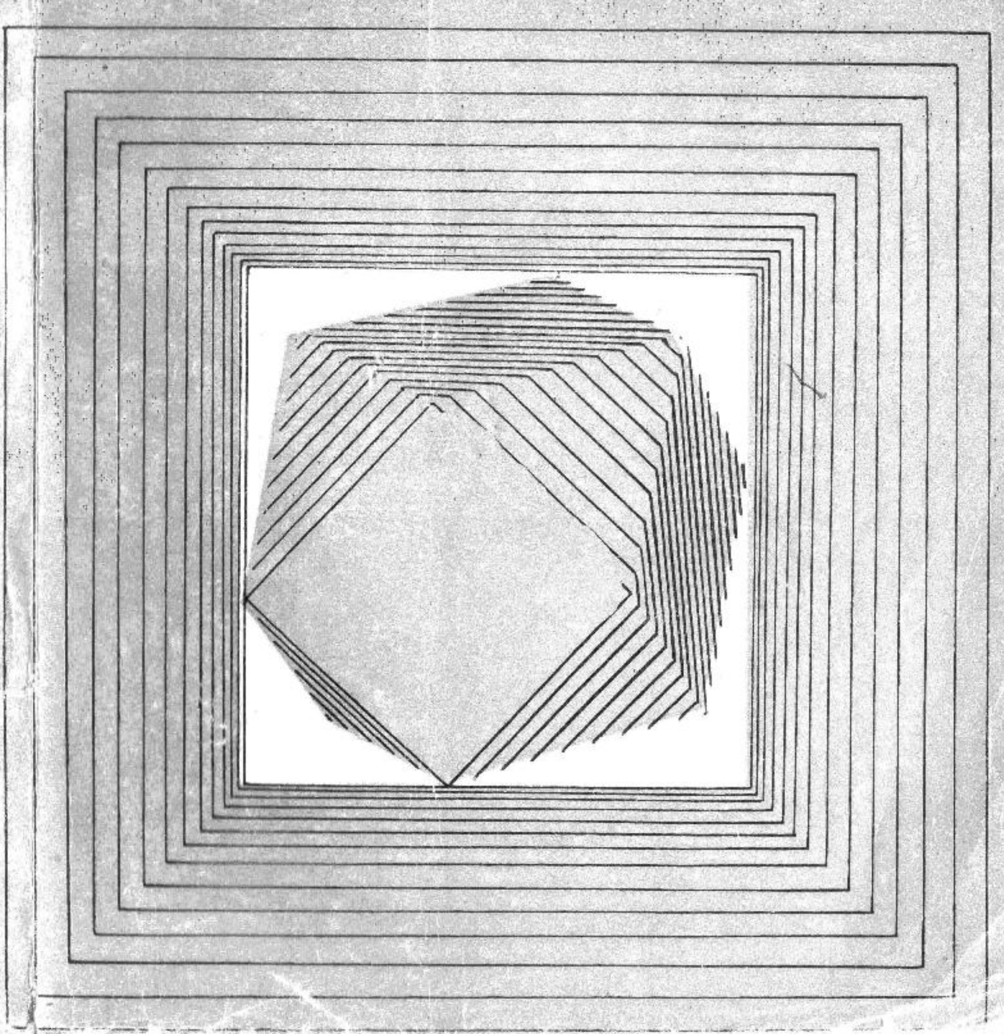
УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск **18**



УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
тематический
научный сборник

ВЫПУСК 18

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ХАРЬКОВ — 1975

Сборник подготовлен редакционной коллегией при Харьковском государственном университете

Адрес редакционной коллегии:

310077, Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

Редакция естественнонаучной литературы

Украинский геометрический сборник. Респ. межвед. темат. науч. сборник. Вып. 18. Х., «Вища школа», Изд-во при Харьк. ун-те, 1975. с. 152. Списки лит. в конце статей.

В сборник включены статьи, посвященные геометрии «в целом» и линейчатой геометрии. Рассматриваются свойства поверхностей и линий на них, вопросы существования, погружения, изгибания поверхностей в евклидовых и неевклидовых пространствах разных размерностей, различные вопросы теории комплексов и конгруэнций в трехмерном пространстве. Помещены также статьи по теории относительности, геометрии тканей, геометрии неголономных многообразий.

Предназначен для научных работников математических специальностей.

$У\frac{20203-346}{М226(04)-75}134-75$

УДК 513

Ю. А. АМИНОВ

ОБ ОЦЕНКАХ ДИАМЕТРА И ОБЪЕМА ПОДМНОГООБРАЗИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В работе рассматриваются регулярные класса C^2 с метрикой класса C^4 подмногообразия евклидова пространства E^k. Доказывается

Теорема 1. *Пусть подмногообразие $F^n \subset E^{2n-3}$ имеет секционную кривизну K, удовлетворяющую неравенствам $-a^2 \leqslant K \leqslant b^2$, а геодезический шар на F^n радиуса $s < \pi/b$ содержится в шаре E^{2n-3} радиуса r. Тогда*

$$r \geqslant \frac{1}{\sqrt{b^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 bs + a^2 \operatorname{cth}^2 as}}.$$

Если $s \leqslant \pi/2b$, то в этом неравенстве $\operatorname{ctg} bs$ можно заменить на 0. Для гиперповерхности мы устанавливаем оценки объема и диаметра, в которые входят интегральная кривизна шара и площадь границы. Используемый при этом метод основан на уравнении Дарбу для квадрата длины радиус-вектора гиперповерхности. Имеет место

Теорема 2. *Пусть V — объем геодезического шара $D \subset F^n$, центр которого не является фокальной точкой в D. Тогда*

$$V \leqslant \frac{2Ar^2}{n(n-1)} + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\, rS,$$

где r — радиус наименьшего шара в E^{n+1}, содержащего D; S — площадь границы D; величина A определяется интегральной кривизной, см. (34).

Центр не будет фокальной точкой, например в том случае, когда F^n имеет кривизну $\leqslant b^2$ и радиус шара D меньше $\pi/2b$.

Другие оценки диаметра и площади, а также условия неограниченности установлены в [1—7, 9].

1. Диаметр погруженного многообразия $F^n \subset E^{2n-3}$.

Докажем теорему 1. Обозначим через Γ граничную сферу шара D. Прежде всего получим оценку главных кривизн границы Γ, рассматриваемой как подмногообразие в F^n. Пусть O — центр D. Обозначим через d/ds производную по длине дуги геодезического луча, выходящего из O.

Лемма. *Пусть n — единичное геодезическое поле в римановом пространстве, λ — главная кривизна поля в смысле экстремальных значений отношения $dndx/dx^2$, при $dn \perp dx$, τ — соответствующее λ главное направление. Тогда*

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\lambda^2 - K(\tau, n), \tag{1}$$

где $K(\tau, n)$ — кривизна площадки, проведенной через τ и n.

По определению главного направления τ удовлетворяет уравнению

$$A\tau = \lambda\tau, \tag{2}$$

где $A = \| a_j^i \|$ — симметрическая матрица, составленная с помощью ковариантных производных компонент векторного поля n. Можно ее представить в виде

$$a_j^i = n^i_{,j} + b^i_j, \tag{3}$$

где b^i_j — кососимметрическая матрица.

Дифференцируя (2) ковариантно по n, получим

$$a^i_{j,k}\tau^j n^k + a^i_j \tau^j_{,k} n^k = \lambda_{,k} n^k \tau^i + \lambda \tau^i_{,k} n^k, \tag{4}$$

умножим это уравнение на τ и свернем. Так как $\tau_i \tau^i_{,k} = 0$ в силу единичности τ, то справа останется только первый член, равный $d\lambda/ds$. Рассмотрим второй член слева. Вектор $\tau^j_{,k} n^k$ ортогонален к τ, поэтому имеем разложение

$$\tau^j_{,k} n^k = \mu n^j + \nu_\alpha \tau^j_\alpha, \tag{5}$$

где τ_α — другие главные направления с главными кривизнами λ_α. Умножим (5) на n_j, тогда справа получим μ. Выражение слева преобразуется:

$$n_j \tau^j_{,k} n^k = (n_j \tau^j)_{,k} n^k - \tau^j n_{j,k} n^k = 0,$$

так как вектор кривизны линии тока равен $n_{j,k} n^k = 0$. Следовательно, $\mu = 0$. Для второго члена слева в (4)

$$a^i_j \tau^j_{,k} n^k = a^i_j (\nu_\alpha \tau^j_\alpha) = \nu_\alpha \lambda_\alpha \tau^i_\alpha. \tag{6}$$

В силу ортогональности главных направлений после умножения этого выражения на τ_i получим ноль. Рассмотрим первый член слева в (4), умноженный на τ_i. Используем при этом разложение (3). Поскольку b^i_j — кососимметрическая матрица, то $\tau_i b^i_{j,k} n^k \tau^j$ равно нулю. Следовательно,

$$a^i_{j,k} \tau_i n^k \tau^j = n^i_{,jk} n^k \tau_i \tau^j = (n^i_{,kj} - R^i_{.ejk} n^e)\, n^k \tau_i \tau^j =$$
$$= (n^i_{,k} n^k)_{,j} \tau^j - \tau_i n^i_{,k} n^k_{,j} \tau^j - K(\tau, n), \tag{7}$$

где $R^i_{.ejk}$ — тензор кривизны многообразия F^n. Первый член правой части (7) равен нулю, так как поле n — геодезическое. Ввиду того, что τ — поле главных направлений, $n^k_{,j} \tau^j = \lambda \tau^k$, поэтому

$$-\tau_i n^i_{,k} n^k_{,j}\, \tau^j = -\lambda \tau_i n^i_{,k} \tau^k = -\lambda^2. \tag{8}$$

Используя (4), (6) — (8), получим формулу (1).

Применим лемму в том случае, когда n — поле нормалей к геодезически параллельным сферам. Если положить $\lambda = \frac{d \ln \eta}{ds}$, то (I) приводится к уравнению Якоби

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} = -K(\tau,\ n)\,\eta,$$

причем можем считать, что $\eta(0) = 0$. В силу того что $-a^2 \leqslant K \leqslant b^2$, как обычно, получаем

$$b \operatorname{ctg} bs \leqslant \lambda \leqslant a \operatorname{cth} as. \tag{9}$$

Следовательно, $|\lambda| \leqslant \sqrt{a^2 \operatorname{cth}^2 as + b^2 \operatorname{ctg}^2 bs}$, причем если $s \leqslant \pi/2b$, то в этом неравенстве $\operatorname{ctg} bs$ можно заменить на ноль.

Оценим теперь внутреннюю кривизну геодезической сферы Γ. Пусть σ — некоторая площадка, лежащая в касательном пространстве к Γ. Пусть λ_1 и λ_2 — экстремальные значения отношения $dndx/dx^2$ при условии, что dx изменяется в σ. Очевидно, $|\tilde{\lambda}| \leqslant \max|\lambda|$. Пусть $K_i(\sigma)$ — внутренняя кривизна Γ для площадки σ, $K(\sigma)$ — кривизна F^n для площадки σ. Используя уравнения Гаусса и оценку λ, получим

$$K_i(\sigma) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + K(\sigma) \leqslant b^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 bs + a^2 \operatorname{cth}^2 as. \tag{10}$$

В работе [9] доказана следующая теорема.

Пусть R^k — компактное риманово многообразие в евклидовом пространстве E^{2k-1}. Если кривизна R^k меньше или равна c^2, то радиус шара в E^{2k-1}, содержащего R^k, больше или равен $1/c$.

Используя оценку (10) и применяя эту теорему к Γ, получим доказываемое неравенство.

2. Инвариантные операторы и уравнения

Пусть $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ — метрика риманова многообразия F^n и на многообразии задана функция z класса C^3. Еще в 1901 г. Риччи и Леви-Чивита [8] определили следующие инвариантные дифференциальные операторы ∇_{kk}. Если z_{ij} — вторые ковариантные производные, то оператор $\nabla_{kk} z$ — коэффициент при $(-\lambda)^k$ в уравнении

$$\frac{1}{g} \| g_{ij} - \lambda z_{ij} \| = 0.$$

Первый из этих операторов линейный — оператор Лапласа-Бельтрами, в дальнейшем обозначаемый через ∇_2. Второй уже нелинейный является оператором монж-амперовского типа

$$\nabla_{22} z = \frac{1}{2} (z_i^i z_j^j - z_j^i z_i^j).$$

Некоторые функции, определенные на многообразии геометрическим образом, удовлетворяют простым дифференциальным уравнениям или неравенствам, содержащим операторы ∇_{kk}. Например, можно найти, что на любом римановом многообразии F^n функция, равная расстоянию от фиксированной точки $0 \subset F^n$ до произвольной точки $P \in F^n$, которую мы обозначим через $u(P)$, удовлетворяет уравнению $\nabla_{nn}u = 0$, а функция $f = u^2/2$ — уравнению

$$\nabla_{nn}f - \nabla_{n-1n-1}f + \ldots + (-1)^n = 0. \tag{11}$$

Эти уравнения имеют место в области, где функция f регулярна. В римановом пространстве с отрицательной кривизной Риччи и без фокальных точек функция f субгармоническая и $\nabla_2 f \geqslant n$. Отсюда следует, что в этом пространстве для объема любой области V, в которой функция f регулярна, имеет место оценка $V \leqslant rS/n$, где r — радиус геодезического шара, содержащего область; S — площадь границы.

Если F^n лежит в евклидовом пространстве E^{n+1}, то функция $\rho = \frac{x^2}{2}$, где x радиус-вектор поверхности, удовлетворяет уравнениям, связанным с функциями главных кривизн. Первое из них линейное и имеет смысл не только для гиперповерхности

$$\nabla_2\rho = n + n(Hx), \tag{12}$$

где H — вектор средней кривизны. Пусть S_i — симметрические функции главных кривизн гиперповерхности F^n, при этом для удобства мы полагаем $S_1 = nH$, где H — средняя кривизна. Приведенное уравнение, а также уравнения более высокой нелинейности записываются так:

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_{n-m}^{k-m} \nabla_{mm}\rho = S_k (xn)^k, \ k = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

при этом считается, что $\nabla_{00}\rho = 1$, n — нормаль к F^n.

