектору k . Проведя нормали к этим линиям, касающиеся цилиндров u , получим искомый комплекс.

Линии, определяемые дифференциальными уравнениями (28), не могут быть произвольными. Не могут ли они быть, как и в случае линейного комплекса, окружностями? Легко понять, что необходимым и достаточным условием этого является равенство

$$(k_u - 3 \operatorname{tg} u k) \cos^2 u = f(u) \quad (29)$$

(которое должно быть совместным с (25)). Действительно, положим

$$(k_u - 3 \operatorname{tg} u k) \cos^2 u = \varphi(u, \theta). \quad (30)$$

Тогда из (28) получаем $x = -\int \varphi \sin \theta d\theta$, $y = \int \varphi \cos \theta d\theta$ (постоянные интегрирования отбрасываем, что не ограничивает общности рассуждений). Для окружности $xx' + yy' = 0$, или $\varphi \sin \theta \int \varphi \sin \theta d\theta + \varphi \cos \theta \int \varphi \cos \theta d\theta = 0$, $\int \varphi \sin \theta d\theta + \operatorname{ctg} \theta \int \varphi \cos \theta d\theta = 0$.

Отсюда после дифференцирования $-\int \varphi \cos \theta d\theta + \varphi \sin \theta = 0$. Дифференцируем еще раз: $\varphi_0 \sin \theta = 0$, следовательно, $\varphi_0 = 0$, а это доказывает справедливость равенства (29). Легко теперь показать, что условием совместности уравнений (25) и (29) является равенство $k_0 = 0$. Действительно, интегрируя (29), получаем

$$k = \frac{1}{\cos^3 u} \left(\int f(u) \cos u du + A(\theta) \right),$$

$A(\theta)$ — произвольная функция. Внеся это в (25), придем к равенству $A(\theta) = 0$, а это и доказывает справедливость утверждения.

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (25) принимает вид $k'' - 5 \operatorname{tg} u k' + (4 \operatorname{tg}^2 u - 2) k = 0$ (штрихами обозначены производные по u). Его общее решение

$$k = c_1 \frac{1}{\cos^2 u} + c_2 \frac{\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right|}{\cos^2 u}, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \quad (31)$$

При $c_2=0$ имеем

$$k = \frac{c_1}{\cos^2 u}.$$

В этом случае

$$k_u = q = \frac{2c_1 \sin u}{\cos^2 u},$$

а потому $q + 2k\beta = 0$. Комплекс — линейный (учли, что $\gamma = 0$ в силу $k_0 = 0$).

При $c_1=0$ имеем

$$k = c_2 \frac{\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right|}{\cos^2 u}. \quad (32)$$

Теперь

$$q = c_2 \frac{1 + 2 \sin u \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right|}{\cos^3 u}.$$

Поскольку

$$q + 2k\beta = \frac{c_2}{\cos^3 u}$$

(легко проверить, что последнее равенство выполняется и при произвольных значениях c_1, c_2), то комплекс, у которого k определяется равенством (32), — не линейный.

Класс комплексов, у которых k определяется формулой (31), описывается следующей вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1; \quad \omega_1^2 = \beta\omega_3^2; \\ dk &= q\omega_3^1; \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 - (q + 2k\beta)\omega_3^2; \\ d\beta + (1 + \beta^2)\omega_3^1 &= 0; \\ dq &= (2k - 5\beta q - 4\beta^2 k)\omega_3^1, \end{aligned} \quad (33)$$

что легко следует из (30). (Последнее уравнение (33) есть как раз уравнение (30), если учесть третье уравнение (33), дающее $q = k'$).

Внося (31) в (28), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= - \left[-c_1 \sin u + c_2 \left(1 - \sin u \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| \right) \right] \frac{\sin \theta}{\cos u}, \\ \frac{dy}{d\theta} &= \left[-c_1 \sin u + c_2 \left(1 - \sin u \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| \right) \right] \frac{\cos \theta}{\cos u}. \end{aligned} \quad (34)$$

Концентрические окружности, являющиеся линиями пересечения цилиндров u с плоскостью xy , имеют уравнения, получающиеся интегрированием (34),

$$\begin{aligned} x &= \left[-c_1 \operatorname{tg} u + c_2 \frac{1 - \sin u \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right|}{\cos u} \right] \cos \theta; \\ y &= \left[-c_1 \operatorname{tg} u + c_2 \frac{1 - \sin u \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right|}{\cos u} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (35)$$

(постоянные интегрирования без ограничения общности отбрасываем).

Комплексы (33) строятся, как и линейные, однако винтовые γ проводят под углом u к вектору $k=p$ не на цилиндре радиуса $-\operatorname{tg} u$ (см. [2]), а на цилиндре радиуса

$$R = -c_1 \operatorname{tg} u + c_2 \frac{1 - \sin u \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right|}{\cos u}. \quad (36)$$

Из (36) непосредственно следует, что $R' = -k$ (см. (31)). Вернемся к общему случаю. Введем обозначения

$$v = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right|, \quad \lambda = \frac{k}{\operatorname{ch}^2 v}, \quad \tau = \frac{t}{\operatorname{ch}^2 v}.$$

В таком случае (25) становится уравнением Лапласа

$$\lambda_{vv} + \lambda_{\theta\theta} = 0. \quad (37)$$

Уравнение $\omega^3 + dt = 0$ для комплекса (17) принимает вид

$$d\tau = -\lambda_\theta dv + \lambda_v d\theta, \quad (38)$$

т.е. $\tau_v = -\lambda_\theta$, $\tau_\theta = \lambda_v$. Это означает, что функции λ и τ являются сопряженными гармоническими функциями.

Уравнения (28), определяющие цилиндры $u(v = \text{const})$, принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= (-\operatorname{ch} v \lambda_v + \operatorname{sh} v \lambda) \sin \theta; \\ v &= \text{const} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{dy}{d\theta} (\operatorname{ch} v \lambda_v - \operatorname{sh} v \lambda) \cos \theta.$$

Дифференциальные уравнения профиля (кривой, описываемой точкой A и лежащей в плоскости, которая проходит через ось

для этой плоскости $\theta = \text{const}$) имеют вид

$$\frac{dx}{dv} = \text{ch } v (\lambda_0 \sin \theta - \lambda \cos \theta); \quad \frac{dy}{dv} = \text{ch } v (-\lambda_0 \cos \theta - \lambda \sin \theta),$$

$$\theta = \text{const} \quad \frac{dz}{dv} = \text{ch } v (-2\tau \text{ch } v + \lambda_0 \text{sh } v). \quad (40)$$

Отбросив в (39) и (40) условия $v = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ и учитывая (37), убедимся в справедливости следующих равенств

$$\frac{\partial}{\partial v} [(-\text{ch } v \lambda_v + \text{sh } v \lambda) \sin \theta] = \frac{\partial}{\partial \theta} [\text{ch } v (\lambda_0 \sin \theta - \lambda \cos \theta)],$$

$$\frac{\partial}{\partial v} [(\text{ch } v \lambda_v - \text{sh } v \lambda) \cos \theta] = \frac{\partial}{\partial \theta} [\text{ch } v (-\lambda_0 \cos \theta - \lambda \sin \theta)]; \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (-\lambda - \lambda_v \text{sh } v \text{ch } v) = \frac{\partial}{\partial \theta} [\text{ch } v (-2\tau \text{ch } v + \lambda_0 \text{sh } v)].$$

Конечные уравнения профиля имеют вид (см. [41])

$$x = \int \text{ch } v (\lambda_0 \sin \theta - \lambda \cos \theta) dv + \varphi_1(\theta) = \int (-\text{ch } v \lambda_v + \text{sh } v \lambda) \times \\ \times \sin \theta d\theta + \psi_1(v);$$

$$y = \int \text{ch } v (-\lambda_0 \cos \theta - \lambda \sin \theta) dv + \varphi_2(\theta) = \int (\text{ch } v \lambda_v - \text{sh } v \lambda) \times \\ \times \cos \theta d\theta + \psi_2(v); \quad (42)$$

$$z = \int \text{ch } v (-2\tau \text{ch } v + \lambda_0 \text{sh } v) dv + \varphi_3(\theta) = \int (-\lambda - \lambda_v \text{sh } v \text{ch } v) \times \\ \times d\theta + \psi_3(v).$$

Функции $\varphi_i(\theta)$, $\psi_i(v)$, $i=1, 2, 3$ равенствами (42) в силу (41) определяются для каждой гармонической функции $\lambda(v, \theta)$ с точностью до аддитивных постоянных, одинаковых для каждой пары соответствующих функций φ_i , ψ_i . Постоянные c_1 , c_2 можно привести к нулю выбором начала координат в плоскости xy . Постоянная c_3 даст однопараметрическое семейство профилей.

Уравнением (38) при заданной функции λ функция τ определяется с произволом в одну постоянную c . Получаем двухпараметрическое семейство поверхностей (параметры c , c_3). Положив $c = c(c_3)$, $c(c_3)$ — произвольна, получаем однопараметрическое подсемейство. Нормали к такому подсемейству составят комплекс (17). При другом выборе функции $c(c_3)$ получим другое расслоение комплекса (17) в нормальные конгруэнции, ортогональные к минимальным поверхностям.

Уравнения минимальных поверхностей, ортогональных к лучам комплекса, имеют вид

$$x = \int \text{ch } v (\lambda_0 \sin \theta - \lambda \cos \theta) dv + \varphi_1(\theta) + \tau \text{ch } v \sin \theta;$$

$$y = \int \text{ch } v (-\lambda_0 \cos \theta - \lambda \sin \theta) dv + \varphi_2(\theta) - \tau \text{ch } v \cos \theta; \quad (43)$$

$$z = \int \text{ch } v (-2\tau \text{ch } v + \lambda_0 \text{sh } v) dv + \varphi_3(\theta) + \tau \text{sh } v \text{ch } v.$$

Векторное уравнение поверхности (43) таково:

$$\mathbf{r} = \left[\int \operatorname{ch} v (\lambda_0 \sin \theta - \lambda \cos \theta) dv + \varphi_1(\theta) + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta \right] \mathbf{i} + \left[\int \operatorname{ch} v \times \right. \\ \times (-\lambda_0 \cos \theta - \lambda \sin \theta) dv + \varphi_2(\theta) - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta \left. \right] \mathbf{j} + \left[\int \operatorname{ch} v \times \right. \\ \times (-2\tau \operatorname{ch} v + \lambda^0 \operatorname{sh} v) dv + \varphi_3(\theta) + \tau \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v \left. \right] \mathbf{k}, \quad (44)$$

или

$$\mathbf{r} = \left[\int (-\operatorname{ch} v \lambda_v + \operatorname{sh} v \lambda) \sin \theta d\theta + \psi_1(v) + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta \right] \mathbf{i} + \\ + \left[\int (\operatorname{ch} v \lambda_v - \operatorname{sh} v \lambda) \cos \theta d\theta + \psi_2(v) - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta \right] \mathbf{j} + \\ + \left[\int (-\lambda - \lambda_v \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v) d\theta + \psi_3(v) + \tau \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v \right] \mathbf{k}. \quad (45)$$

Отсюда $\mathbf{r}_v = (-\lambda \operatorname{ch} v \cos \theta + \tau \operatorname{sh} v \sin \theta) \mathbf{i} + (-\lambda \operatorname{ch} v \sin \theta - \tau \operatorname{sh} v \cos \theta) \mathbf{j} - \tau \mathbf{k}$, (продифференцировали (44)), $\mathbf{r}_\theta = (\lambda \operatorname{sh} v \sin \theta + \tau \operatorname{ch} v \cos \theta) \mathbf{i} + (-\lambda \operatorname{sh} v \cos \theta + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta) \mathbf{j} - \lambda \mathbf{k}$ (продифференцировали (45)), $N = [\mathbf{r}_v \mathbf{r}_\theta] = (\lambda^2 + \tau^2) \operatorname{ch} v (\operatorname{sh} v \mathbf{k} + \sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j}) = \operatorname{ch}^2 v (\lambda^2 + \tau^2) \mathbf{e}_3$.

Таким образом, поверхности (44) (45) ортогональны к лучам комплекса. Далее имеем

$$\mathbf{e}_{3v} = \frac{1}{\operatorname{ch} v} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} v} \mathbf{k} - \operatorname{th} v (\sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j}) \right]; \quad \mathbf{e}_{3\theta} = \frac{1}{\operatorname{ch} v} \times \\ \times (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}); \quad E = \mathbf{r}_v^2 = \operatorname{ch}^2 v (\lambda^2 + \tau^2); \quad L = -\mathbf{r}_v \mathbf{e}_{3v} = \tau; \quad F = \\ = \mathbf{r}_v \mathbf{r}_\theta = 0; \quad M = -\mathbf{r}_v \mathbf{e}_{3\theta} = \lambda; \quad G = \mathbf{r}_\theta^2 = \operatorname{ch}^2 v (\lambda^2 + \tau^2); \\ N = -\mathbf{r}_\theta \mathbf{e}_{3\theta} = -\tau; \quad EN - 2FM + GL = 0. \quad (46)$$

Равенство (46) и доказывает то, что поверхности — минимальные.

Первая квадратичная форма поверхностей (44) имеет вид

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 v (\lambda^2 + \tau^2) (dv^2 + d\theta^2).$$

Это означает, что система координат v, θ является изотермической. Если поменять местами λ и τ , то получим ту же квадратичную форму. Следовательно, минимальные поверхности, полученные из данных поверхностей перестановкой функций λ и τ , изгибаются на данные поверхности.

Вторая квадратичная форма поверхностей (44) имеет вид

$$\varphi_2 = \tau (dv^2 - d\theta^2) + 2\lambda dv d\theta.$$

Для линейного комплекса $\lambda = \text{const}$, $\tau = \text{const}$, а потому уравнения минимальных поверхностей, ортогональных к его лучам, имеют вид

$$x = \lambda \operatorname{sh} v \cos \theta + \tau \operatorname{ch} v \sin \theta, \quad \varphi_1 = \psi_1 = 0, \quad (47)$$

$$y = -\lambda \operatorname{ch} v \sin \theta - \tau \operatorname{ch} v \cos \theta, \quad \varphi_2 = \psi_2 = 0,$$

$$z = -\lambda \theta - \tau v + a_3, \quad a_3 = \text{const}, \quad \varphi_3 = -\lambda \theta + a_3, \quad \psi_3 = -\tau v - \tau \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v + a_3.$$

Уравнения (47) при $\tau = 0$ представляют собой уравнения геликоидов, при $\lambda = 0$ — катеноидов.

Для комплексов, определяемых линейными гармоническими функциями $\lambda = av + b\theta + c$, $a, b, c = \text{const}$, имеем $d\tau = ad\theta - b dv$, откуда $\tau = a\theta - bv + h$, $h = \text{const}$.

Уравнения минимальных поверхностей принимают вид

$$\begin{aligned} x &= \tau \operatorname{ch} v \sin \theta - \lambda \operatorname{sh} v \cos \theta + a \operatorname{ch} v \cos \theta + b \operatorname{sh} v \sin \theta; \\ y &= -\tau \operatorname{ch} v \cos \theta - \lambda \operatorname{sh} v \sin \theta + a \operatorname{ch} v \sin \theta - b \operatorname{sh} v \cos \theta; \end{aligned} \quad (48)$$

$$z = -c\theta - hv + a_3 + a(-\theta h) + \frac{b}{2}(v^2 - \theta^2).$$

При $b=0$ получаем комплексы, для которых цилиндры и концентрические круговые. Первые два уравнения (48) совпадают с уравнениями (35), если в (48) положить $\tau=0$.

Форма уравнений (44) и (45) отлична как от формы, приданной уравнениями минимальных поверхностей Вейерштрассом, так и от формы, приданной им Шварцем [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кованцов Н. И., Носаль Т. В. Расслоение комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве в нормальные конгруэнции. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 14, Харьков, 1973, с. 28—44.
2. Кованцов Н. И., Носаль Т. В. Расслоение линейного комплекса в конгруэнции, нормальные к поверхностям постоянной кривизны. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 16, Харьков, 1974, с. 31—35.
3. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей, т. 2. ОГИЗ. Гостехиздат, М.—Л., 1948. 407 с.
4. Кованцов Н. И. Поверхности, ортогональные к конгруэнциям линейного комплекса. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 17, Харьков, 1975, с. 82—92.
5. Bianchi L. Lezioni di geometria differenziale. Bologna, vol. 1, parte 1—2, 802 S.

Поступила 26 февраля 1974 г.

УДК 513

С. Г. ЛЕЙКО

**ТРИ-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ
АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ. I**

В аффинно-связных пространствах без кручения выделяется класс кривых, названных три-геодезическими. Первые две аффинные кривизны таких кривых (и только у них) отличны от нуля, а все последующие равны нулю. В плоских пространствах три-геодезические лежат в трехмерных плоскостях. Отображению, переводящему все геодезические одного пространства в три-

геодезические другого, дается название три-геодезического. Исход за почти-геодезическим [1, 2] (два-геодезическим в нашей терминологии) отображением, три-геодезическое отображение является дальнейшим обобщением геодезических [3], конциркулярных [4], аналитически-планарных [5, 6] и частично-проективных [7, 8] отображений. Из полученного необходимого и достаточного условия на тензор деформации три-геодезического отображения выводятся основные уравнения семи специальных типов три-геодезических отображений.

Все рассуждения носят локальный характер.

1. Три-геодезические кривые. Рассмотрим пространство аффинной связности $A_n (n > 3)$ с объектом связности $\Gamma_{ij}^h(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в нем произвольно параметризованную кривую $x^h = x^h(t)$.

Определение 1. Кривую в A_n будем называть три-геодезической и обозначать γ_3 , если существует параллельное вдоль нее поле трехмерных площадок $E_3 \{ \lambda^h, \mu^h, \nu^h \}$, содержащее в каждой точке касательный вектор этой кривой.

Таким образом, требуется, чтобы вдоль γ_3 тождественно выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \lambda^h = a_0 \lambda^h + b_0 \mu^h + c_0 \nu^h; \lambda_{,\alpha}^h \xi^\alpha = a_1 \lambda^h + b_1 \mu^h + c_1 \nu^h; \mu_{,\alpha}^h \xi^\alpha = a_2 \lambda^h + \\ + b_2 \mu^h + c_2 \nu^h; \nu_{,\alpha}^h \xi^\alpha = a_3 \lambda^h + b_3 \mu^h + c_3 \nu^h, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n$; $\xi^h = dx^h/dt$; a, b, c — функции параметра t ; запятой обозначено ковариантное дифференцирование в A_n .

Нетрудно убедиться в том, что параллельность E_3 вдоль γ_3 не зависит от выбора базисных векторов площадок и способа параметризации γ_3 . Другими словами, свойство кривой быть три-геодезической является ее геометрическим свойством.

Если кривая является три-геодезической, то из (1) следует, что E_3 принадлежат векторы $\xi^h, {}_1\xi^h, {}_2\xi^h$, где ${}_1\xi^h = \xi^h \xi^\alpha$, ${}_2\xi^h = {}_1\xi^h \xi^\alpha$ и в случае их линейной независимости эти векторы можно взять базисными для E_3 , т. е. существуют функции параметра a, b, c для которых вдоль γ_3 выполнено условие

$${}_2\xi_{,\alpha}^h \xi^\alpha = a_2 \xi^h + b_1 {}_1\xi^h + c {}_2\xi^h. \quad (2)$$

Обратно, предполагая линейную независимость векторов $\xi^h, {}_1\xi^h, {}_2\xi^h$ которую запишем в виде

$${}_2\xi^h \neq d_1 {}_1\xi^h + e \xi^h, \quad (3)$$

где d, e — функции параметра t , и условия (2) выполненными, получаем в силу определения 1, что кривая $x^h(t)$ является три-геодезической. Таким образом, условия (2) при опраничении (3) являются определяющими для γ_3 в A_n ; (3) при этом означают исключение случаев вырождения три-геодезических в почти геодезические [1] (два-геодезические в нашей терминологии).

При выбранных функциях $a(t), b(t), c(t)$ условия (2) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных урав-

нений четвертого порядка в разрешенном виде относительно старших производных искомым функций $x^h(t)$. Предполагая выполнение условиями теоремы существования и единственности решений для таких систем из (2) при начальных условиях вида $x^h(t_0), \dot{x}^h(t_0), {}_1\ddot{x}^h(t_0), {}_2\ddot{x}^h(t_0)$ (конечно заданных так, что условия (3) соблюдены), получаем единственную γ_3 . Можно показать, что за счет подходящего выбора параметра τ всегда од-

ну из функций $\tilde{a}(\tau), \tilde{b}(\tau), \tilde{c}(\tau)$ удастся обратить в тождественный нуль вдоль данной γ_3 . Это говорит о том, что задание в системе (2) (или в A_n) существенно зависит от $4n$ произвольных постоянных и двух произвольных функций одного параметра. Как нетрудно убедиться, для обращения в тождественный

нуль вдоль γ_3 функции $\tilde{a}(\tau)$ нужно ввести параметр τ , удовлетворяющий дифференциальному уравнению $6d^2\tau/dt^2 = a(t)d\tau/dt$, которое легко интегрируется и, как известно [3, с. 36], дает решением аффинный параметр, определяющийся с точностью до линейного неоднородного преобразования. При переходе к аффинному параметру система (2) принимает вид

$${}_2\gamma_{,\alpha}^h \gamma^\alpha = \tilde{b}(\tau) {}_1\gamma^h + \tilde{c}(\tau) \gamma^h, \quad (2')$$

где $\gamma^h = dx^h/d\tau$, ${}_1\gamma^h = \gamma_{,\alpha}^h \gamma^\alpha$, ${}_2\gamma^h = {}_1\gamma_{,\alpha}^h \gamma^\alpha$ и, таким образом, функ-

ции — $\tilde{b}(\tau)$ и — $\tilde{c}(\tau)$ являются для γ_3 соответственно второй и первой аффинными кривизнами [3, с. 37]. Из (2') следует также, что отличными от нуля первые две аффинные кривизны, а последующие равными нулю, имеют три-геодезические и только они. Далее, так как 3-направление, определенное 3-вектором $\gamma_{,1}^h, {}_1\gamma_{,1}^h, {}_2\gamma_{,1}^h$ ковариантно постоянное относительно перенесения в A_n , то для тех случаев, когда A_n является римановым пространством, его три-геодезические будут иметь неравные нулю первые две кривизны, а последующие равные нулю. Когда же A_n плоское, все его три-геодезические находятся в трехмерных плоскостях [3].

2. Три-геодезические отображения. Определени с 2. Отображение пространства $\bar{A}_n$ на пространство A_n , при котором каждая γ_1 — геодезическая пространства $A_n(\Gamma_{ij}^h)$ переходит в $\gamma_3 \in A_n$, будем называть три-геодезическим и обозначать $\Pi(3)$.

Пусть в общей по три-геодезическому отображению системе координат величины

$$P_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \bar{\Gamma}_{ij}^h \quad (4)$$

являются тензором деформации три-геодезического отображения. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, с целью

процесса выкладок, считаем, что все $\gamma_i \in \bar{A}_n$ параметризованы геодезически, т. е. их уравнения имеют вид

$$\xi_{\alpha}^h \xi^{\alpha} = 0, \quad (5)$$

где вертикальной чертой обозначено ковариантное дифференцирование в $\bar{A}_n$. Учитывая, что (5) — уравнение прообраза, вследствие (4) будем иметь

$$1^h = P_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta}, \quad 2^h = P_{\alpha\beta\gamma}^h \xi^{\alpha\beta\gamma}, \quad 2^h_{,\alpha} \xi^{\alpha} = P_{\alpha\beta\gamma\delta}^h \xi^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где введены следующие обозначения: $\xi^{\alpha\beta\dots} = \xi^{\alpha}\xi^{\beta}\dots$, $(\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n)$, $P_{ijk}^h = SP_{ijk}^h + 2SP_{ia}^h P_{jk}^a$, $(i, j, \dots = 1, 2, \dots, n)$, $P_{ijk,l}^h = SP_{ijk,l}^h + 3SP_{ija}^h P_{kl}^a$, S — симметрирование по всем индексам ковариантности, кроме суммирующих.

Образом каждой $\gamma_i \in \bar{A}_n$ будет $\gamma_3 \in A_n$, касательный вектор которых (совпадающий для образа и прообраза в общей по три-геодезическому отображению системе координат) удовлетворяет в A_n условию (2) и (3), причем последние должны иметь место для произвольно взятого направления касательного вектора. Функции a, b, c, d, e при этом становятся зависимыми от компонент касательного вектора ξ^h . Таким образом, получаем: для того, чтобы отображение $\bar{A}_n$ на A_n было три-геодезическим, необходимо (и достаточно), чтобы в общей по отображению системе координат можно было указать три функции $A(x; \xi), B(x; \xi); C(x; \xi)$, вместе с которыми тензор деформации удовлетворяет в A_n условию

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}^h \xi^{\alpha\beta\gamma\delta} = A(x; \xi) P_{\alpha\beta\gamma}^h \xi^{\alpha\beta\gamma} + B(x; \xi) P_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta} + C(x; \xi) \xi^h \quad (6)$$

тождественно относительно переменных x^h, ξ^h . Условие (3) накладывает ограничение на тензор P_{ij}^h

$$P_{\alpha\beta\gamma}^h \xi^{\alpha\beta\gamma} \neq D(x; \xi) P_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta} + E(x; \xi) \xi^h, \quad (7)$$

где D, E — функции переменных x^h, ξ^h . Нарушение условий (7) при каких-то функциях D и E сводит три-геодезическое отображение к почти геодезическому [1], которое сейчас естественно считать тривиальным. Тождество (6) будем называть три-геодезическим тождеством, а функции A, B, C — его коэффициентами. С учетом (4) три-геодезическое тождество можно записать относительно пространства A_n .

Введенное три-геодезическое отображение качественно может быть охарактеризовано «деформацией» геодезических в пределах первых двух кривизн и последние для каждой «деформированной», (т. е. для $\gamma_3 \in A_n$) геодезической определяются коэффициентами A, B, C .

3. Специальные три-геодезические отображения. В три-геодезическом тождестве (6) зависимость коэффициентов от пере-

менных ξ^h не может быть, вообще говоря, совершенно произвольной. Если $\text{rang } P=3$, где $P = \| P_{\alpha\beta\gamma}^h \xi^{\alpha\beta\gamma} \rho_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta} \xi^h \|$, $h=1, 2$, то в (6) существуют три уравнения относительно неизвестных A, B, C , которые имеют единственное решение. Будучи численными по формулам Крамера, коэффициенты A, B, C будут представлять собой дробно-рациональные и однородные, соответственно первой, второй и третьей степени, функции относительно ξ^h .

Рассмотрим случай, когда A, B, C имеют вид

$$A = a_{\alpha} \xi^{\alpha}, \quad B = b_{\alpha\beta} \xi^{\alpha\beta}, \quad C = c_{\alpha\beta\gamma} \xi^{\alpha\beta\gamma}, \quad (8)$$

т. е. являются целыми функциями переменных ξ^h . Тогда величины a_i, b_{ij}, c_{ijk} суть компоненты тензоров, причем два последних можно считать симметричными. Из (6), вследствие (8), получим

$$SP_{ijk,l}^h + 3SP_{ija}^h P_{kl}^a = Sa_i P_{jkl}^h + Sb_{ij} P_{kl}^h + Sc_{ijk} \delta_l^h, \quad (9)$$

где δ_i^h — символ Кронекера.