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — координаты на F_n, L_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы, Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля метрики F^n. Для обычных производных функции ρ имеем

$$\rho_{u_i u_j} = (xx_{u_i u_j}) + g_{ij} = \Gamma_{ij}^k \rho_{u_k} + L_{ij}(xn) + g_{ij}.$$

Следовательно, для ковариантных производных ρ_{ij} получим

$$\rho_{ij} = L_{ij}(xn) - g_{ij}. \tag{14}$$

Так как функции S_k являются коэффициентами уравнения $\det \| L_{ij} + \lambda g_{ij} \| = 0$, то легко установить для них следующие выражения:

$$S_k = \frac{1}{g} \sum [g_1, \ldots, L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_k}, \ldots, g_n],$$

где квадратные скобки обозначают определитель, а g_i и L_i — i-е столбцы из матриц $\| g_{ij} \|$ и $\| L_{ij} \|$ соответственно. В каждом определителе индекс снизу при столбце обозначает занимаемое им место. Суммирование производится по всем наборам по k столбцов

L_m. Пусть $\bar{\rho}_i$ — i-й столбец матрицы $\|\rho_{ij}\|$. Используя (4), можем записать

$$S_k (xn)^k = \frac{1}{g} \sum [g_1, \ldots, \bar{\rho}_{\alpha_1} - g_{\alpha_1}, \ldots, \bar{\rho}_{\alpha_k} - g_{\alpha_k}, \ldots, g_n].$$

Каждый определитель разложим в сумму определителей. Совокупность определителей с одним и тем же числом, например, m, столбцов вида $\bar{\rho}_{\alpha_i}$ в сумме равна с точностью до постоянного множителя $\nabla_{mm}\rho$. Легко найти, что этот множитель равен $(-1)^{k-m} \times \times C_{n-m}^{k-m}$.

С помощью уравнения (13) можно для каждого $k = 1, \ldots, n$ найти выражение $\Delta_{kk}\rho$ через функции $S_i (xn)^i$. Приведем здесь лишь одно выражение

$$\nabla_{nn}\rho = \sum_{k=1}^{n} S_k (xn)^k + 1,$$

которое получается из (13) суммированием по k от 1 до n. Если F^n компактно, то уравнения (13) дают простую оценку для S_k через r-радиус содержащего поверхность шара:

$$\max (-1)^k S_k \geqslant 1/r^k C_n^k.$$

Можно также установить, что каждая компонента x_i радиус-вектора x удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_{kk} x_i = S_k (1 - \nabla_1 x_i)^{k/2}, \ k = 1, \ldots, n,$$

которые получаются аналогично (13).

3. Внешний диаметр и кривизна Риччи гиперповерхности

Пусть функция z класса C^3 задана на римановом многообразии. Получим

$$\nabla_{22} z = \operatorname{div} \nu + \frac{1}{2} \nabla_1 z \operatorname{Ric} (\operatorname{grad} z), \tag{15}$$

где вектор ν имеет вид

$$\nu = \frac{\nabla_2 z}{2} \operatorname{grad} z - \frac{1}{4} \operatorname{grad} \nabla_1 z \tag{16}$$

и выражение $\operatorname{Ric} \operatorname{grad} z$ — кривизна Риччи в направлении вектора $\operatorname{grad} z$. Действительно,

$$2\nabla_{22} z = z_i^i z_j^j - z_j^i z_i^j = (z^i z_j^j - z_j^i z^j)_i +$$

$$+ (z_{ji}^i - z_{ij}^i) z^j = \operatorname{div} 2\nu + R_{e.ji}^i z^e z^j = \operatorname{div} 2\nu + \nabla_1 z \operatorname{Ric} (\operatorname{grad} z).$$

В случае $n = 2$ кривизну Риччи надо заменить на гауссову кривизну (формулу см. в работе [5]).

Пусть F^n — замкнутая гиперповерхность в евклидовом пространстве E^{n+1}. Используем (13) при $k = 2$.

$$\nabla_{22}\rho + \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) \nabla_2 \rho = \frac{R}{2} (2\rho - \nabla_1 \rho). \tag{17}$$

Пусть V — n-мерный объем гиперповерхности F^n, dV — элемент объема. Интегрируя уравнение (17) и используя (15), находим *формулу для объема замкнутой ориентируемой гиперповерхности*

$$V = \frac{2}{n(n-1)} \int_{F^n} \{R(2\rho - \nabla_1\rho) - \nabla_1\rho \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}\rho)\} dV, \qquad (18)$$

где R — скалярная кривизна гиперповерхности.

Из этой формулы вытекает следующее

Предложение. *Пусть кривизна Риччи замкнутой ориентируемой гиперповерхности F^n удовлетворяет неравенствам $-a^2 \leqslant \operatorname{Ric} \leqslant b^2$, a и b — постоянные. Тогда для радиуса шара r в E^{n+1}, содержащего F^n, имеет место оценка*

$$r \geqslant \sqrt{\frac{n(n-1)}{nb^2 + a^2}}.$$

Действительно, если $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональный базис в касательном пространстве F^n, то

$$R = \sum_i \operatorname{Ric}(e_i) \leqslant nb^2.$$

Из (18) с учетом очевидных неравенств $2\rho - \nabla_1\rho \leqslant r^2$, $\nabla_1\rho \leqslant r^2$ получим

$$V \leqslant (nb^2 + a^2) V r^2 / n(n-1).$$

Отсюда следует утверждение.

В том случае, когда F^n имеет границу Γ, для выражения объема получим добавочное слагаемое, которое войдет в правую часть (18)

$$\frac{2}{n} \int_{\Gamma} \left(\operatorname{grad}\rho - \frac{\nu}{n-1}, \tau\right) dS, \qquad (19)$$

где τ — внешняя нормаль к границе Γ.

Преобразуем этот граничный интеграл к виду, содержащему элементы внешней геометрии Γ по отношению к F^n. Предположим, что граница Γ достаточно гладкая, например класса C^2. В окрестности Γ введем на F^n полугеодезическую систему координат, в которой линейный элемент F^n запишется в виде

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta + (dt)^2, \quad 1 \leqslant \alpha, \ \beta \leqslant n-1.$$

Граница Γ задается уравнением $t = 0$, и направление возрастания t соответствует внешней нормали τ. Тогда линейный элемент Γ имеет вид $ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$.

Получим

$$(\nu\tau) = \frac{1}{2}(\rho^i \tau_i \rho^j_j - \rho^j \rho^i_j \tau_i).$$

Пусть значок $\sim$ сверху обозначает, что соответствующая величина найдена с помощью метрики Γ. Легко найти

$$\rho^i_i = \nabla_2\rho = \tilde{\nabla}_2\rho + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}, \qquad (20)$$

где $\tilde{\nabla}_2$ — оператор Лапласа-Бельтрами на границе Γ. Пусть $\tilde{L}_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы Γ по отношению к F^n. Для них известно выражение $\tilde{L}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}$. Тогда средняя кривизна границы Γ, рассматриваемой как подмногообразие в F^n, которую мы обозначим через H_g, имеет вид

$$H_g = \tilde{L}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{2(n-1)} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{dt}. \qquad (21)$$

С помощью (20) и (21) находим

$$\nabla_2 \rho = \tilde{\nabla}_2 \rho - (n-1) H_g \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \qquad (22)$$

Далее рассмотрим второй член, входящий в выражение $(\nu\tau)$. Считая, что $j = 1, \ldots, n$,

$$\rho^j \rho_{ij} \tau^i = \rho^j \rho_{nj} = \rho^j \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial u^j} - \frac{\rho^\alpha}{2}\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho^\alpha \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial u^\alpha} + \rho^\alpha \rho^\beta \tilde{L}_{\alpha\beta}. \qquad (23)$$

Преобразуем выражение $\rho^\alpha \partial^2 \rho / \partial t \partial u^\alpha$. Можем записать

$$\rho^\alpha \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\rho^\alpha\right) - \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial u^\alpha} = \left[\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\rho^\alpha\right) + \tilde{\Gamma}^\alpha_{k\alpha}\rho^k \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] -$$

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t}\left[\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial u^\alpha} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\alpha k}\rho^k\right] = \widetilde{\operatorname{div}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\widetilde{\operatorname{grad}}\, \rho\right) - \frac{\partial \rho}{\partial t}\tilde{\nabla}_2 \rho, \qquad (24)$$

где $\tilde{\Gamma}^l_{ik}$ — символы Кристоффеля метрики Γ.

Используя (22) — (24), запишем выражение $(\nu\tau)$:

$$2(\nu\tau) = 2\frac{\partial \rho}{\partial t}\tilde{\nabla}_2 \rho - \widetilde{\operatorname{div}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\widetilde{\operatorname{grad}}\, \rho\right) - (n-1) H_g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 - \rho^\alpha \rho^\beta \tilde{L}_{\alpha\beta}. \qquad (25)$$

Пусть H_Γ — вектор средней кривизны границы Γ, рассматриваемой как $(n-1)$-мерное подмногообразие в E^{n+1}, а x — радиус-вектор Γ. Тогда, как частный случай формулы (12), имеем

$$\tilde{\nabla}_2 \rho = (n-1)\{1 + (H_\Gamma x)\}.$$

Поставим это выражение в правую часть (25), а затем полученное выражение $(\nu\tau)$ — в (19). Интегрируя уравнение (17) и используя (18) и (19), находим следующее *выражение для объема V области D на гиперповерхности F^n с границей Γ:*

$$V = \frac{1}{n(n-1)}\int_D \{R(2\rho - \nabla_1 \rho) - \nabla_1 \rho \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} \rho)\}\, dV -$$

$$- \frac{1}{n}\int_\Gamma \left\{2\frac{\partial \rho}{\partial t}(H_\Gamma x) - H_g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 - \frac{k(\widetilde{\operatorname{grad}}\, \rho)\, \tilde{\nabla}_1 \rho}{n-1}\right\} dS, \qquad (26)$$

где $k(\widetilde{\operatorname{grad}}\rho)$ — нормальная кривизна Γ, как подмногообразия F^n, в направлении grad ρ. Сделаем вывод: объем области D выражается с помощью двух интегралов, из которых первый по D оценивается сверху через внешний диаметр D и интеграл от кривизны Риччи, а второй по Γ оценивается сверху через внешний диаметр Γ, интегралы от геодезических кривизн Γ и через интеграл от модуля вектора средней кривизны H_Γ, если рассматривать Γ как подмногообразие E^{n+1}. Если Γ — выпуклая гиперповерхность в F^n, например, граница маленького шара D, то интеграл по Γ оценивается сверху через внешний диаметр и вектор средней кривизны H_Γ.

В этих оценках присутствуют две внешние величины — диаметр и H_Γ. Далее для геодезического шара мы получим оценки, не содержащие H_Γ. Для этого интеграл, содержащий H_Γ, представляется в виде производной по t от некоторого граничного интеграла. Это означает, что интеграл от $\nabla_{22}z$ по D записывается в виде производной по t от интеграла по Γ плюс некоторые другие члены, что аналогично формуле С. Н. Бернштейна, которая выражает интеграл от гессиана функции $z(x, y)$ на плоскости x, y, взятый по кругу, через некоторые граничные интегралы. При $n=2$ формула выведена в работе [5]. Последующее интегрирование по t и дает оценку снизу для внешнего диаметра через внутренние величины. Преобразуем выражение (25) для $(\nu\tau)$. Используя (24), запишем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\tilde{\nabla}_2\rho = \widetilde{\operatorname{div}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\widetilde{\operatorname{grad}}\,\rho\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{\nabla}_1\rho}{\partial t} + \rho^\alpha\rho^\beta\tilde{L}_{\alpha\beta}.$$

Следовательно,

$$2(\nu\tau) = -\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\nabla}_1\rho + \widetilde{\operatorname{div}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\widetilde{\operatorname{grad}}\,\rho\right) + \rho^\alpha\rho^\beta\tilde{L}_{\alpha\beta} - (n-1)H_g\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2. \tag{27}$$

Рассмотрим интеграл

$$-\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{\nabla}_1\rho}{\partial t}dS = -\frac{d}{dt}\int_\Gamma \tilde{\nabla}_1\rho\,dS - \int_\Gamma \tilde{L}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}\rho\,dS. \tag{28}$$

Используя (27) и (28), получим

$$2\int_\Gamma(\nu\tau)\,dS = -\frac{d}{dt}\int_\Gamma\tilde{\nabla}_1\rho\,dS - \int_\Gamma(n-1)H_g\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 dS + \\ + \int_\Gamma\{k(\widetilde{\operatorname{grad}}\,\rho) - H_g\}\tilde{\nabla}_1\rho\,dS. \tag{29}$$

Далее имеем

$$\int_\Gamma(\operatorname{grad}\rho\tau)\,dS = \frac{d}{dt}\int_\Gamma\rho\,dS - \int_\Gamma(n-1)H_g\rho\,dS. \tag{30}$$

Используя (18), (19), (29) и (30), можем записать окончательно

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma}\left\{\frac{\widetilde{\nabla}_1\rho}{n(n-1)}+\frac{2\rho}{n}\right\}dS=-\int_{\Gamma}H_g(n-1)\left[\frac{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2}{n(n-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\rho}{n}\right]dS+\int_{\Gamma}\frac{[k(\widetilde{\operatorname{grad}}\,\rho)-H_g]\,\widetilde{\nabla}_1\rho}{n(n-1)}dS+V-$$

$$-\frac{1}{n(n-1)}\int_D\{R(2\rho-\nabla_1\rho)-\nabla_1\rho\operatorname{Ric}(\operatorname{grad}\rho)\}\,dV. \qquad (31)$$

Рассмотрим семейство геодезических сфер на поверхности F^n, радиус которых обозначим через t, а сами сферы через $\Gamma(t)$. Пусть центр этих сфер есть точка 0. Далее предположим, что точка 0 не является фокальной точкой для других точек. Тогда, как показано в работе Буземана [10], сферы $\Gamma(t)$ будут выпуклы. Если ввести ортогональные координаты на $\Gamma(t)$ в некоторой ее точке, идущие по главным направлениям, то $\widetilde{L}_{ii}\leqslant 0$, $\widetilde{L}_{ij}=0$ при $i\neq j$. Поэтому

$$[k(\widetilde{\operatorname{grad}}\,\rho)-H_g]\,\widetilde{\nabla}_1\rho=\sum_i\widetilde{L}_{ii}(\rho_i)^2- \qquad (32)$$

$$-\left(\sum_i\widetilde{L}_{ii}\right)\left(\sum_j\rho_j^2\right)=-\sum_i\widetilde{L}_{ii}\,(\widetilde{\nabla}_1\rho-\rho_i^2)\geqslant 0.$$

Из уравнения (31) с учетом (32) и $H_g\leqslant 0$ вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)}\{\widetilde{\nabla}_1\rho+2(n-1)\rho\}\,dS\geqslant(n-1)\,nV(t)-$$

$$-\int_{D(t)}\{R(2\rho-\nabla_1\rho)-\nabla_1\rho\operatorname{Ric}(\operatorname{grad}\rho)\}\,dV. \qquad (33)$$

Пусть $S(t)$ — площадь границы $\Gamma(t)$ и r — радиус наименьшего шара в E^{n+1}, содержащего $D(t)$. Интегрируя от 0 до t правую и левую часть (33), получим

$$r^2S(t)\geqslant(n-1)\int_0^t V(t)\,dt-\frac{1}{n}\int_0^t\int_{D(t)}\{R(2\rho-\nabla_1\rho)-$$

$$-\nabla_1\rho\operatorname{Ric}(\operatorname{grad}\rho)\}\,dVdt.$$

Отсюда следует оценка снизу для радиуса наименьшего шара r, содержащего $D(t)$, которая выражается с помощью внутренних величин. Обозначим через R^+ положительную часть скалярной кривизны, и пусть $\overline{\operatorname{Ric}}(\tau)$ — отрицательная часть кривизны Риччи для поля τ, касательного к поверхности в точке $x\in F^n$. Обозначим

$$\max|\overline{\operatorname{Ric}}|=\max|\overline{\operatorname{Ric}}(\tau)|,\quad A(t)=\int_{D(t)}\{R^+ +\max|\operatorname{Ric}|\}\,dV, \qquad (34)$$

где максимум модуля отрицательной части кривизны Риччи $\overline{\mathrm{Ric}}(\tau)$ берется по всем касательным направлениям τ в точке $x \in F^n$.