Условие (9), при выбранных величинах a_i, b_{ij}, c_{ijk} , представляет систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно искомых функций P_{ij}^h . Совокупность решений ее должны ограничить условием (7), которое в классе целых рациональных коэффициентов запишется в виде

$$SP_{ij,k}^h + 2SP_{ia}^h P_{jk}^a \neq Sd_i P_{jk}^h + Se_{ij} \delta_k^h, \quad (10)$$

где d_i — вектор; e_{ij} — симметричный тензор. Будем называть (9) и (10) основными уравнениями три-геодезических отображений типа P^0 (3).

Когда A_n плоское и отнесено к аффинным координатам, (9) и (10) являются относительно объекта связности Γ_{ij}^h основными уравнениями $(n-3)$ проективных пространств общего случая [8].

В классе дробно-рациональных коэффициентов выделим шесть типов специальных три-геодезических отображений исходя из геометрических соображений.

Определение 3. Если $\gamma_3 \in A_n$ — образы геодезических $\gamma_1 \in A_n$ при отображении $\Pi^1(3)$ имеют параллельные трехмерные площадки, базисные векторы которых линейно и однородно зависят от ξ^h — компонент касательного вектора γ_1 , то такие отображения будем называть линейными три-геодезическими отображениями.

Получим основные уравнения линейных отображений $\Pi^1(3)$. Пусть $E_3 \{ \mu^h, \nu^h, \xi^h \}$ — соответствующие по линейному отображению $\Pi^1(3)$ параллельные трехмерные площадки. Тогда, по определению линейности отображения $\Pi^1(3)$, для этих площадок возможны такие случаи: $\mu^h = \mu_{\alpha}^h \xi^{\alpha}$, где μ_{α}^h —

аффинор, $\mu^h = \mu^h$, где μ^h — вектор, не зависящий от направления ξ^h ; аналогично для $\nu^h: \nu^h = \nu_{\alpha}^h \xi^{\alpha}$, где ν_i^h — аффинор, $\nu^h = \nu^h$, где ν^h — вектор, не зависящий от направления ξ^h — базисного вектора $\gamma_1 \in \bar{A}_n$.

Из линейной независимости базисных векторов μ^h, ν^h, ξ^h имеем

$$\mu^h \neq \sigma \nu^h + \chi \xi^h, \quad (11)$$

где σ и χ — некоторые функции x^h, ξ^h . Далее, так как $\xi_{\alpha}^h \xi^{\alpha} = P_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta}$, то в силу параллельности вышеуказанных площадок получаем

$$P_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta} = p \mu^h + q \nu^h + r \xi^h, \quad (12)$$

где p, q, r — некоторые целые и однородные относительно ξ^h функции. Отсюда следуют существенно отличающиеся друг от друга три алгебраических представления тензоров деформации линейных три-геодезических отображений Π^1 (3).

$$P_{ij}^h = S p_{ij} \mu_j^h + S q_{ij} \nu_j^h + S r_i \delta_j^h, \quad (13.1)$$

где p_i, q_i, r_i — векторы;

$$P_{ij}^h = p_{ij} \mu_j^h + q_{ij} \nu_j^h + S z_i \delta_j^h. \quad (14.1)$$

Здесь p_{ij}, q_{ij} — симметричные тензоры; r_i — вектор;

$$P_{ij}^h = S p_{ij} \mu_j^h + q_{ij} \nu_j^h + S r_i \delta_j^h, \quad (15.1)$$

p_i, r_i — векторы; q_{ij} — симметричный тензор. В свою очередь, параллельность площадок по отношению к оставшимся векторам μ^h, ν^h , соответственно (13.1), (14.1), (15.1) дает

$$\begin{cases} S \nu_{i,j}^h + S p_{i\alpha} \mu_{\alpha}^h \nu_j^h + S q_{i\alpha} \mu_{\alpha}^h \nu_j^h = \hat{S} \alpha_i \mu_j^h + \hat{S} \beta_i \nu_j^h + \hat{S} \gamma_i \delta_j^h; \\ S \nu_{i,j}^h + S q_{i\alpha} \nu_{\alpha}^h \nu_j^h + S p_{i\alpha} \nu_{\alpha}^h \mu_j^h = \hat{S} \alpha_i \mu_j^h + \hat{S} \beta_i \nu_j^h + \hat{S} \gamma_i \delta_j^h, \end{cases} \quad (13.2)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — векторы;

$$\begin{cases} \mu_{i,j}^h = \hat{\alpha}_i \mu_j^h + \hat{\beta}_i \nu_j^h + \hat{\gamma}_i \delta_j^h; \\ \nu_{i,j}^h = \check{\alpha}_i \mu_j^h + \check{\beta}_i \nu_j^h + \check{\gamma}_i \delta_j^h. \end{cases} \quad (14.2)$$

Здесь α_i, β_i — векторы; γ — функции точки;

$$\begin{cases} S \mu_{i,j}^h + S p_{i\alpha} \mu_{\alpha}^h \mu_j^h + q_{i\alpha} \mu_{\alpha}^h \nu_j^h = S \alpha_i \mu_j^h + \beta_i \nu_j^h + S \gamma_i \delta_j^h; \\ \nu_{i,j}^h = \alpha_i \mu_j^h + \beta_i \nu_j^h + \gamma_i \delta_j^h, \end{cases} \quad (15.2)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — векторы, β_{ij} — симметричный тензор, α, γ — функции точки.

Соотношения (13), (14), (15) будем называть основными уравнениями линейных три-геодезических отображений $\Pi_1^1(3)$, $\Pi_2^1(3)$, $\Pi_3^1(3)$ — соответственно первого, второго и третьего типов. Выполнения таких уравнений достаточно для того, чтобы пространства $\bar{A}_n$ и A_n находились в три-геодезическом соответствии. Действительно, если образовать формы $\rho_{\alpha\beta}^h \xi^\alpha \xi^\beta$, $\rho_{\alpha\beta\gamma}^h \xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma$, $\rho_{\alpha\beta\gamma\delta}^h \xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma \xi^\delta$ и учесть дифференциальные условия в основных уравнениях рассматриваемого типа, то коэффициенты A, B, C тождества (6) определяются однозначно и, как показывают вычисления, строятся целиком из ковариантных величин, входящих в основные уравнения. Они представляют собой дробно-рациональные функции соответственно первой, второй и третьей степени однородности относительно переменных ξ^h .

Для того, чтобы избежать пересечений линейных три-геодезических отображений, будем считать для $\Pi_1^1(3)$ и $\Pi_3^1(3)$ выполненными условия $\mu_i^h \neq f_i \mu^h + g \delta_i^h$, где f_i — вектор, g — функция точки. Вдобавок, соответственно типам отображений $\Pi^1(3)$, условия (11) накладывают следующие ограничения на контравариантные величины: $\mu_i^h \neq \sigma_i^h + \chi \delta_i^h$, $\nu_i^h \neq \sigma_i^h + \chi \delta_i^h$, $\mu^h \neq \sigma^h$, где σ, χ — функции точки; σ_i — вектор.

Таким образом, геометрически линейные три-геодезические отображения $\Pi_1^1(3)$, $\Pi_2^1(3)$, $\Pi_3^1(3)$ характеризуются тем, что образы геодезических $\gamma_i \in \bar{A}_n$ при таких отображениях соответственно имеют параллельные трехмерные площадки вида

$$E_3 \{ \mu_a^h \xi^\alpha, \nu_a^h \xi^\alpha, \xi^h \}, E_3 \{ \mu^h, \nu^h, \xi^h \}, E_3 \{ \mu_a^h \xi^\alpha, \nu^h, \xi^h \},$$

где ξ^h — касательный к $\gamma_i \in \bar{A}_n$. При этом тензорами $\mu(\mu_i^h$ или $\mu^h)$, $\nu(\nu_i^h$ или $\nu^h)$, $\delta(\delta_i^h)$ определяются распределения этих площадок в A_n .

В случае отображения $\Pi_1^1(3)$, соответствующего аффинорам μ_i^h , ν_i^h и δ_i^h , образами $\gamma_i \in \bar{A}_n$ будут кривые, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям $\frac{d^2 x^h}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = \mu(t) \mu_a^h \times \frac{dx^\alpha}{dt} + \nu(t) \nu_a^h \frac{dx^\alpha}{dt} + \delta(t) \frac{dx^h}{dt}$, где $\mu(t)$, $\nu(t)$, $\delta(t)$ — функции параметра вдоль образа. Эти кривые будут являться обобщением так называемых H -кривых [9] (три-геодезические являются таковыми, когда аффиноры, определяющие параллельные площадки, изоморфны некоторой трехмерной унитарной алгебре).

Линейные три-геодезические отображения $\Pi_1^1(3)$ и $\Pi_2^1(3)$ являются непосредственным обобщением линейных два-геодезических отображений первого и второго типа [1], [2], а следо-

тельно, как частных случаев последних, — аналитически-плоскостных и конциркулярных отображений. Из известных автору пространств линейные отображения $\Pi^1(3)$ на плоские будут опускать: $\Pi_2^1(3)$ — почти субпроективные пространства Ψ_n^2 , $\Pi_3^1(3)$ — почти субпроективные пространства Ψ_n^1 [10]. Подобным образом в классе дробно-рациональных коэффициентов можно выделить три типа квадратичных три-геодезических отображений $\Pi_1^2(3)$, $\Pi_2^2(3)$, $\Pi_3^2(3)$ — соответственно первого, второго и третьего типов. Их основные уравнения запишутся в виде: для $\Pi_1^2(3)$ —

$$P_{ij}^h = \mu_{ij}^h + \nu_{ij}^h + S r_i \delta_j^h; \quad (16.1)$$

$$S \mu_{ij,k}^h + 2S (\nu_{ia}^h \mu_{jk}^a + \nu_{ia}^h \mu_{jk}^a) = S \hat{\alpha}_i \nu_{jk}^h + S \hat{\beta}_i \nu_{jk}^h + S \gamma_{ij} \delta_k^h; \\ S \nu_{ij,k}^h + 2S (\nu_{ia}^h \mu_{jk}^a + \nu_{ia}^h \mu_{jk}^a) = S \check{\alpha}_i \nu_{jk}^h + S \check{\beta}_i \nu_{jk}^h + S \check{\gamma}_{ij} \delta_k^h, \quad (16.2)$$

где μ_{ij}^h , ν_{ij}^h , γ_{ij} — симметричные тензоры, r_i , α_i , β_i — векторы, для $\Pi_2^2(3)$ —

$$P_{ij}^h = S \mu_i \nu_j^h + \nu_{ij}^h + S r_i \delta_j^h; \quad (17.1)$$

$$S \mu_{i,j}^h + 2S (\mu_a^h \nu_{ij}^a + \mu_a^h \nu_{ij}^a) = S \alpha_i \mu_j^h + \beta \nu_{ij}^h + S \gamma_{ij} \delta_k^h; \quad (17.2)$$

$$S \nu_{ij,k}^h + 2S (\nu_{ia}^h \mu_{jk}^a + \nu_{ia}^h \mu_{jk}^a) = S \alpha_{ij} \mu_k^h + S \beta_i \nu_{jk}^h + S \gamma_{ij} \delta_k^h,$$

здесь ν_{ij}^h , α_{ij} , γ_{ij} — симметричные тензоры; μ_i , r_i , α_i , β_i , γ_i — векторы; β — функция точки; и для $\Pi_3^2(3)$ —

$$P_{ij}^h = \mu_{ij}^h + \nu_{ij}^h + S r_i \delta_j^h; \quad (18.1)$$

$$S \mu_{ij,k}^h = \alpha_{ijk} \mu^h + S \hat{\beta}_i \nu_{jk}^h + S \hat{\gamma}_{ij} \delta_k^h;$$

$$S \nu_{ij,k}^h + 2S (\nu_{ia}^h \mu_{jk}^a + \nu_{ia}^h \mu_{jk}^a) = \alpha_{ijk} \mu^h + S \beta_i \nu_{jk}^h + S \gamma_{ij} \delta_k^h, \quad (18.2)$$

где ν_{ij}^h , μ_{ij} , α_{ijk} , γ_{ij} — симметричные тензоры, μ^h , r_i , β_i — векторы.

Достаточность основных уравнений квадратичных три-геодезических отображений устанавливается аналогично случаю линейных отображений. Как и раньше, коэффициенты A , B , C три-геодезического тождества могут быть построены из ковариантных величин, входящих в основные уравнения и, как нетрудно проверить, являются дробно-рациональными и однородными функциями относительно переменных ξ^h . Параллельные трехмерные площадки для образов $\gamma_1 \in A_n$ соответственно отображениям $\Pi_1^2(3)$, $\Pi_2^2(3)$, $\Pi_3^2(3)$ имеют вид $E_3 \{ \mu_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta}, \nu_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta}, \xi^h \}$, $E_3 \{ \mu_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta}, \nu_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta}, \xi^h \}$, $E_3 \{ \mu_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta}, \nu_{\alpha\beta}^h \xi^{\alpha\beta}, \xi^h \}$, где ξ^h — касательный вектор к $\gamma_1 \in A_n$. Таким образом, зависимость базисных векторов этих площадок от компонент соответст-

вующего касательного вектора квадратичная и однородная Тензорами $\mu(\mu_{ij}^h$ или μ_i^h , или $\mu^h)$, $\nu(\nu_{ij}^h)$, $\delta(\delta_i^h)$ задаются распределения таких квадратичных площадок в A_n .

Избегая пересечений различных типов линейных и квадратичных отображений, будем считать: для всех типов квадратичных отображений —

$$\nu_{ij}^h \neq S f_i \nu_j^h + S g_i \delta_j^h, \quad \nu_{ij}^h \neq f_{ij} \nu^h + S g_i \delta_j^h, \quad (19)$$

где f_i, g_i — векторы; f_{ij} — симметричный тензор; для первого типа $\Pi_1^2(3)$ —

$$\mu_{ij}^h \neq S h_i \mu_j^h + S k_i \delta_j^h, \quad \mu_{ij}^h \neq h_{ij} \mu^h + S k_i \delta_j^h,$$

h_i, k_i — векторы; h_{ij} — симметричный тензор; и для второго типа $\Pi_2^2(3)$ — $\mu_{ij}^h \neq h_i \mu_j^h + k \delta_j^h$, где h_i — вектор; k — функции точки. Вдобавок для $\Pi_1^2(3)$ условия, аналогичные (11), дают

$$\mu_{ij}^h \neq \sigma \nu_{ij}^h + S x_i \delta_j^h, \quad (20)$$

где σ — функция точки; x_i — вектор (для остальных типов ограничения подобного рода уже содержатся в (19)). Отметим, что нарушение условий (20) сводит отображение $\Pi_1^2(3)$ к двугеодезическому, которое рассматривалось в классе целых коэффициентов [1].

В работе [11] рассмотрен вопрос о существовании линейных три-геодезических отображений, где указан способ построения отображений $\Pi^1(3)$ с помощью геодезических и линейных двугеодезических отображений. Рассмотрев два-геодезические отображения в классе целых коэффициентов, нетрудно по указанному способу построить примеры квадратичных три-геодезических отображений.

В заключение отметим, что с учетом (4) дифференциальные условия во всех основных уравнениях могут быть записаны относительно пространства A_n . Также отметим, что вышеуказанными типами не исчерпываются все три-геодезические отображения; полное решение этого вопроса наталкивается на некоторые трудности алгебраического характера. Нами выделены такие типы отображения $\Pi(3)$, которые представляют определенный интерес с геометрической точки зрения и являются естественными обобщениями рассматривавшихся ранее два-геодезических отображений.

Предполагается дальнейшее исследование указанных специальных три-геодезических отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сянюков Н. С. Почти-геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств. — «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 4, с. 781—782.

2. Спнюков Н. С. Почти-геодезические отображения пространств аффинной связности и е-структуры. — «Мат. заметки», 1970, вып. 4, с. 449—459.
3. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1948, с. 39—43.
4. Уано К. Concircular geometry. I—IV. — «Proc. Imp. Acad.», Tokyo, 1940, vol. 16, p. 56—69.
5. Tashiro Y. On holomorphically projective correspondences in an almost complex spaces. — «Math. J. Okayama Univ.», 1957, vol. 6, № 2, p. 147—152.
6. Уано К. The theory of Lie derivatives and its applications. — «Noth Holland Publishing Co.», Amsterdam, 1957, p. 144—161.
7. Каган В. Ф. Субпроективные пространства. М., Физматгиз, 1961. 80 с.
8. Мосану Р. Spatii partial projective. — «Studii si cerc. mat.», 1955, vol. 6, № 3—4, p. 495—528.
9. Кручкович Г. И. Гиперкомплексные геодезические и их вещественные реализации. — «Труды МИРЭА». Вып. 67. Математика, 1973, с. 3—11.
10. Степаненко П. Т. Объект связности почти субпроективных пространств. — «Науч. зап. Днепропетр. ун-та», 1961, т. 55. вып. 6, с. 449—459.
11. Лейко С. Г., Спнюков Н. С. К обобщению почти-геодезических отображений пространств аффинной связности. — «VI Всесоюзная геометрическая конференция. Тезисы докладов». Вильнюс, 1975, с. 137—139.

Поступила 27 сентября 1974 г.

О ПЕРВОМ СОБСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ ЛАПЛАСИАНА КОМПАКТНОЙ
ОРИЕНТИРУЕМОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА
ПРОСТРАНСТВА

Относительно первого собственного значения λ_1 лапласиана компактного связного риманова многообразия известны следующие результаты [1]. Чигер доказал, что для всякого целого n существует число $k(n)$, строго положительное, такое, что для всякого связного компактного риманова многообразия размерности n неотрицательной секционной кривизны имеем $\lambda_1 \leq k(n) [\text{diam}(M, g)]^{-2}$, где $\text{diam}(M, g) = \max_{x, y \in M} \rho(x, y)$ во внутренней метрике

g многообразия M . Известна также оценка Обата-Лихнеровича: если связное компактное риманово многообразие размерности n имеет в любом направлении кривизну Риччи не меньше, чем a^2 , то

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} a^2,$$

причем, в случае равенства, оно изометрично n -мерной сфере. Довольно полная библиография по данному вопросу имеется в обзоре С. А. Молчанова [2].

Мы устанавливаем следующую оценку для λ_1 .

Теорема. Пусть M — связная компактная ориентируемая гиперповерхность евклидова пространства R^{n+1} . Тогда

$$\lambda_1 \leq \text{vol}^{-1}(M) \int_M \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right) dV_n,$$

где $\text{vol}(M)$ есть n -мерный объем гиперповерхности M , k_i -я главная нормальная кривизна, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда M — гиперсфера.

Лемма I. Пусть $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n+1})$ — поле нормали к гиперповерхности M . Тогда

$$\sum_{j=1}^{n+1} \nabla_1 \xi^j = \sum_{i=1}^n k_i^2.$$

где ∇_1 — первый дифференциальный параметр Бельтрами гиперповерхности M в метрике погружения g .

Поскольку утверждение носит локальный характер, выберем в качестве координатных линий на M линии кривизны. По теореме Родрига

$$\begin{aligned} (\xi)_i^j &= k_i (x^j)_i & 1 \leq j \leq n+1 \\ & & 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

где индекс i обозначает дифференцирование по дуге i -й линии кривизны гиперповерхности.

Поскольку $g_{(0)}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ (символ Кронекера), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \nabla_1 \xi^j &= \sum_{j=1}^{n+1} g^{ij} (\xi)_i^j (\xi^j)_i = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n (\xi_i^j)^2 = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n k_i^2 (x^j)_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n k_i^2 \sum_{j=1}^{n+1} (x^j)_i^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2. \end{aligned}$$

Лемма 2. $\int_M \xi^j dV_n = 0$.

Другими словами, алгебраическая сумма площади проекции замкнутой ориентируемой гиперповерхности M на гиперплоскость евклидова пространства R^{n+1} с нормалью e_j равна нулю. Этот факт не нов, поэтому доказательство с помощью теоремы Стокса, которое мы приводим, несколько схематично.

Выберем настолько мелкое разбиение M , чтобы каждая клетка лежала целиком в одной из координатных систем на M . Мы покажем, что форма $\xi^j dV_n$ точная на M , поэтому, применяя теорему Стокса, сведем вычисление интеграла к сумме интегралов по граням разбиения. Поскольку каждая грань встречается в этой сумме дважды и с противоположными ориентациями, достаточно показать, что форма, которая интегрируется по грани, есть сужение некоторой формы объемлющего евклидова пространства, которая не зависит от локальных координат на M .

Нормаль ξ к гиперповерхности M в локальных координатах u_i , $i=1, \dots, n$ определяется системой уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi^j (x^j)_i = 0 \quad \sum_{j=1}^{n+1} \xi^j{}^2 = 1.$$

С точностью до знака эта система имеет решение

$$\xi^j = (-1)^j \Delta_j \left(\sum_{k=1}^{n+1} \Delta_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где Δ_j — определитель, получающийся вычеркиванием j -го столбца матрицы $\|(x^j)_i\|$ $j=1, \dots, n+1$; $i=1, \dots, n$.

В локальных координатах u'_i знак $(-1)^j$ тот же, иначе якобиан

$\frac{\partial(u'_1, \dots, u'_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}$ был бы отрицателен, что противоречит

ориентируемости M . Сомножитель $\left(\sum_{k=1}^{n+1} \Delta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ есть элемент

объема гиперповерхности евклидова пространства во внешней записи [3, с. 406]. Следовательно, $\xi^j dV_n = (-1)^j \Delta_j du_1 \dots du_n$, где $u_i, i=1, \dots, n$ — произвольные локальные координаты на M . Возьмем внешний дифференциал от формы ω_j степени $n-1$:

$$\omega_j = \sum_{\substack{1 \leq k < n+1 \\ k \neq j}} (-1)^{\alpha_k} x^k dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^{n+1},$$

где $\alpha_k = \begin{cases} k-1, & k < j \\ k-2, & k > j \end{cases}$, а надстрочный значок $\wedge$ означает пропуск находящегося под ним сомножителя:

$$\begin{aligned} d\omega_j &= \sum_{\substack{1 \leq k < n+1 \\ k \neq j}} (-1)^{\alpha_k} dx^k \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^{n+1} = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k < n+1 \\ k \neq j}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^{n+1} = \\ &= \Delta_j du_1 \wedge \dots \wedge du_n. \end{aligned}$$

Таким образом, $\xi^j dV_n = d(-1)^j \omega_j$ и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Для первого собственного значения лапласиана компактного риманова многообразия известна следующая формула [1, гл. 3]

$$\lambda_1 = \inf_{f \in H - \{0\}} \left(\frac{\int_M \nabla_1^2 f dV_n}{\int_M f^2 dV_n} \right). \quad H = \{f \mid \int_M f dV_n = 0\}.$$

Функции ξ^j определены на M глобально вследствие ориентируемости M и, по лемме 2, принадлежат H . Имеем для них

$$\lambda_1 \int_M \xi^{j^2} dV_n \leq \int_M \nabla_1^2 \xi^j dV_n, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Суммируя по j и используя лемму 1, получим

$$\lambda_1 \text{vol}(M) \leq \int_M \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right) dV_n.$$

Теперь предположим, что для некоторого M мы имеем здесь равенство. В таком случае

$$\lambda_1 = \frac{\int_M \nabla_1 \xi^j dV_n}{\int_M \xi^j dV_n}, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Следовательно, ξ^j — собственные функции лапласиана M , отвечающие собственному значению λ_1 . Используя производящие формулы [3, с. 580], имеем (a_{kp} — матрица второй фундаментальной формы M) $\Delta_M(\xi^j) = -g^{ik}(\xi^j)_{;i;k} = -g^{ik} \times (-a^p_{;i}(\xi^j)_{;p};k = g^{ik}(a^p_{;i})_{;k}(\xi^j)_{;p} + g^{ik}a^p_{;i}(\xi^j)_{;p;k} = (a^{kp})_{;k}(\xi^j)_{;p} + a^{kp}a_{kp}\xi^j = \lambda_1\xi^j$.

Сворачивая последнее равенство с ξ_j , получим

$$\lambda_1 = a^{kp}a_{kp} = \text{trace } \|a_{kp}\|^2 = \sum_{1 \leq i < n} k_i^2 = \text{const.}$$

Используя уравнения Кодаци, имеем $(a^{kp})_{;k}(\xi^j)_{;p} = (a^k_{;k})^{;p} \times (\xi^j)_{;p} = 0$, $j = 1, \dots, n+1$. Поскольку M — гиперповерхность, то ранг матрицы $(\xi^j)_{;p}$ $p=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n+1$ равен n . Поэтому векторы $v^j = ((\xi^j)_{;1}, \dots, (\xi^j)_{;n})$ натягивают касательное пространство $T_n M$.

Следовательно,

$$(a^k_{;k})^{;p} = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^{;p} = 0, \quad p = 1, \dots, n.$$

Поэтому $\sum_{i=1}^n k_i = \text{const}$ на гиперповерхности M .

Поскольку

$$\Delta_M \left(x^i + \frac{a^k_{;k}}{\lambda_1} \xi^j \right) = -g^{lm}(x^i)_{;l;m} + \frac{a^k_{;k}}{\lambda_1} \Delta_M \xi^j = -g^{lm}a_{lm}\xi^j + a^k_{;k}\xi^j = 0,$$

то из леммы Холфа [4, с. 338] следует, что

$$x^i + \frac{a^k_{;k}}{\lambda_1} \xi^j = c^j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Последняя запись означает, что M есть гипербсфера радиуса $R = \left(\frac{n}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{2}}$, так как $\lambda_1 = \sum_{i=1}^n k_i^2 = \frac{n}{R^2}$.

Укажем простое следствие полученной оценки. Допустим, что секционная кривизна M строго больше нуля. Обозначим, соответственно, через R и r максимальное и минимальное значение радиуса нормальной кривизны на M . Используя приведенную выше оценку Обата—Лихнеровича и полученную нами, имеем $nR^{-2} \leq \lambda_1 \leq nr^{-2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berger M., Gauduchon P., Mazet E. Le Spectre d'une variété Riemannienne, Berlin, Springer, 1971. 310 p.
2. Молчанов С. А. Диффузионные процессы и риманова геометрия. УМН, 1975, т. 30, вып. 1 (181), с. 3—59.
3. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967. 664 с.
4. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publish., New-York, 1969, vol. 2. 468 p.

Поступила 8 сентября 1975 г.

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ РОСТА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Цель этой статьи — получить в терминах внутренней метрики поверхности оценку роста гармонической функции, заданной на поверхности переменной кривизны. Доказывается.