Теорема 3. *Радиус наименьшего шара r в евклидовом пространстве E^{n+1}, содержащего геодезический шар на поверхности, удовлетворяет неравенству*

$$r^2 \geqslant \frac{(n-1)\int\limits_0^t V(t)dt}{S(t) + \frac{1}{n}\int\limits_0^t A(t)\,dt}.$$

Оценка объема геодезического шара на гиперповерхности. Предположим, что центр этого шара не является фокальной точкой. Установим оценку сверху для объема такого шара, выраженную через площадь границы, радиус наименьшего шара в E^{n+1}, содержащего геодезический шар на поверхности, и кривизну. Пусть $D(t)$ — семейство концентричных геодезических шаров радиуса t. Умножим левую и правую часть (33) на $S(t) = dV/dt$, где $S(t)$ — площадь границы $\Gamma(t)$, и затем проинтегрируем от 0 до t. Получим

$$n(n-1)\frac{V^2(t)}{2} \leqslant S(t)\int\limits_{\Gamma(t)}\{\tilde{\nabla}_1\rho + 2(n-1)\rho\}\,dS - \int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma(t)}\{\tilde{\nabla}_1\rho +$$
$$+ 2(n-1)\rho\}\,dS \cdot S'(t)\,dt + r^2\int\limits_0^t S(t)\int\limits_{D(t)}\{R^+ + \max|\overline{\mathrm{Ric}}|\}\,dV dt. \tag{35}$$

Так как центр шара не является фокальной точкой, то граница $\Gamma(t)$ выпукла и $S' \geqslant 0$. Поэтому неравенство только усилится, если в правой части отбросить второй интеграл. Пусть A — значение $A(t)$ для всего шара D, см. (34). Из неравенства (35) получим

$$\frac{n(n-1)}{2}V^2 \leqslant nS^2r^2 + Ar^2V.$$

Отсюда вытекает теорема 2.

В заключение рассмотрим геодезический шар, центр которого может быть фокальной точкой, но не имеет сопряженных точек. Пусть секционная кривизна $K \leqslant b^2$. Если радиус шара $s \leqslant \pi/2b$, то геодезические сферы выпуклы и, следовательно, имеют место установленные выше оценки. Пусть $\frac{\pi}{2b} \leqslant s < b$. Второй интеграл справа в (31) с помощью леммы из п. 1 оценивается снизу отрицательным числом $r^2 b \operatorname{ctg} bsS(s)\frac{n-2}{n(n-1)}$, которое войдет в правую часть неравенства (33). Обозначим

$$B(s) = S(s) + \frac{(n-2)\,b}{n^2(n-1)}\int\limits_{\frac{\pi}{2b}}^{s}|\operatorname{ctg} bt|\,S(t)\,dt + \frac{1}{n}\int\limits_0^t A(t)\,dt.$$

Интегрируя неравенство (33) с указанной добавкой, получим для r оценку во внутренних терминах

$$r^2(s) \geqslant \int_0^s V(t)\,dt/B(s).$$

4. Одно внутреннее условие неограниченности поверхности в E^3

Рассмотрим поверхность $F^2 \subset E^3$ с границей Γ, предположив, что F^2 и Γ имеют класс регулярности C^2. Формула (26) для площади S поверхности F^2 имеет вид

$$S = -\int_\Gamma (xk)\,\rho_\nu\,ds - \int_\Gamma \frac{\nabla_1\rho}{2}\frac{ds}{\rho_g} + \int_{F^2} K\left(2\rho - \frac{3}{2}\nabla_1\rho\right)dS, \tag{36}$$

где k — вектор кривизны линии Γ; ρ_ν — производная по нормали к Γ на F^2, причем нормаль внутренняя; $1/\rho_g$ — геодезическая кривизна Γ, K — гауссова кривизна F^2. Из этой формулы для площади следует оценка сверху, выраженная через радиусы наименьших шаров, содержащих границу и поверхность, и через интегральную кривизну границы и поверхности. Действительно, пусть граница Γ содержится в шаре радиуса r, а вся поверхность содержится в шаре радиуса R. Очевидно, что в точках границы $|\rho_\nu| \leqslant r/2$, $\nabla_1\rho \leqslant r^2$, а в точках поверхности $2\rho - \nabla_1\rho \leqslant R^2$, $\nabla_1\rho \leqslant R^2/2$, поэтому

$$S \leqslant r^2 \int_\Gamma |k|\,ds + R^2 \int_{F^2} |K|\,dS.$$

Рассмотрим теперь вопрос о неограниченности в пространстве. Пусть F^2 — либо полная односвязная или двусвязная поверхность в E^3 с краем γ. Предположим, что в F^2 или в некоторой двусвязной неограниченной подобласти D введена полугеодезическая система координат (r, φ), в которой линейный элемент имеет вид $ds^2 = dr^2 + G\,d\varphi^2$, причем линии $r = \text{const} \geqslant 0$ являются замкнутыми линиями $\Gamma(r)$, гомотопными γ. Дадим некоторое внутреннее условие, при выполнении которого поверхность неограничена в пространстве. Пусть $L(r)$ — длина $\Gamma(r)$, а площадь области $D(r)$, заключенной между $\Gamma(0)$ и $\Gamma(r)$, есть $S(r)$.

Теорема 4. *Пусть гауссова кривизна $K \leqslant 0$ и*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r + L(r)} \int_0^r S(r)\,dr = \infty.$$

Тогда поверхность неограничена в пространстве.

Для доказательства используем формулу (36), взяв в качестве области интегрирования $D(r)$. Сумму граничных интегралов, относящихся к $\Gamma(0)$, обозначим через C_1. Граничные интегралы, относящиеся к $\Gamma(r)$, запишем в виде (см. [4])

$$\frac{d}{dr}\int_{\Gamma(r)} \left(\frac{\rho_s^2}{2}\right) ds - \int_{\Gamma(r)} \left(\frac{\rho_r^2}{2} + \rho\right)\frac{ds}{\rho_g}, \tag{37}$$

где ρ_s и ρ_r — производные соответственно по длине дуги $\Gamma(r)$ и по нормали к ней; $1/\rho_g$ — геодезическая кривизна $\Gamma(r)$, нормаль к которой направлена внутрь $D(r)$. Предположим, что поверхность ограничена и содержится в шаре радиуса R. Расположим начало координат в центре этого шара. Так как $K \leqslant 0$ и $\nabla_1\rho \leqslant \leqslant 2\rho \leqslant R^2$, то

$$\int\limits_{D(r)} K\left(2\rho - \frac{3}{2}\nabla_1\rho\right)dS \leqslant -\frac{R^2}{2}\int\limits_{D(r)} KdS = \frac{R^2}{2}\left(\int\limits_{\Gamma(0)}\frac{ds}{\rho_g} + \int\limits_{\Gamma(r)}\frac{ds}{\rho_g}\right) = \\ = \frac{R^2}{2}\left(C_2 + \frac{dL(r)}{dr}\right), \tag{38}$$

где C_2 — интеграл от геодезической кривизны $\Gamma(0)$. Пусть $\gamma(r)$ — множество точек кривой $\Gamma(r)$, в которых $1/\rho_g \leqslant 0$. Тогда

$$-\int\limits_{\Gamma(r)}\left(\frac{\rho_r^2}{2} + \rho\right)\frac{ds}{\rho_g} \leqslant -R^2\int\limits_{\gamma(r)}\frac{ds}{\rho_g}. \tag{39}$$

Используя (36) — (39), получим

$$S(r) \leqslant C_1 + \frac{d}{dr}\int\limits_{\Gamma(r)}\left(\frac{\rho_s^2}{2} + \rho\right)ds - R^2\int\limits_{\gamma(r)}\frac{ds}{\rho_g} + \frac{R^2}{2}\left(C_2 + \frac{dL(r)}{d(r)}\right). \tag{40}$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до r и оценим правую часть. Рассмотрим интеграл

$$I(r) = -\int\limits_0^r\int\limits_{\gamma(r)}\frac{ds}{\rho_g}dr. \tag{41}$$

Пусть M — множество точек на поверхности таких, что в этих точках $1/\rho_g \geqslant 0$. Граница множества M звездна относительно лучей $\varphi = \text{const}$, т. е. если при фиксированном φ и некотором r_1 имеем $\frac{1}{\rho_g}(r_1, \varphi) \geqslant 0$, то при $r \geqslant r_1$ $\frac{1}{\rho_g}(r, \varphi) \geqslant 0$. Дей.твительно, интегрируя уравнение

$$K\sqrt{G} = -(\sqrt{G})_{rr}$$

от r_1 до r, мы получим

$$[\sqrt{G(r, \varphi)}]_r = [\sqrt{G(r_1, \varphi)}]_r - \int\limits_{r_1}^r K\sqrt{G}dr \geqslant [\sqrt{G(r_1, \varphi)}]_r. \tag{42}$$

Так как геодезическая кривизна линии $r = \text{const}$ равна $\sqrt{G_r}/\sqrt{G}$, то из (42) следует наше утверждение. Обозначим через $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ — координаты концов отрезка на линии $r = \text{const}$ из множества $\gamma(r)$, в концах которого $1/\rho_g = 0$, считая, что этот отрезок является связной компонентой из множества $\gamma(r)$. Обозначим его через $\tau(r)$. Пусть $\varphi_1(r) \leqslant \varphi_2(r)$. По доказанному $\varphi_1(r)$ — неубывающая, а $\varphi_2(r)$ — невозрастающая функции, r, поэтому они почти всюду дифференцируемы. Имеем для почти всех r

$$-\int\limits_{\tau(r)} \frac{ds}{\rho_g} = -\frac{d}{dr}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{G}\,d\varphi + \frac{d\varphi^2}{dr} - \frac{d\varphi_1}{dr} \leqslant -\frac{d}{dr}\int\limits_{\tau(r)} ds.$$

Интегрируя это неравенство и принимая во внимание (41), получим $I(r) \leqslant I(0)$. Для нас важно лишь, что $I(r)$ ограничено. Итак, получим

$$\int\limits_0^r S(r)\,dr < \left(C_1 + \frac{R^2}{2}C_2\right)r + \frac{R^2}{2}(L(r) + L(0)) + \int\limits_{\Gamma(r)}\left(\frac{\rho_s^2}{2} + \rho\right)ds -$$

$$-\int\limits_{\Gamma(0)}\left(\frac{\rho_s^2}{2} + \rho\right)ds \leqslant \left(C_1 + \frac{R^2}{2}C_2\right)r + \frac{R^2}{2}[3L(r) + L(0)].$$

Разделим обе части неравенства на $r + L(r)$ и устремим r к ∞. Так как верхний предел отношения в правой части ограничен числом $\max(C_1 + R^2C_2/2, 3R^2/2)$, то отношение в левой части также ограничено, что противоречит предположению. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М., Гостехиздат, 1948. 387 с.
2. Бураго Ю. Д. Неравенства изопериметрического типа в теории поверхностей ограниченной внешней кривизны. — Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 10, 1968, с. 40—45
3. Бураго Ю. Д. Оценка снизу пространственного диаметра поверхности через ее внутренний радиус и кривизну. — «Мат. сб.», т. 36 (128), 1971, с. 409—418.
4. Вернер А. Л. Неограниченность гиперболического рога в евклидовом пространстве. — «Сибирск. мат. журн.», т. 11, № 1, 1970, с. 20—29.
5. Аминов Ю. А. О внешнем диаметре поверхности отрицательной кривизны. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 13, Харьков, 1973, с. 3—8.
6. Аминов Ю. А. Внешний диаметр погруженного риманова многообразия. — «Мат. сб.», т. 92, (134), № 3, 1973, с. 456—460.
7. Бураго Ю. Д. Об одной теореме Ю. А. Аминова. — В сб.: Вопросы глобальной геометрии. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 45, 1974, с. 28—34.
8. Ricci G., Levi-Civita T. Methodes de calcul differentiel absolu et leur applications. — «Math. Ann.», 1901, vol. 54, p. 125—201.
9. Jacobowitz. Isometris embedding of a compact Riemannian manifold into Euclidean space. — «Proc. Amer. Math. Soc.», vol. 40, № 1, 1973, p. 48—56.
10. Буземан Г. Геометрия геодезических. Физматгиз, 1962. 504 с.

Поступила 15 декабря 1974 г.

УДК 513

Я. П. БЛАНК

КОНГРУЭНЦИЯ ОСЕЙ КОНИЧЕСКОЙ СЕТИ

Осью сопряженной сети называется прямая пересечения соприкасающихся плоскостей к обеим кривым сети, проходящим через точку поверхности.