Теорема. Пусть гауссова кривизна поверхности есть гладкая класса C^1 ограниченная функция $-k_1^2 \leq K \leq -k_2^2 < 0$, ($k_1 = \text{const}$). Пусть u — гармоническая функция в этой метрике ($\nabla_2 u = 0$, ∇_2 — оператор Бельтрами—Лапласа) и неотрицательная в геодезическом круге радиуса R . Тогда имеет место следующее неравенство для значения функции в точке, находящейся на расстоянии r от центра круга, при условии, что $r < R \frac{k_2}{k_1}$:

$$u(0) \frac{\text{sh} \left(\frac{Rk_2 - rk_1}{2} \right)}{\text{sh} \left(\frac{Rk_2 + rk_1}{2} \right)} \leq u(r) \leq u(0) \frac{\text{sh} \left(\frac{Rk_2 + rk_1}{2} \right)}{\text{sh} \left(\frac{Rk_2 - rk_1}{2} \right)}. \quad (1)$$

Известно, что на некомпактных поверхностях, например, на плоскости Лобачевского, существуют неотрицательные гармонические функции, отличные от постоянной. Фиксируя r и устремляя $R \rightarrow \infty$ из неравенства (1) можно получить

Следствие. Пусть u гармоническая неотрицательная функция на полной поверхности ограниченной отрицательной кривиз-

ны K , $(-k_1^2 \leq K \leq -k_2^2 < 0)$. Тогда для любых двух точек x_1, x_2 находящихся на расстоянии r во внутренней метрике друг от друга, имеет место неравенство

$$u(x_1) \cdot \exp(-rk_1) \leq u(x_2) \leq u(x_1) \cdot \exp(rk_1). \quad (2)$$

Лемма. Для гармонической функции в геодезическом круге плоскости Лобачевского формула Пуассона имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{\operatorname{th}^2\left(\frac{k}{2}R\right) - \operatorname{th}^2\left(\frac{k}{2}r\right)}{\operatorname{th}^2\left(\frac{k}{2}R\right) - 2 \operatorname{th}\left(\frac{k}{2}R\right) \operatorname{th}\left(\frac{k}{2}r\right) \times \rightarrow \\ \rightarrow d\varphi, \\ \times \cos(\varphi - \psi) + \operatorname{th}^2\left(\frac{k}{2}r\right)}$$

где r, φ — радиально-геодезические координаты, — k^2 — кривизна.

Непосредственно проверяется, что метрика $ds^2 = \frac{4}{k^2} \times \frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$ задает в круге $|z| < 1$ метрику постоянной отрицательной кривизны. Расстояние в этой метрике между точками 0 и z есть:

$$\rho(0, z) = \frac{2}{k} \int_0^{|z|} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{2}{k} \operatorname{ar} \operatorname{th} |z|.$$

Гармоническая в данной метрике функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\nabla_2 u = \frac{k^2(1-|z|^2)^2}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Следовательно, если $u(z)$ есть гармоническая функция в геодезическом круге радиуса R , то она является обычной гармонической в плоской метрике функцией в евклидовом круге с центром 0 радиуса $\operatorname{th}\left(\frac{k}{2}\right)R$. Применяя формулу Пуассона для круга, получим нужное представление.

Отсюда, обычным образом оценивая ядро, получаем аналог неравенства Гарнака для неотрицательных гармонических функций в геодезическом круге радиуса R

$$u(0) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}(R-r)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}(R+r)\right)} \leq u(r) \leq u(0) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}(R+r)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}(R-r)\right)}. \quad (3)$$

Аналогичные соотношения можно получить на сфере кривизны $k^2 > 0$.
 Достаточно рассмотреть метрику

$$ds^2 = \frac{4}{k^2} \frac{dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

на всей плоскости. Легко подсчитать, что это метрика всей сферы, т. е. $\rho(0, z) \leq \frac{\pi}{k}$. Выпишем соответствующие формулы без пояснений, имея в виду, однако, что в них во всех $0 \leq r < R < \frac{\pi}{k}$

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{k}{2}R\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{k}{2}r\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{k}{2}R\right) - 2\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}R\right)\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}r\right) \times \rightarrow \\ \rightarrow d\varphi; \\ \times \cos(\varphi - \psi) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{k}{2}r\right)} \\ u(0) \frac{\sin\left(\frac{k}{2}(R-r)\right)}{\sin\left(\frac{k}{2}(R+r)\right)} \leq u(r) \leq u(0) \frac{\sin\left(\frac{k}{2}(R+r)\right)}{\sin\left(\frac{k}{2}(R-r)\right)}.$$

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим в круге $|z| < 1$ две изотермические метрики постоянной кривизны — k_i^2

$$ds_i^2 = \frac{4}{k_i^2} \cdot \frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2} = v_i dzd\bar{z} \quad (i = 1, 2).$$

Обозначим через $C_{R,1}$ геодезический круг радиуса R с центром в точке 0 для метрики ds_1 . Согласно результатам Саттингера [1, 2] в круге $C_{R,1}$ существует решение уравнения $\Delta \ln v = -2Kv$, причем такое, что $v_1 \leq v \leq v_2$. Пусть точка ζ лежит внутри $C_{R,1}$. Имеют место следующие неравенства:

$$\rho_1(0, \zeta) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} (v_1 dzd\bar{z})^{1/2} \leq \rho(0, \zeta) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} (v dzd\bar{z})^{1/2} \leq \\ \leq \inf_{\gamma} \int_{\gamma} (v_2 dzd\bar{z})^{1/2} = \rho_2(0, \zeta),$$

где γ — произвольная спрямляемая дуга, соединяющая точки 0 и ζ . Если обозначить через $C_{\rho,i}$ и C_{ρ} , соответственно,

круги радиуса ρ в этих метриках, то из предыдущей цепочки неравенств следует $C_{\rho,1} \supseteq C_\rho \supseteq C_{\rho,2}$.

Поскольку все три метрики в $C_{R,1}$ изотермические, то гармоническая функция u будет обычной гармонической (в плоской метрике).

Так как $C_R \supseteq C_{R,2}$, то $u \geq 0$ в $C_{R,2}$. Но круг радиуса R в метрике ds_2 есть круг радиуса $R \frac{k_2}{k_1}$ в метрике ds_1 . Поэтому в круге $C_{R \frac{k_2}{k_1},1}$ функция u неотрицательна. По принципу минимума для гармонической функции

$$\min_{\partial C_{r,1}} u \leq u(r) \leq \max_{\partial C_{r,1}} u.$$

Применяя неравенство (3) для пространства постоянной кривизны k_1 , при $r < R \frac{k_2}{k_1}$ получим неравенство (1). Теорема доказана.

Приведем, для полноты аналогичное неравенство для метрики положительной кривизны K , $0 < k_2^2 \leq K \leq k_1^2$ ($k_i = \text{const}$).

Пусть u — неотрицательная гармоническая функция в геодезическом круге радиуса $R < \frac{\pi}{k_1}$. Тогда при $r < R \frac{k_2}{k_1}$ имеет место неравенство

$$u(0) \frac{\sin\left(\frac{Rk_2 - rk_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{Rk_2 + rk_1}{2}\right)} \leq u(r) \leq u(0) \frac{\sin\left(\frac{Rk_2 + rk_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{Rk_2 - rk_1}{2}\right)}.$$

В заключение покажем, как можно иначе получить неравенство (2) для многомерных пространств постоянной отрицательной секционной кривизны. Пусть H^n — n -мерное пространство постоянной отрицательной секционной кривизны k . Оператор Бельтрами-Лапласа в радиально-геодезических координатах имеет вид [3, с. 483]

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sqrt{-k} \frac{\text{ch}(\sqrt{-k} \cdot r)}{\text{sh}(\sqrt{-k} \cdot r)} (n-1) \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_2^*$$

где ∇_2^* — оператор Лапласа для сферы Σ_r радиуса r пространства H^n . Фундаментальное решение уравнения Лапласа $\nabla_2 f(r) = 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sqrt{-k} \frac{\text{ch}(\sqrt{-k} \cdot r)}{\text{sh}(\sqrt{-k} \cdot r)} (n-1) \cdot \frac{df}{dr} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$f(r) = \int_{r_0}^r \frac{c_1}{\operatorname{sh}(\sqrt{-k} \cdot t)^{n-1}} dt + c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Выберем $c_1 = (-k)^{\frac{n-1}{2}}$, $c_2 = 0$. Пусть u произвольная гармоническая функция в H^n . Действуя, как при доказательстве теоремы о среднем для гармонической функции в R^n , получим формулу [4, с. 49]

$$u(0) = \frac{(-k)^{\frac{n-1}{2}}}{\omega_{n-1}(\operatorname{sh}(\sqrt{-k} \cdot r))^{n-1}} \int_{\Sigma_r} u dV_{n-1},$$

где Σ_r — геодезическая сфера радиуса r в H^n , ω_{n-1} — площадь поверхности единичной сферы в R^n . Отсюда легко следует

$$u(0) \frac{\omega_{n-1}}{(-k)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^r \operatorname{sh}(\sqrt{-k}t)^{n-1} dt = \int_{B(r,0)} u dV_n, \quad (4)$$

где $B(r, 0)$ — геодезический шар радиуса r с центром в точке 0. При желании интеграл в левой части (4) можно вычислить точно, но нам это не требуется. Достаточно заметить, что это будет полином от $\exp(\sqrt{-k} \cdot r)$ степени $n-1$. Обозначим его $\psi_{n-1}(r)$.

Пусть $u(x)$ — гармоническая функция, заданная на всем пространстве H^n и неотрицательная на нем. Пусть точки x_1 и x_2 находятся на расстоянии r . Обозначим через $B(r, x_i)$ геодезический шар с центром в точке x_i радиуса r . Применим формулу (4) для области $B(R+r, x_1) \setminus B(R, x_2)$. Имеем

$$(u(x_1)\psi_{n-1}(R+r) - u(x_2)\psi_{n-1}(R)) \frac{\omega_{n-1}}{(-k)^{\frac{n-1}{2}}} = \int_{B(R+r, x_1) \setminus B(R, x_2)} u dV_n,$$

так как $u \geq 0$, то $u(x_1)\psi_{n-1}(R+r) - u(x_2)\psi_{n-1}(R) \geq 0$.

Устремляя $R \rightarrow \infty$, имеем (поскольку ψ_{n-1} есть полином степени $n-1$ от $\exp(\sqrt{-k}r)$) $u(x_1) \geq u(x_2) \exp(-r(n-1)\sqrt{-k})$. Меняя ролями x_1 и x_2 , получим неравенство

$$u(x_2) \exp(r(n-1)\sqrt{-k}) \geq u(x_1) \geq u(x_2) \exp(-r(n-1)\sqrt{-k}). \quad (5)$$

При $n=2$ это есть неравенство (2) для плоскости Лобачевского постоянной кривизны k .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sattinger D. H. Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems.—Indiana Univ. Math. Journ., 1972, vol. 21, № 11, p. 979–1000.

2. Sattinger D. H. Conformal metrics in R^2 with prescribed curvature. „Indiana Univ. Math. Journ.“, 1972, vol. 22, N 1, p. 1—4.
3. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., «Мир», 1964, 533 с.
4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., «Мир», 1974. 333 с.

Поступила 19 мая 1975 г.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ГЛАВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть F — дважды непрерывно дифференцируемая замкнутая выпуклая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, главные радиусы кривизны которой R_1 и R_2 ($R_1 \geq R_2 > 0$) в точке с единичной внешней нормалью n удовлетворяют уравнению

$$f(R_1, R_2, n) = 0, \quad (1)$$

где f — функция класса C^2 , симметричная ($f(R_1, R_2, n) = f(R_2, R_1, n)$) и строго возрастающая ($\frac{\partial f}{\partial R_1} > 0$, $\frac{\partial f}{\partial R_2} > 0$) по переменным R_1 и R_2 . Как показал А. В. Погорелов [1, с. 266], без ограничения общности условие симметричности можно заменить условием

$$f(R_1, R_2, n) = g(R_1, R_2, R_1 + R_2, n), \quad (2)$$

причем g также является дважды непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов, что следует из результатов А. Д. Александрова [2].

Поскольку функция f задана на единичной сфере, то не ограничивая общности можно считать ее положительно однородной первой степени относительно n ($f(R_1, R_2, \lambda n) = \lambda f(R_1, R_2, n)$, $\lambda > 0$).

Так как поверхность F — замкнутая, то в некоторой точке $P \in F$ больший главный радиус кривизны R_1 достигает максимума, а меньший главный радиус кривизны R_2 в некоторой точке $Q \in F$ достигает минимума.

Теорема 1. В точке P поверхности F , где R_1 достигает максимума в главном направлении p , выполняется неравенство

$$(R_1 - R_1) \frac{\partial f}{\partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} \left(\frac{\partial f / \partial p}{\partial f / \partial R_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial R_2 \partial p} \left(\frac{\partial f / \partial p}{\partial f / \partial R_2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \geq 0.$$

В точке Q поверхности F , где R_2 достигает минимума в главном направлении q , выполняется неравенство

$$(R_1 - R_2) \frac{\partial f}{\partial R_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} \left(\frac{\partial f / \partial q}{\partial f / \partial R_1} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial q} \left(\frac{\partial f / \partial q}{\partial f / \partial R_1} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \leq 0.$$

Доказательство. Оба утверждения теоремы доказываются методом А. В. Погорелова, с помощью которого были получены априорные оценки главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению $f(R_1, R_2) = \varphi(n)$ [3]. Поэтому выведем только первое неравенство.

Примем точку P за начало прямоугольной системы координат x, y, z , причем ось z направим вдоль внешней нормали к поверхности F в точке P , а ось x — вдоль главного направления p . Пусть $H(x, y, z)$ — опорная функция поверхности F . Для суммы и произведения главных радиусов кривизны поверхности F имеют следующие выражения [4, с. 535].

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= [(1 + x^2)r + 2xys + (1 + y^2)t] \sqrt{1 + x^2 + y^2}; \\ R_1 R_2 &= (rt - s^2)(1 + x^2 + y^2)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где r, s, t — обычные обозначения вторых производных функций $h(x, y) = H(x, y, 1)$.

Рассмотрим функцию А. В. Погорелова

$$w = r \frac{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}{1 + y^2},$$

достигающую максимума, равного R_1 , в начале координат и, значит, удовлетворяющую в точке $(0,0)$ условиям

$$w = r = R_1, \quad t = R_2, \quad s = 0; \quad w_x = r_x = 0, \quad w_y = r_y = 0; \quad w_{xx} = r_{xx} + 3r \leq 0, \quad w_{yy} = r_{yy} + r \leq 0. \quad (4)$$

Подставив в уравнение (1) из (3) выражения для суммы и произведения главных радиусов кривизны на основании (2), продифференцируем полученное равенство дважды по x . После первого дифференцирования с помощью (4) в точке $(0,0)$ получаем, замечая, что $g_1 R_1 + g_2 = \partial f / \partial R_2$,

$$t_x \frac{\partial f}{\partial R_2} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial t}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \zeta_x \right) \Big|_{y=0}, \quad (5)$$

где ξ, η, ζ — координаты единичного вектора n . А после второго дифференцирования получаем в точке $(0, 0)$ с помощью (4), заметив, что $g_{11} R_1^2 + 2g_{12} R_1 + g_{22} = \partial^2 f / \partial R_2^2$,

$$\begin{aligned} & w_{xx} \frac{\partial f}{\partial R_1} + w_{yy} \frac{\partial f}{\partial R_2} + (R_2 - R_1) \frac{\partial f}{\partial R_2} + t_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} = - \left[2t_x \times \right. \\ & \times \left(\frac{\partial^2 f}{\partial R_2 \partial \xi} \xi_x + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2 \partial \eta} \eta_x + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2 \partial \zeta} \zeta_x \right) + \frac{d^2 \bar{f}}{dx^2} \Big] \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $\bar{f}$ — сужение на S^3 функции f , рассматриваемой в $E^2 \times S^3$. В этой связи заметим, что правая часть равенства (5) есть, конечно, $-d\bar{f}/dx$.

С помощью свойства положительной однородной первой степени функции f по n легко можно показать, что правые части равенств (5) и (6) не зависят от текущих координат x и y . Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма. Пусть $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ — положительно однородная функция первой степени переменных ξ, η, ζ , являющихся координатами вектора единичной внешней нормали поверхности F . Тогда в выбранной системе координат

$$\frac{d\varphi}{dx} = \zeta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \xi \varphi \right), \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \zeta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \varphi + 3\xi^2 \varphi - 2\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right).$$

Утверждение леммы непосредственно следует из представления координат вектора n в выбранной системе координат [4, с. 533]:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Применяя лемму к равенствам (5) и (6), получаем после исключения из них t_x

$$\begin{aligned} & w_{xx} \frac{\partial f}{\partial R_1} + w_{yy} \frac{\partial f}{\partial R_2} - f + (R_2 - R_1) \frac{\partial f}{\partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} \left(\frac{\partial f / \partial \xi}{\partial f / \partial R_2} \right)^2 - \\ & - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial R_2 \partial \xi} \left(\frac{\partial f / \partial \xi}{\partial f / \partial R_2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0. \end{aligned}$$

Первое утверждение теоремы получается из последнего равенства, если принять во внимание, что, во-первых, в точке максимума

$$w_{xx} \frac{\partial f}{\partial R_1} + w_{yy} \frac{\partial f}{\partial R_2} - f \leq 0,$$

так как f — строго возрастающая функция по переменным R_1 и R_2 , а во-вторых, в точке на сфере, являющейся сферическим

изображением точки $P \in F$, направление ξ совпадает с главным направлением p и поэтому производная по ξ представляет собой производную по соответствующему направлению, не зависящую, как известно, от выбора системы координат. Теорема доказана.

Из теоремы 1 можно получить также, как это сделано в работе А. В. Погорелова [3], общие условия существования априорных оценок для радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению (1).

Теорема 2. Если для функции f , любой точки n на единичной сфере и для каждого направления l в ней выполняется условие

$$\lim_{\substack{R_2=R_2(R_1, n) \\ R_1 \rightarrow \infty}} \left\{ (R_2 - R_1) \frac{\partial f}{\partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} \left(\frac{\partial f / \partial l}{\partial f / \partial R_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial R_2 \partial l} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial f / \partial l}{\partial f / \partial R_2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} \right\} < 0,$$

то радиусы нормальной кривизны поверхности допускают оценку сверху. Если же для функции f , любой точки n на единичной сфере и каждого направления l в ней выполняется условие

$$\lim_{\substack{R_1=R_1(R_2, n) \\ R_2 \rightarrow 0}} \left\{ (R_1 - R_2) \frac{\partial f}{\partial R_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} \left(\frac{\partial f / \partial l}{\partial f / \partial R_1} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial l} \left(\frac{\partial f / \partial l}{\partial f / \partial R_1} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} \right\} > 0,$$

то радиусы нормальной кривизны поверхности F допускают положительную оценку снизу.

С помощью теоремы 2 доказывается теорема о существовании замкнутой выпуклой центрально-симметричной поверхности F_0 , удовлетворяющей уравнению (1) при $f(R_1, R_2, n) = f(R_1, R_2, -n)$, для чего достаточно поверхность F_0 включить в семейство поверхностей F_λ ($1 \geq \lambda \geq 0$), удовлетворяющих уравнению $f(R_1, R_2, n) = \lambda f(1, 1, n)$. Действительно, доказательство этой теоремы фактически содержится в доказательстве [4, с. 538—541] теоремы А. В. Погорелова о существовании замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению $f(R_1, R_2) = \varphi(n) = \varphi(-n)$, поскольку при переходе к криволинейным координатам на сфере получается эллиптическое уравнение общего вида.

В заключение отметим, что в [5], где уже рассматривался исследуемый в настоящей статье вопрос, при получении априорных оценок главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению $f(R_1, R_2, n) = \varphi(n)$, допущен ряд ошибок, оставивших след и в сформулированном там результате.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погорелов А. В. Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности. — «Докл. АН СССР», 1974, т. 216, № 2, с. 264—266.
2. Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». II. — «Вестн. Ленингр. ун-та», вып. 7, 1957, с. 15—44.

3. Погорелов А. В. Существование выпуклой поверхности с заданной функцией главных радиусов кривизны. — «Докл. АН СССР», 1967, т. 174, № 2, с. 291—293.
4. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969, 760 с.
5. Исапов Т. Г. Существование выпуклой поверхности с заданной функцией главных радиусов кривизны. — «Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии». Самарканд, 1972, с. 84.

Поступила 2 декабря 1975 г.

ИНВARIANTНОСТЬ ОСОБЕННОСТИ У КРАТЧАЙШЕЙ ЛИНИИ ПРИ ИЗГИБАНИИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Кратчайшая линия на выпуклой поверхности в E^3 может обладать особенностью — иметь в окрестности некоторой точки не-спрямляемое сферическое изображение [1—3]. В связи с этим представляется естественным исследование вопроса о поведении особенности у кратчайшей при изгибании поверхности в классе выпуклых.

В данной статье построением примеров устанавливается, что особенность у кратчайшей — не инвариант изгибания. Существуют две, даже сколь угодно близкие, изометричные выпуклые поверхности, на одной из которых сферический образ кратчайшей линии не спрямляем, а соответствующая кратчайшая на другой поверхности имеет спрямляемое сферическое изображение. Это утверждение выполняется для окрестности внутренней точки кратчайшей и также конечной точки, когда кратчайшая — не продолжаемая.

Статья состоит из пяти параграфов. В 1 строятся метрики с выделенными на них кратчайшими линиями; 2 — вспомогательный. Реализации этих метрик выпуклыми поверхностями, когда кратчайшие — с особенностями или без них, указываются в 3, 4. Сколь угодно близкие поверхности рассматриваются в 5. Некоторые из вычислений, в силу своей громоздкости, в статье опущены, но могут быть восстановлены на основании приведенного материала. Построение метрик и их реализаций для случаев внутренней и конечной точки кратчайших проводится параллельно.

§ 1. Построение метрики. 1. Пусть E — плоскость и $l' \subset E$ — прямая, подразделяющая E на части E^+ , E^- . Отметим на l' правильную последовательность точек $\{Q_n, Q_{n+1}, \dots\}$, сходящуюся к точке Q . Здесь n — число натуральное, фиксированное, достаточно большое, определяющееся конечным набором условий, которые возникают при изложении. Далее эти условия могут считаться выполненными. Построим перпендикуляры к l' : $Q_n Q_n, \dots, Q_{n+2k} \bar{Q}_{n+2k}, \dots$ — в полуплоскости E^+ и $Q_{n+1}, \bar{Q}_{n+1}, \dots, Q_{n+2k+1}$

$Q_{n+2k+1}, \dots$ — в E^- . Точки $\{Q_k\}$ соединим последовательно прямыми отрезками $Q_n Q_{n+1}, Q_{n+1} Q_{n+2}, \dots$. Введем бесконечные ломаные $L^+ = Q_n Q_{n+2} \dots Q_{2k} \dots Q$ и $L^- = Q_{n+1} \dots Q_{n+2k+1} \dots Q$.

Обозначения: Δ — конечная фигура в E с границей $L^+ \cup L^-$, $\bar{L} = L^+ \cup L^-$, $\Delta_k \subset \Delta$ — треугольник с вершинами Q_{k-1}, Q_k, Q_{k+1} ; δ_k, φ_k — соответственно наклоны к L^+ отрезков $Q_k Q_{k+1}$ и $Q_k Q_{k+2}$, $\delta_k = \delta_{k-1} + \delta_k$; ν_k — некоторый угол, сопоставляемый отрезку $Q_k Q_{k+1}$; s_k, h_k — соответственно длины отрезка $\bar{Q}_k, \bar{Q}_{k+1}$ и высоты $Q_k \bar{Q}_k$, $d_k = s_k + s_{k+1}$, $s_k = \bar{s}_k / \cos \delta_k$, $\bar{d}_k = d_k / \cos \varphi_k$, $h'_k = h_k + h_{k+1}$.

Пусть V_k — трехгранный угол с плоским углом в грани Δ_k^+ , равным $\pi - \delta_k$. Считается, что другие грани V_k, Δ_k^+ и Δ_k^- , соответственно, наклонены к Δ_k^+ под углами $\pi - \nu_k$ и $\pi - \nu_{k+1}$.

Пусть φ_k^+ и φ_k^- — плоские углы в гранях Δ_k^+ и Δ_k^- ; $\pi - \nu_k$ — двугранный угол между этими гранями; ω_k — кривизна V_k , $\Omega_k = \sum_{k+2} \omega_i$, где $(\cdot)$ означает суммирование по i одной четности с k .

2. Будем строить две метрики ρ и ρ_0 , заданные развертками и определяемые условиями:

$$\rho: s_k = e^{-k^2}, h_k = \alpha e^{-k^2} / 2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^{1+\alpha}, \quad \operatorname{tg} \nu_k = 1 / \left(k + \frac{1}{2}\right)^\alpha \times \\ \times \left(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1\right);$$

$$\rho_0: s_k = \alpha / \left(k + \frac{1}{2}\right) \left[\ln \left(k + \frac{1}{2}\right)\right]^{1+\alpha}, \quad h_k = \alpha^2 / 4k (\ln k)^{2+2\alpha-1},$$

$$\operatorname{tg} \nu_k = 2 / \left(k + \frac{1}{2}\right) \left[\ln \left(k + \frac{1}{2}\right)\right]^\gamma \quad (\gamma = (1 + \beta) / 2, \quad 0 < \alpha \leq \beta \leq 1).$$

Фигура Δ является частью искомым метрик. К ней подклеиваются элементы, которые строятся далее. Для введенных величин, связанных с областью Δ и углом V_k , имеем: $\operatorname{tg} \delta_k = h'_k / s_k$, $\operatorname{tg} \varphi_k = (h_k - h_{k+2}) / d_k$, $\operatorname{tg} (\omega_k / 2) = \sin (\nu_k / 2) \sin (\nu_{k-1} / 2) \times \times \sin \tilde{\delta}_k / \cos \tilde{\nu}_k$. Тогда при $k \rightarrow \infty$ для метрики ρ $\delta_k \sim \alpha / 2k^{1+\alpha}$, $\tilde{\delta}_k \sim 2\delta_k$, $\varphi_k \sim \delta_k$, $\bar{d}_k \sim d_k \sim s_k$, $|\nu_k - (\nu_{k-1} - \nu_k)| < \delta(k) \nu_k \tilde{\delta}_k$, где $\delta(k) \rightarrow 1$, $\tilde{\nu}_k \sim \alpha / k^{1+\alpha}$, $\omega_k \sim \alpha / 2k^{1+3\alpha}$, $\Omega_k \sim 1 / 12k^{3\alpha}$. Аналогично, для метрики ρ_0 $\delta_k \sim \alpha / 2 (\ln k)^{1+\alpha-1}$, $\tilde{\delta}_k \sim 2\delta_k$, $\varphi_k \sim \alpha / 4k (\ln k)^{1+\alpha-1}$, $\bar{d}_k \sim d_k \sim 2s_k$, $|\nu_k - \delta(k) \nu_k \tilde{\delta}_k| < \nu_{k-1} - \nu_k \sim \nu_k / k$, $\tilde{\nu}_k \sim 2\alpha / k (\ln k)^{1+\alpha}$, $\omega_k \sim 2\alpha / k_2 (\ln k)^{1+\alpha+1}$, $\Omega_k \sim \alpha / k (\ln k)^{1+\alpha+1}$.

3. Для каждого k проведем из точки Q_k лучи l_k^+ , l_k^- в E^+ (в E^- , если $Q_k \in E^-$), составляющие с отрезками $Q_k Q_{k+1}$, $Q_k Q_{k-1}$ углы φ_k^+ , φ_k^- соответственно. Отрезки $Q_{k-1} Q_k$, $Q_k Q_{k+1}$ и лучи l_{k-1}^+ , l_{k+1}^- определяют в плоскости E выпуклый, возможно, незамкнутый четырехугольник. Дополнение к Δ_k в этом четырехугольнике, не принадлежащее Δ , обозначим $\tilde{\Delta}_k$. В 2 устанавливается следующее. Для метрики ρ : при большом n треугольники $\tilde{\Delta}_k$ незамкнутые, $\varphi_k^+ \rightarrow 0$ и $\varphi_k^- \rightarrow \pi$ при $k \rightarrow \infty$. Для ρ_0 : при $k \rightarrow \infty$ боковые стороны $\tilde{\Delta}_k$ растут до бесконечности, $\varphi_k^\pm \rightarrow \pi/2$ ($\tilde{\Delta}_k$ — замкнутые, что нам не понадобится).