Если сопряженная сеть цилиндрическая, несущая ее поверхность есть поверхность переноса. В этом случае, по известной теореме Дарбу [1], конгруэнция осей сети — конгруэнция W. При перемещении вдоль кривых переноса фокусы осей сети описывают на обеих фокальных поверхностях асимптотические линии. При этом поверхность переноса служит средней поверхностью конгруэнции Дарбу, а фокальные поверхности — аффинно-минимальные [2].

В работе [3] было доказано, что у любой конгруэнции W существует однопараметрическое семейство поверхностей, несущих сети кривых, соприкасающиеся плоскости которых в каждой точке поверхности пересекаются по лучу конгруэнции, причем при перемещении по кривым сети фокусы лучей описывают на обеих фокальных поверхностях асимптотические линии.

Легко видеть, что если подвергнуть конгруэнцию Дарбу проективному преобразованию, она останется конгруэнцией W, но цилиндрическая сеть перейдет в коническую специального вида. Линии Γ_1, Γ_2, на которых расположены вершины конусов, касающихся поверхности вдоль кривых сети, лежат в общей плоскости, в которую перешла несобственная плоскость в результате проективного преобразования.

Таким образом, оси конической сети поверхности Петерсона, полученной проективным преобразованием из поверхности переноса, также образуют конгруэнцию W.

Рассмотрим общий случай поверхности Петерсона.

Ее канонические уравнения в однородных координатах

$$x = a(u) + b(v). \tag{1}$$

Уравнения соприкасающихся плоскостей к линиям конической сети

$$(X\, a + b\, a'a'') = 0, \tag{2}$$

$$(X\, a + b\, b'b'') = 0. \tag{3}$$

Их пересечением служит ось конической сети, которая и порождает интересующую нас конгруэнцию.

Пусть X — фокус на оси конической сети, тогда

$$dX = \lambda X + \mu(a + b). \tag{4}$$

Введем обозначения

$$\xi = (a + b\, a'a''), \tag{5}$$

$$\eta = (a + b\, b'b''). \tag{6}$$

Уравнения (2), (3) принимают вид

$$X\xi=0, \tag{2'}$$

$$X\eta=0. \tag{3'}$$

Из (2') следует

$$dX\xi+Xd\xi=0.$$

Но по (4)

$$dX\xi=0,$$

следовательно,

$$Xd\xi=0, \tag{7}$$

соответственно

$$Xd\eta=0. \tag{8}$$

Исключив du, dv из уравнений (7), (8), получаем квадратное уравнение относительно однородных координат X, которое с двумя линейными уравнениями (2'), (3') и определяет обе фокальные поверхности конгруэнции осей конической сети. Так как кривые конической сети не асимптотические,

$$(a+b\,a'b''a'')\neq 0,\ (a+b\,a'b'b'')\neq 0. \tag{9}$$

Исключим из рассмотрения случай, когда хоть одно из семейств сети состоит из плоских кривых. Тогда одна из линий Γ_1, Γ_2, порождающих сеть — прямая, в которую и вырождается одна из фокальных поверхностей конгруэнции осей конической сети.

Исключив этот случай, получим

$$(a+b\,a''b'b'')\neq 0,\ (a+b\,b''a'a'')\neq 0. \tag{10}$$

Действительно, пусть

$$(a+b\,a''b'b'')=0,$$

отсюда следует

$$a''=\alpha_1(a+b)+\alpha_2 b'+\alpha_3 b''.$$

Продифференцировав по v, имеем

$$0=\alpha_{1v}(a+b)+(\alpha_1+\alpha_{2v})b'+(\alpha_2+\alpha_{3v})b''+\alpha_3 b''',$$

и так как точки $a+b$, b', b'', b''' линейно независимы,

$$\alpha_3=\alpha_2=\alpha_1=0,$$

что невозможно.

Из (2) следует

$$X=A(a+b)+Ba'+Ca'', \tag{11}$$

где A, B, C — функции u, v. Подставив это выражение для X в (3'), находим зависимость между B и C:

$$B(a+b\,a'b'b'')+C(a+b\,a''b'b'')=0.$$

В силу неравенств (9), (10) можно без ограничения общности считать

$$B=(a+b\,a''b'b''), \tag{12}$$

$$C = -(a + b\, a'b'b''), \tag{13}$$

$$B = -C_u. \tag{14}$$

Из (5), (6) следует

$$\xi_u = (a + b\, a'a'''),\ \ \xi_v = (b'a'a''),$$

$$\eta_u = (a'b'b''),\ \ \eta_v = (a + b\, b'b''').$$

Подставив в уравнение (7) выражение X из (11), получаем

$$C(a''a + ba'a''')du + A(a + bb'a'a'')dv \tag{15}$$

или, обозначив

$$R = (a''a + ba'a'''),\ \ S = (a + b\, b'a'a''), \tag{16}$$

$$CRdu + ASdv = 0; \tag{15'}$$

при этом

$$R \neq 0,\ S \neq 0.$$

Подставив в уравнение (8) вместо X его значение из (11) и положив

$$L = (a''a'b'b''), \tag{17}$$

находим

$$C(L - A)du + (CC_{uv} - C_uC_v)\, dv = 0. \tag{18}$$

Исключив du, dv из (15'), (16), получаем квадратное уравнение относительно A:

$$SA^2 - LSA + R\,(CC_{uv} - C_uC_v) = 0. \tag{19}$$

Таким образом,

$$A = \frac{L}{2} \pm D, \tag{19'}$$

где

$$D^2 = \frac{L^2}{4} - \frac{R}{S}\,(CC_{uv} - C_uC_v). \tag{20}$$

Внеся в уравнение (11) найденные значения B, C и A из (12), (13) и (17), получаем уравнения обеих фокальных поверхностей конгруэнции осей сети в параметрах u, v сети.

Выясним, при каком условии фокусы осей конической сети при перемещении вдоль кривых сети описывают на обеих фокальных поверхностях асимптотические линии, и, следовательно, конгруэнция осей является конгруэнцией W.

Должны выполняться уравнения

$$(XX_uX_vX_{vv}) = 0, \tag{21}$$

$$(XX_uX_vX_{uu}) = 0. \tag{22}$$

Из (21) следует

$$(XdXX_vX_{vv}) = 0,$$

или в силу (4)

$$(Xa + bX_vX_{vv}) = 0. \tag{21'}$$

После подстановки значений X_v, X_{vv}

$$X_v = A_v(a + b) + Ab' - C_{uv}a' + C_v a'',$$

$$X_{vv} = A_{vv}(a + b) + 2A_v b' + Ab'' - C_{uvv}a' + C_{vv}a''$$

уравнение (21') принимает следующий вид:

$$S\,[2A_v(C_uC_v - CC_{uv}) + A(CC_{uvv} - C_uC_{vv})] + AS_v(C_uC_v - C_{uv}) = 0$$

или

$$A\left(\ln \frac{S}{CC_{uv} - C_uC_v}\right)_v + 2A_v = 0. \tag{21''}$$

Внеся сюда оба значения A из (19'), после сложения и вычитания получаем

$$L\left(\ln \frac{S}{CC_{uv} - C_uC_v}\right)_v + 2L_v = 0, \tag{23}$$

$$D\left(\ln \frac{S}{CC_{uv} - C_uC_v}\right)_v + 2D_v = 0. \tag{24}$$

Из (23), (24) следует

$$\left(\frac{D}{L}\right)_v = 0.$$

Но по (20)

$$4\frac{D^2}{L^2} = 1 - \frac{4R}{L^2S}(CC_{uv} - C_uC_v).$$

Отсюда в силу (23)

$$R_v = 0, \tag{25}$$

или $(a''b'a'a''') = 0$. Так как $R \neq 0$, a', a'', a''' линейно независимы и

$$b' = \nu_1 a' + \nu_2 a'' + \nu_3 a'''. \tag{26}$$

Продифференцировав по u, находим

$$(a' \; a'' \; a''' \; a'''') = 0. \tag{27}$$

Следовательно, Γ_1 — плоская кривая, а из (26) вытекает, что и Γ_2 — плоская кривая и обе лежат в одной плоскости.

Если в уравнениях (23), (24) $L = 0$ или

$$\left(\frac{S}{CC_{uv} - C_uC_v}\right)_v = 0,$$

приходим к такому же заключению.

Таким образом, чтобы лучи конгруэнции осей конической сети при перемещении вдоль линий сети описывали на фокальных поверхностях асимптотические линии (и, следовательно, образовали конгруэнцию W) необходимо и достаточно, чтобы коническая сеть могла быть переведена проективным преобразованием в цилиндрическую, а несущая ее поверхность Петерсона в поверхность переноса

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Darboux G. Théorie des surfaces, t. 3. 1894. 368 p.; t. 4, 1896. 512 p.
2. Berwald L. Math. Zeitschr., 1920, H. 8, S. 63—78.
3. Бланк Я. П. О конгруэнциях W. — «Зап. мат. отд. физ.-мат. ф-та ХГУ и Харьк. мат. о-ва», 1957, т. XXV, с. 45—48.

Поступила 3 января 1975 г.

УДК 513

А. А. БОРИСЕНКО

О СЕДЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известно, что в сферическом пространстве S^3 есть замкнутые минимальные поверхности любого топологического типа [1]. Если минимальная поверхность гомеоморфна сфере, то, как доказал Альмгрен, эта поверхность является большой сферой. Минимальная поверхность в сферическом пространстве S^3 имеет гауссову кривизну не больше единицы, т. е. является поверхностью неположительной внешней кривизны. Естественно поставить вопрос о строении поверхности неположительной внешней кривизны в сферическом пространстве, если поверхность гомеоморфна сфере. Очевидно, такая поверхность всегда является большой сферой, но доказать это пока удается лишь при некоторых ограничениях.

Аналогично заданию поверхности в виде $z = f(x, y)$ в евклидовом пространстве определим явное задание поверхности в сферическом пространстве. Будем говорить, что поверхность F регулярно однозначно проектируется на большую сферу S^2, если ни одна касательная большая сфера к поверхности F не перпендикулярна сфере S^2.

Теорема 1. *Пусть F — гомеоморфная сфере поверхность класса C^2 в сферическом пространстве S^3, гауссова кривизна поверхности удовлетворяет неравенству $K \leqslant 1$. Если а) на поверхности F лежит большая окружность S^1; б) поверхность F однозначно регулярно проектируется на большую сферу, то поверхность F является большой сферой.*

Когда гауссова кривизна поверхности меняется в меньшем диапазоне, то аналогичная теорема доказывается при более слабых предположениях.

Теорема 2. *Пусть F — поверхность класса C^2 в сферическом пространстве S^3, гауссова кривизна поверхности удовлетворяет неравенствам $0 < K \leqslant 1$. Если на поверхности F лежит большая окружность, то поверхность F является большой сферой.*

Доказательство теоремы 1. Сферическое изображение окружности S^1 лежит на полярной большой окружности. Из предположения б) следует, что сферическое изображение поверхности F лежит в открытой полусфере. Поэтому сферическое изображение окружности S^1 не заполняет полностью полярной окружности. Отсюда следует, что найдется большая сфера S_0^2, содержащая окружность S^1, которая не является касательной сферой к поверхности F. Для определенности положим, что сфера S_0^2 лежит в плоскости переменных x_1, x_2, x_3, а окружность S^1 — в плоскости x_1, x_2.

В окрестности окружности S^1 нет других точек пересечения сферы S_0^2 и поверхности F. Любая другая компонента пересечения, если она есть, является регулярной кривой, гомеоморфной окружности. Компонента пересечения лежит в открытой полусфере сферы S_0^2. Пусть γ — одна из компонент пересечения, F^+ — область на поверхности F с границей γ, лежащая в полупространстве $x_0 > 0$.

Осуществим геодезическое отображение полусферы $x_0 > 0$ на евклидово пространство $x_0 = 1$. Образ поверхности $F^{\pm}$ поверхность $\tilde{F}^+$ — задается следующими уравнениями:

$$x = \frac{x_1(u, v)}{x_0(u, v)}, \ y = \frac{x_2(u, v)}{x_0(u, v)}, \ z = \frac{x_3(u, v)}{x_0(u, v)},$$

где $x_i = x_i(u, v)$, $(i = 0, \ldots, 3)$ — компоненты радиуса-вектора поверхности F. Так как кривая γ лежит в плоскости $x_0 = 0$ и на кривой γ $x_3 > c > 0$, то при уходе точек поверхности $\tilde{F}^+$ на бесконечность $z \to +\infty$. Значит, от поверхности $\tilde{F}^+$ можно отрезать горбушку. Но из свойств геодезического отображения и неположительности внешней кривизны поверхности F следует седлообразность поверхности $\tilde{F}^+$. Мы пришли к противоречию. Итак, сфера S_0^2 пересекает поверхность F только по большой окружности S^1. Пусть поверхность $\tilde{F}^+$ является геодезическим образом поверхности F^+, ограниченной большой окружностью S^1 и лежащей в полусфере $x_0 > 0$. Оценим, как уходит поверхность $\tilde{F}^+$ на бесконечность. Заметим, что если точка на F^+ приближается к окружности S^1, то $x_1^2 + x_2^2 \to 1$, $x_3 \to 0$, $x_0 \to 0$, причем $x_3 > 0$, $x_0 > 0$ в области F^+. Отсюда и из соотношения

$$\frac{z(u, v)}{\sqrt{x^2(u, v) + y^2(u, v)}} = \frac{x_3(u, v)}{\sqrt{x_1^2(u, v) + x_2^2(u, v)}}$$

следует, что

$$\lim \frac{z(u, v)}{\sqrt{x^2(u, v) + y^2(u, v)}} = 0.$$

Так как F^+ является полной седловой поверхностью, то, по теореме С. Н. Бернштейна о поверхностях отрицательной кривизны [2], поверхность F^+ — цилиндр. Перейдем обратно к поверхности F^+. Из гладкости поверхности F^+ и свойств геодезического отображения следует, что F_-^+ большая полусфера, а поверхность F является большой сферой.

Доказательство теоремы 2. По теореме, доказанной Клингенбергом [3], поверхность, удовлетворяющая условию теоремы, изометрична единичной сфере. Из [4] следует, что поверхность F является большой сферой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Do Carmo M. P., Wallach N. S. Minimal immersions of spheres into spheres. — «Ann. of Math.», 1971, vol. 93, p. 43—60.
2. Бернштейн С. Н. Усиление теоремы о поверхностях отрицательной кривизны. Собр. соч., т. 3, 1960. 368 с.
3. Klingenberg W. Neue Ergebnisse über convexe Flächen. — «Comm. math. Helv.», 1960, vol. 34, H. 1, S. 17—37.
4. Борисенко А. А. О полных поверхностях в пространствах постоянной кривизны. — «Укр. геометр. сб.», вып. 15, 1974, с. 8—15.