Треугольники $\{\tilde{\Delta}_k\}$ — элементы искоемых разверток; $\tilde{\Delta}_k$ подклеивается к Δ по основанию $Q_{k-1} Q_{k+1}$. В $\tilde{\Delta}_{k+1}$, $\tilde{\Delta}_{k-1}$ на максимально возможных участках, начиная с точки Q_k , склеиваются боковые стороны, принадлежащие соответствующим лучам l_k^+ , l_k^- ; отрезок, результат склеивания, обозначим l_k^* .

Для исследуемых метрик при $k \rightarrow \infty$ $\varphi_k \rightarrow 0$, причем убывание φ_k при большом n монотонно. Действительно, например, для ρ_0 $\operatorname{tg} \varphi_k - \operatorname{tg} \varphi_{k+1} = [(h_k - h_{k+2}) (s_{k+2} - s_k) / (s_k + s_{k+1}) + h_{k+2} - h_{k+1} - h_{k+3}] / (s_{k+1} + s_{k+2}) \sim 2\alpha^2 / 4k^3 (\ln k)^{2+2\alpha-1} (s_{k+1} + s_{k+2}) \sim \sim \operatorname{tg} \varphi_k / k > 0$.

Таким образом, линии L^+ и L^- со стороны Δ вогнутые (с отрицательными поворотами), а со стороны областей $\tilde{\Delta}^+ = \tilde{\Delta}_{n+1} \cup \dots \cup \tilde{\Delta}_{n+2k+1} \cup \dots$ и $\tilde{\Delta}^- = \tilde{\Delta}_{n+2} \cup \dots \cup \tilde{\Delta}_{n+2k} \cup \dots$ выпуклые, имеющие конечные повороты. Последнее вытекает из свойств $\{\varphi_k\}$ и неравенства $\sum \omega_k < \infty$. Поэтому области $\tilde{\Delta}^+$, $\tilde{\Delta}^-$ изометрически разворачиваются на плоскость. Для метрики ρ_0 , чтобы указанное разворачивание было возможным, условимся в следующем. В качестве элемента $\tilde{\Delta}_k$ областей $\tilde{\Delta}^+$, $\tilde{\Delta}^-$ рассматривается часть треугольника $\tilde{\Delta}_k$, удаленная от основания $Q_{k-1} Q_{k+1}$ не более, чем на некоторое фиксированное для всех k расстояние.

4. Случай метрики ρ . Пусть $\tilde{\Delta}^+ \subset E$ — плоская развертка. Область $\tilde{\Delta}^+$ бесконечная, выпуклая. Границу ее составляют луч l_n^+ , ломаная L^+ и луч l^+ , исходящий из точки Q под углом π к L^+ , $l^+ = \lim l_{n+2k}^*$ при $k \rightarrow \infty$. Часть замыкания $\tilde{\Delta}^+$, ограниченную лучом l^+ , ломаной L^+ и коллинеарным с l^+ лучом l_n^+ , исходящим из точки Q_n , обозначим Δ^+ . Аналогич-

но, отправляясь от $\tilde{\Delta}^-$, получим область Δ^- . В границу Δ^- входят: луч l^- , образующий в точке Q с L^- угол π , ломаная L^- , коллинеарный с l^- луч l_{n+1} , исходящий из Q_{n+1} . Часть l_k^* , принадлежащую соответствующей области Δ^+ , Δ^- , также обозначим l_k^* . Области Δ^+ , Δ^- склеиваются лучами l^+ , l^- ; результат склеивания лучей обозначим l .

Развертка ρ задана полностью. Она определяется как объединение $\Delta^+ \cup \Delta \cup \Delta^-$ с указанным правилом склеивания. Линия $\Delta = \bar{l} \cup l$ в метрике ρ — квазигеодезическая с нулевыми поворотами на обе стороны.

5. Метрика ρ_0 . Как и в предыдущем случае, используем плоские развертки $\tilde{\Delta}^+$, $\tilde{\Delta}^-$. Рассмотрим $\tilde{\Delta}^+$. Пусть l^+ — луч с началом в Q , составляющий с L^+ угол π ; l_n — луч, коллинеарный с l^+ , с началом в Q_n ; Δ^+ — область в плоскости с границей $l^+ \cup L^+ \cup l_n$, имеющая конечное пересечение с $\tilde{\Delta}^+$.

В границу области $\tilde{\Delta}^+$ входят ломаная L^+ и отрезок с началом в Q , перпендикулярный l^+ , предел соответствующих отрезков $\{l_k^*\}$ при $k \rightarrow \infty$. Оставшаяся часть границы области, так как n велико, располагается вне Δ^+ . Аналогично,

исходя из $\tilde{\Delta}^-$, определяем область Δ^- с границей $l^- \cup L^- \cup l_{n+1}$. Как и в метрике ρ , области Δ^+ , Δ^- — части развертки ρ_0 . Они соответственно подклеиваются к Δ по линиям L^+ , L^- и склеиваются лучами l^+ , l^- . Результат склеивания лучей обозначим l . Часть l_k^* , принадлежащую соответствующей области Δ^+ , Δ^- , также обозначим l_k^* . Линия $\Delta = \bar{l} \cup l$ в метрике ρ_0 — квазигеодезическая с нулевыми поворотами на обе стороны.

6. Пусть $QQ^+(Q^+ \in l_n)$, $QQ^-(Q^- \in l_{n+1})$ — прямолинейные отрезки в Δ^+ , Δ^- , соответственно перпендикулярные к l ; $Q_k Q_k'$ ($Q_k' \in Q^+ QQ^-$) — перпендикуляр в $\Delta^+ \cup \Delta^-$ к линии $Q^+ QQ^-$; $l_k \supset Q_k Q_k'$ — луч в соответствующей области с началом в Q_k . Луч l_k коллинеарен с l . Линия $Q^+ QQ^-$ разделяет метрики на части: Δ , в которой находится отрезок $\bar{l}$; Δ^* , в которой находится луч l . Обозначим x_k, y_k длины отрезков $Q_k Q_k' \subset \Delta^+ \cup \Delta^-$, $Q_k' Q \subset Q^+ QQ^-$.

Линии $\{Q_k Q_{k+1}\}$ и $\{l_k^*\}$ можно назвать ребрами рассматриваемых метрик. Ребра выделяют грани, изометричные выпуклым пятиугольникам. Грань, выделяемую ребрами l_{k-1}^* , $Q_{k-1} Q_k$, $Q_k Q_{k+1}$, l_{k+1}^* , обозначим Δ_k^* . В метрике ρ_0 гранью считается и полуполоска Δ^* .

Осуществив в развертках надлежащие разрезы и склеивания, приходим к другой структуре их ребер и граней. Ребрами

тогда считаются лучи $\{l_k\}$ и отрезки $\{Q_k Q_{k+1}\}$. Ими выделяют грани: $\{\Delta_k\}$ и области, изометричные плоским полуполоскам. Область с границей $l_{k-1} \cup Q_{k-1} Q_k \cup l_k$ обозначим Δ^k .

7. Линия Λ в метрике ρ_0 в окрестности точки Q кратчайшая. Это устанавливается, как и аналогичные утверждения в [2, ч. 1], на основании доказанного там достаточного признака геодезической линии (см. также [4,5]). Для метрики ρ_0 при $k \rightarrow \infty \sum_k \omega_k < Ch_k$, где $C > 0$ — не зависящая от k постоянная. Можно считать, что линия Λ — кратчайшая в целом.

8. Покажем, что линия l в метрике ρ — кратчайшая в окрестности Q . Эта линия не продолжается как кратчайшая за эту точку, поскольку $\omega_k \gg h_k$ при $k \rightarrow \infty$.

Допустим, что $\bar{l}$ в окрестности Q — не кратчайшая. Тогда существует последовательность точек $\{Z_{k_i}/Z_{k_i} \subset \bar{l}, k_i \rightarrow \infty \text{ при } i \rightarrow \infty\}$, сходящаяся к Q , и соответствующая ей последовательность кратчайших $\{Z_{k_i} Q\}$, для которых при любом k_i имеем $\overline{Z_{k_i} Q} \neq Z_{k_i} Q \subset \bar{l}$. Линия $\bar{l}$ и кратчайшая $\overline{Z_{k_i} Q}$ образуют в точке Q ненулевой угол [6], стремящийся, очевидно, к нулю при $i \rightarrow \infty$.

Можно считать, что $\overline{Z_{k_i} Q}$ во внутренних точках не пересекается с $\bar{l}$ и располагается, следовательно, по одну сторону от Δ , например, ту, которой принадлежит область Δ^+ . Из свойств ломаной L^+ по отношению к областям Δ , Δ^+ следует, что $\overline{Z_{k_i} Q}$ состоит из двух участков: $Z_{k_i} W_{k_i} \subset \Delta$, $W_{k_i} Q \subset \Delta^+$. Эти участки при разворачивании Δ , Δ^+ на плоскость переходят в прямолинейные отрезки. Можно принять, что $W_{k_i} \in Q_{k_i-2} Q_{k_i}$ ($W_{k_i} \neq Q_{k_i-2} Q_{k_i}$ — очевидно).

Пусть $Z \in Q_n Q_{n+1}$ — конец $\bar{l}$. Проведем в Δ прямолинейный отрезок ZQ_{k_i} , а в Δ^+ — $Q_{k_i} Q$. Линии ZQ_{k_i} и $Z_{k_i} W_{k_i}$ пересекаются, откуда следует (учитывая, что $\overline{Z_{k_i} Q}$ — кратчайшая), что угол $\tilde{\psi}_{k_i}$ в метрике ρ в точке Q_{k_i} со стороны W_{k_i} между ZQ_{k_i} и $Q_{k_i} Q$ меньше π . Покажем, что это ведет к противоречию.

Обозначения: ψ_{k_i} — угол в Q_{k_i} со стороны Q_{k_i+2} между ZQ_{k_i} и $Q_{k_i} Q$; ε_{k_i} — угол в Q между $\bar{l}$ и $Q_{k_i} Q$; $\tilde{\varepsilon}_{k_i}$ — угол наклона ZQ_{k_i} к $\bar{l}$, $\theta_k = \varphi_k + \Omega_k$.

Имеем: $\psi_{k_i} = \pi - \varphi_{k_i} - \varepsilon_{k_i} + \theta_{k_i} - \varepsilon_{k_i}$, $\tilde{\psi}_{k_i} = 2\pi - \psi_{k_i} - \omega_{k_i}$, $x_k = \sum_k \tilde{d}_i \cos \theta_i$, $y_k = \sum_k \tilde{d}_i \sin \theta_i$, $\operatorname{tg} \varepsilon_k = y_k/x_k$, $\operatorname{tg} \tilde{\varepsilon}_k = \operatorname{tg} \theta_k +$

$R(k)e^{-2k}$, $\tilde{\varepsilon}_k < \tilde{R}(k)e^{-k^2}$. Здесь $R, \tilde{R}$ при $k \rightarrow \infty$ эквивалентны функциям вида k^μ . Отсюда следует, что $\pi - \varphi_{k_i} \sim \varphi_{k_i} \sim \alpha/2k_i^{1+\alpha} \gg \alpha/2k_i^{1+3\alpha} \sim \omega_{k_i}, \tilde{\psi}_{k_i} > \pi$.

Получено противоречие. Таким образом, линия $\bar{l}$ в метрике ρ — кратчайшая в окрестности точки Q . Можно считать, что эта линия кратчайшая в целом.

§ 2. О треугольнике $\tilde{\Delta}_k$. 1. Построение метрик ρ, ρ_0 будет обосновано, если установить следующие предположения о свойствах $\tilde{\Delta}_k$.

Для метрики ρ : $\varphi_k^+ \rightarrow 0, \varphi_k^- \rightarrow \pi$ при $k \rightarrow \infty$; при большом n лучи l_{k-1}^+, l_{k+1}^- не пересекаются.

Для метрики ρ_0 : $\varphi_k^\pm \rightarrow \pi/2$ при $k \rightarrow \infty$; при большом n лучи l_{k-1}^+, l_{k+1}^- не пересекаются либо пересекаются, но образуют столь малый угол, что точка их пересечения $\tilde{Q}_k$ удаляется в бесконечность (на самом деле имеет место только последняя возможность).

2. Случай метрики ρ . Используя вспомогательный угол V_k (1, п. 2), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi - \varphi_k^+) &= \sin \tilde{\delta}_k / \left(\frac{\operatorname{tg} v_k}{\operatorname{tg} v_{k-1}} - \cos \tilde{\delta}_k \right) \cos v_k, \operatorname{tg}(\pi - \varphi_k^-) = \\ &= \sin \tilde{\delta}_k / \left(\frac{\operatorname{tg} v_{k-1}}{\operatorname{tg} v_k} - \cos \tilde{\delta}_k \right) \cos v_{k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая выражения для $\tilde{\delta}_k, \operatorname{tg} \tilde{\delta}_k, \operatorname{tg} v_k$ и соотношение $\alpha > 1/2$, имеем при $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_k^+ &= \frac{\alpha}{2} \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-1-\alpha} + \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1-\alpha}}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-\alpha} - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-\alpha}} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-\alpha} + o(k^{-1-\alpha}), \\ \operatorname{tg}(\pi - \varphi_k^-) &= \frac{\alpha}{2} \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-1-\alpha} + \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1-\alpha}}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-\alpha} - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-\alpha}} \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-\alpha} + o(k^{-1-\alpha}), \\ \varphi_k^+ &\rightarrow 0, \varphi_k^- \rightarrow \pi. \end{aligned}$$

Так как при $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\alpha}{2} \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-1-\alpha} + \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1-\alpha}}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-\alpha} - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-\alpha}} = 1 + O(k^{-2}),$$

$$\begin{aligned} \text{то } \operatorname{tg} \varphi_{k-1}^+ - \operatorname{tg} (\pi - \varphi_{k+1}^-) &= \left(k - \frac{3}{2}\right)^{-\alpha} - \left(k + \frac{3}{2}\right)^{-\alpha} + o(k^{-1-\alpha}) \sim \\ &\sim 3\alpha k^{-1-\alpha}, \quad \varphi_{k-1}^+ - (\pi - \varphi_{k+1}^-) - \tilde{\delta}_k \sim 2\alpha k^{-1-\alpha} > 0. \end{aligned}$$

Последнее соотношение показывает, что лучи l_{k-1}^+ и l_{k+1}^- не пересекаются.

3. Метрика ρ_0 . Учитывая формулы, приведенные в п. 2, и выражения для $\tilde{\delta}_k$, $\operatorname{tg} \tilde{\delta}_k$, $\operatorname{tg} \gamma_k$, имеем при $k \rightarrow \infty$: $\varphi_k^\pm > \pi/2$, $\varphi_k^\pm \rightarrow \pi/2$. Обозначим $\tilde{\varphi}_k^\pm = \varphi_k^\pm - \pi/2$, $\tilde{\delta}_{k+\frac{1}{2}} = \tilde{\delta}_k$, $\tilde{\gamma}_{k+\frac{1}{2}} = \gamma_k$, $\tilde{\delta}_k^* = \tilde{\varphi}_k^+ + \tilde{\varphi}_{k+1}^- - \tilde{\delta}_k = \tilde{\varphi}_{k-1}^+ + \tilde{\varphi}_{k+1}^- - \tilde{\delta}_{k-\frac{1}{2}} - \tilde{\delta}_{k+\frac{1}{2}}$.

Если лучи l_{k-1}^+ , l_{k+1}^- пересекаются, то угол между ними в точке пересечения $\tilde{Q}_k$ равен $|\tilde{\delta}_k^*|$. Покажем, что этот угол оценивается сверху функцией $\tilde{C}k^{-2}(\ln k)^{\tilde{a}^{(*)}}$, где $\tilde{C}$, $\tilde{a}$ — не зависящие от k постоянные. Будем записывать $u(k) \simeq v(k)$, если модуль $|u(k) - v(k)|$ допускает оценку сверху функцией вида (*). Далее проводится последовательное упрощение функции $\tilde{\delta}_k^*$ с помощью эквивалентностей $n \sim^a$, $n \simeq^a$. В этом плане

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_k^\pm &\simeq \left(\frac{\operatorname{tg} \tilde{\gamma}_{k \pm \frac{1}{2}}}{\operatorname{tg} \tilde{\gamma}_{k \mp \frac{1}{2}}} - \cos \tilde{\delta}_k \right) / \sin \tilde{\delta}_k \equiv \varepsilon_k^\pm + \operatorname{tg} \frac{\tilde{\delta}_k}{2}, \\ \varepsilon_k^\pm &\sim \mp \frac{1}{k \sin \tilde{\delta}_k}, \quad \operatorname{tg} \frac{\tilde{\delta}_k}{2} - \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k \pm \frac{1}{2}} \sim \pm \frac{1}{4k} \operatorname{tg} \tilde{\delta}_k, \\ \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_k^\pm - \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k \pm \frac{1}{2}} &\sim \varepsilon_k^\pm. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_k^* &= \tilde{\varphi}_{k-1}^+ - \tilde{\delta}_{k-\frac{1}{2}} + \tilde{\varphi}_{k+1}^- - \tilde{\delta}_{k+\frac{1}{2}} \sim \left(\operatorname{tg} \tilde{\varphi}_{k-1}^+ - \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k-\frac{1}{2}} \right) \times \\ &\times \left(1 - \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_{k+1}^- \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k+\frac{1}{2}} \right) + \left(\operatorname{tg} \tilde{\varphi}_{k+1}^- - \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k+\frac{1}{2}} \right) \left(1 - \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_{k-1}^+ \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k-\frac{1}{2}} \right) \sim \\ &\simeq \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_{k-1}^+ - \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k-\frac{1}{2}} + \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_{k+1}^- - \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k+\frac{1}{2}} = \varepsilon_{k-1}^+ + \varepsilon_{k+1}^- + \\ &+ \operatorname{tg} \frac{\tilde{\delta}_{k-1}}{2} + \operatorname{tg} \frac{\tilde{\delta}_{k+1}}{2} - \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k-\frac{1}{2}} - \operatorname{tg} \tilde{\delta}_{k+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Положим $\bar{\delta}_{k-\frac{1}{2}} = a$, $\bar{\delta}_{k+\frac{1}{2}} = b$. Тогда

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b) = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} \times \\ & \times (\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b - 2 \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \times \\ & \times \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} (\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b) \approx 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\bar{\delta}_k}{2} - \operatorname{tg} \bar{\delta}_{k \pm \frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \bar{\delta}_{k \mp \frac{1}{2}} - \right. \\ & \left. - \operatorname{tg} \bar{\delta}_{k \pm \frac{1}{2}} \right), \quad \delta_k^* \approx \varepsilon_{k-1}^+ + \varepsilon_{k+1}^- + \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \bar{\delta}_{k-\frac{3}{2}} + \operatorname{tg} \bar{\delta}_{k+\frac{3}{2}} - \operatorname{tg} \bar{\delta}_{k-\frac{1}{2}} - \right. \\ & \left. - \operatorname{tg} \bar{\delta}_{k+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Пусть $h(t) = \alpha^2/4t (\ln t)^{2+2\alpha-\gamma}$, $s(t) = \alpha \left/ \left(t + \frac{1}{2} \right) \right[\ln \left(t + \frac{1}{2} \right) \right]^{1+\alpha}$,

$\varphi \left(t + \frac{1}{2} \right) = [h(t) + h(t+1)]/s(t)$ — функции от t , рассматриваемые при $t \rightarrow \infty$. Для функции φ и произвольного числа $0(t) (|0(t)| \leq 2)$ $\varphi''(t) \sim \alpha(1+\alpha-\gamma)/2t^2 (\ln t)^{2+\alpha-\gamma}$, $\varphi''(t + \theta(t)) \sim \varphi''(t)$. Следовательно, $\operatorname{tg} \bar{\delta}_{k-\frac{3}{2}} + \operatorname{tg} \bar{\delta}_{k+\frac{3}{2}} - \operatorname{tg} \bar{\delta}_{k-\frac{1}{2}} - \operatorname{tg} \bar{\delta}_{k+\frac{1}{2}} =$
 $= \varphi \left(k - \frac{3}{2} \right) + \varphi \left(k + \frac{3}{2} \right) - \varphi \left(k - \frac{1}{2} \right) - \varphi \left(k + \frac{1}{2} \right) \approx 0,$

Дальнейшие упрощения для δ_k^* :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k-1}^+ + \varepsilon_{k+1}^- & \approx \left(\frac{\operatorname{tg} \bar{\nu}_{k-\frac{1}{2}}}{\operatorname{tg} \bar{\nu}_{k-\frac{3}{2}}} - 1 + \frac{\operatorname{tg} \bar{\nu}_{k+\frac{1}{2}}}{\operatorname{tg} \bar{\nu}_{k+\frac{3}{2}}} - 1 \right) / \sin \bar{\delta}_k \approx \\ & \approx \left(\operatorname{tg} \bar{\nu}_{k-\frac{1}{2}} + \operatorname{tg} \bar{\nu}_{k+\frac{1}{2}} - \operatorname{tg} \bar{\nu}_{k-\frac{3}{2}} - \operatorname{tg} \bar{\nu}_{k+\frac{3}{2}} \right) / \sin \bar{\delta}_k \operatorname{tg} \bar{\nu}_k \approx 0. \end{aligned}$$

Здесь используется вспомогательная функция $\nu(t) = 2/t (\ln t)^\gamma$.

Учитывая полученные значения компонент δ_k^* , находим $\delta_k^* \approx 0$, что и требовалось.

Осталось установить, что при $k \rightarrow \infty$ стороны $Q_{k-1} \tilde{Q}_k$, $Q_{k+1} \tilde{Q}_k$ треугольника $\tilde{\Delta}_k$ неограниченно возрастают. Для этого достаточно то же свойство доказать для отрезка $\tilde{Q}_k Q_k$.

Пусть δ_k — угол в $\Delta Q_k \tilde{Q}_k Q_{k+1}$ при вершине. Тогда при $k \rightarrow \infty$ для длины $\tilde{Q}_k Q_k$ имеем $|\tilde{Q}_k Q_k| = |Q_k Q_{k+1}| \sin \varphi_{k+1}^- / \sin \delta_k > |Q_k Q_{k+1}| / 2 \sin |\delta_k^*| \sim s_k / 2 \sin |\delta_k^*| \rightarrow \infty$. Этим искомыми свойствами треугольника $\tilde{\Delta}_k$ установлены полностью.

§ 3. Реализация с особенностью. 1. В вершине Q_k рассматриваемых метрик сходятся три грани — Δ_{k-1}^* , Δ_k^* , Δ_{k+1}^* (1, п. 6). Для соответствующей метрики окрестность Q_k , составленная из этих граней, изометрична окрестности вершины угла V_k (1, п. 1). Изометрия осуществляется с помощью отображений $\Delta_{k-1}^* \rightarrow \Delta_k^-$, $\Delta_k^* \rightarrow \Delta_k^+$, $\Delta_{k+1}^* \rightarrow \Delta_k^+$. Тем самым угол V_k дает локальную реализацию метрики, в которой грани Δ_k^* являются плоскими. Такая реализация единственная. Условимся, что элементы реализации, локальной или в целом, обозначаются далее теми же символами, что и элементы метрики. Пусть τ_k — поворот в пространстве образа части линии $\bar{l}$ на угле V_k при переходе через участок ребра $Q_k Q_{k+1} \subset V_k$. Тогда для метрики ρ_0 при $k \rightarrow \infty$ $\sin(\tau_k/2) = \sin \delta_k \sin(\nu_k/2) \sim \alpha/2k \times (\ln k)^{1+\alpha}$.

2. Рассмотрим случай метрики ρ . Пусть F^* — выпуклая поверхность, реализация метрики, в которой грани $\{\Delta_k^*\}$ плоские. Существование и единственность такой реализации обеспечиваются набором углов $\{V_k\}$. Поверхность F^* гладкая в точке Q , поскольку ломаная $Q_n Q_{n+1} \dots$ — с ограниченной вариацией поворота, а при $k \rightarrow \infty$ $\nu_k \rightarrow 0$, $\sum_k \tilde{\nu}_i \sim k^{-\alpha}/2 \rightarrow 0$,

где i — одной четности с k . При большом n эта поверхность однозначно проектируется на плоскость, касательную к F^* в Q . F^* имеем ребрами отрезки $\{Q_{k-1} Q_k\}$ и линии $\{l_k^*\}$, $l \subset F^*$ — луч в пространстве, предел l_k^* при $k \rightarrow \infty$.

Линия $\bar{l}$ на F^* в точке Q имеет особенность. Действительно, при любом k $\sum_k \nu_i \sim \sum_k i^{-\alpha} = \infty$.

3. Метрика ρ_0 . Пусть F_0^* — выпуклая поверхность, реализация метрики, в которой грани $\{\Delta_k^*\}$ плоские. F_0^* гладкая в точке Q и однозначно проектируется на плоскость, касательную к F_0^* в T . Напомним, что к граням метрики причисляется и полуполоска Δ^* . Существование и единственность такой реализации обеспечивается набором углов $\{V_k\}$, достаточно большим n и также следующими обстоятельствами. Линия $\bar{l} \subset F_0^*$ — с ограниченной вариацией поворота в пространстве: при $k \rightarrow \infty$ $\sum_k \tau_i \sim \sum_k \alpha/2i (\ln i)^{1+\alpha} < \infty$, $\nu_k \rightarrow 0$, $\sum_k \tilde{\nu}_i \sim \sum_k 2\alpha/i (\ln i)^{1+\alpha} \sim 1/(\ln k)^\alpha \rightarrow 0$.

Линия $\Lambda \subset F_0^*$ в точке Q имеет особенность, поскольку при любом k $\sum_k v_i \sim \sum_k 2/i (\ln i)^{-1} = \infty$.

§ 4. Реализация без особенности. 1. В этом параграфе гранями ρ, ρ_0 считаются треугольники $\{\Delta_k\}$ и бесконечные полуполоски $\{\Delta^k\}$, введенные в § 1, п. 6. Пусть F, F_0 — соответственно выпуклые бесконечногранные поверхности, являющиеся такими реализациями этих метрик в которых грани плоские. Элементы реализации обозначаются теми же символами, что и отвечающие им элементы метрики. Для каждой из реализаций линия Q^+Q^- плоская, грани $\{\Delta^k\}$ ортогональны несущей плоскости E' этой линии, точка $Q'_k \in Q^+Q^-$ — проекция вершины Q_k на E' . Так как $\{\Delta_k\}$ — треугольники, то рассматриваемые реализации метрик определяются однозначно.

Обозначения: Δ'_k — проекция Δ_k на E' ; s'_{k-1}, d'_{k-1} — соответственно длины сторон $Q'_{k-1}Q'_k, Q'_{k-1}Q'_{k+1}$ треугольника; $\delta'_k, \delta'_{k-1}, \delta'_{k+1}, \delta'_k$ — соответственно углы в вершинах Q'_{k-1}, Q'_{k+1}, Q'_k ; e_k, e'_k, n_k и e — соответственно орты векторов $Q_kQ_{k+1}, Q'_kQ'_{k+1}, (-1)^k[e_{k-1}e_k]$ и луча l . Для определенности считаем, что при k четном векторы e_{k-1}, e_k и e составляют правую тройку; тогда вектор n_k — внутренняя нормаль к соответствующей грани соответствующей поверхности.

Имеем

$$x_k = \sum_k d_i \cos \theta_{il} / \cos \varphi_i = \sum_k d_i - \sum_k d_i \left(\operatorname{tg} \varphi_i \sin \Omega_i + 2 \sin^2 \frac{\Omega_i}{2} \right).$$

Тогда $a_{k-1} \equiv x_{k-1} - x_k = s_{k-1} - x'_{k-1}$, где

$$x'_{k-1} = \sum_{k-1} d_i \left(\operatorname{tg} \varphi_i \sin \Omega_i + 2 \sin^2 \frac{\Omega_i}{2} \right) - \sum_k d_i \left(\operatorname{tg} \varphi_i \sin \Omega_i + 2 \sin^2 \frac{\Omega_i}{2} \right).$$

Длины сторон треугольника Δ'_k : $s'^2_{k-1} = s^2_{k-1} + h'^2_{k-1} - (x_{k-1} - x_k)^2 = h'^2_{k-1} + 2s_{k-1}x'_{k-1} - x'^2_{k-1}$, $s'^2_k = h'^2_k + 2s_kx'_k - x'^2_k$, $d'^2_{k-1} = d^2_{k-1} + (h'_{k-1} - h'_k)^2 - (d_{k-1} - x'_{k-1} - x'_k)^2 = (h'_{k-1} - h'_k)^2 + 2(s_{k-1} + s_k)(x'_{k-1} + x'_k) - (x'_{k-1} + x'_k)^2 = s'^2_{k-1} + s'^2_k - 2h'_{k-1}h'_k + 2s_{k-1}x'_k + 2s_kx'_{k-1} - 2x'_{k-1}x'_k$.

Нужно установить существование реализаций ρ, ρ_0 . Для этого достаточно доказать следующее.

Числа s'_{k-1}, s'_k, d'_{k-1} , определяющиеся внутренне геометрическим способом, удовлетворяют неравенству треугольника. Это

обеспечивает существование треугольника Δ'_k , а значит, и реализаций метрик бесконечногранными поверхностями.

Рассматриваемая поверхность располагается по одну сторону от несущей плоскости грани Δ^k , что эквивалентно выпуклости ломаной $Q^+ Q Q^- \subset E'$. Здесь нужно установить неравенство $\delta_k^+ + \delta_k' + \delta_k^- < \pi$. Рассматриваемая поверхность располагается по ту сторону от несущей плоскости грани Δ_k , в которую направлена нормаль к этой плоскости n^k . Сформулированные утверждения последовательно проверяются в п. 2, 3, 4.

2. Случай метрики ρ . При $k \rightarrow \infty$ $h'_k \sim s_k \varphi_k$, $x'_k \sim s_k \varphi_k \Omega_k$, $\varphi_k \gg \Omega_k$, $s'_k = h'_k(1 + \varepsilon_k'^2) > 0$, $d_{k-1}'^2 = s_{k-1}'^2 + s_k'^2 - 2h'_{k-1}h'_k(1 - \varepsilon_k'^2) > 0$, где ε_k' , $\varepsilon_k'' \rightarrow 0$. Числа s'_k монотонно убывают. Поэтому $d_{k-1}' + s'_{k-1} - s'_k > 0$. Справедливы неравенства

$$d_{k-1}'^2 - (s'_{k-1} - s'_k)^2 = 2s'_{k-1}s'_k - 2h'_{k-1}h'_k(1 - \varepsilon_k'^2) > 0,$$

$$d_{k-1}'^2 - (s'_{k-1} + s'_k)^2 = -2s'_{k-1}s'_k - 2h'_{k-1}h'_k(1 - \varepsilon_k'^2) < 0.$$

Следовательно, $d'_{k-1} + s'_k - s'_{k-1} > 0$, $s'_{k-1} + s'_k - d'_{k-1} > 0$.

Метрика ρ_0 . Здесь рассуждения аналогичны, $\rightarrow \infty$ если учесть, что $h'_k \sim 2s_k \varphi_k$, $x'_k \sim 6s_k \varphi_k \Omega_k$, $h_{k-1}'^2 - h_k'^2 \sim 2h_k'^2/k \sim 8ks_k^2 \varphi_k^2$.

3. Имеем

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta'_k}{2} = \frac{d_{k-1}'^2 - (s'_{k-1} - s'_k)^2}{-d_{k-1}'^2 + (s'_{k-1} + s'_k)^2} \sim 2 \frac{s_k x'_k}{h_k'^2}.$$

Отсюда вытекает, что угол δ'_k при $k \rightarrow \infty$ монотонно убывает, в частности $\sin \delta'_k - \sin \delta'_{k+1} \sim \sin(\delta'_k - \delta'_{k+1}) \sim (\sin \delta'_k)/k$, и что

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta'_k}{2} \sim \begin{cases} 2\Omega_k/\varphi_k \sim 1/3k^{2\alpha-1} \sim kv_k^2/3 & \text{для метрики } \rho, \\ 3\Omega_k/k^2 \varphi_k \sim 12/k^2 (\ln k)^{2\gamma} \sim 3v_k^2 & \text{для метрики } \rho_0. \end{cases}$$

Аналогично, пользуясь соответствующим представлением для $\operatorname{tg}^2(\delta_{k-1}^+/2)$, устанавливаем монотонное убывание δ_k^+ . При этом находим

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{k-1}^+}{2} / \operatorname{tg} \frac{\delta'_k}{2} = \frac{-d_{k-1}'^2 + (s'_{k-1} + s'_k)^2}{(d_{k-1}'^2 + s_{k-1}'^2) - s_k'^2} \sim 2h'_{k-1}h'_k / (s_{k-1}'^2 - h_{k-1}'^2 h'_k + s_{k-1}x'_k + s_k x'_{k-1} - x'_{k-1}x'_k + d'_{k-1}s'_{k-1}),$$

$$\operatorname{tg} \delta_{k-1}^+ \sim \operatorname{tg} \delta'_k \cdot \begin{cases} h'_k/h'_{k-1} \sim e^{-2k} & \text{для метрики } \rho, \\ k & \text{для метрики } \rho_0. \end{cases}$$

Теперь получаем при любом k : $\delta_{k+1}^- + \delta'_{k+1} + \delta_{k+1}^+ < \delta_{k+1}^- + \delta'_k + \delta_{k-1}^+ < \pi$.

4. Для каждой из метрик ρ, ρ_0 совокупность полуполосок $\{\Delta^k\}$ представляет собой цилиндрическую выпуклую поверхность. Поверхности F, F_0 получаются подклеиванием треугольников $\{\Delta^k\}$ по линии L^+UL^- к соответствующим цилиндрам. Эти поверхности выпуклые, если при любом k $(-1)^k(e_{k-1}e_k e_{k+1}) > 0$, или, что эквивалентно, положительно выражение $(-1)^k \Theta_k \equiv e(s'_{k-1}s'_k a_{k+1}[e'_{k-1}e'_k] + a_{k-1}s'_k s'_{k+1}[e'_k e'_{k+1}] + s'_{k-1}a_k s'_{k+1}[e'_{k+1}e'_{k-1}])$.

$$\text{Имеем } \Theta_k = s'_{k-1}s'_k a_{k+1} \sin \delta'_k - a_{k-1}s'_k s'_{k+1} \sin \delta'_{k+1} + s'_{k-1}a_k s'_{k+1} \times \\ \sin(\delta'_k - \delta'_{k+1}) \sim 3 \frac{1}{k} s'^2_k \frac{a_{k-1}a_{k+1}}{a_k} \sin \delta'_k > 0.$$

5. Угол γ^k между соседними нормальными n_k, n_{k+1} к грани Δ_k, Δ_{k+1} определяется соотношением $\sin \gamma^k \sim \Theta_k / s_{k-1} s_{k+1} \times$
 $\times s_{k+1} \tilde{\delta}_k \tilde{\delta}_{k+1}$. Поэтому

$$\gamma^k \sim \frac{3}{4k} \frac{s'^2_k}{s_k^2 \delta_k^2} \sin \delta'_k \sim \begin{cases} \gamma_k / 2 \sqrt{6k} = O(k^{-\frac{1}{2}-\alpha}) \text{ для } F, \\ 3 \sqrt{6} \gamma_k / k = O(k^{-2}) \text{ для } F_0. \end{cases}$$

Таким образом, на каждой из поверхностей F, F_0 в окрестности точки $Q \Sigma \gamma^k < \infty$ и, следовательно, эта точка на кратчайшей Λ не является особой.

§ 5. Инвариантность особенности. Кратчайшая Λ на поверхностях F^*, F_0^* в точке Q имеет особенность. Точка Q на линии Λ для поверхностей F, F_0 — не особая. Тем самым оказывается, что особенность на кратчайшей — не инвариант внутренней метрики выпуклой поверхности.

Рассматриваемые метрики имеют краем линии с неотрицательными поворотами. Следовательно, соответствующие им поверхности в классе выпуклых допускают непрерывные изгибания друг в друга [7]: $F^* \longleftrightarrow F, F_0^* \longleftrightarrow F_0$. В таком случае существуют и произвольно близкие выпуклые поверхности, несущие метрику $\rho(\rho_0)$, которые обладают следующими свойствами. Длина сферического изображения кратчайшей Λ на одной из поверхностей конечна. На другой поверхности сферическое изображение линии Λ в сколь угодно малой окрестности точки Q не спрямляемо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Залгаллер В. А. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 10, Харьков, 1971, с. 12—18.
2. Милка А. Д. Особенность у конца кратчайшей на выпуклой поверхности. Ч. 1. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 14, Харьков, 1973, с. 48—55.
3. Милка А. Д. Кратчайшая с неспрямляемым сферическим изображением. Ч. 1. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 16, Харьков, 1974, с. 35—52.

4. Милка А. Д. Оценки для кривизны множества примыкающего к кратчайшей. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 15, Харьков, 1974, с. 70—80.
5. Милка А. Д. Новые свойства кратчайших на выпуклых поверхностях. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 17, Харьков, 1975, с. 128—132.
6. Милка А. Д. О некоторых свойствах квазигеодезических. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 11, Харьков, 1971, с. 73—77.
7. Милка А. Д. О непрерывных изгибаниях выпуклых поверхностей. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 13, Харьков, 1972, с. 129—141.

Поступила 20 октября 1975 г.

К ИССЛЕДОВАНИЮ МОНЖЕВА УРАВНЕНИЯ

$$\Omega(x, dx) = ds^2 - d\varphi(x, y, z)^2 = 0$$

1°. Рассматривая в неголономной нелинейной дифференциальной геометрии Монжева многообразия проблему Софуса Ли [1] о совпадении геодезических линий с характеристическими на интегральных поверхностях нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка $F(x, y, z, p, q) = 0$, остановим внимание на монжевом уравнении

$$\Omega(x, dx) = ds^2 - d\varphi(x, y, z)^2 = 0, \quad (1)$$

где ds^2 — дифференциал дуги интегральной кривой монжева многообразия; $\varphi(x, y, z)$ — произвольная непрерывная функция от трех аргументов x, y, z .

Этому уравнению С. Ли сопоставил дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$F(x, y, z, p, q) = (p\varphi_x + q\varphi_y - \varphi_z)^2 - (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)(p^2 + q^2 + 1) = 0. \quad (1')$$

Рассматривая обобщенное монжево уравнение

$$\Omega(x; dx) = ds^{2k} - d\varphi(x, y, z)^{2k} = 0, \quad (1'')$$

где k — натуральное число, получаем класс монжевых уравнений, обладающих общим свойством: все его ∞^∞ интегральных кривых (по символическому обозначению Дюбуа—Реймонда) суть геодезические «кратчайшие».

Так как в (1) функция $\varphi(x, y, z)$ произвольна, положим $\varphi(x, y, z) = z\sqrt{2}$. Имеем $\Omega(x; dx) = dx^2 + dy^2 - dz^2 = 0$ (2) или

$$\Omega(x; x') = x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0. \quad (2')$$

— уравнение нелинейного линейчатого комплекса.

Исследуя (2) [6], приходим к тому, что в монжевом уравнении (2') любая интегральная кривая есть геодезическая «кратчайшая». Действительно, дифференциальные уравнения

геодезических «кратчайших» и геодезических «прямейших» в координатной форме (приведены по Синцову Д. М. [2]) в данном случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x''(1+2\lambda(s)) + 2\lambda'(s)x' &= 0; \\ y''(1+2\lambda(s)) + 2\lambda'(s)y' &= 0; \\ z''(1-2\lambda(s)) - 2\lambda'(s)z' &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Дифференциальное уравнение (2') вместе с $\sum x'^2 = 1$ дает

$$x'^2 + y'^2 = z'^2 = \frac{1}{2}.\tag{4}$$

Тогда из $z' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z'' = 0$ следует $\lambda'(s) = 0$ и по (3) $x''(1+2\lambda(s)) = 0$, $y''(1+2\lambda(s)) = 0$.

Если положить множитель Лагранжа $\lambda(s) = -\frac{1}{2}$, дифференциальные уравнения (3) удовлетворяются любой интегральной кривой дифференциального уравнения (2').

Имеем функциональный произвол в одну функцию, как видно из (4). Действительно, полагая в $x'^2 + y'^2 = \frac{1}{2}$ координату x — какой угодно функцией от s , получим

$$y = \int \sqrt{\frac{1}{2} - \varphi'(s)^2} ds = \psi(s).$$

Таким образом, в монжевом уравнении (2') любая интегральная кривая может рассматриваться как геодезическая «кратчайшая».

Уравнение Монжа (1) можно переписать: $ds^2 = 2dz^2$, откуда

$$ds = \pm \sqrt{2} dz,\tag{5}$$

и поскольку правая часть (5) есть полный дифференциал, длины дуг всех интегральных кривых, заключенных между плоскостями $z=c_1$, $z=c_2$, равны между собой.

Показано [6, с. 74], что геодезические «прямейшие» и характеристические линии (2'), а также обобщенного уравнения (1'') представляют прямые и образуют трехпараметрическое подмножество κ геодезических «кратчайших». С другой стороны, каждая интегральная кривая уравнений (1) и (1'') является геодезической «кратчайшей».

Согласно Софусу Ли, можно переходить от нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка к монжеву нелинейному однородному относительно dx , dy , dz и обратно. В силу коллинеарности нормалей к «конусу Мон-

жа» и интегральной поверхности дифференциального уравнения $F(x, y, z, p, q) = 0$ получаем формулы перехода, исключая p , из уравнений $dz = p dx + q dy$, $dy F_p - dx F_q = 0$ и $F(x, y, z; p, q) = 0$, а также dx, dy, dz из уравнений $\Omega_{x'} + p \Omega_{z'} = 0$, $\Omega_{y'} + q \Omega_{z'} = 0$ и $\Omega(x, dx) = 0$. С помощью этих формул приводим монжево уравнение нелинейного линейчатого комплекса (2') к виду $p^2 + q^2 - 1 = 0$ или в векторной форме $\text{grad } z^2 = 1$, что представляет дифференциальное уравнение распространения светового луча [7].

Заметим, что при подстановке $z\sqrt{2}$ вместо $\varphi(x, y, z)$ в уравнение (1'), соответствующее (1), приходим к полученному выше уравнению.

Можно сказать, что дифференциальное уравнение (1), приведенное в сочинении Софуса Ли, есть уравнение излучения электромагнитных волн произвольных источников Вселенной.

2°. Софус Ли предвидел дальнейшее развитие его проблемы в геометрии монжевых уравнений. Об этом свидетельствует его фраза [1, с. 666]: «Dies Problem wird hier aber nicht in vollem Umfange erledigt werden», т. е. «в полном объеме не закончено здесь». *Здесь* относится не к области нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка — в этом отношении считаем вопрос законченным, — слово *здесь* относится к предполагаемому исследованию в области монжевой геометрии, фундамент которой он заложил.

Софус Ли состоял в переписке с А. Фоссом — основоположником Punkt—Ebenen Systeme, как он называл в своих работах неголономную линейную дифференциальную геометрию Пфафова многообразия. Ему, конечно, неизвестны были дифференциальные уравнения геодезических «кратчайших» и «прямейших», приведенные А. Фоссом в его основном мемуаре. Он также был ближайшим другом Г. Герца, который определенно высказал в своей «Механике» (H. Hertz, Werke, B. III, 1894), что неголономные системы (имеются в виду Пфафовы и Монжевы многообразия) приводят к двум различным понятиям геодезических, согласно их различным определениям в классической теории поверхностей, и не мог не знать открытий, сделанных Г. Герцем в области электромагнитных волн.

Все это не могло не повлиять на исследования Софуса Ли, не оставить на них следов общения с такими выдающимися учеными II половины XIX столетия.

В первой четверти нашего века Синцов Д. М. дал в монжевом многообразии дифференциальные уравнения геодезических «кратчайших» и геодезических «прямейших» в координатной форме

$$x_i'' + \lambda'(s) \Omega_{x_i'} + \lambda(s) [(\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i}] = 0, \quad (a)$$

$$x_i'' - \nu(s) \Omega_{x_i'} = 0, \quad (b)$$

$i=1, 2, 3$, где в (а) множитель Лагранжа $\lambda(s)$ — функция от s , $\lambda'(s)$ — ее производная по дуге s интегральной кривой; а в (b) $v(s)$ — множитель коллинеарности двух векторов r'' и N , главной нормали геодезической «прямейшей» и нормали к «конусу» Монжа.

И если в Punkt — Ebenen Systeme Пфаффа многообразия совпадение геодезических «кратчайших» и геодезических «прямейших» приводит к условию интегрируемости, то, как видим, из (а), (b) оно в монжевом многообразии приводит к дифференциальному уравнению характеристических линий (в предположении, что оно уже выведено)

$$\mu(s) \Omega_{x'_i} = (\Omega_{x'_i})' - \Omega_{x_i}, \quad (c)$$

где $\mu(s) = -\frac{v(s) + \lambda'(s)}{\lambda(s)}$, откуда имеем соотношение

$$\lambda'(s) + \mu(s)\lambda(s) + v(s) = 0. \quad *)$$

между $\lambda(s)$ множителем Лагранжа, его производной и множителями коллинеарности $v(s)$, $\mu(s)$ векторов

$$r''(x'_i), P[(\Omega_{x'_i})' - \Omega_{x_i}], N(\Omega_{x'_i}),$$

либо к дифференциальному уравнению

$$r'' = \frac{v(s)}{\mu(s)} P, \quad (d)$$

полученному из требования совпадения в результате исключения вектора $N(\Omega_{x'_i})$. Позже, когда мы получили дифференциальное уравнение характеристических линий двумя способами, приводящими к одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_{x'} & (\Omega_{x'})' \\ \Omega_y & \Omega_{y'} & (\Omega_{y'})' \\ \Omega_z & \Omega_{z'} & (\Omega_{z'})' \end{vmatrix} = 0,$$

можно было преобразованием привести его к виду (с).

Заметим, что первый способ получения дифференциального уравнения характеристической линии состоял в решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений характеристических линий Лагранжа—Шарпи. При этом учитывается свойство, монжевых уравнений быть однородными относительно дифференциалов со степенью однородности $k > 1$. Имеет место теорема Эйлера об однородных функциях. Этим же способом получена дифференциальное уравнение характеристических кривых, пространственных на n измерений [5]. Оно позволяет решить инте-

грационную задачу в монжевом многообразии в основном как и для трех переменных.

Второй способ получения характеристических линий, называемый нами геометрическим, состоит в использовании сопряженных направлений, данных нами в монжевом многообразии с привлечением плоской кривой C , введенной Г. Дарбу [3].

3°. В исследовании проблемы Софуса Ли в монжевом многообразии относительно совпадения интегральных кривых указанного выше типа следует различать «локальную» задачу и задачу совпадения множеств «в целом», согласно их дифференциальным уравнениям (a), (b), (c), (d).

При «локальном» рассмотрении задачи приходим к теореме. Если интегральная кривая L монжева многообразия обладает двумя из трех ее свойств (быть геодезической «кратчайшей», геодезической «прямейшей», характеристической линией), ей будет присуще и третье.

К рассмотрению совпадения множеств интегральных кривых указанных типов приводит нас следующее. Заменяя $\lambda'(s)$ в дифференциальном уравнении (a) его значением из (*): $\lambda'(s) = -\mu(s)\lambda(s) - v(s)$, получаем

$$x_i'' - v(s)\Omega_{x_i}' - \lambda(s)\{\mu(s)\Omega_{x_i}' - [(\Omega_{x_i}')' - \Omega_{x_i}]\} = 0, \quad (a')$$

что вскрывает природу геодезических «кратчайших» — содержать в себе одновременно геодезические «прямейшие» и характеристические линии. Равенство нулю первого члена этого уравнения влечет за собой равенство нулю второго, и наоборот.

Если множитель Лагранжа $\lambda(s)$ есть константа, равная $\frac{v(s)}{\mu(s)}$, т. е. $\lambda'(s) = 0$ по (*) дифференциальное уравнение (a'), значит и (a) становится адекватным дифференциальному уравнению

$$r'' + \lambda(s)P = r'' - \frac{v(s)}{\mu(s)}P = 0.$$

Приходим к «полному» совпадению геодезических «кратчайших» с интегральными кривыми дифференциального уравнения (d), обладающих свойством быть одновременно геодезическими «прямейшими» и характеристическими кривыми.

Если $\lambda(s)$ есть функция от s и производная от нее $\lambda'(s) = -\varphi'(s) \neq 0$, доказываем [6, с. 67], что размерности множеств геодезических «прямейших», характеристических линий и интегральных кривых дифференциального уравнения (d) равны $k = 3$ по всей системе интегральных кривых монжева многообразия.

Размерность множества геодезических «кратчайших» в системе интегральных кривых ∞^∞ монжева многообразия есть про-

извол в четыре константы ввиду того, что в дифференциальное уравнение (а) входит производная $\lambda'(s)$.

Заметим, что размерность k множеств интегральных кривых дифференциальных уравнений (а), (в), (с), (d) при совпадении может быть и меньше, как показано в примере $\Omega(x, y, z; x', y', z') = 4yy'z' + y^2x'^2 - 4xy'^2 = 0$, которому соответствует $F(x, y, z; p, q) = qy - p^2 - z = 0$.

Теорема. Если вдоль каждой интегральной кривой L из множества θ размерности $k \leq 3$ монжева многообразия векторы r'', N, P взаимно коллинеарны: $r'' = \nu(s)N$, $\mu N = P$, эта кривая L является одновременно геодезической «прямейшей» характеристической кривой, интегральной кривой дифференциального уравнения (d) и служит геодезической «кратчайшей», множество которых θ имеет ту же размерность $k \leq 3$, что и множества геодезических «прямейших», характеристических линий и интегральных кривых дифференциального уравнения (d).

Множитель Лагранжа $\lambda(s)$ определяется линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (*).

Если множитель Лагранжа $\lambda(s) = -\frac{\nu(s)}{\mu(s)}$ есть константа и, стало быть, $\lambda'(s) = 0$, как видели, дифференциальное уравнение геодезических «кратчайших» адекватно (d) и размерность k их множеств вообще равна трем.

Но если $\lambda(s)$ есть функция от s и производная его $\lambda'(s) \neq 0$, множество геодезических «кратчайших», пребывая в системе $\infty^{\sim}$ интегральных кривых монжева многообразия размерностью $k = 4$, выделяет подмножество κ , являющееся множеством той же размерности, что и размерность множеств совпадающих геодезических «прямейших» и характеристических линий.

Приведенный выше пример монжева уравнения иллюстрирует сказанное.

В проблеме Софуса Ли под «совпадением» геодезической линии с характеристической на интегральной поверхности нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка понимают свойство кривой L быть одновременно геодезической и характеристической линией.

В пеголономной нелинейной дифференциальной геометрии монжева многообразия, поскольку в ней имеет место расщепление геодезических линий, согласно их двум различным определениям классической теории поверхностей, на геодезические «прямейшие» и геодезические «кратчайшие» под «совпадением» их с характеристической линией понимают свойство интегральной кривой L монжева многообразия одновременно быть геодезической «прямейшей», геодезической «кратчайшей» и характеристической линией (в локальном смысле).

Ввиду того, что в монжевом многообразии рассматривается «совпадение» интегральных кривых множествами равных размерностей ($k \leq 3$), то следует понимать это «совпадение» свой-

ством уже множества θ когерентно расположенных интегральных кривых монжева многообразия быть одновременно геодезическими «прямейшими», геодезическими «кратчайшими» и характеристическими линиями.

В проблеме Софуса Ли неголомомной нелинейной дифференциальной геометрии монжева многообразия дифференциальное уравнение $ds^2 - d\varphi(x, y, z)^2 = 0$ рассматривается двояким образом — геометрически и физически. С геометрической точки зрения оно обладает следующим свойством; все его интегральные кривые (функциональный произвол) — суть геодезические «кратчайшие» линии. Множества геодезических «кратчайших» размерности $k=3$ (оно выделяет подмножества χ) совпадают с множествами характеристических и геодезических «прямейших» той же размерности.

Физически дифференциальное уравнение (1) осуществляет излучение электромагнитных волн произвольных источников Вселенной, а также лазеров, которые являются источниками монохроматического и когерентного электромагнитного излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sophus Lie. Geometrie der Berührungstransformationen. B. I. Leipzig, 1896. 508 S.
2. Синцов Д. М. Геометрія монжевих рівнянь. — «Наук. зап. Харківськ. мат. т-ва», 1929, № 4, т. 3, с. 18—29.
3. Darboux G. Memoire sur les Solutions Singuliers des equations aux derivees partielles du premier ordre. — Ac. d. Sciences, 1950, t. 27, № 2, p. 3—11.
4. Николаенко М. А. О характеристических линиях монжевых уравнений. — «Вестн. Харьк. ун-та», 1965, т. 31, № 8, с. 37—42.
5. Николаенко М. А. Характеристические линии монжева уравнения в многомерном пространстве. — «Укр. геометр. сб.», вып. 3, 1966, с. 12—19.
6. Николаенко М. А. О совпадении геодезических линий с характеристическими в монжевом многообразии. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 14, 1973, с. 46—52.
7. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964. 300 с.
8. Николаенко М. А. Монжевы уравнения и физика. VI Всесоюзная геометрическая конференция по современным проблемам геометрии. Тезисы докладов, Вильнюс, 9—12 июня 1975 г.

Поступила 2 декабря 1975 г.

О ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Интерпретация движений первого рода псевдоевклидовой плоскости точками квазигиперболического пространства изучалась аналитическими средствами в работах [1, 2]. В настоящей статье рассматривается конструкция, скопированная с небольшими изменениями с известной конструкции так называемого кинематического отображения Бляшке-Грюнвальда [3—5], которая позволяет на множестве точек и плоскостей трехмерного проективного пространства P_3 , за исключением точек двух плоскостей π_1 и π_2 и плоскостей двух связок с вершинами P_1 и P_2 на прямой $\pi_1 \cap \pi_2$ (точки P_1 , P_2 и плоскости π_1 , π_2 служат абсолютным квазигиперболического пространства) ввести операцию умножения, превращающую это множество в группу, изоморф-

ную группе движений (первого и второго рода) псевдоевклидовой плоскости.