Поступила 1 октября 1974 г.

УДК 513

А. А. БОРИСЕНКО

ОБ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ КОМПАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Черн, Кейпер, Отзуки показали, что компактное l-мерное риманово многообразие неположительной кривизны нельзя изометрично вложить в евклидово пространство E^{2l-1} (1). Иначе обстоит дело, если рассматривать компактные поверхности неположительной внешней кривизны в других римановых пространствах. (Под внешней кривизной поверхности в направлении двумерной площадки будем понимать разность между кривизной поверхности и кривизной объемлющего пространства). Так, например, в единичной сфере S^{2l-1} расположен l-мерный тор. Он локально изометричен гиперплоскости, внешняя кривизна тора равна -1. Однако на топологический тип компактной l-мерной поверхности отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве R^{2l-1} существуют ограничения. Например, в сферическом пространстве S^3 замкнутая регулярная поверхность гауссовой кривизны $K<1$ гомеоморфна тору, ее эйлерова характеристика равна нулю.

В предлагаемой статье будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть F^l — компактная l-мерная поверхность класса C^3 в римановом пространстве R^{2l-1}. Если внешняя кривизна поверхности F^l отрицательна, то эйлерова характеристика поверхности F^l равна нулю.*

Следствие. *Сферу S^{2k} радиуса большего единицы нельзя регулярно изометрично погрузить в единичную сферу S^{4k-1}.*

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 1, если заметить, что эйлерова характеристика четномерных сфер равна двум.

Теорема 2. *Пусть F^l — компактная l-мерная поверхность класса C^3 в римановом пространстве R^{2l-l}. Если внешняя кривизна поверхности F^l отрицательна, то универсальная накрывающая поверхности F^l является параллелизуемым многообразием.*

Теорема 3. *Пусть F^l — компактное гомеоморфное сфере l-мерное риманово многообразие, кривизна которого по двумерным пло-*

щадком удовлетворяет неравенству $K < 1$; R^{2l-1} — риманово многообразие, кривизна которого по двумерным направлениям удовлетворяет неравенству $K \geqslant 1$. Если $l \neq 3, 7$, то риманово пространство F^l нельзя изометрично вложить в риманово пространство R^{2l-1}.*

Утверждение теоремы, по-видимому, справедливо и для $l=3,7$; но это доказать примененным здесь методом нельзя. Теорема 3 является обобщением следующей теоремы, доказанной Моором: *Полное l-мерное риманово многообразие постоянной положительной кривизны k нельзя изометрично вложить в сферу S^{2l-1} постоянной кривизны $K > k$* [2].

Для доказательства теорем потребуется несколько лемм.

Пусть задана система квадратичных уравнений

$$A^r = A^r_{ij}t^i t^j = 0 \; (i, \; j = 1, \dots, \; l; \; r = 1, \dots, N). \tag{1}$$

Обозначим $A(x, \; x)$ — вектор с компонентами $A^r_{ij}x^i x^j$; $A(x, \; y)$ — вектор с компонентами $A^r_{ij}x^i y^j$, где x, y — l-мерные векторы с компонентами x^i, y^i. Так как система (1) однородна, то ее решения, отличающиеся друг от друга, только не равным нулю множителем не будем различать.

Лемма 1. *Если в системе уравнения* (1) $N = l - 1$ *и для любых неколлинеарных векторов x, y выполняется условие*

$$A(x, \; x) \, A(y, \; y) - A^2(x, \; y) < 0, \tag{2}$$

то система имеет 2^{l-1} различных действительных нетривиальных решений.

Эта лемма является обобщением одной леммы, доказанной Отэуки [1]. Сначала покажем, что все решения системы (1) с точностью до комплексного множителя действительны. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — комплексное решение системы. Тогда

$$A(z_0, \; z_0) = A(x_0, \; x_0) - A(y_0, \; y_0) + 2iA(x_0, \; y_0). \tag{3}$$

Отсюда $A(x_0, \; x_0) = A(y_0, \; y_0)$, $A(x_0, \; y_0) = 0$. Если $x_0 \neq \lambda y_0$, то $A(x_0, x_0) \, A(y_0, y_0) - A^2(x_0, y_0) > 0$. Это противоречит неравенству (2). Значит, $x_0 = \lambda y_0$, $\lambda^2 = 1$, вектор y_0 является действительным решением системы (1), а вектор $z_0 = (\lambda + i) \, y_0$ коллинеарен действительному вектору y_0.

Пусть t^0 — единичное решение системы (1). Оно удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} A^r &= A^r_{ij}t^i t^j = 0, \\ A^l &= t^2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Якобиан системы (4) имеет элементы

$$\frac{\partial A^r}{\partial t^k} = 2A^r_{ik}t^i, \; r = 1, \dots, \; l-1;$$

$$\frac{\partial A^l}{\partial t^k} = 2t^k, \; k = 1, \dots, \; l.$$

Допустим, что якобиан равен нулю. Тогда существует ненулевой вектор $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^l)$ такой, что

$$\frac{\partial A^r}{\partial t^k}\lambda^k = 2A^r_{ik}t^i_0\lambda^k = 2A^r(l_0, \lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial A^l}{\partial t^k}\lambda^k = 2\sum_k t^k_0\lambda^k = 2(t, \lambda) = 0. \qquad (5)$$

Для ортогональных векторов t_0, λ из (4) и (5) следует, что

$$A(t_0, t_0)\, A(\lambda, \lambda) - A^2(t_0, \lambda) = 0.$$

Это противоречит неравенству (2). Значит, якобиан системы (4) при $t = t_0$ отличен от нуля. Из неравенства якобиана нулю следует, что t_0 является изолированным единичным решением системы (1), кратность которого равна единице. По теореме Безу [3, с. 218] система алгебраических уравнений (1) в поле комплексных чисел имеет либо бесконечное число решений, либо 2^{l-1} решений с учетом кратности. Из предыдущих рассуждений и теоремы Безу следует утверждение леммы 1.

Решения системы (1) будем называть асимптотическими направлениями.

Из теоремы Безу непосредственно следует

Лемма 2. *Пусть в системе* (1) $N \geqslant l - 1$. *Если число решений системы конечно, то оно не превосходит* 2^{l-1}.

Лемма 3. *Система уравнений (1), удовлетворяющая условию леммы* 1, *имеет* l *линейно независимых асимптотических направлений.*

Допустим, что все асимптотические направления системы (1) лежат в $(l-1)$-мерной плоскости P. Выберем плоскость P переменных $t^1, \ldots t^{l-1}$. В системе (1) положим $t^l = 0$. Мы получим систему с $l - 1$ неизвестным с числом уравнений, равным $l - 1$.

Из леммы 1 и нашего предположения следует, что полученная система имеет 2^{l-1} решений. Но по лемме 2 эта система не может иметь более 2^{l-2} решений. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Лемма 4. *Пусть отображение* $\pi : F' \to F$ *есть дифференцируемое конечное накрытие компактного дифференцируемого многообразия. Тогда*

$$\chi(F') = n\chi(F), \qquad (6)$$

где χ *— эйлерова характеристика многообразия,* n *— мощность накрытия.*

На компактном диффенцируемом многообразии F существует функция f, все критические точки которой невырождены. Сумма индексов критических точек функции f равна $\chi(F)$ [4, с. 40]. Функция f индуцирует на F' функцию $f' = f(\pi(X'))$, где $X' \in F'$.

Каждой критической точке функции f на многообразии F соответствует n критических точек функции f' на многообразии F' того же индекса. Этими точками исчерпываются все критические точки функции f' на многообразии F'. Отсюда и следует равенство (6).

Доказательство теоремы 1. Пусть F — компактная l-мерная поверхность отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве R^{2l-1}; O — произвольная точка поверхности; $n_1, \ldots, n_{l-1}$ — взаимно ортогональные единичные нормали к поверхности F в окрестности Q точки O, $A^r_{ij}t^it^j$ — вторые квадратичные формы поверхности для соответствующих нормалей.

По формуле Гаусса внешняя кривизна поверхности F в направлении двумерной площадки, натянутой на ортогональные единичные векторы x, y, вычисляется согласно [5] так:

$$K(x, y) = 2[A(x, x)A(y, y) - A^2(x, y)].$$

Система уравнений $A^r_{ij}t^it^j = 0$ удовлетворяет условию леммы 1. Отсюда следует, что в касательном пространстве поверхности F в точке Z из окрестности Q лежат 2^l единичных асимптотических векторов $v_i(Z)$, которые являются решениями системы (1). Ясно, что эти векторы не зависят от выбора системы координат. Из теоремы о неявной функции и неравенства нулю якобиана в решениях системы (1) следует, что в достаточно малой окрестности точки O касательные векторы $v_i(Z)$ распадаются на 2^l регулярных векторных полей V_i. В направлении вектора $v_i(Z)$ из точки Z выходит единственная интегральная траектория векторного поля V_i. Пусть $T\ F$ — касательное расслоение поверхности F, F' — совокупность векторов $v_i(Z)$, где Z — произвольная точка поверхности F. Так как локально векторы $v_i(Z)$ распадаются на регулярные векторные поля, то F' является компактным дифференцируемым многообразием. Пусть $i: F' \to TF$ — отображение включения, $\pi: TF \to F$ — естественная проекция. Тогда отображение $\pi \circ i: F' \to F$ является локальным диффеоморфизмом, а компактное многообразие F' — накрывающим поверхности F со слоем конечной мощности.

Многообразие F' может состоять из нескольких связных компонент. Одну из них обозначим также F'. Пусть $v \in F'$ произвольная точка многообразия F, $\pi \circ i(v) = Z$ — точка на поверхности F, в которой вектор v является асимптотическим касательным вектором. Для одного из векторных полей V_i будет $V_i(Z) = v$. В направлении вектора v из точки Z выходит единственная интегральная траектория поля V_i — регулярная кривая $L(v)$. По теореме о накрывающей гомотопии, из точки многообразия F' выходит единственный накрывающий дифференцируемый путь $L'(v)$. Пусть $\tau(v)$ — касательный вектор к кривой $L'(v)$ в точке v. Тем самым на компактном многообразии F' задано непрерывное векторное поле без особенностей. Тогда по теореме Хопфа эйлерова характеристика многообразия F' равна нулю. Так как накрытие $\pi \circ i$ удовлетворяет лемме 4, то из равенства (6) следует, что $\chi(F) = 0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $W(Z) = \{v_{i_1}(Z), \ldots, v_{i_l}(Z)\}$ — набор из l линейно независимых асимптотических единичных векторов поверхности F в точке Z. Из леммы 3 следует, что такой набор существует в произвольной точке Z поверхности F. Обозначим через $S(v_{i_1}(Z), \ldots, v_{i_l}(Z))$ квадрат объема параллелепипеда, построенного на векторах $v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}$ и положим $S(Z) = \min S(v_{i_1}(Z), \ldots, v_{i_l}(Z))$, где минимум берется по всем наборам $W(Z)$. Так как в окрестности любой точки векторы $v_i(Z)$ распадаются на регулярные векторные поля V_i, то функция $S(Z)$ непрерывна. Ясно, что $S(Z) > 0$. На компактной поверхности F функция $S(Z)$ достигает минимума в некоторой точке Z_0. В этой точке есть такой набор из асимптотических векторов $v_1(Z_0), \ldots, v_l(Z_0)$, для которого

$$S(Z_0) = S(v_1, \ldots, v_l).$$

Ясно, что векторы $v_1(Z_0), \ldots, v_l(Z_0)$ линейно независимы.

Пусть F' — универсальная накрывающая поверхности F и $p: F' \to F$ — отображение накрытия. На многообразии F' естественным образом индуцируется функция $S(Z') = S(p(Z'))$. Возьмем точку Z_0' — один из прообразов точки Z_0; $v_1(Z_0'), \ldots, v_l(Z_0')$ — асимптотические векторы в точке Z_0', соответствующие векторам $v_i(Z_0)$, они линейно независимы. Ясно, что

$$S(Z_0') = S(v_1(Z_0'), \ldots, v_l(Z_0')) = S(Z_0),$$

поэтому точка Z_0' является точкой минимума для функции $S(Z')$ на многообразии F'.

Пусть $V_1, \ldots, V_l$ — глобальные векторные поля на F', для которых $V_i(Z_0') = v_i(Z_0')$, Q — множество точек многообразия F', в которых векторы V_i линейно независимы; Z — граничная точка множества Q, а Z_k' — последовательность точек множества Q, сходящаяся к $\tilde{Z}$. В точках Z_k'

$$S(v_1(Z_k'), \ldots, v_l(Z_k')) \geqslant S(Z_k') \geqslant S(Z_0') \geqslant 0.$$

Из непрерывности функции S следует, что

$$S(v_1(\bar{Z}), \ldots, v_l(\bar{Z})) \geqslant S) Z_0').$$

Значит, векторы $v_i(\bar{Z})$ линейно независимы, а точка $\bar{Z}$ имеет открытую окрестность, в точках которой векторы v_i линейно независимы. Мы пришли к противоречию, предположив, что граница множества Q непуста. Отсюда следует, что векторные поля V_i линейно независимы в каждой точке универсальной накрывающей F'.

Доказательство теоремы 3. Так как сфера S^l при $l \geqslant 2$ односвязна, то универсальная накрывающая совпадает с самой сферой. Но, как доказал Адамс, параллелизуемы только сферы при $l = 1, 3, 7$ [6]. Из этого факта и теоремы 2 непосредственно следует доказываемое утверждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Otsuki T. On the existense of solutions of quadratic equation and geometrical application. — Proc. Japan. Acad., 1953, vol. 29, p. 99—100.
2. Moore J. D. Isometric immersions of space forms in space forms. — Pacific J. of Math., 1972, vol. 40, N 1, p. 157—167.
3. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М., «Наука», 1972, 580 с.
4. Милнор Дж. Теория Морса. М., «Мир», 1965. 182 с.
5. Эйзенхарт. Риманова геометрия. Гостехиздат, 1948. 240 с.
6. Adams J. F. Vector fields on spheres. — «Ann. of Math.», 1962, vol. 75, p. 182—189.

Поступила 1 октября 1974 г.

УДК 513.838

В. П. БОЦУ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ

Четырехмерные шестиугольные три-ткани, как показано в [1, 2], допускают отображение на три семейства связок прямых трехмерного проективного пространства, центры которых лежат на одной поверхности Q третьего порядка.

1. Как показано в работе [2], тензоры кручения и кривизны четырехмерной шестиугольной три-ткани приводятся к виду

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]},$$

$$b^i_{jkl} = f_{jk}\delta^i_l + g_{lj}\delta^i_k + h_{kl}\delta^i_j, \qquad (1)$$

причем

$$f_{ij} + g_{ij} + h_{ij} = 0, \qquad (2)$$

а f_{ij}, g_{ij} и h_{ij} — симметрические тензоры.

Поэтому ее уравнения структуры записываются так:

$$\begin{aligned} d\overline{\omega}^i &= \overline{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a_j\overline{\omega}^j \wedge \overline{\omega}^i, \\ d\tilde{\omega}^i &= \tilde{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a_j\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i, \end{aligned} \qquad (3)$$

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = (f_{jk}\delta^i_l + g_{lj}\delta^i_k + h_{kl}\delta^i_j)\,\overline{\omega}^k \wedge \tilde{\omega}^l. \qquad (4)$$

При этом тензоры, входящие в уравнения структуры, удовлетворяют уравнениям

$$da_j - a_k\omega_j^k = (f_{jk} - h_{jk})\,\overline{\omega}^k + (g_{jk} - h_{jk})\,\tilde{\omega}^k, \tag{5}$$

$$\overset{\circ}{\nabla} f_{ij} = -\,[l_{ijk} - 3f_{(ij}a_{k)}]\,\overline{\omega}^k,$$

$$\overset{\circ}{\nabla} g_{ij} = -\,[l_{ijk} + 3g_{(ij}a_{k)}]\,\tilde{\omega}^k,$$

$$\overset{\circ}{\nabla} h_{ij} = [l_{ijk} - 3f_{(ij}a_{k)}]\,\overline{\omega}^k + [l_{ijk} + 3g_{(ij}a_{k)}]\,\tilde{\omega}^k, \tag{6}$$

$$\overset{\circ}{\nabla} l_{ijk} = -3g_{(ij}f_{k)l}\overline{\omega}^l + 3f_{(ij}g_{k)l}\tilde{\omega}^l. \tag{7}$$

Здесь l_{ijk} — симметрический тензор, а $\overset{\circ}{\nabla}$, как и в работе [2], имеет вид

$$\overset{\circ}{\nabla} = \nabla + a_l\left(\overline{\omega}^l - \tilde{\omega}^l\right),$$

где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования.

В настоящей работе через l_{ijk} мы обозначили тензор, который в работе [2] был обозначен через h_{ijk}.

Отображение четырехмерной шестиугольной три-ткани в пространство P_3 ставит в соответствие точке дифференцируемого многообразия M_4, несущего эту ткань, прямую l пространства P_3. Это отображение задается уравнениями

$$\overline{\omega}^i = \upsilon_0^i, \quad \tilde{\omega}^i = \upsilon_3^i.$$

При таком отображении точки A_0, A_3 и $A_0 + A_3$ описывают двумерные поверхности, принадлежащие одной поверхности третьего порядка. Эти поверхности определяются в P_3 уравнениями

$$\upsilon_0^3 = 0, \quad \upsilon_3^0 = 0, \quad \upsilon_0^0 - \upsilon_3^3 = a_k\left(\upsilon_0^k + \upsilon_3^k\right).$$

Здесь υ_α^β — формы Пфаффа, входящие в уравнения инфинитезимального перемещения проективного репера пространства P_3

$$dA_\alpha = \upsilon_\alpha^\beta A_\beta \ (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{8}$$

Симметрические тензоры f_{ij}, g_{ij}, h_{ij} являются асимптотическими тензорами этих поверхностей. Уравнение поверхности третьего порядка, которой принадлежат поверхности, описываемые точками A_0, A_3 и $A_0 + A_3$, имеет вид

$$l_{ijk}x^ix^jx^k - 3f_{ij}x^ix^jx^0 - 3g_{ij}x^ix^jx^3 - 6a_ix^ix^0x^3 + 6\,(x^0)^2x^3 - \\ - 6x^0\,(x^3)^2 = 0. \tag{9}$$

2. Остановимся теперь на тех ограничениях, которые необходимо наложить на тензоры a_i, f_{ij}, g_{ij}, h_{ij} и l_{ijk}.

а) Рассмотрим случай, когда $a_i = 0$. Тогда из уравнения (5) будет следовать, что

$$f_{ij} = h_{ij}, \quad g_{ij} = h_{ij}.$$

Внося эти соотношения в (2), получим

$$h_{ij}=0.$$

Следовательно,

$$f_{ij}=0, \quad g_{ij}=0,$$

откуда вытекает, что тензор кривизны три-ткани обращается в нуль и данная три-ткань будет параллелизуемой. Этот случай мы исключим из рассмотрения и в дальнейшем будем считать, что a_i отлично от нуля.

б) Рассмотрим случай, когда один из тензоров f_{ij}, g_{ij} и h_{ij} тождественно равен нулю. Пусть, например,

$$f_{ij}=0,$$

тогда из уравнения (2) получаем, что

$$g_{ij}=-h_{ij}.$$

Но такой случай рассматривался А. Д. Ивановым в работе [3]. Он приводит к четырехмерным три-тканям Боля. Поэтому в дальнейшем будем считать, что ни один из тензоров f_{ij}, g_{ij} и h_{ij} не равен тождественно нулю.

в) Рассмотрим случай, когда $l_{ijk}=0$.

Из уравнения (7) будет следовать, что

$$g_{ij}f_{kl}+g_{ki}f_{jl}+g_{jk}f_{il}=0, \tag{10}$$
$$g_{kl}f_{ij}+g_{jl}f_{ki}+g_{il}f_{jk}=0.$$

Меняя во втором уравнении индексы l и k местами и вычитая второе уравнение из первого, найдем

$$g_{ij}f_{kl}-g_{kl}f_{ij}=0.$$

Свертывая это уравнение с $\alpha^k\alpha^l$, где α^k — произвольный отличный от нуля контравариантный вектор, получим, что тензоры f_{ij} и g_{ij} пропорциональны:

$$g_{ij}=\lambda f_{ij}.$$

В силу этого из уравнений системы (10) вытекает, что либо

$$\lambda=0,$$

либо

$$g_{ij}g_{kl}+g_{ki}g_{jl}+g_{jk}g_{il}=0.$$

Если $\lambda=0$, то $g_{ij}=0$ и мы приходим к случаю б). Если $g_{ij}g_{kl}+g_{ki}g_{jl}+g_{jk}g_{il}=0$, то свертывая это уравнение с $\alpha^i\alpha^j\alpha^k\alpha^l$, получим

$$g_{ij}\alpha^i\alpha^j=0.$$

Так как это уравнение удовлетворяется для произвольных $\alpha^i\neq 0$, то отсюда следует, что

$$g_{ij}=0,$$

а, следовательно, $f_{ij}=0$ в силу их пропорциональности, т. е. приходим к случаю а). Поэтому случай $l_{ijk}=0$ мы исключим из дальнейшего рассмотрения.

3. Введем в рассмотрение ковариантный кососимметрический тензор ε_{ij} с матрицей

$$\varepsilon_{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Его называют дискриминантным тензором. Такому тензору можно поставить в соответствие тензор ε^{ij} с матрицей

$$\varepsilon^{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Эти два взаимных тензора связаны соотношением

$$\varepsilon_{ik}\varepsilon^{sk}=\varepsilon_{ki}\varepsilon^{ks}=\delta_i^s.$$

Дискриминантный тензор позволяет поднимать и опускать индексы у тензоров. Например, запишем

$$\alpha^i=\varepsilon^{ij}\alpha_j,\quad \alpha_i=\varepsilon_{ji}\alpha^j,$$

при этом

$$\alpha_i\alpha^i=0.$$

Нетрудно доказать следующие леммы, которые используем в дальнейшем.

Лемма 1. *Если α_i — ковариантный вектор, отличный от нуля, то из уравнения $\alpha_{(i}t_{j)k}=0$ следует, что $t_{jk}=0$; из уравнения $\alpha_{[i}t_{j]k}=0$ следует, что $t_{jk}=\alpha_jt_k$. Если t_{jk} — симметрический тензор, то $t_{jk}=t\alpha_j\alpha_k$.*

Лемма 2. *Если α_i — ковариантный вектор, отличный от нуля, то из уравнения $\alpha_{(i}t_{jkl)}=0$ следует, что $t_{(jk)l}=0$.*

Лемма 3. *Если t_{jk} — симметрический тензор, то из уравнения $t_{jk}\alpha^j\alpha^k=0$ следует, что $t_{jk}=t_{(j}\alpha_{k)}$.*

Лемма 4. *Если t_{jkl} — симметрический тензор, то из уравнения $t_{jkl}\alpha^j\alpha^k=0$ следует, что $t_{jkl}=3\alpha_{(j}\alpha_k t_{l)}$.*

4. Пусть симметрический тензор f_{ij}, который служит асимптотическим тензором поверхности, описываемой точкой A_0, является вырожденным, т. е.

$$f_{ij}=f_if_j. \tag{11}$$

Это условие означает, что поверхность, описываемая точкой A_0, будет развертывающейся поверхностью.

Покажем теперь, что выполнение условия (11) повлечет за собой вырождение тензоров g_{ij} и h_{ij}, которые являются асимптотическими тензорами поверхностей, описываемых соответственно точками A_3 и A_0+A_3. Подставим (11) в первое из уравнений системы (6)

$$f_i\overset{\circ}{\nabla}f_l+f_l\overset{\circ}{\nabla}f_i=-[l_{ijk}-3f_{(i}f_ja_{k)}]\,\overset{-}{\omega}^k. \tag{12}$$

Из этого уравнения следует, что форма $\overset{\circ}{\nabla} f_i$ является главной. Пусть ее разложение по базисным формам имеет вид

$$\overset{\circ}{\nabla} f_i = \bar{f}_{ik}\overline{\omega}^k + \tilde{f}_{ik}\tilde{\omega}^k.$$

В силу этого из уравнения (12) вытекает, что

$$f_i\tilde{f}_{jk} + f_j\tilde{f}_{ik} = 0, \qquad (13)$$

$$f_i\bar{f}_{jk} + f_j\bar{f}_{ik} = -l_{ijk} + 3f_{(i}f_ja_{k)}. \qquad (14)$$

Из уравнения (13) на основании леммы 1 имеем

$$\tilde{f}_{jk} = 0.$$

Свертывая уравнение (14) с f^if^j, получим

$$l_{ijk}f^if^j = 0. \qquad (15)$$

Отсюда в силу леммы 4 найдем

$$l_{ijk} = 3f_{(i}f_jl_{k)}. \qquad (16)$$

Внесем полученные выражения для тензора l_{ijk} в уравнение (14)

$$f_i\bar{f}_{jk} + f_j\bar{f}_{ik} = 3f_{(i}f_j(a_{k)} - l_{k)}). \qquad (17)$$

Обозначим

$$a_k - l_k = c_k, \qquad (18)$$

тогда уравнение (17) примет вид

$$f_{(i}\left[\bar{f}_{j)k} - \frac{1}{2}f_{j)}c_k - c_{j)}f_k\right] = 0.$$

На основании леммы 1 выражение, стоящее в скобках, равно нулю, т. е.

$$\bar{f}_{jk} = \frac{1}{2}f_jc_k + f_kc_j.$$

Таким образом, разложение формы $\overset{\circ}{\nabla} f_i$ по базисным формам записывается следующим образом:

$$\overset{\circ}{\nabla} f_i = \left(\frac{1}{2}f_ic_k + f_kc_i\right)\overline{\omega}^k. \qquad (19)$$

Подставим выражение (16) в уравнение (7)

$$2f_{(i}l_j\overset{\circ}{\nabla} f_{k)} + f_{(i}f_j\overset{\circ}{\nabla} l_{k)} = -g_{(ij}f_{k)l}\overline{\omega}^l + f_{(ij}g_{k)l}\tilde{\omega}^l. \qquad (20)$$

Из этого уравнения следует, что форма $\overset{\circ}{\nabla} l_i$ является главной. Пусть ее разложение по базисным формам имеет вид

$$\overset{\circ}{\nabla} l_i = \bar{l}_{ik}\overline{\omega}^k + \tilde{l}_{ik}\tilde{\omega}^k. \qquad (21)$$

Внесем в уравнение (20) выражения (19) и (21)

$$f_{(i}f_{j}\left[\tilde{l}_{k)l}-g_{k)l}\right]=0, \tag{22}$$

$$f_{(i}\left[f_{j}l_{k)}+f_{j}\bar{l}_{k)l}+2l_{j}c_{k)}f_{l}+g_{jk)}f_{l}\right]=0. \tag{23}$$

Из уравнения (22) в силу леммы 6 следует, что

$$\tilde{l}_{kl}=g_{kl}.$$

Из (23) в силу леммы 2 вытекает, что

$$f_{(j}\left[l_{k)}c_{l}+\bar{l}_{kl}\right]+\left[2l_{(j}c_{k)}+g_{jk}\right]f_{l}=0.$$

Свертывая это уравнение с $f^{j}f^{k}$, получим на основании леммы 3, что

$$2l_{(j}c_{k)}+g_{jk}=f_{(j}d_{k)}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в предыдущее уравнение, найдем

$$f_{(j}\left[l_{k)}c_{l}+d_{k)}f_{l}+\bar{l}_{k)l}\right]=0,$$

откуда в силу леммы 1

$$\bar{l}_{kl}=-d_{k}f_{l}-l_{k}c_{l}. \tag{25}$$

Из (2), (11) и (24) следует, что

$$h_{kl}=-f_{k}f_{l}+2l_{(k}c_{l)}-d_{(k}f_{l)}. \tag{26}$$

Продифференцируем внешним образом уравнение (19). Приравнивая нулю коэффициенты при линейно независимых произведениях базисных форм, получим

$$\begin{gathered}c_{i}f_{[l}c_{k]}-h_{i[l}f_{k]}+l_{i}a_{[l}f_{k]}-\bar{l}_{i[l}f_{k]}+\\+a_{[l}\left(\frac{1}{2}c_{k]}f_{i}+f_{k]}c_{i}\right)=0,\end{gathered} \tag{27}$$

$$3f_{i}h_{lk}-\left(\frac{1}{2}f_{i}l_{k}+f_{k}l_{i}\right)a_{l}=0. \tag{28}$$

Из уравнения (27), используя (18), (25) и (26), найдем

$$\left(\frac{1}{2}f_{i}l_{[k}+l_{i}f_{[k}\right)a_{l]}=0.$$

На основании леммы 1 имеем

$$\frac{1}{2}f_{i}l_{k}+l_{i}f_{k}=t_{i}a_{k}. \tag{29}$$

Свертывая это уравнение с $f^{i}f^{k}$, получим

$$t_{i}=\mu f_{i},$$

тогда уравнение (29) примет вид

$$\frac{1}{2}f_{i}l_{k}+l_{i}f_{k}=\mu f_{i}a_{k}. \tag{30}$$

Свертывая это уравнение с f^i, найдем

$$l_i = \eta f_i.$$

Подставим последнее выражение в уравнение (30), тогда

$$f_i = \sqrt{f} a_i, \tag{31}$$

поэтому

$$l_i = \alpha a_i. \tag{32}$$

Из уравнения (28) на основании (31) и (32) следует, что

$$h_{ij} = h a_i a_j. \tag{33}$$

Применяя формулы (31), условие (11) можно записать в виде

$$f_{ij} = f a_i a_j. \tag{34}$$

Из (2), (33) и (34) вытекает, что

$$g_{ij} = g a_i a_j, \tag{35}$$

причем

$$f + g + h = 0, \tag{36}$$

где f, g и h отличны от нуля. Условие (16) принимает вид

$$l_{ijk} = 3 l a_i a_j a_k. \tag{37}$$

При этом величины f, g, h и l не связаны никакими другими соотношениями, кроме соотношения (36).