Пусть π , π_1 , π_2 — три горизонтальные плоскости расширенного до проективного трехмерного евклидова пространства R_3 , причем π посередине между π_1 и π_2 , p — несобственная прямая этих плоскостей, E — несобственная точка вертикальных прямых, P_1 и P_2 — несобственные точки каких-либо двух взаимно перпендикулярных направлений плоскости π . Каждой негоризонтальной прямой l пространства R_3 поставим в соответствие упорядоченную пару точек L_1, L_2 плоскости π следующим образом. Отразим прямую l от вертикальной плоскости LEP_1 , проходящей через точку $L = l \cap \pi$ (в отображении Бляшке-Грюнвальда прямая l поворачивается вокруг прямой LE на 90°), и точки пересечения отраженной прямой с плоскостями π_1, π_2 спроектируем ортогонально на π в точки L_1, L_2 . Отображение φ , переводящее негоризонтальные прямые l в пары (L_1, L_2) , взаимно однозначно — произвольной паре (L_1, L_2) отвечает единственный прообраз l .

Примем теперь точки P_1 и P_2 за абсолют плоскости π , превратив ее в псевдоевклидову плоскость, и покажем, что прямые произвольной связки, центр которой не лежит в π_1 и π_2 , переходят в отображении φ в такие пары точек, что первые точки пар преобразуются во вторые некоторым псевдоевклидовым движением первого рода.

Пусть A_0 , L_1^* , L_2^* — ортогональные проекции на π центра связки A и точек пересечения произвольной прямой l этой связки с плоскостями π_1 и π_2 , а $(L_1, L_2) = \varphi(l)$ (рис. 1). Тогда отображение $L_1^* \rightarrow L_2^*$ представляет собой гомотегию с центром A_0 и некоторым коэффициентом $k \neq 0$, а интересующее нас преобразование $\alpha(L_1 \rightarrow L_2)$ можно представить в виде произведения двух родственных преобразований — преобразования α_1 с осью A_0P_2 , направлением A_0P_1 и коэффициентом k , переводящего L_1 в L_2^* , и преобразования α_2 с осью A_0P_1 , направлением A_0P_2 и коэффициентом $1/k$, переводящего L_2^* в L_2 . Такое произведение есть гиперболический поворот с центром A_0 и асимптотами A_0P_1 и A_0P_2 [6] или псевдоевклидово вращение с центром A_0 [7].

На рис. 1 изображен случай, когда вершина связки A расположена вне слоя, ограниченного плоскостями π_1 и π_2 . При этом $k > 0$ и преобразование $\alpha = \varphi(A)$ есть чистый гиперболический поворот. Если, в частности, точка A — несобственная, то α — перенос, а если $A = E$, то α — тождественное преобразование.

Если же точка A между плоскостями π_1 и π_2 (рис. 2), то $k < 0$ и α — гиперболический поворот с отражением от центра. В самом деле, родственные преобразования $\alpha'_1 (L_1 \rightarrow L_2^*)$ и $\alpha'_2 (L_2^* \rightarrow L_2)$ с отрицательными коэффициентами — k и $-1/k$ разложимы в произведения $\sigma_1 \alpha_1$ и $\sigma_2 \alpha_2$ родственных преобразова-

ний α_1 и α_2 с теми же осями и направлениями и коэффициентами k и $1/k$ и отражений σ_1 и σ_2 от прямых A_0P_1 и A_0P_2 , и поскольку все четыре сомножителя в произведении $\alpha = \sigma_1 \alpha_1 \sigma_2 \alpha_2$ попарно перестановочны, то α есть гиперболический поворот ($\alpha_1 \alpha_2$) с отражением от центра ($\sigma_1 \sigma_2$). В частном случае, когда $A \in \pi$, α — симметрия с центром A .

Итак, каждой точке из R_3 , не лежащей в π_1 и π_2 (прямые связки с вершиной в π_1 или π_2 изображаются такими парами, у которых первые точки лежат на изотропной прямой одного,

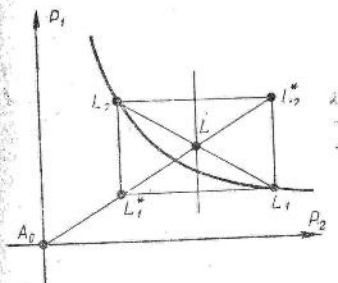


Рис. 1.

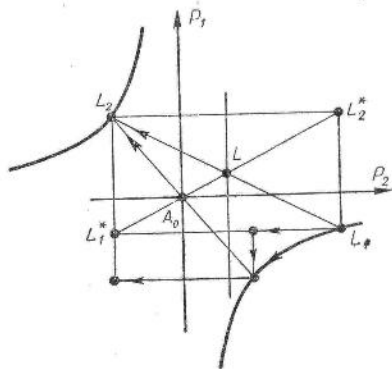


Рис. 2.

а вторые — на изотропной прямой другого направления) посредством отображения ϕ сопоставлено некоторое псевдоевклидово движение первого рода. Обратно: каждому движению отвечает единственная точка множества $G = R_3 \setminus (\pi_1 \cup \pi_2)$, т. е. ϕ есть биекция множества G на группу g движений первого рода псевдоевклидовой плоскости π .

Покажем теперь, что плоскости из R_3 , не инцидентные ни P_1 , ни P_2 , переходят в отображении ϕ в псевдоевклидовы движения второго рода. Пусть B_0 и L — следы на плоскости π плоскости B и ее произвольной прямой l , B_1, B_2 и L_1^*, L_2^* — ортогональные проекции на π прямых $B \cap \pi_1, B \cap \pi_2$ и точек $l \cap \pi_1, l \cap \pi_2$, $(L_1, L_2) = \phi(l)$, P, Q, R — точки пересечения прямой B_0 с прямыми $L_1 L_2^*, L_2 L_1^*, L_1 L_1^*$ и S — точка пересечения изотропных прямых RP_1 и PP_2 (рис. 3). Легко заметить, что отрезки SL_2 и PQ равны и параллельны, и что их длина и направление не зависят от выбора пары (L_1^*, L_2^*) . Учитывая это, заключаем, что преобразование $\beta = \phi(B)$, переводящее L_1 в L_2 , можно представить в виде произведения косоугольной симметрии с осью B_0 и направлением $L_1 S$ (эта косоугольная симметрия переводит L_1 в S) и переноса в направлении прямой B_0 , переводящего S в L_2 , т. е. β — аффинное скользящее отражение. Прямые SL_1 и PR — направление и ось отражения — будучи диагоналями евклидова прямоугольника гармонически сопряжены направлением его сторон — изотроп-

ным направлением псевдоевклидовой плоскости, т. е. взаимно перпендикулярны как псевдоевклидовы прямые. Следовательно, β не только аффинное, но и псевдоевклидово скользящее отражение (движение второго рода).

Если плоскость B вертикальная (проходит через точку E), то $\beta = \varphi(B)$ — чистое отражение (без переноса). Если плоскость B проходит через точку P_1 или P_2 , то пары точек, в которые φ переводит прямые из B , расположены на двух изотропных прямых одного направления.

Пусть H — множество плоскостей в R_3 , не содержащих ни P_1 , ни P_2 , h — множество псевдоевклидовых движений второго рода плоскости π , $\Gamma = G \cup H$ и $\gamma = g \cup h$. В этих обозначениях полученный нами результат запишется так: отображение φ есть биекция множества Γ на группу γ движений псевдоевклидовой плоскости, причем $\varphi(G) = g$, $\varphi(H) = h$.

Биекция φ^{-1} переносит в Γ структуру группы γ , т. е. Γ становится группой, изоморфной группе γ . Единицей группы Γ служит точка E , поскольку φ переводит ее в тождественное преобразование e из γ . Операции обращения в группе γ (переходу от прямого преобразования к обратному) отвечает отражение в плоскости π (точнее инволюционная гомология с центром E и плоскостью неподвижных точек π), поскольку пары точек, отличающиеся лишь порядком точек, φ^{-1} переводит в прямые, симметричные относительно плоскости π . Точки плоскости π и плоскости, перпендикулярные к π , переходят в этом отражении в себя. Это означает, что эти точки и плоскости являются инволютивными элементами группы Γ , т. е. сами себе обратны. В самом деле, выше мы упоминали, что эти точки и плоскости изображают соответственно центральные и осевые симметрии из группы γ . Точки плоскостей π_1 и π_2 и плоскости связок P_1 и P_2 не принадлежат группе Γ ; то обстоятельство, что при отражении от π плоскости π_1 и π_2 переходят одна в другую, а связки P_1 и P_2 — в себя, означает замкнутость группы Γ относительно операции взятия обратного элемента.

Займемся теперь вопросом о том, как построить в Γ точку (плоскость) — произведение двух точек или плоскостей (точки и плоскости) из Γ , т. е., например, как по точкам A и B , которые φ переводит в движения первого рода α и β , найти точку $AB = \varphi^{-1}(\alpha\beta)$. Предварительно отметим несколько простых, но важных для дальнейшего фактов.

Докажем, что если точка A принадлежит плоскости B , то движения α и β (соответственно первого и второго рода) имеют общую пару соответствующих прямых. Связка A и плоское поле прямых B имеют общий пучок прямых, которые φ переводит в ∞^1 общих пар соответствующих точек преобразований α и β . Пусть L_1, L_2 и M_1, M_2 — две такие общие пары точек. Тогда α и β переводят прямую L_1M_1 в прямую L_2M_2 , и если N_1, N_2 —

третья общая пара, то $N_1 \in L_1 M_1$ и $N_2 \in L_2 M_2$, так как в противном случае α и β совпадают.

Заметим, что два движения одинакового рода имеют не более одной общей пары соответствующих точек (эта пара изображает прямую, инцидентную точкам или плоскостям — прообразам этих движений; если прямая горизонтальна — общих пар нет).

Пусть m_1 — прямая, инцидентная P_1 и π_1 , m_2 — прямая, инцидентная P_2 и π_2 . Семейство прямых, пересекающих прямые m_1 и m_2 , т. е. гиперболическую линейную конгруэнцию с осями

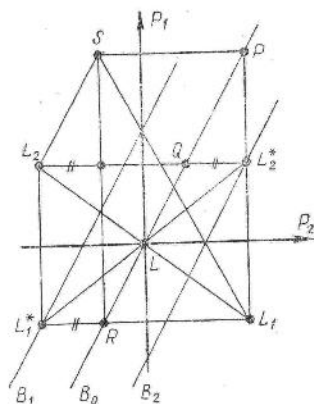


Рис. 3.

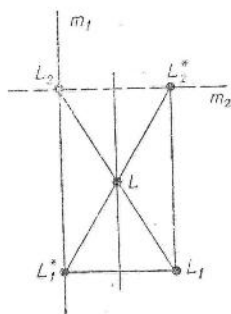


Рис. 4.

m_1 и m_2 , назовем правой конгруэнцией. Конгруэнцию с осями из пучков (P_1, π_2) и (P_2, π_1) назовем левой (в [1] эти конгруэнции называются паратактическими конгруэнциями квазитгиперболического пространства). Очевидно, что φ переводит прямые левых (правых) конгруэнций в такие пары точек, у которых первая (вторая) точка в паре одна и та же. На рис. 4 показана ортогональная проекция на π осей и одной прямой правой конгруэнции.

Вернемся к вопросу о произведении в группе Γ . Пусть α — фиксированное (для определенности первого рода), а ξ — переменное движение из γ ; $A = \varphi^{-1}(\alpha)$ — фиксированная точка, $X = \varphi^{-1}(\xi)$ — переменная точка или плоскость из Γ . Обозначим A_α левый сдвиг группы γ , порожденный элементом α — взаимно однозначное преобразование группы γ , переводящее движение ξ в его произведение $\alpha\xi$ слева на α . В Γ ему отвечает левый сдвиг A_α , порожденный точкой A , который переводит точку или плоскость X соответственно в точку или плоскость AH , поскольку произведение двух движений первого рода есть движение первого рода, а произведение движения первого рода на движение второго рода есть движение второго рода (если α — второго рода и A — плоскость, то A_α переводит точки в плоскости и плоскости в точки).

Пусть точка X лежит в плоскости Y ; тогда движения ξ и η переводят некоторую прямую n_1 в одну и ту же прямую n_2 . Если n — прообраз прямой n_1 в α , то $\alpha\xi$ и $\alpha\eta$ переводят прямую n в одну и ту же прямую n_2 (здесь и далее мы считаем, что преобразование, стоящее в произведении слева, действует первым), т. е. точка AX лежит в плоскости AU . Таким образом, сдвиг A_α переводит точки и плоскости взаимно однозначно в точки и плоскости или в плоскости и точки и сохраняет инцидентность. Следовательно, A_α — проективное преобразование; если A — точка, A_α — коллинеация, если A — плоскость, A_α — корреляция.

Отметим, что точка E переходит в сдвиге A_α в точку (плоскость) A , так как образом тождественного преобразования ε в сдвиге α_α служит движение $\alpha(\alpha_\alpha(\varepsilon) = \alpha\varepsilon = \alpha)$.

Пусть далее (L_1, L_2) — произвольная пара точек на π , а $l = \varphi^{-1}(L_1, L_2)$ — соответствующая прямая в R_3 . Точки и плоскости, инцидентные прямой l , изображают те псевдоевклидовы движения плоскости π , которые переводят L_1 в L_2 . Рассмотрим левый сдвиг α_α , переводящий ξ в $\xi' = \alpha\xi$ (род α безразличен). Пусть L — такая точка, что $\alpha(L) = L_1$. Тогда движения ξ с общей парой (L_1, L_2) переходят в α_α в движения ξ' с общей парой (L_1, L_2) , и прямая l переходит в сдвиге $A_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha_\alpha)$ в прямую $l' = \varphi^{-1}(L, L_2)$. Но поскольку у пар (L_1, L_2) и (L, L_2) вторая точка общая, то прямые l и l' принадлежат некоторой правой конгруэнции. Таким образом, соответствующие прямые левого сдвига в R_3 (безразлично коллинеации или корреляции) принадлежат правой конгруэнции (разумеется, разные пары соответствующих прямых могут принадлежать разным правым конгруэнциям). Другими словами, прямые любой правой конгруэнции переходят в левом сдвиге в прямые той же конгруэнции. Но тогда директрисы этой конгруэнции переходят в этом сдвиге в себя. Итак, доказана

Теорема. *Левый сдвиг A_α оставляет на месте каждую прямую пучков (P_1, π_1) и (P_2, π_2) .*

Чтобы доказать обратную теорему «Проективное преобразование в R_3 , оставляющее на месте каждую прямую пучков (P_1, π_1) и (P_2, π_2) , есть левый сдвиг группы Γ », достаточно показать, что такое проективное преобразование однозначно определяется заданием точки (плоскости) $A \in \Gamma$, в которую оно переводит единицу (точку E). Покажем, что существует единственная коллинеация K , оставляющая на месте каждую прямую пучков (P_1, π_1) и (P_2, π_2) и переводящая точку E в точку $A \in \Gamma$ (для случая корреляции доказательство двойственное). Для этого построим образ $M' = K(M)$ произвольной точки M . Пусть прямая $EM = m$ пересекает плоскости π_1, π_2 в точках M_1, M_2 , а m_1, m_2 — проходящие через эти точки прямые пучков (P_1, π_1) и (P_2, π_2) . Поскольку m пересекает неподвижные прямые m_1, m_2 , то $m' = K(m)$ также пересекает эти прямые. Кроме того прямая m'

проходит через точку A (так как m проходит через E) и, значит, определяется единственным образом. Если M'_1, M'_2 — точки пересечения прямой m' с плоскостями π_1, π_2 , то ряд $A, M'_1, M'_2, \dots$ прямой m' проективен ряду $E, M_1, M_2, \dots$ прямой m . Искомая точка M' соответствует в этой проективности точке M . Точно так же однозначно определяется прообраз M^{-1} точки M , т. е. коллинеация K , переводящая E в A и оставляющая неподвижными прямые пучков (P_1, π_1) и (P_2, π_2) , невырожденная и единственная, и, следовательно, совпадает с левым сдвигом A_α . В [1] коллинеации (корреляции) A_α называются левыми паратактическими сдвигами (косдвигами) квазигиперболического пространства.

Аналогично левому сдвигу определяется правый сдвиг A_n , порожденный точкой (плоскостью) A , который оставляет на месте все прямые пучков (P_1, π_2) и (P_2, π_1) . Перефразируя очевидным образом все утверждения о левых сдвигах, получим аналогичные утверждения о правых сдвигах.

Произведение $\alpha\beta$ в группе γ есть, очевидно, образ движения β в сдвиге α_α или образ движения α в сдвиге β_n ($\alpha\beta = \alpha_\alpha(\beta) = \beta_n(\alpha)$). В силу отображения φ^{-1} аналогично определяется произведение AB в группе Γ : $AB = A_\alpha(B) = B_n(A)$. Если, например, A — точка, а B — плоскость, то плоскость, AB есть образ плоскости B в коллинеации A_α или образ точки A в корреляции B_n .

Левые (правые) сдвиги группы Γ образуют группу Γ_α (Γ_n), изоморфную группе Γ . Для правых сдвигов изоморфизмом будет отображение $A \rightarrow A_n$; для левых сдвигов отображение $A \rightarrow A_\alpha$ будет антиизоморфизмом (произведение переходит в произведение с переставленными сомножителями), а изоморфизмом будет, например, отображение $A^{-1} \rightarrow A_\alpha$. Группа Γ_α (Γ_n) действует на группе Γ просто транзитивно, т. е. для двух любых элементов $A, B \in \Gamma$ существует единственный сдвиг из Γ_α (Γ_n), переводящий A в B . Выясним, какие сдвиги группы Γ отвечают сдвигам группы γ , порожденным движениями различного вида — поворотами, переносами, отражениями.

Пусть $\alpha \in \gamma$ — отличное от переноса движение первого рода, и A — соответствующая ему собственная точка. Пусть $l = XX'$ — прямая, соединяющая пару соответствующих точек X и $X' = AX$ коллинеации A_α . Тогда пара $(L_1, L_2) = \varphi(l)$ служит общей парой соответствующих точек движений $\xi = \varphi(X)$ и $\xi' = \varphi(X') = \varphi(AX) = \alpha\xi$. Но так как ξ и $\alpha\xi$ переводят L_1 в L_2 , то L_1 — неподвижная точка преобразования α . Пусть Y — еще какая-нибудь точка прямой XX' и $\eta = \varphi(Y)$. Тогда $\eta(L_1) = L_2$, так как связка Y содержит прямую l . Но так как $\alpha(L_1) = L_1$, то $\alpha\eta = \eta'$ переводит L_1 в L_2 , и точка $Y' = \varphi^{-1}(\eta')$ также лежит на прямой l . Итак, прямая l , соединяющая произвольную пару соответствующих точек в коллинеации A_α , переходит в этой коллинеации в себя, т. е. коллинеация — гомология. Больше того, поскольку первая точка в паре (L_1, L_2) фиксирована (как двойная точка

движения α), то прямые, соединяющие пары соответствующих в A_α точек, образуют левую конгруэнцию, и A_α есть двухосная гомология, осями которой служат оси этой конгруэнции. Если α — центральная симметрия, то гомология A_α — инволюционная.

Если α — перенос, то прямые, соединяющие пары соответствующих точек сдвига A_α , горизонтальные; допустив противное, мы пришли бы, повторяя предыдущие рассуждения, к нелепому выводу, что перенос имеет неподвижную точку. Можно показать, что эти прямые образуют параболическую линейную конгруэнцию с осью P_1P_2 , т. е. конгруэнцию, состоящую из пучков с вершинами на прямой P_1P_2 в плоскостях, проходящих через эту прямую, причем между вершинами и плоскостями пучков имеется проективное соответствие, в котором точкам P_1, P_2 и точке пересечения прямых EA и P_1P_2 соответствуют плоскости π_1, π_2 и несобственная плоскость. Сдвиг A_α , таким образом, представляет собой в этом случае параболическую гомологию с осью P_1P_2 . Можно получить такую гомологию как произведение, например, двух инволюционных гомологий из Γ , отвечающих двум центральным симметриям из γ .

Если α — отражение с осью A_0 , то движения ξ и $\xi' = \alpha\xi$ имеют общую пару соответствующих прямых A_0 и $\xi(A_0)$, что означает, что изображающие их точка X и плоскость X' (или плоскость X и точка X') инцидентны. Но корреляция A_α , в которой соответствующие точки и плоскости инцидентны, есть нуль-система.

Любая вертикальная прямая s переходит в себя в отражении от плоскости π и в любом сдвиге, порожденном любой ее точкой. Это означает замкнутость прямой s относительно обращения и умножения в Γ . Поэтому прямая s является подгруппой в Γ . В группе γ ей отвечает подгруппа поворотов с общим центром $s \in \pi$. Множество произведений As ($A \in \Gamma$), т. е. левый смежный класс точки (плоскости) A по подгруппе s , есть образ прямой s в сдвиге A_α . Но прямая $A_\alpha(s)$ принадлежит той же правой конгруэнции, что и s . Таким образом, левые смежные классы группы Γ по подгруппе s суть прямые правой конгруэнции, содержащей s (точнее точечные ряды и пучки плоскостей, инцидентные этим прямым). Правые смежные классы по s образуют левую конгруэнцию. Если s_0 одновременно и точечный ряд и пучок плоскостей с носителем s , то s_0 также подгруппа в Γ .

Несобственная плоскость σ , точки которой изображают переносы группы γ , является нормальным делителем в Γ . Смежные классы по σ суть горизонтальные плоскости и связи плоскостей с вершинами на прямой P_1P_2 . Поскольку подгруппа s_0 содержится в точности по одному представителю из каждого смежного класса, то факторгруппа Γ/σ изоморфна группе s_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., «Наука», 1969. 547 с.
2. Моторный Л. Т. К кинематике неевклидовых плоскостей. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 4, Харьков, 1967, с. 56—67.
3. Клейн Ф. Высшая геометрия. М., «Наука», 1939. 400 с.
4. Жаров В. А. Пространственная модель перемещений плоскости. — «Учен. зап. Яросл. пед. ин-та». Вып. 92, 1971, с. 243—254.
5. Пеклич В. А. О кинематическом отображении Бляшке-Грюнвальда. — «Учен. зап. Яросл. пед. ин-та». Вып. 109, 1973, с. 124—127.
6. Комиссарук А. М. Основы аффинной геометрии на плоскости. Минск, 1967. 435 с.
7. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., «Наука», 1966. 647 с.

Поступила 26 августа 1975 г.

О НЕКОТОРЫХ ИНВОЛЮЦИЯХ ЛИНЕЙЧАТОГО ПРОСТРАНСТВА

Линейчатая поверхность (регулюс) Φ четвертого порядка порождает в множестве Σ прямых трехмерного проективного пространства P_3 инволюционное кремоново соответствие I . Пересеченная прямая $G_1 \in \Sigma$ пересекает четыре прямые из Φ ; вторая трансверсаль G_2 этой четверки — образ прямой G_1 в инволюции

1. Невырожденный регулюс Φ определяет единственный содержащий его линейный комплекс; инволюция I представляет собой при этом нуль-систему этого комплекса. Поэтому интерес представляют лишь различные случаи распада Φ : 1) регулюс 3-го порядка и плоский пучок; 2) две полуквадрики; 3) два пучка и полуквадрика; 4) четыре пучка.

Возникающие при этом инволюции рассмотрены в аналитической форме в работах [1—3] с использованием интерпретации Плюккера прямых из Σ точками квадрики σ в P_5 [4—6]; т. е. инволюция I параллельно трактуется как инволюция i плюккеровой квадрики σ . Однако геометрическое описание аппарата преобразования в P_5 в этих работах отсутствует.

В настоящей статье выяснено, что пары соответствующих инволюциях i квадрики σ точек высекаются из σ прямыми тех или иных гиперсечетей, т. е. эти инволюции являются косыми проектированиями квадрики σ на себя. Направляющими гиперсечетей служат соответственно: А) прямая и 3-плоскость, Б) две 2-плоскости, В) 2-плоскость и две 3-плоскости, Г) четыре 3-плоскости. Во всех четырех случаях, кроме Б), направляющие занимают частное положение относительно σ , в связи с чем появляется возможность обобщить соответствующие конструкции в P_3 . Обобщенные инволюции I в P_3 порождаются A_0) парой прямых Φ_1 и линейной конгруэнцией Φ_2 , парой полуквадрик Φ_1, Φ_2, B_0) полуквадрикой Φ_1 и парой линейных конгруэнций Φ_2, Φ_3 ; G_0) четверкой линейных конгруэнций Φ_i и переводят переменную прямую G во вторую общую прямую A_0) полуквадрики $G\Phi_1$ и линейного комплекса $G\Phi_2$; B_0) двух линейных конгруэнций $G\Phi_1$ и $G\Phi_2$; B_0) линейной конгруэнции $G\Phi_1$ и двух линейных комплексов $G\Phi_2, G\Phi_3$; G_0) четырех линейных комплексов $G\Phi_i$, где $G\Phi$ следует понимать как «содержащий G и Φ ».

Привлечение к исследованию этих преобразований аппарата теории косоугольного проектирования, разрабатываемой ярославскими геометрами под руководством З. А. Скопца [7—10], позволяет легко определить целочисленные проективные инварианты образов регулюсов, конгруэнций и комплексов (в упомянутых работах [1—3] для конгруэнций они определены неверно), найти фундаментальные и исключительные элементы, рассмотреть наиболее интересные специальные случаи.

А. Регулюс 3-го порядка и пучок. Пусть Φ и Ω — плоский пучок прямых и регулюс 3-го порядка в P_3 , а φ и ω — изображающие их прямая и кубическая нормкривая на плюккеровой квадрике σ в P_5 . Отображение Плюккера $\Sigma \rightarrow \sigma$ мы будем обозначать буквой P , соответствующие объекты из σ и Σ — одинаковыми строчными и заглавными буквами, т. е. $\varphi = P(\Phi)$, $\omega = P(\Omega)$. Через прямую φ проходят по σ две двумерные плоскости φ' и φ'' , изображающие связку Φ' и плоское поле Φ'' , содержащее пучок Φ ; натянутая на них 3-плоскость φ^* — поляра прямой φ относительно квадрики σ .

Кубическая нормкривая ω принадлежит некоторой 3-плоскости ω_1 ; двумерная квадрика $\omega_2 = \omega_1 \cap \sigma$ может быть либо линейчатой квадрикой, либо конусом, поскольку кривая 3-го порядка не может принадлежать овальной квадрике. Пусть ω_2 — линейчатая квадрика; тогда полярная прямая ω^* 3-плоскости ω_1 пересекает σ в двух различных вещественных точках m и n . Квадрика ω_2 изображает гиперболическую линейную конгруэнцию Ω_2 , содержащую регулюс Ω , а точки m и n — направляющие прямые M и N этой конгруэнции и регулюса, поскольку полярная сопряженность точек плюккеровой квадрики σ означает пересечение соответствующих прямых из Σ .

Прямые одной полуквадрики на ω_2 пересекают нормкривую ω в одной точке, а прямые другой — в двух. Пусть прямые u и v квадрики ω_2 суть соответственно унисеканта и бисеканта кривой ω . Соответствующие пучки $U = P^{-1}(u)$ и $V = P^{-1}(v)$ конгруэнции $\Omega_2 = P^{-1}(\omega_2)$ имеют с регулюсом Ω одну и две общие прямые. Так как прямые u и v имеют общую точку, то и пучки U и V имеют общую прямую, и, следовательно, их вершины расположены на разных директрисах конгруэнции. Пусть вершина U' пучка U расположена на прямой M , а $V' \in N$; тогда плоскости U'' и V'' этих пучков инцидентны соответственно N и M . Рассматривая пересечение этих плоскостей с точечной поверхностью Ω , заключаем, что M — простая, а N — двойная направляющая регулюса Ω (например, $U'' \cap \Omega$ есть кривая третьего порядка, распавшаяся на одну прямую из регулюса и считаемую дважды прямую N).

Таким образом, регулюс Ω принадлежит линейной конгруэнции Ω_2 , одна из директрис которой служит простой, а другая — двойной направляющей регулюса.

Если квадрика ω_2 — конус, то прямая ω^* касается σ в точке $m = n$, конгруэнция Ω_2 — параболическая, а ее директриса $M = N$ принадлежит регулюсу Ω и при этом служит его двойной направляющей.

Пусть теперь G_1 — переменная прямая из Σ , а g_1 — соответствующая ей точка на σ . Прямые F_1 и F_2, F_3, F_4 пучка Φ и регулюса Ω , пересекающие прямую G_1 , переходят в плюккеровом отображении P в точки f_1 и f_2, f_3, f_4 прямой ϕ и нормкривой ω , полярно сопряженные точке g_1 относительно квадрики σ , т. е. в точки пересечения ϕ и ω с касательной гиперплоскостью g_1^* к σ в точке g_1 . Содержащая точки f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 3-плоскость γ_1 пересекает σ по квадрике γ_2 , изображающей линейную конгруэнцию Γ_2 , определяемую четверкой прямых F_i , а полярная прямая γ_1^* 3-плоскости γ_1 пересекает σ в двух точках g_1, g_2 , соответствующих в P двум трансверсалиям G_1, G_2 четверки F_i , т. е. директрисам конгруэнции Γ_2 (поскольку 3-плоскость γ_1 лежит в 4-плоскости g_1^* , то полярная прямая γ_1^* 3-плоскости γ_1 проходит через полюс g_1 4-плоскости g_1^*). Таким образом, прямая γ_1^* высекает из σ соответствующие точки g_1 и g_2 инволюции i .

Покажем, что прямая γ_1^* пересекает 3-плоскость φ^* и прямую ω^* . Прямая γ_1^* есть пересечение четырех гиперплоскостей f_i^* , касательных к σ в точках f_i . Полярная 3-плоскость φ^* прямой φ принадлежит всем 4-плоскостям, касательным к σ в точках прямой φ , в том числе и 4-плоскости f_1^* . Таким образом, прямая γ_1^* и 3-плоскость φ^* расположены в одной 4-плоскости f_1^* и потому имеют общую точку. Аналогично, поскольку плоскость α , определяемая точками f_2, f_3, f_4 , лежит в 3-плоскости ω_1 , то ее полярная плоскость $\alpha^* = f_2^* \cap f_3^* \cap f_4^*$ проходит через прямую ω^* , и прямые ω^* и γ_1^* , лежащие в одной плоскости α^* , имеют общую точку.

Семейство (∞^4) прямых, пересекающих 3-плоскость φ^* и прямую ω^* , будем называть гиперсетью A , а φ^* и ω^* — направляющими гиперсети [7]. Порядок гиперсети A равен единице, т. е. через точку g_1 общего положения в P_5 проходит одна прямая из A — прямая пересечения плоскости $g_1\omega^*$ и 4-плоскости $g_1\varphi^*$. Эту прямую мы будем называть проектирующей прямой точки g_1 , а операцию проведения этой прямой через g_1 — косым проектированием точки g_1 . Согласно вышеизложенному точка g_2 — образ точки g_1 в инволюции i — есть отличная от g_1 точка пересечения с σ единственной прямой γ_1^* гиперсети A , проходящей через точку g_1 . Другими словами, инволюция i представляет собой косое проектирование квадрики σ на себя прямыми гиперсети A .

В терминах Σ , т. е. в терминах линейчатой геометрии в P_3 , алгоритм построения прямой $G_2 = I(G_1)$ будет теперь выглядеть так: 1) построить полуквадрику Ω_3 , сопряженную (т. е. лежащую на той же квадрике) общей полуквадрике конгруэнции Ω_2 и специального линейного комплекса с осью G_1 ($\omega_3 = P(\Omega_3)$ — коника, по которой σ пересекается плоскостью $g_1\omega^*$); 2) построить специальный линейный комплекс Φ_3 , содержащий связку Φ' , поле Φ'' и прямую G_1 ($\varphi_3 = P(\Phi_3)$ — сечение σ 4-плоскостью $g_1\varphi^*$); 3-квадрика φ_3 является конусом, поскольку она содержит плоскости Φ' и Φ''); 3) найти отличную от G_1 вторую общую прямую G_2 полуквадрики Ω_3 и комплекса Φ_3 .

В этом построении вместо регулуса Ω используется содержащая его конгруэнция Ω_2 , а вместо пучка Φ — линейная конгруэнция Φ_2 , распавшаяся на связку Φ' и поле Φ'' с общим пучком Φ . Естественное обобщение этой конструкции «А» — заменить произвольными линейными конгруэнциями гиперболическую или параболическую конгруэнцию Ω_2 и распавшуюся конгруэнцию Φ_2 (в P_5 это означает просто, что направляющие гиперсети A занимают общее положение относительно σ). При этом в формулировке алгоритма следует только зачеркнуть эпитет «специальный», относящийся к комплексу Φ_3 . Ниже, если не оговорено противное, мы рассматриваем эту обобщенную конструкцию «А₀».

Прямая ϕ пересекает теперь σ в двух точках q и r , которые, как и точки m и n мы будем для определенности считать вещественными и различными. Для описания параболического и эллиптического случаев понадобились бы стандартные в проективной геометрии перефразировки, которые мы приводить не будем. Точки q и r изображают директрисы Q и R гиперболической линейной конгруэнции Φ_2 , а $\phi_2 = P(\Phi_2)$ — сечение σ 3-плоскостью ϕ^* — будет теперь линейчатая квадрика (вместо пары плоскостей ϕ', ϕ'').

Пусть X_1 — регулюс n -то порядка. Найдем порядок регулюса $X_2 = I(X_1)$. Регулюс X_1 изображается на квадрике σ кривой λ_1 порядка n . Прямые гиперсети A , инцидентные точкам кривой λ_1 , образуют двумерную поверхность x порядка $2n$. В самом деле, порядок x равен числу точек пересечения x с произвольной 3-плоскостью t_1 , т. е. числу прямых гиперсети, пересекающих λ_1 и t_1 . Это число в свою очередь равно числу общих точек кривой λ_1 с проектирующей гиперповерхностью t 3-плоскости t_1 . В работе [7] доказано, что порядки 2-поверхностей и гиперповерхностей, состоящих из прямых гиперсети, проектирующих точки прямых и $(m-2)$ -плоскостей в P_m , равны числу направляющих гиперсети. Поэтому порядок t равен двум, число точек $\lambda_1 \cap t$ равно $2n$, и поверхность x имеет порядок $2n$.

Два алгебраических многообразия, расположенные в P_m , размерности которых m_1 и m_2 , а порядки n_1 и n_2 , пересекаются по многообразию размерности $m_1 + m_2 - m$ и порядка $n_1 n_2$. Поэтому проектирующая поверхность x кривой λ_1 пересекает σ по кривой порядка $4n$. Эта кривая состоит из двух компонент — кривой λ_1 порядка n и кривой $\lambda_2 = i(\lambda_1)$ порядка $3n$. Таким образом, порядок регулюса X_2 равен $3n$.

Пусть Y_1 — конгруэнция (m, n) , т. е. конгруэнция порядка m и класса n . Число $k = m + n$ будем называть степенью конгруэнции. Двумерная поверхность $y_1 = P(Y_1)$ имеет порядок k ; произвольная плоскость α' первой серии на σ пересекает ее в m точках, а плоскость α'' второй серии — в n точках. Проектирующая 3-поверхности y поверхности y_1 имеет порядок $2k$ (порядок проектирующей поверхности t произвольной 2-плоскости t_1 равен числу ее общих точек с произвольной 2-плоскостью s , т. е. числу прямых, пересекающих две 2-плоскости s и t_1 , прямую ω^* и 3-плоскость ϕ^* , которое равно двум [5]; порядок y равен числу точек $y_1 \cap t$, т. е. $2k$), т. е. пересекает каждую из плоскостей α', α'' в $2k$ точках. Поверхность $y \cap \sigma$ имеет порядок $4k$ и состоит из двух компонент — поверхности y_1 порядка k и поверхности $y_2 = i(y_1)$ порядка $3k$. Таким образом, степень конгруэнции утраивается. Далее поскольку $y \cap \alpha' = (y_1 \cup y_2) \cap \alpha' = (y_1 \cap \alpha') \cup (y_2 \cap \alpha')$ и так как число точек $y \cap \alpha'$ равно $2k = 2m + 2n$, а $y_1 \cap \alpha' = m$, то $y_2 \cap \alpha' = m + 2n$. Аналогично, $y_2 \cap \alpha'' = 2m + n$, т. е. $Y_2 = I(Y_1) = P^{-1}(y_2)$ есть конгруэнция $(m + 2n, 2m + n)$.

Комплекс Z_1 степени n , изображением которого на σ служит 3-поверхность z_1 порядка $2n$, переходит в инволюции I в комплекс Z_2 степени $3n$, что доказывается так же, как для регулуса.

Найдем фундаментальные элементы (F -элементы) инволюции I и их образы — исключительные элементы (P -элементы). Фундаментальными в кремоновых соответствиях называют такие элементы, для которых нарушается однозначность соответствия [11].

Через точку m проходит ∞^3 прямых гиперсети A , лежащих в 4-плоскости $m' = m\varphi^*$, натянутой на m и φ^* . Точка m — F -точка инволюции I , а 3-квадрика $m' \cap \sigma$ — соответствующее ей P -многообразие. В P_3 имеем F -прямую M и соответствующий ей линейный P -комплекс $M\Phi_2$, содержащий эту прямую и конгруэнцию Φ_2 . Аналогично фундаментальной будет прямая N , которую I переводит в содержащий N и Φ_2 исключительный линейный комплекс.

Каждая точка f квадраки φ_2 является F -точкой; она переходит в P -коник, проходящую через точки m, n, f . Всей F -квадрике φ_2 соответствует в i 3-поверхность 4-го порядка, высекаемая из σ гиперконусом 2-го порядка с одномерной вершиной ω^* и направляющей φ_2 . Эта 3-поверхность изображает квадратичный комплекс, в который I переводит F -конгруэнцию Φ_2 . Каждой F -прямой $F \in \Phi_2$ соответствует полуквадрика MNF из этого комплекса, содержащая прямые M, N, F .

Образы найденных F -точек в i определяются неоднозначно в связи с неоднозначностью проектирования — каждую такую точку проектирует не одна, а бесчисленное множество прямых гиперсети. Но неоднозначность может иметь место и при выполнении операции сечения — существуют и такие F -точки, для которых проектирующая прямая единственна, но при этом она целиком лежит на σ .

Пусть φ_m — коника, по которой 4-плоскость, касательная к σ в точке m , пересекает квадраку φ_2 , а m_0 — конус с вершиной m и направляющей φ_m . Ясно, что все образующие конуса m_0 принадлежат и σ , и A . Поэтому любая точка $f \in m_0$ переходит в i в прямую fm . В P_3 имеем параболическую линейную F -конгруэнцию M_0 с осью M , содержащую общую полуквадрику Φ_M специального линейного комплекса с осью M и конгруэнции Φ_2 . Каждая прямая из M_0 размножается в содержащий ее пучок из M_0 , а произвольному регулусу из M_0 порядка $n > 1$ отвечает вся M_0 , которая, таким образом, является и P -конгруэнцией. Аналогичной F - и P -конгруэнцией будет N_0 .

Отметим, что образы имеют определенные инциденции с F -элементами, которые определяются по инциденциям прообразов с соответствующими P -элементами. За счет этого размерности множеств прообразов и образов оказываются равными. Пусть, например, X_1 — плоский пучок, а $X_2 = I(X_1)$ — регулус 3-го порядка. Поскольку X_1 имеет по одной общей прямой с линейными P -

комплексами $I(M)$, $I(N)$ и две общие прямые с квадратичным P -комплексом $I(\Phi_2)$, то X_2 содержит F -прямые M , N и две F -прямые из конгруэнции $\Phi_2(X_1 \cap M_0 = X_1 \cap N_0 = \emptyset$, поэтому $X_2 \cap M_0 = X_2 \cap N_0 = \emptyset$). Эти ограничения поглощают соответственно 3, 3 и 2 параметра из 13 параметров, определяющих регулюсов 3-го порядка, т. е. ∞^5 пучков X_1 переходят в ∞^5 регулюсов X_2 .

Инциденции образов F -элементам приводят к еще одному важному следствию, которое мы также поясним на примере. Пусть Y_1 , Y'_1 — две связки, т. е. конгруэнции $(1, 0)$, G_1 — их общая прямая. Их образы Y_2 , Y'_2 — конгруэнции $(1, 2)$ — имеют 5 общих прямых (число общих прямых двух конгруэнций (m, n) и (m', n') равно $mm' + nn'$ [4]). Одна из этих прямых $G_2 = I(G_1)$, остальные 4 являются F -прямыми. В самом деле, поскольку связки Y_1 , Y'_1 имеют по одному общему пучку с комплексами $I(M)$, $I(N)$, то конгруэнции Y_2, Y'_2 содержат F -прямые M , N . Связки Y_1 , Y'_1 пересекаются с комплексом $I(\Phi_2)$ по конусам второго порядка, которые, как легко показать, переходят в полуквадрики конгруэнции Φ_2 . Но две полуквадрики из одной конгруэнции $(1, 1)$ имеют две общие прямые, т. е. Y_2, Y'_2 пересекаются еще по двум F -прямым. Y_2, Y'_2 имеют также по одной общей прямой с конгруэнцией M_0 , которые переходят в два пучка из M_0 . Но эти два пучка пересекаются только по прямой M , которую мы уже считали.

Обсудим теперь некоторые специальные случаи конструкции « A_0 ». Пусть прямая ω^* и 3-плоскость φ^* имеют общую точку $k \in \sigma$ и, следовательно, принадлежат одной 4-плоскости l . Их полярные 3-плоскости ω_1 и прямая φ лежат в полярной 4-плоскости k^* точки k и пересекаются в полюсе l^* гиперплоскости l . В P_3 конгруэнция Ω_2 и прямые Q, R принадлежат одному линейному комплексу K_1 , который изображается 3-квадрикой $k_1 = k^* \cap l \cap \sigma$; аналогично директрисы M, N конгруэнции Ω_2 и конгруэнция Φ_2 с директрисами Q, R принадлежат линейному комплексу $L_1 = P^{-1}(l_1)$, где $l_1 = l \cap \sigma$.

Гиперсеть A с направляющими ω^* и φ^* состоит в этом случае из двух семейств: A_1 — ∞^4 прямых, проходящих через точку k ; A_2 — ∞^4 прямых, принадлежащих гиперплоскости l и пересекающих прямую ω^* (эти два семейства имеют общую 3-связку с вершиной k в гиперплоскости l). Для точек общего положения, а именно для точек, не лежащих в l , проектирование прямыми гиперсети A эквивалентно проектированию прямыми гиперсвязки A_1 , а инволюция i будет линейной (проективной) инволюцией с центром k и двойной гиперплоскостью k^* . Это означает, что для прямых, не принадлежащих комплексу L_1 , инволюция I совпадает с нуль-системой комплекса K_1 . Для точек квадрики l_1 проектирование неоднозначно; каждая из них проектируется пучком прямых из A_2 (а точки m, n — 3-связками). Но каждый пучок (и 3-связка) содержит в точности одну прямую из A_1 . Другими словами, образами прямых комплекса L_1 будут полу-

квадрики из L_1 (а для прямых M, N — весь комплекс L_1), но при этом каждая полуквадрика (комплекс L_1) будет содержать единственную прямую, соответствующую прямой — прообразу в нуль-системе комплекса K_1 .

Отметим, что если $k \in \sigma$, то комплекс K_1 специальный (с осью M или N), т. е. нуль-система K_1 вырожденная.

Отметим также, что если в случае «А» прямая ω^* и 3-плоскость φ^* пересекаются в точке $k \notin \sigma$, то пучок Φ и конгруэнция Ω_2 имеют общую прямую L^* и принадлежат одному линейному комплексу K_1 . Отличие от соответствующей модификации конструкции «А₀» будет в том, что комплекс L_1 будет специальным комплексом с осью L^* .

Пусть теперь прямая ω^* и 3-плоскость φ^* полярно сопряжены относительно σ . Тогда $\omega_1 = \varphi^*$ и $\varphi = \omega^*$, т. е. конгруэнции Ω_2 и Φ_2 совпадают. Инволюция i представляет собой сужение на σ инволюционной коллинеации пространства P_3 , двойные точки которой заполняют прямую ω^* и 3-плоскость φ^* (эта коллинеация переводит σ в себя). В P_3 имеем двухосную инволюционную гомотопию с двойными точками на прямых M и N . Однако если строить образы прямых в I , следуя алгоритму, то они будут определяться однозначно, совпадая с образами этих прямых в гомотопии, лишь для прямых общего положения; для прямых специальных линейных комплексов с осями M и N однозначность будет нарушена. Отметим, что в конструкции «А» такая модификация невозможна, поскольку конгруэнции Ω_2 и Φ_2 проективно не эквивалентны.

Б. Две полуквадрики. Пусть Φ_1, Ω_1 — две полуквадрики в P_3 , а Φ_1^*, Ω_1^* — сопряженные им полуквадрики; $\varphi_1 = P(\Phi_1)$, $\omega_1 = P(\Omega_1)$ — две коники на плюккеровой квадрике σ ; φ, ω — плоскости этих коник; φ^*, ω^* — плоскости, полярно сопряженные им относительно σ ; φ_1^*, ω_1^* — коники $\varphi^* \cap \sigma = P(\Phi_1^*)$, $\omega^* \cap \sigma = P(\Omega_1^*)$. Прямые, соединяющие соответствующие точки g_1, g_2 инволюции i квадрики σ , пересекают плоскости φ^*, ω^* , т. е. i представляет собой косое проектирование σ на себя прямыми гиперплоскости A с направляющими φ^*, ω^* . Направляющие занимают общее положение относительно σ , и этот случай (единственный из четырех) не допускает обобщения. Однако для единообразия мы переформулируем алгоритм построения прямой $G_2 = I(G_1)$: 1) построить линейные конгруэнции $G_1 \Phi_1^*, G_1 \Omega_1^*$, содержащие прямую G_1 и полуквадрику Φ_1^*, Ω_1^* соответственно; 2) построить отличную от G_1 общую прямую G_2 этих конгруэнций.

Порядки дву- и четырехмерных поверхностей из прямых гиперплоскости A , проектирующих точки линий и 3-поверхностей, как и в случае «А», вдвое больше порядков этих линий и 3-поверхностей. Поэтому инволюция I , как и в случае «А», утраивает порядки регуляров и степени комплексов. Порядок 3-поверхности, проектирующей 2-поверхность порядка k , равен $3k$ [8]. По-

этому конгруэнция (m, n) переходит в I в конгруэнцию $(2m+3n, 3m+2n)$.

Каждую точку $f \in \varphi_1^*$ проектирует 3-плоскость $f_1 = f\omega^*$, т. е. $i(f)$ — квадрака $f_1 \cap \sigma$; вся коника φ_1^* проектируется гиперконусом второго порядка с вершиной ω^* и направляющей φ_1^* . Поэтому все прямые полуквадрики Φ_1^* будут фундаментальными. Каждая из них переходит в содержащую ее и полуквадрику Ω_1^* линейную конгруэнцию, а всей F — полуквадрике Φ_1^* соответствует квадратичный P -комплекс, состоящий из этих конгруэнций. Аналогичные утверждения имеют место и для полуквадрики Ω_1^* .

3-плоскость $f_1 = f\omega^*$ пересекает гиперплоскость f^* , касательную к σ в точке $f \in \varphi_1^*$, по плоскости f_2 , а f_2 пересекает σ по паре прямых. Все точки этих прямых фундаментальные; каждой из них отвечает содержащая ее прямая. Если f пробегает конику φ_1^* , то f_2 пробегает 3-поверхность четвертого порядка, пересекающую σ по F — поверхности восьмого порядка, изображающей F -конгруэнцию $(4, 4)$, являющуюся одновременно и P -конгруэнцией. Эта конгруэнция K состоит из пучков, определяемых парами пересекающихся прямых полуквадрики Φ_1^* , Ω_1^* (все прямые этих полуквадрики — двойные прямые конгруэнции), каждая прямая из K размножается в содержащий ее пучок из K .

Если плоскости φ^* , ω^* имеют общую точку, то полуквадрики Φ_1 , Ω_1 принадлежат одному линейному комплексу, и для прямых общего положения инволюция I совпадает с нуль-системой этого комплекса. Исключение составят прямые линейного комплекса, которому в этом случае принадлежат полуквадрики Φ_1^* , Ω_1^* . Если плоскости φ^* , ω^* имеют общую прямую, то полуквадрики Φ_1^* , Ω_1^* принадлежат одной линейной конгруэнции и имеют две общие прямые M , N . Инволюция I вырождается: каждой прямой G общего положения соответствует полуквадрика GMN .

Если плоскости φ^* , ω^* сопряжены относительно σ , т. е. $\varphi^* = \omega$, $\omega^* = \varphi$, то инволюция i действует на точки общего положения так же, как инволюционная гомология с двойными точками в плоскостях φ , ω . В P_3 полуквадрики $\Phi_1^* = \Omega_1$ и $\Omega_1^* = \Phi_1$ принадлежат одной квадрике, и I представляет собой полярнитет относительно этой квадрики.

В. Два пучка и полуквадрика. Данные пучки обозначим Λ , Φ , а полуквадрику Ω_1 ; прямые λ , φ и коника ω_1 на σ — их образы в плюскеровом отображении P ; ω — плоскость коники ω_1 ; λ^* , φ^* и ω^* — 3-плоскости и 2-плоскость, полярные λ , φ и ω относительно σ . Гиперсеть A состоит из прямых, пересекающих направляющие λ^* , φ^* и ω^* . Помещая направляющие λ^* , φ^* в общее положение относительно σ , получим в P_3 обобщенную конструкцию « B_0 », содержащую невырожденные линейные конгруэнции Λ_2 , Φ_2 (вместо конгруэнций, распавшихся на поле и связку с общим пучком Λ , Φ) и полуквадрику Ω_1^* , сопряжен-

ную Ω_1 . Для построения прямой $G_2 = I(G_1)$ следует: 1) построить линейные комплексы $G_1\Lambda_2$, $G_1\Phi_2$; 2) построить линейную конгруэнцию $G_1\Omega_1^*$; 3) построить отличную от G_1 вторую общую прямую G_2 этих двух комплексов и конгруэнции.

Порядки 2- и 4-поверхностей, проектирующих линии и 3-поверхности порядка n , равны $3n$. Поэтому I увеличивает порядки регулюсов и степени комплексов в 5 раз. Порядок 3-поверхности, проектирующей 2-плоскость t_1 , равен числу ее общих точек с произвольной 2-плоскостью s , или числу прямых, пересекающих три 2-плоскости t_1 , s , ω^* и две 3-плоскости λ^* , φ^* , а это число равно четырем [5]. Поэтому 2-поверхность порядка k проектируется 3-поверхностью порядка $4k$, и конгруэнция (m, n) переходит в конгруэнцию $(3m+4n, 4m+3n)$.

Проектирующие прямые произвольной точки f коники ω_1^* заполняют 3-пространство $f\lambda^* \cap f\varphi^*$, а всю F -коническую ω_1^* проектирует состоящая из таких 3-пространств гиперповерхность 4-го порядка. В P_3 каждая прямая F полуквадрики Ω_1^* разлагается в общую линейную конгруэнцию двух линейных комплексов $F\Lambda_2$ и $F\Phi_2$, а всей F -полуквадрике Ω_1^* соответствует P -комплекс 4-й степени.

Каждую прямую F конгруэнции Λ_2 инволюция I преобразует в общую полуквадрику линейной конгруэнции $F\Omega_1^*$ и линейного комплекса $F\Phi_2$, а всю конгруэнцию Λ_2 — в комплекс 4-й степени. Аналогично обстоит дело с конгруэнцией Φ_2 . Если F — одна из двух прямых $\Lambda_2 \cap \Phi_2$, то $J(F)$ — линейная конгруэнция $F\Omega_1^*$.

Особые точки гиперсеты, обладающие более чем одним проектирующим лучом, в случаях «А» и «Б» заполняли лишь направляющие гиперсеты. В рассматриваемом случае имеется еще 3-плоскость k особых точек, натянутая на точки $m = \lambda^* \cap \omega^*$, $n = \varphi^* \cap \omega^*$ и прямую $\lambda^* \cap \varphi^* = l$. Каждая точка $f \in k$ проектируется плоскостью $e = fmn$; $i(f)$ — коника $e \cap \sigma$. В P_3 имеем линейный комплекс $M^*(N^*)$, содержащий директрисы конгруэнции $\Lambda_2(\Phi_2)$ и полуквадрику Ω_1 , и линейную конгруэнцию L^* , содержащую директрисы конгруэнций Λ_2 и Φ_2 . Две прямые $M^* \cap N^* \cap L^*$ служат директрисами линейной F -конгруэнции K , которая одновременно является и P -конгруэнцией, т. е. $I(K) = K$. Каждая прямая $F \in K$ переходит в принадлежащую K полуквадрику, сопряженную общей полуквадрике линейных комплексов M^* , N^* и специального линейного комплекса с осью F .

Касательная к σ гиперплоскости в точке $f \in \omega_1^*$ и гиперплоскости $f\lambda^*$, $f\varphi^*$ пересекаются по плоскости, высекающей из σ пару прямых, принадлежащих гиперсети A . Все точки этих прямых — фундаментальные, каждая из них переходит в содержащую ее прямую. В P_3 прямая F полуквадрики Ω_1^* определяет специальный линейный комплекс с осью F и линейные комплексы $F\Lambda_2$, $F\Phi_2$, общая полуквадрика которых распадается на пару пучков. Если F пробегает Ω_1^* , то эти распавшиеся полуквадрики пробегает F - и P -конгруэнцию Q . Каждая прямая из Q пе-

реходит в содержащий ее пучок из Q . Конгруэнцию Q можно также определить как множество прямых всех таких пучков, каждый из которых содержит по одной прямой из Ω_1^* , Λ_2 , Φ_2 .

Если точки $m = \lambda^* \cap \omega^*$ и $n = \varphi^* \cap \omega^*$ совпадают, то инволюция I для точек общего положения представляет собой центральное проектирование σ на себя из точки m . Исключение составляют точки квадратичного гиперконуса с одномерной вершиной $l = \lambda^* \cap \varphi^*$, содержащего λ^* , φ^* , ω^* . В P_3 имеем линейный комплекс $M^* = N^*$, содержащий директрисы конгруэнций Λ_2 , Φ_2 и полуквадрику Ω_1 . Инволюция I для прямых общего положения совпадает с нуль-системой этого комплекса.