Таким образом, тензоры g_{ij} и h_{ij}, как и тензор f_{ij}, являются вырожденными. Так как g_{ij} и h_{ij} асимптотические тензоры поверхностей, описываемых точками A_3 и $A_0 + A_3$, то эти поверхности, как и поверхность, описываемая точкой A_0, являются развертывающимися.

5. Проведем в точках A_0 и A_3 к поверхностям, описываемым этими точками касательные плоскости. Пересечение плоскостей определит некоторую прямую A_1A_2. Определим касательную плоскость к поверхности, описываемой точкой $A_0 + A_3$, и найдем точку ее пересечения с прямой A_1A_2. Для этой точки в силу соотношения (8)

$$d(A_0 + A_3) = (A_0 + A_3)\,\omega_3^3 + (A_i + a_i A_0)(\omega_0^i + \omega_3^i).$$

Отсюда следует, что уравнение касательной плоскости в точке $A_0 + A_3$ к описываемой ею поверхности будет иметь вид

$$-x^0 + a_i x^i + x^3 = 0. \tag{38}$$

Точкой пересечения этой касательной плоскости с прямой A_1A_2 будет точка

$$M = \varepsilon^{ij} a_j A_i.$$

Покажем теперь, что в рассматриваемом нами случае точка M является неподвижной точкой прямой A_1A_2. Действительно,

$$dM = \varepsilon^{ij}(a_j dA_i + A_i da_j).$$

Используя уравнение инфинитезимальных преобразований реперов проективного пространства P_3, а также (8), (33) (34) и (36), получим

$$dM = \theta M,$$

где

$$\theta = v_2^2 - v_0^0 + a_i v_0^i + (f - h)\, a_k v_0^k + (g - h)\, a_k v_3^k,$$

а это и означает, что точка M является неподвижной точкой прямой A_1A_2.

Следовательно, касательные плоскости к поверхностям, описываемыми точками A_0, A_3 и $A_0 + A_3$, проходят через неподвижную точку M, а, значит, эти поверхности являются конусами. Сопоставляя предыдущие выводы, мы можем сформулировать теорему.

Теорема 1. *Если хотя бы один из тензоров f_{ij}, g_{ij} и h_{ij} шестиугольной четырехмерной три-ткани является вырожденным, то кубическая поверхность Q, на которую отображается такая три-ткань, становится конусом третьего порядка.*

Обратная теорема будет, очевидно, также справедливой. Уравнение конуса Q в репере $\{A_0A_1A_2A_3\}$ в силу (33) — (37) имеет вид

$$ly^3 - (fx^0 + gx^3)\, y^2 - 2yx^0x^3 + 2\,(x^0)^2 x^3 - 2x^0\,(x^3)^2 = 0,$$

где

$$a_i x^i = y.$$

6. Рассмотрим координатную лупу изучаемой три-ткани. В работе [4] были определены коммутатор и ассоциатор координатной лупы три-ткани. В общем случае через первый и второй основной тензоры ткани они выражаются по формулам (ср. [5]).

$$[u,\ v]^i = 2\alpha^i_{jk} u^j v^k,$$

$$(u,\ v,\ w)^i = \beta^i_{jkl} u^j v^k w^l,$$

где $u = u^i e_i$, $v = v^i e_i$ и $w = w^i e_i$ — три произвольных вектора локальной алгебры координатной лупы. Так как тензоры кривизны и кручения три-ткани через первый и второй основные тензоры ткани выражаются следующим образом:

$$\alpha^i_{jk} = -a^i_{jk},$$

$$\beta^i_{jkl} = -b^i_{kjl},$$

(см. [5]), то коммутатор и ассоциатор координатной лупы имеют вид

$$[u,\ v]^i = -2a^i_{jk} u^j v^k, \tag{39}$$

$$(u,\ v,\ w)^i = -b^i_{kjl} u^j v^k w^l. \tag{40}$$

В нашем случае формулы (39) и (40) имеют вид

$$[u, v]^l = (a_j v^j) u^l - (a_j u^j) v^l,$$

$$(u, v, w)^l = -f (a_j u^j)(a_k v^k) w^l - g (a_j u^j)(a_k w^k) v^l -$$
$$- h (a_j v^j)(a_k w^k) u^l.$$

Обозначим линейную форму, определяемую тензором a_i, через $a(u)$, так что

$$a(u) = a_i u^i.$$

Тогда предыдущие формулы можно записать так:

$$[u, v] = a(v) u - a(u) v, \tag{41}$$

$$(u, v, w) = -fa(u) a(v) w - ga(u) a(w) v - ha(v) a(w) u. \tag{42}$$

Для рассматриваемой четырехмерной шестиугольной три-ткани координатные лупы будут двумерными. Такую же размерность имеют и их локальные алгебры. Уравнение $a(u) = 0$ определяет в локальной алгебре одномерное линейное подпространство. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. *Четырехмерная шестиугольная три-ткань допускает отображение на кубический конус пространства P_3 тогда и только тогда, когда коммутаторы и ассоциаторы локальной алгебры ее произвольной координатной лупы принадлежат одной прямой.*

Необходимость. Если рассматриваемая три-ткань допускает отображение на кубический конус пространства P_3, то связанные с ней коммутатор и ассоциатор имеют вид (41) и (42). Отсюда следует, что

$$a([u, v]) = 0,$$

$$a((u, v, w)) = -(f + g + h) a(u) a(v) a(w).$$

Из этого в силу (36) следует, что

$$a((u, v, w)) = 0.$$

Таким образом, коммутатор и ассоциатор любых векторов локальной алгебры принадлежат одной прямой $a(u) = 0$.

Достаточность. Предположим, что коммутатор и ассоциатор рассматриваемой три-ткани принадлежат одной прямой $\xi(x) = 0$, т. е.

$$\xi([u, v]) = 0, \quad \xi((u, v, w)) = 0.$$

В координатной форме эти уравнения примут вид

$$-2\xi_i a^i_{jk} u^j v^k = 0,$$

$$-\xi_i b^i_{kjl} u^j v^k w^l = 0.$$

Так как эти соотношения выполняются тождественно, то

$$\xi_i a^i_{jk} = 0, \quad \xi_i b^i_{kjl} = 0. \tag{43}$$

3*

Первое из этих уравнений, в силу косой симметрии тензора a^i_{jk} по нижним индексам, дает

$$a^i_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{jk}\varepsilon^{il}a_l,$$

где $a_l = k\xi_l$. Но так как

$$\varepsilon_{jk}\varepsilon^{il} = \delta^i_j\delta^l_k - \delta^i_k\delta^l_j,$$

то

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]}.$$

Подставляя во второе уравнение из (43) выражение тензора кривизны по формуле (1), получим

$$f_{kj}\xi_l + g_{lk}\xi_j + h_{jl}\xi_k = 0.$$

Свертывая это уравнение с ξ^j, ξ^k, найдем

$$(f_{kj}\xi^k\xi^j)\,\xi_l = 0.$$

Поскольку $\xi_l \neq 0$, то, в силу симметричности тензора f_k и леммы 3, получим

$$f_{kj} = fa_ka_j,$$

так как $a_k = k\xi_k$. Аналогично найдем, что

$$g_{kj} = ga_ka_j,$$
$$h_{kj} = ha_ka_j.$$

Из (1) следует, что

$$f + g + h = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая три-ткань допускает отображение на конус третьего порядка в P_3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акивис М. А. Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности.—«Сибир. мат. журн.». 1974, т. 15, № 1, с. 3—15.
2. Боцу В. П. Прямое доказательство обобщенной теоремы Графа-Зауэра.— В сб. трудов Калининского ун-та, 1974, т. 14, с. 20—25.
3. Иванов А. Д. Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве.— В сб.: Геометрия однородных пространств, М., 1973, с. 42—57.
4. Акивис М. А. Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей.— В сб.: Исследования по теории квазигрупп и луп. Кишинев, «Штиинца», 1973, с. 3—12.
5. Акивис М. А., Шелехов А. М. О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы.— «Сиб. мат. журн.» 1971, т. 12, № 5, с. 953—960.

Поступила 3 декабря 1974 г.

УДК 513

Н. И. ГЛОВА

К ТЕОРИИ КРИВИЗНЫ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА В E_4

Рассмотрим интегральные многообразия системы двух дифференциальных уравнений Пфаффа в E_4

$$\sum_{i=1}^{4} P_i dx_i = 0, \tag{1}$$
$$\sum_{i=1}^{4} Q_i dx_i = 0$$

или

$$\boldsymbol{P} d\boldsymbol{r} = 0, \quad \boldsymbol{Q} d\boldsymbol{r} = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ можно считать единичными и взаимно ортогональными. Чтобы интегральными многообразиями системы (1) были двумерные поверхности в E_4, необходимо и достаточно выполнение условий

$$G_1 = 0, \tag{2}$$
$$G_2 = 0,$$

где

$$G_1 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix}, \quad G_2 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{vmatrix},$$

и интегральные многообразия составляют ∞^2 двумерных поверхностей в E_4.

Если условия (2) не выполнены, то интегральными многообразиями системы (1) являются кривые[1]. Интегральные кривые системы (1), проходящие через произвольную точку M пространства E_4, касаются в M 2-плоскости

$$P(R - r) = 0, \quad Q(R - r) = 0. \tag{3}$$

Назовем эту плоскость касательной 2-плоскостью системы интегральных кривых (1); 2-плоскость, ортогональную плоскости (3) в точке M, назовем нормальной 2-плоскостью системы (1). Уравнение нормальной 2-плоскости

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r} = \alpha \boldsymbol{P} + \beta \boldsymbol{Q}. \tag{4}$$

---

[1] В работе [2] указаны достаточные условия существования у системы (1) ∞^2 интегральных двумерных поверхностей.

1. Обобщение теоремы Менье

Рассмотрим любую интегральную кривую C системы (1). Для нее справедливо

$$\boldsymbol{r}'' = \vec{\tau}' = k\vec{\nu}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{r}'' = \frac{d^2 r}{ds}$; k — кривизна кривой C в данной точке: $\vec{\nu}$ — единичный вектор главной нормали. Векторы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\vec{\tau}$ определяют нормальную гиперповерхность. Обозначим $\{C_0\}$ множество интегральных кривых, лежащих в выбранной гиперплоскости и касающихся направления $\vec{\tau}$. Совокупность интегральных кривых $\{C_0\}$ будем называть нормальными сечениями системы (1), определенными вектором $\vec{\tau}$. Для C_0 справедливо

$$r_0'' = \vec{\nu}_0 k_0. \tag{6}$$

Главная нормаль $\vec{\nu}_0$ лежит в нормальной 2-й плоскости. Действительно, C_0 лежит в гиперплоскости, определяемой векторами P, Q, $\vec{\tau}$. Следовательно, ее соприкасающаяся плоскость, а также ν_0 лежат в этой гиперплоскости. Кроме того, вектор $\vec{\nu}_0$ ортогонален τ. Таким образом, $\vec{\nu}_0$ лежит в нормальной 2-плоскости (3).

Спроектируем векторы, входящие в равенства (5) и (6), на нормальную 2-плоскость. Проекцией вектора r'' по определению служит вектор нормальной кривизны $k_н$. Сравнивая величины, полученные в правых частях, придем к равенству

$$k \cos \psi = k_0,$$

где ψ — угол между вектором $\vec{\nu}$ и нормальной 2-плоскостью.

2. Эллипс нормальной кривизны

Систему (1) можно заменить системой

$$\sum_{i=1}^{4} P_i x_i' = 0, \tag{1'}$$

$$\sum_{i=1}^{4} Q_i x_i' = 0,$$

где $x_i' = \frac{dx_i}{ds}$, причем $\sum_{i=1}^{4} (x_i')^2 = 1$.

Отнесем совокупность интегральных кривых системы (1′) к ортонормированному базису $\vec{\tau}$, $\vec{\sigma}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, где $\vec{\sigma} = \frac{d'\boldsymbol{r}}{d's}$; $\vec{\tau}$ и $\vec{\sigma}$ лежат в касательной 2-й плоскости системы (1), $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ — в нормальной 2-плоскости.