Если $\omega^* \cap \lambda^*$ есть прямая, то гиперсеть распадается на гиперсеть с направляющими $\omega^* \cap \lambda^*$ и φ^* и ∞^4 прямых, расположенных в гиперплоскости, натянутой на ω^* и λ^* , и пересекающих ω^* и φ^* . Это означает, что для прямых, не принадлежащих линейному комплексу, содержащему Ω_1^* и Λ_2 , инволюция I совпадает с инволюцией пункта «А». Если λ^* и φ^* пересекаются по плоскости, то гиперсеть состоит из ∞^4 прямых, пересекающих плоскости $\lambda^* \cap \varphi^*$ и ω^* , и ∞^4 прямых, расположенных в гиперплоскости, объемлющей λ^* и φ^* , и пересекающих ω^* . В P_3 для прямых $\Sigma \setminus K$, где K — линейный комплекс, содержащий Λ_2 и Φ_2 , имеет место инволюция, рассмотренная в пункте «Б».

Г. Четыре пучка. Пусть Φ^j ($j=1, 2, 3, 4$) — четыре плоских пучка, $\varphi^j = P(\Phi^j)$ — четыре прямые на σ , φ^{j*} — полярные 3-плоскости этих прямых. Пары точек, соответствующих в инволюции I , принадлежат прямым гиперсети с направляющими φ^{j*} . В обобщенной конструкции «Г₀» имеем четыре линейные конгруэнции Φ_2^j . Определяемая с их помощью инволюция I переводит прямую G_1 во вторую общую прямую G_2 линейных комплексов $G_1 \Phi_2^j$.

Порядки 2- и 4-поверхностей, проектирующих линии и 3-поверхности порядка n , равны $4n$. Поэтому I усережает порядки регулюсов и степени комплексов. Число прямых, пересекающих две 2-плоскости t_1, s и четыре 3-плоскости φ^{j*} , равно шести [5]. Поэтому 2-поверхность порядка k проектируется 3-поверхностью порядка $6k$, и конгруэнция (m, n) переходит в конгруэнцию $(5m+6n, 6m+5n)$.

Фундаментальными будут все прямые конгруэнции Φ_2^1 . Каждой прямой $F \in \Phi_2^1$ соответствует общая полуквадрика линейных комплексов $F\Phi_2^2, F\Phi_2^3, F\Phi_2^4$, а всей конгруэнции Φ_2^1 — состоящий из таких полуквадрик комплекс 6-ой степени. Аналогичные утверждения справедливы для $\Phi_2^2, \Phi_2^3, \Phi_2^4$. В P_5 имеется ∞^1 2-плоскостей, пересекающих φ^{j*} по прямым; они образуют 3-поверхность 3-го порядка [7]. В P_3 имеем F - и P -конгруэнцию $(3, 3)$, состоящую из полуквадрик, имеющих по две общие прямые с каждой Φ_2^j . Каждая прямая этой конгруэнции K размножается в содержащую ее полуквадрику из K .

И, наконец, имеется еще одна F - и P -конгруэнция, состоящая из ∞^1 пучков, содержащих по одной прямой из всех четырех конгруэнций Φ_i^j ; каждой прямой этой конгруэнции соответствует содержащий ее пучок. Из подслучаев случая «Г₀» отметим следующие: если 3-плоскость Φ^{3*} проходит через прямую $\Phi^{1*} \cap \Phi^{2*}$, имеем инволюцию пункта «А»; если $\Phi^{1*} \cap \Phi^{2*}$ и $\Phi^{3*} \cap \Phi^{4*}$ — плоскости, имеем инволюцию пункта «Б»; если $\Phi^{1*} \cap \Phi^{2*}$ — плоскость, имеем инволюцию из «В».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

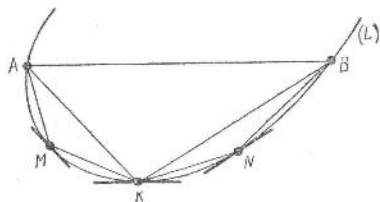
1. Clarkson J. M. Some involutorial line transformations interpreted as points of V_2 of S_5 . — „Bull. Amer. math. soc.“, 1932, vol. 38, p. 533—540.
2. Williams A. R. The transformations of lines of space by means of two quadratic reguli. — «Bull. Amer. math. soc.», 1932, vol. 38, p. 554—559.
3. Clarkson J. M. Some involutorial line transformations. — «Bull. Amer. math. soc.», 1933, vol. 39, p. 149—154.
4. Baker H. F. Principles of geometry, vol. 4. Cambridge, 1925.
5. Sommerville D. M. Y. An introduction to the geometry of N dimensions. London, 1929. 196 p.
6. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М., «Наука», 1955. 744 с.
7. Агафонов Г. Л. Основы теории косого проектирования в n -мерном проективном пространстве. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук, Ярославль, 1968. 14 с.
8. Агафонов Г. Л. Косая перспектива в пятимерном проективном пространстве. — «Учен. зап. Ярослав. пед. ин-та». Вып. 61, 1967, с. 3—8.
9. Герасимова И. С., Скопец З. А. Косое проектирование двумерными плоскостями в четырехмерном проективном пространстве. — «Учен. зап. Ярослав. пед. ин-та». Вып. 64, 1970, с. 24—33.
10. Пеклич В. А., Потоскуев Е. В. Косое проектирование двумерными плоскостями в пятимерном проективном пространстве. — «Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та», 1970, т. 478, с. 58—65.
11. Hudson H. P. Cremona transformations in plane and space. Cambridge, 1927. 454 p.

Поступила 13 сентября 1974 г.

О ПЛОЩАДЯХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, ВПИСАННЫХ В ВЫПУКЛУЮ ДУГУ

В данной заметке приводится интерпретация эквивалентной кривизны плоской кривой и в связи с этим дается некоторое характеристическое свойство кривых второго порядка.

Пусть (L) — дуга плоской кривой, которую мы предположим выпуклой и достаточно гладкой. Если AB — произвольная хорда этой дуги, со существует единственная точка K между A и B такая, что касательная к дуге в K параллельна хорде AB . В случае выпуклой замкнутой кривой то же верно в отдельности для каждой из двух дуг, на которые она разбивается точками A и B . Площадь треугольника AKB зависит от положения точек A и B ; обозначим ее через $S = S(A, B)$. На каждой из сторон AK и KB треугольника AKB как на основании можно снова построить треугольник, вписанный в дугу (L) касательная к дуге в вершине которого будет параллельна основанию $AK(KB)$. Если треугольник AKB условно назвать треугольником первого порядка, то получим таким путем треугольники AMK и KNB («треугольники второго порядка»). Эта конфигурация, изображенная на рис. 1, хорошо знакома по знаменитому решению Архимеда задачи в вычислении площади параболического сегмента. В случае, когда (L) дуга параболы, площади треугольников первого и второго порядка находятся в постоянном отношении



$$S(A, B) : S(A, K) : S(K, B) = 8 : 1 : 1. \quad (1)$$

В общем случае произвольной кривой (L) эти соотношения, естественно, не выполняются и, более того, площади треугольни-

ка AKB и треугольника AMK (или треугольника KNB) не находятся в функциональной зависимости. Если, однако, данная дуга принадлежит коническому сечению, то такая функциональная зависимость существует. Это непосредственно очевидно для окружности. Для эллипса это также верно, так как эллипс аффинно эквивалентен окружности, а наше построение имеет, очевидно, аффинно инвариантный характер. Фактическое отыскание зависимости между $S=S(A, B)$ и $S'=S(A, K)$ вполне элементарно. Если хорда AB стягивает дугу 2α окружности, то

$$S = 2R^2 \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad S' = 2R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{4}. \quad (2)$$

Исключение параметра α приводит к алгебраическому соотношению между S и S' . Обозначив через $\tilde{S}, \tilde{S}'$ отношения S, S' к квадрату радиуса окружности (или к произведению полуосей в случае эллипса), мы запишем требуемое соотношение в виде

$$256\tilde{S}'^8 + 32(\tilde{S}^2 + 20\tilde{S}\tilde{S}' - 8\tilde{S}'^2)\tilde{S}'^4 + \tilde{S}(\tilde{S} - 8\tilde{S}')^3 = 0. \quad (3)$$

Функциональная зависимость между S и S' имеет место и для гиперболы. Это следует, например, из транзитивного действия эквиаффинной группы на ветвях гиперболы. Соответствующая зависимость для гиперболы имеет вид

$$256\tilde{S}'^8 - 32(\tilde{S}^2 + 20\tilde{S}\tilde{S}' - 8\tilde{S}'^2)\tilde{S}'^4 + \tilde{S}(\tilde{S} - 8\tilde{S}')^3 = 0 \quad (4)$$

(здесь $\tilde{S}, \tilde{S}'$ также равны отношениям площадей S и S' треугольников к произведению полуосей гиперболы).

Соотношениям (1), (3), (4), записанным, соответственно, для параболы, эллипса и гиперболы, может быть придана единообразная форма, если ввести в рассмотрение эксцентриситет ϵ кривой и ее фокальную полухорду p . Полагая $\hat{S}=S, \hat{S}'=\frac{S}{p^2}$, мы легко сведем каждое из уравнений (3), (4) к виду

$$256(\epsilon^2 - 1)^6 \hat{S}'^8 - 32(\epsilon^2 - 1)^3 (\hat{S}^2 + 20\hat{S}\hat{S}' - 8\hat{S}'^2) \hat{S}'^4 + \hat{S}(\hat{S} - 8\hat{S}')^3 = 0. \quad (5)$$

В случае $\epsilon=1$ получается, как и должно быть для параболы, $\hat{S}-8\hat{S}'^2=0$.

Оказывается, что наличие функциональной зависимости между площадями S и S' треугольника первого и треугольника второго порядка характеризует кривые второго порядка; техника доказательства, которое мы приводим, требует предположения о гладкости кривой класса C^4 , но правдоподобно, что это предположение избыточное.

Отнесем кривую к параметру $t = \frac{dy}{dx}$, что локально всегда возможно (прямые линии исключаются); предположим также, что в некоторой рассматриваемой части дуги $x = \frac{dx}{dt} \neq 0$. Пусть уравнения дуги имеют вид

$$x=x(t), y=y(t). \quad (6)$$

Тогда, в силу выбора параметра t ,

$$\dot{y} = t\dot{x}; \ddot{y} = t\ddot{x} + \dot{x}; \dddot{y} = t\dddot{x} + 2\ddot{x}; \dots \quad (7)$$

Таким путем все производные y по t выражаются через t и производные x по t .

Пусть конец A хорды AB отвечает значению параметра t , B — значению $t+\alpha$. Значение параметра, определяющее точку K , может быть найдено из соотношения

$$\frac{y(t+\alpha) - y(t)}{x(t+\alpha) - x(t)} = t + \beta. \quad (8)$$

Разлагая числитель и знаменатель левой части в строку Тейлора и выполняя деление, после нетрудных вычислений, найдем:

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{12} \frac{\ddot{x}}{x} \alpha^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\ddot{x}}{x} - \frac{\dot{x}^2}{x^2} \right) \alpha^3 + o(\alpha^3). \quad (9)$$

Для определенности положим $\alpha > 0$, тогда и $\beta > 0$. Находим S по формуле

$$S = \frac{1}{2} \{ [x(t+\alpha) - x(t)][y(t+\beta) - y(t)] - [x(t+\beta) - x(t)] \times \\ \times [y(t+\alpha) - y(t)] \}. \quad (10)$$

После несложных, хотя и несколько громоздких вычислений, найдем разложение S по степеням α :

$$S = \frac{1}{16} \left[\dot{x}^2 \alpha^3 + \ddot{x} \dot{x} \alpha^4 + \left(\frac{7}{36} \ddot{x}^2 + \frac{17}{48} \ddot{x} \dot{x} \right) \alpha^5 \right] + o(\alpha^5). \quad (11)$$

Аналогично, выражение для S' можно записать, заменив в (11) α через β :

$$S' = \frac{1}{16} \left[\dot{x}^2 \beta^3 + \ddot{x} \dot{x} \beta^4 + \left(\frac{7}{36} \ddot{x}^2 + \frac{17}{48} \ddot{x} \dot{x} \right) \beta^5 \right] + o(\beta^5) \quad (12)$$

и, после замены β его выражением из (9):

$$S' = \frac{1}{128} \left[\dot{x}^2 \alpha^3 + \ddot{x} \dot{x} \alpha^4 + \left(\frac{31}{144} \ddot{x}^2 + \frac{65}{192} \ddot{x} \dot{x} \right) \alpha^5 \right] + o(\alpha^5). \quad (13)$$

Из (12) и (13) получаем

$$S' = 8S' = \frac{1}{256} \left(\frac{1}{4} \ddot{x} \dot{x} - \frac{1}{3} \ddot{x}^2 \right) \alpha^5 + o(\alpha^5). \quad (14)$$

Используя главный член разложения (11) площади S по степеням α , придадим равенству (14) также вид

$$S - 8S' = \frac{\sqrt[3]{4}}{48} \cdot \frac{3\ddot{x}\dot{x} - 4\ddot{x}^2}{x^{10/3}} S^{5/3} + o(\alpha^5). \quad (15)$$

Если произвести замену независимой переменной, перейдя к x как аргументу, то окажется, что

$$\frac{3\ddot{x}\dot{x} - 4\ddot{x}^2}{x^{10/3}} = \frac{9}{2} \left[\left(y'' \right)^{-\frac{2}{3}} \right]'' \quad (16)$$

и равенство (15) запишется также в форме

$$S - 8S' = \frac{3\sqrt[3]{4}}{32} \left[\left(y'' \right)^{-\frac{2}{3}} \right]'' S^{5/3} + o(\alpha^5). \quad (17)$$

Из полученных соотношений вытекает следующее

Предложение 1. Соотношение $S = 8S'$, верное для параболы, для малых локально выпуклых дуг класса C^4 выполняется с точностью до малых четвертого порядка включительно. Если оно выполняется в каждой точке дуги с точностью до малых пятого порядка включительно, то дуга принадлежит параболе. В частности, свойство $S = 8S'$ характеризует параболу.

Первая часть утверждения следует из равенства (14), вторая из того, что равенство

$$\left[\left(y'' \right)^{-\frac{2}{3}} \right]'' = 0 \quad (18)$$

есть дифференциальное уравнение параболы.

Известно, что эквивалентная кривизна кривой может быть задана формулой [1]

$$k = -\frac{1}{2} \left[\left(y'' \right)^{-\frac{2}{3}} \right]'' \quad (19)$$

Перепишем равенство (17), используя выражение (19) для эквивалентной кривизны:

$$S - 8S' = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{16} k S^{5/3} + o(\alpha^5). \quad (20)$$

Отсюда получаем

Предложение 2. Эквиаффинная кривизна кривой может быть вычислена как предел выражения

$$-\frac{8\sqrt[3]{2}}{3} \cdot \frac{S - 8S'}{S^{5/3}}$$

при стягивании малой дуги в точку.

Видно также, что условие $k = \text{const}$ оказывается необходимым для функциональной зависимости S и S' . Известно при этом, что кривые постоянной эквиаффинной кривизны суть как раз кривые второго порядка [1]. Впрочем, легко убедиться непосредственно, что равенство $[(y'')^{-2/3}]'' = \text{const}$ определяет кривые второго порядка. Отсюда следует

Предложение 3. Площади треугольников первого и второго порядка S и S' находятся в функциональной зависимости для дуг кривых второго порядка и только для них (кривые предполагаются принадлежащими классу C^4 , прямые исключаются).

Поступила 29 сентября 1975 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Аминов Ю. А. О неограниченности минимальной поверхности в римановом пространстве неположительной кривизны	3
Борисенко А. А. О компактных поверхностях отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве	9
Борисенко А. А. Об изометрическом погружении псевдоримановых пространств постоянной кривизны	11
Гулида Л. Л. Об одном свойстве изгибания общей выпуклой поверхности эллиптического пространства	19
Дискант В. И. Устойчивость выпуклого тела при изменении $(n-2)$ -й функции кривизны	22
Игнатенко В. Ф. О конструктивных свойствах алгебраических поверхностей переноса	33
Климентов С. Б. Изгибания поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны	37
Климентов С. Б. Бесконечно малые изгибания поверхностей рода $p > 0$ положительной внешней кривизны с краевым условием обобщенного скольжения	57
Кованцов Н. И. Расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной средней кривизны.	65
Кованцов Н. И., Мягков В. И. Специальный случай K -расслоения комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве	77
Лейко С. Г. Три-геодезические отображения пространств аффинной связности. I	90
Масальцев Л. А. Об одной оценке роста гармонической функции на двумерной поверхности	99
Масальцев Л. А. О первом собственном значении лапласиана компактной ориентируемой поверхности евклидова пространства	104
Медяник А. И. Априорные оценки главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности	108
Милка А. Д. Неинвариантность особенности у кратчайшей линии при изгибании выпуклой поверхности	112
Николаенко М. А. К исследованию монжева уравнения $\Omega(x, dx) = ds^2 - d\varphi(x, y, z)^2 = 0$	124
Пеклич В. А. О некоторых инволюциях линейчатого пространства.	130
Пеклич В. А. О группе движений псевдоевклидовой плоскости.	141
Рыжков В. В. О площадях треугольников, вписанных в выпуклую дугу	149

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский межведомственный тематический
научный сборник

Выпуск 19

Редактор *А. П. Гужва*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Художественный редактор *А. С. Романова*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректоры *Л. А. Федоренко, Е. И. Шевкунова*

Сдано в набор 27.I 1976 г. Подписано в печать 17.IX 1976 г.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 10.
Уч.-изд. л. 10. Тираж 1000. Заказ 322. БЦ 50204. Цена 67 коп.
Издательство издательского объединения «Вища школа» при
Харьковском государственном университете.
310003, Харьков, 3, Университетская, 16.
Харьковская городская типография № 16 Областного управле-
ния по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Харьков, 3, Университетская, 16.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

О неограниченности минимальной поверхности в римановом пространстве неположительной кривизны. Аминов Ю. А. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 3—9.

Доказывается следующая теорема: полная минимальная поверхность, расположенная в полном односвязном n -мерном римановом пространстве неположительной кривизны, имеющая ограниченную интегральную гауссову кривизну, неограничена в пространстве.

Список лит.: 7 назв.

УДК 513

О компактных поверхностях отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве. Борисенко А. А. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 9—11.

В $(2l-1)$ -мерном римановом пространстве автор рассматривает компактные l -мерные поверхности отрицательной внешней кривизны и устанавливает, что на их внутреннюю кривизну существуют сильные ограничения. Доказаны две теоремы о нереализуемости четырехмерных метрик и следующая теорема: если в $(2l-1)$ -мерном сферическом пространстве компактная l -мерная поверхность постоянной кривизны по двумерным направлениям имеет кривизну меньше единицы, то эта кривизна равна нулю, и поверхность изометрична евклидову пространству.

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

Об изометрическом погружении псевдоримановых пространств постоянной кривизны. Борисенко А. А. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 11—18.

Рассматривается вопрос о локальном и глобальном изометрическом погружении l -мерного псевдориманового многообразия постоянной кривизны $Y_{p,q}^l$ в псевдоевклидово пространство $E_{p',q}^{2l-1}$ и, псевдориманово постоянной кривизны $V_{p',q}^{2l-1}$. Доказана теорема: пусть $V_{p,q}^l$ — полное псевдориманово многообразие постоянной отрицательной кривизны. Если $q=0, 1, 3, 7$, то многообразие $V_{p,q}^l$ глобально не погружается в псевдоевклидово пространство $E_{p',q}^{2l-1}$.

Список лит.: 6 назв.

УДК 513

Об одном свойстве изгибания общей выпуклой поверхности эллиптического пространства. Гулида Л. Л. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 19—22.

С помощью известного преобразования А. В. Погорелова переносятся на случай эллиптического пространства результаты Е. П. Сенькина и автора о том, что при изгибании общей выпуклой поверхности на ее границе найдется две разделяющие друг друга пары точек такие, что точки одной пары сближаются, а другой — расходятся.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Устойчивость выпуклого тела при изменении $(n-2)$ -й функции кривизны. Дискант В. И. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 22—33.

Доказана теорема устойчивости для выпуклого ограниченного замкнутого регулярного тела n -мерного евклидова пространства при изменении $(n-2)$ -й функции кривизны тела. При этом регулярность тела означает наличие в каждой точке границы тела не равных нулю главных радиусов кривизны, $(n-2)$ -я функция кривизны — это элементарно-симметрическая функция главных радиусов кривизны степени $n-2$.

Список лит.: 9 назв.

УДК 513

О конструктивных свойствах алгебраических поверхностей переноса. Игнатенко В. Ф. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 33—36.

Рансе [1] дано обобщение теоремы Зейдевича для алгебраической гиперповерхности F_n пространства E^m и найдены его модификации для алгебраических поверхностей переноса. При этом точки F_n с координатой $x=0$ в общем случае не рассматривались. В данной заметке это ограничение снимается.

Табл. 1. Список лит.: 4 назв.

УДК 513.81

Изгибания поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны. Климентов С. Б. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 37—56.

Доказывается изгибаемость поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны с краем, расположенных в трехмерном римановом пространстве. Обобщается на риманову поверхность теорема И. Н. Векуа о дифференциальных свойствах оператора Tf .

Список лит.: 12 назв.

УДК 513.81 : 517.83

Бесконечно малые изгибания поверхностей рода $p > 0$ положительной внешней кривизны с краевым условием обобщенного скольжения. Климентов С. Б. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 57—65.

Исследуются бесконечно малые изгибания поверхностей ненулевого рода положительной внешней кривизны при краевом условии обобщенного скольжения методом сведения геометрической задачи к краевой задаче на римановой поверхности.

Решается вопрос о существовании на замкнутой римановой поверхности абелевой коварианты, не имеющей нулей и полюсов на заданном гладком контуре, который возникает при сведении задачи о бесконечно малых изгибаниях к краевой задаче.

Список лит.: 9 назв.

Расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной средней кривизны. Кованцов Н. И. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 65—77.

Как и в случае поверхностей постоянной полной кривизны, единственным комплексом, допускающим функциональное расслоение (широта — одна функция одного аргумента) в нормальные конгруэнции с ортогональными к ним поверхностями постоянной средней кривизны (отличной от нуля), является линейный комплекс. Находятся явные уравнения указанных поверхностей.

Если поверхности минимальны, то класс комплексов определяется с произволом в две функции аргумента, его отыскание сводится к нахождению решения уравнения Лапласа. Записываются с помощью квадратур конечные уравнения минимальных поверхностей, ортогональных к нормальным конгруэнциям комплекса. Форма таких уравнений отлична как от формы, данной Вейерштрассом, так и от формы, данной Шварцем.

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

Специальный случай К-расслоения комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве. Кованцов Н. И., Мягков В. И. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 77—90.

Рассматривается случай функционального расслоения комплекса в нормальные конгруэнции. Полная кривизна поверхностей σ , ортогонально пересекающих луч комплекса, вдоль этого луча постоянна и определяется формулой $K = -\frac{1}{k^2}$, где k — кривизна комплекса.

Дается безынтегральное представление комплексов, допускающих указанное К-расслоение. Находятся уравнения поверхностей σ . Этим обобщается рассмотренный ранее случай, при котором поверхности σ есть поверхности постоянной кривизны.

Список лит.: 3 назв.

УДК 513

Три-геодезические отображения пространств аффинной связности. Лейко С. Г. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 90—99.

В аффинно-связных пространствах без кручения выделяется класс кривых, названных три-геодезическими. Их первые две аффинные кривизны (и только у них) отличны от нуля, а все последующие равны нулю. В плоских пространствах такие кривые лежат в трехмерных плоскостях.

Из полученного необходимого и достаточного условия на тензор деформации три-геодезического отображения выводятся основные уравнения семи специальных типов три-геодезических отображений и устанавливается геометрическое значение величин, входящих в эти уравнения.

Все рассуждения носят локальный характер.

Список лит.: 11 назв.

УДК 513

Об одной оценке роста гармонической функции на двумерной поверхности. Масальцев Л. А. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 99—104.

Доказывается аналог неравенства Гарнака для неотрицательных гармонических функций в геодезическом круге поверхности ограниченной кривизны. Для n -мерных пространств постоянной отрицательной секционной кривизны получено неравенство, аналогичное теореме Лиувилля для полуограниченных гармонических функций, заданных на всем евклидовом пространстве R^n .

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

О первом собственном значении лапласиана компактной ориентируемой гиперповерхности евклидова пространства. Масальцев Л. А. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 104—108.

Доказана теорема: пусть M — связная компактная ориентируемая гиперповерхность евклидова пространства R^{n+1} ; λ_1 — первое собственное значение лапласиана M ; k_i — i -я главная нормальная кривизна, $\text{vol}(M)$ — n -мерный объем M . Тогда $\lambda_1 \leq \text{vol}(M)^{-1} \int_M (\sum_{i=1}^n k_i^2) dV_n$, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда M есть гиперблава.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Априорные оценки главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности. Медяник А. И. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 108—112.

Методом А. В. Погорелова получены оценки для радиуса нормальной кривизны, замкнутой выпуклой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, главные радиусы кривизны которой R_1 и R_2 в точке с нормалью n удовлетворяют уравнению $f(R_1, R_2, n) = 0$, где f — симметричная и строго возрастающая относительно первых двух аргументов функция класса C^2 .

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

Неинвариантность особенности у кратчайшей линии при изгибании выпуклой поверхности. Милка А. Д. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 112—124.

Устанавливается, что особенность у кратчайшей линии на выпуклой поверхности, как для внутренней, так и для конечной точки кратчайшей, — не инвариант изгибания. Существуют две, даже сколь угодно близкие, изометричные выпуклые поверхности, на одной из которых сферический образ кратчайшей линии не спрямляем, а соответствующая кратчайшая на другой поверхности имеет спрямляемое сферическое изображение.

Список лит.: 7 назв.

УДК 513

К исследованию монжева уравнения $\Omega(x, dx) = ds^2 - d\varphi(x, y, z)^2 = 0$. Николаенко М. А. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 124—130.

Изучается геометрия монжева многообразия, определяемого уравнением $\Omega(x, dx) = ds^2 - d\varphi(x, y, z)^2 = 0$ и обобщенным уравнением $\Omega(x, dx) = ds^{2k} - d\varphi(x, y, z)^{2k} = 0$.

Доказывается, что любая интегральная кривая этого уравнения — геодезическая «кратчайшая».

Список лит.: 8 назв.

УДК 513

О некоторых инволюциях линейчатого пространства. Пеклич В. А. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 130—141.

Изучается инволюция, переводящая G во вторую общую прямую полуквадрики, содержащей M , N и G , и линейного комплекса, содержащего Φ и G , а также инволюции, конструируемые аналогично с помощью пары полуквадрики, полуквадрики и пары линейных конгруэнций, четверки линейных конгруэнций.

Список лит.: 11 назв.

УДК 513

О группе движений псевдоевклидовой плоскости. Пеклич В. А. — «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 141—149.

Конструкция Бляшке — Грюнвальда устанавливает соответствие между движениями евклидовой плоскости и точками и плоскостями квазиэллипти-

ческого пространства. Аналогичное соответствие устанавливается автором между движениями псевдоевклидовой плоскости и точками и плоскостями квазигиперболического пространства. Вводится понятие правого и левого сдвига и доказывается, что каждое движение в псевдоевклидовой плоскости есть их произведение. Изложение чисто синтетическое.

Ил. 4. Список лит.: 7 назв.

УДК 513

О площадях треугольников, вписанных в выпуклую дугу. Рыжков В. В. «Украинский геометрический сборник», 1976, вып. 19, с. 149—153.

Приводится интерпретация эквиаффинной кривизны плоской кривой и в связи с этим дается некоторое характеристическое свойство кривых второго порядка.

Ил. 1.