Возьмем любое нормальное сечение, определенное вектором $\vec{\tau}$. Дифференцируя $\vec{\tau}$ вдоль этой кривой по натуральному параметру, получим:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2 r}{ds^2} = X_1 \vec{\tau} + X_2 \vec{\sigma} + X_3 \boldsymbol{P} + X_4 \boldsymbol{Q}. \tag{7}$$

Поскольку вектор $\vec{\tau}$ единичный, то вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ортогонален $\vec{\tau}$, т. е.

$$X_1 = 0.$$

Спроектируем векторы равенства (7) на нормальную 2-плоскость

$$k_n = X_3 \boldsymbol{P} + X_4 \boldsymbol{Q}.$$

Умножая (7) последовательно на $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, найдем

$$X_3 = \sum_{i=1}^{4} P_i \frac{d^2 x_i}{ds^2}, \quad X_4 = \sum_{i=1}^{4} Q_i \frac{d^2 x_i}{ds^2}.$$

Продифференцируем по натуральному параметру s выражения, стоящие в равенствах (1'). Учитывая полученные выражения для X_3 и X_4, можно записать

$$X_3 + \sum_{i=1}^{4} \frac{dP_i}{ds} \frac{dx_i}{ds} = 0,$$

$$X_4 + \sum_{i=1}^{4} \frac{dQ_i}{ds} \frac{dx_i}{ds} = 0.$$

При изменении направления вектора $\vec{\tau}$ в касательной 2-плоскости конец вектора k_n опишет в нормальной 2-плоскости кривую, которую, следуя Э. Картану [3], назовем эллипсом нормальной кривизны. Уравнение эллипса нормальной кривизны

$$X_3 = -\sum_{i,\, k=1}^{4} P_{ik} x_i' x_k', \tag{8}$$

$$X_4 = -\sum_{i,\, k=1}^{4} Q_{ik} x_i' x_k',$$

$$P_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial x_k}, \quad Q_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial x_k}.$$

Чтобы получить уравнение кривой (8) в явном виде, надо из уравнений системы (1'), (8) и условия $\sum_{i=1}^{4} (x_i')^2 = 1$ исключить x_1', x_2', x_3', x_4'.

Выберем систему координат таким образом, чтобы рассматриваемая точка совпала с началом координат, а векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ были соответственно векторами (0, 0, 1, 0) и (0, 0, 0, 1).

Вектор $\vec{\tau}$ имеет компоненты $(x_1', x_2', 0, 0)$, причем, $(x_1')^2 + (x_2')^2 = 1$. Можно считать

$$x_1' = \cos\varphi,\ x_2' = \sin\varphi.$$

В выбранной системе координат система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} dx_3 &= 0, \\ dx_4 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Условия интегрируемости (2) системы (1) будут

$$\begin{aligned} P_{12} - P_{21} &= 0, \\ Q_{12} - Q_{21} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Систему (8) можно представить следующим образом:

$$-X_3 = P_{11}\cos^2\varphi + (P_{12} + P_{21})\cos\varphi\sin\varphi + P_{22}\sin^2\varphi,$$

$$-X_4 = Q_{11}\cos^2\varphi + (Q_{12} + Q_{21})\cos\varphi\sin\varphi + Q_{22}\sin^2\varphi.$$

Исключая из последней системы параметр φ, получим уравнение эллипса нормальной кривизны в явном виде

$$[I_6(I_2 + 2X_3) - I_3(I_5 + 2X_4)]^2 + [I_4(I_2 + 2X_3) - I_1(I_5 + 2X_4)]^2 - \\ - (I_6 I_1 - I_3 I_4)^2 = 0, \tag{11}$$

где

$$I_1 = P_{11} - P_{22},\ I_2 = P_{11} + P_{22},\ I_3 = P_{12} + P_{21},$$
$$I_4 = Q_{11} - Q_{22},\ I_5 = Q_{11} + Q_{22},\ I_6 = Q_{12} + Q_{21}.$$

Это кривая второго порядка. Ее основные инварианты

$$\delta = 16\,[(Q_{12} + Q_{21})(P_{11} - P_{22}) - (Q_{11} - Q_{22})(P_{12} + P_{21})]^2, \tag{12}$$

$$\Delta = -16\,[(Q_{12} + Q_{21})(P_{11} - P_{22}) - (Q_{11} - Q_{22})(P_{12} + P_{21})]^4.$$

Отсюда следует, что кривая второго порядка (11) является либо эллипсом, либо распадается на пару параллельных прямых.

3. Полная кривизна системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4

Фиксируем произвольную точку M и касательную 2-плоскость (3). В окрестности точки M любое направление $d\boldsymbol{r}$ определяет одну геодезическую «прямейшую» линию [2]. Совокупность всех геодезических «прямейших», проходящих через M, образует в E_4 некоторую двумерную поверхность. На этой поверхности введем систему координат следующим образом. В касательной 2-плоскости фиксируем одно из направлений. Обозначим v угол, образованный в касательной 2-плоскости произвольным направлением с фиксированным.

Линии $v = \text{const}$ определяют геодезические «прямейшие» линии. В качестве второго параметра двумерной поверхности возьмем натуральный параметр геодезической прямейшей линии u.

Поверхность геодезических «прямейших» линий

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v). \tag{13}$$

Полную кривизну этой поверхности в точке M назовем полной кривизной системы интегральных кривых (1) и обозначим ее K_n. Можно записать

$$r(u, v) = r(0, v) + u r_u(0, v) + \frac{u^2}{2!} r_{uu}(0, v) + \frac{u^3}{3!} r_{uuu}(0, v) + [u^4].$$

Из уравнения геодезических «прямейших» линий [2]

$$r_{uu} = \lambda P + \mu Q, \tag{14}$$

где

$$\lambda = -\sum_{i, k=1}^{4} P_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u}, \tag{15}$$

$$\mu = -\sum_{i, k=1}^{4} Q_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u}.$$

Коэффициенты фундаментальной формы E, F и G поверхности (13) определены выражениями

$$E = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

$$F = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v},$$

$$G = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial v},$$

и полная кривизна K_n поверхности геодезических «прямейших» линий в точке M вычисляется по формуле

$$K_n = \lim_{u \to 0} \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}, & \frac{1}{2} E_u, & F_u - \frac{1}{2} E_v \\ F_v - \frac{1}{2} G_u, & E, & F \\ \frac{1}{2} G_v, & F, & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{2} E_v, & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v, & E, & F \\ \frac{1}{2} G_u, & F, & G \end{vmatrix} \right\}.$$

Выбрав систему координат как в п. 2, получим:

$$x_{1u}(0, v) = \cos v, \quad x_{1uu}(0, v) = 0,$$
$$x_{2u}(0, v) = \sin v, \quad x_{2uu}(0, v) = 0,$$

$$x_{3u}(0,\ v)=0, \qquad x_{3uu}(0,\ v)=\lambda(0,\ v),$$
$$x_{4u}(0,\ v)=0, \qquad x_{4uu}(0,\ v)=\mu(0,\ v).$$

При этом

$$E(u,\ v)=1+u^2[x_{1uuu}(0,\ v)\cos v+x_{2uuu}(0,\ v)\sin v+$$
$$+\lambda^2(0,\ v)+\mu^2(0,\ v)]+[u^3],$$

$$F(u,\ v)=u^3\Big[\frac{1}{6}x_{1uuuv}(0,\ v)\cos v+\frac{1}{6}x_{2uuuv}(0,\ v)\sin v-$$
$$-\frac{1}{2}x_{1uuu}(0,\ v)\sin v+\frac{1}{2}x_{2uuu}(0,\ v)\cos v+\frac{1}{2}\lambda(0,\ v)\lambda_v(0,\ v)+$$
$$+\frac{1}{2}\mu(0,\ v)\mu_v\ (0,\ v)\Big]+[u^4],$$

$$G(u,\ v)=u^2+u^4\Big[-\frac{1}{3}x_{1uuuv}(0,\ v)\sin v+\frac{1}{3}x_{2uuuv}(0,\ v)\times$$
$$\times\cos v+\frac{1}{4}\lambda_v^2(0,\ v)+\frac{1}{4}\mu_v^2(0,\ v)\Big]+[u^5],$$

$$K_П=-\frac{1}{4}\lambda_v^2(0,\ v)-\frac{1}{4}\mu_v^2(0,\ v)+\frac{1}{2}\lambda(0,\ v)\lambda_{vv}(0,\ v)+$$
$$+\frac{1}{2}\mu(0,\ v)\mu_{vv}(0,\ v)+\lambda^2(0,\ v)+\mu^2(0,\ v).$$

В выбранной системе координат

$$\lambda(0,\ v)=-[P_{11}\cos^2 v+(P_{12}+P_{21})\sin v\cos v+P_{22}\sin^2 v],$$
$$\mu(0,\ v)=-[Q_{11}\cos^2 v+(Q_{12}+Q_{21})\sin v\cos v+Q_{22}\sin^2 v];$$

так как

$$\frac{\partial P_{ik}}{\partial v}(0,v)=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial P_i}{\partial x_k\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial v}(0,\ v)=0,$$

где $i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4$, то

$$\lambda_v(0,\ v)=-\sum_{i,\ k=1}^{4}P_{ik}[x_{iuv}(0,\ v)x_{ku}(0,\ v)+x_{kuv}(0,\ v)x_{iu}(0,\ v)],$$

$$\mu_v(0,\ v)=-\sum_{i,\ k=1}^{4}Q_{ik}[x_{iuv}(0,\ v)x_{ku}(0,\ v)+x_{kuv}(0,\ v)x_{iu}(0,\ v)],$$

$$\lambda_{vv}(0,\ v)=-\sum_{i,\ k=1}^{4}P_{ik}[x_{iuvv}(0,v)x_{ku}(0,\ v)+2x_{iuv}(0,v)x_{kuv}(0,\ v)+$$
$$+x_{iu}(0,\ v)x_{kuvv}(0,\ v)],$$

$$\mu_{vv}(0,\ v)=-\sum_{i,\ k=1}^{4}Q_{ik}[x_{iuvv}(0,\ v)x_{ku}(0,v)+2x_{iuv}(0,\ v)x_{kuv}(0,v)+$$
$$+x_{iu}(0,\ v)x_{kuvv}(0,\ v)]$$

Учитывая выбор системы координат, можно записать:

$$\lambda_v(0, v) = -[2(P_{22}-P_{11})\sin v\cos v + (P_{12}+P_{21})(\cos^2 v - \sin^2 v)],$$

$$\mu_v(0, v) = -[2(Q_{22}-Q_{11})\sin v\cos v + (Q_{12}+Q_{21})(\cos^2 v - \sin^2 v)],$$

$$\lambda_{vv}(0, v) = -2[(P_{22}-P_{11})(\cos^2 v - \sin^2 v) - 2(P_{12}+P_{21})\sin v\cos v],$$

$$\mu_{vv}(0, v) = -2[(Q_{22}-Q_{11})(\cos^2 v - \sin^2 v) - 2(Q_{12}+Q_{21})\sin v\cos v].$$

Подставив эти значения в выражение для K_Π, получим

$$K_\Pi = -\frac{1}{4}(P_{12}+P_{21})^2 - \frac{1}{4}(Q_{12}+Q_{21})^2 + P_{11}P_{22} + Q_{11}Q_{22}.$$

Полную кривизну можно записать следующим образом:

$$K_\Pi(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}) + (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}) - \frac{1}{4}(P_{12}-P_{21})^2 - \frac{1}{4}(Q_{12}-Q_{21})^2. \quad (16)$$

При выполнении условий интегрируемости (10)

$$K_\Pi(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}) + (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}). \quad (17)$$

4. Распространение на систему интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4 понятия гауссовой кривизны

В касательной 2-плоскости (3) системы интегральных кривых (1) выберем точку $M = \{x_i\}_1^4$ и два произвольных направления, выходящих из точки M. Получим в 2-плоскости (3) две точки $M' = \{x_i + dx_i\}_1^4$ и $M'' = \{x_i + d'x_i\}_1^4$.

Найдем площадь треугольника $MM'M''$

$$S_{mp} = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(dx_i)^2\sum_{i=1}^{4}(d'x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{4}dx_i d'x_i\right)^2}.$$

Если система координат выбрана, как в предыдущих случаях, то

$$S_{mp} = \frac{1}{2}\,|dx_1 d'x_2 - dx_2 d'x_1|.$$

Введем в рассмотрение тензор

$$F = (F^{12}, F^{13}, F^{14}, F^{23}, F^{24}, F^{34})$$

с компонентами $F^{ik} = P_k Q_i - P_i Q_k$, задание которого вполне определяет касательную 2-плоскость системы интегральных кривых (1). Для двумерных поверхностей в пространстве E_4 этот тензор рассматривался в работе [10].

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$F^2 = \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q}^2 - (\boldsymbol{PQ}) = 1.$$

Тензор имеет еще один инвариант, тождественно равный нулю

$$\Phi = F^{41}F^{23} + F^{42}F^{31} + F^{43}F^{12} = 0.$$

Так же, как в работе [10], вместо тензора F, определяющего касательную 2-плоскость системы интегральных кривых (1), можно рассматривать два независимых вектора трехмерного евклидова пространства E_3 $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, где

$$y_1 = F^{23} + F^{41}, \quad z_1 = F^{23} - F^{41},$$
$$y_2 = F^{31} + F^{42}, \quad z_2 = F^{31} - F^{42},$$
$$y_3 = F^{12} + F^{43}, \quad z_3 = F^{12} - F^{43}.$$

При этом векторы $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ единичные. Действительно,

$$\boldsymbol{y}^2 = F^2 + 2\Phi = 1,$$

аналогично

$$\boldsymbol{z}^2 = F^2 - 2\Phi = 1.$$

В точках M, M', M'' касательной 2-плоскости (3) строим вектор y. Получаем три вектора MN, $M'N'$, $M''N''$. Проведем через произвольную точку O прямые, параллельные MN, $M'N'$, $M''N''$. На единичной сфере пространства E_3 с центром в точке O получим три точки M_1, M_1', M_1''. Треугольник $M_1M_1'M_1''$ является сферическим отображением треугольника $MM'M''$. Найдем площадь треугольника $M_1M_1'M_1''$. Координаты его вершин

$$M_1(y_1, y_2, y_3), \; M_1'(y_1 + dy_1, y_2 + dy_2, y_3 + dy_3),$$
$$M_1''(y_1 + d'y_1, y_2 + d'y_2, y_3 + d'y_3).$$

Так как стороны треугольника малы, то его можно считать плоским. Поэтому его площадь может быть выражена формулой

$$4(S'_{mp})^2 = (dy_1d'y_2 - dy_2d'y_1)^2 + (dy_1d'y_3 - dy_3d'y_1)^2 + (dy_2d'y_3 - \\ - dy_3d'y_2)^2.$$

Учитывая выбор системы координат и уравнения системы (9), запишем

$$dy_1 = Q_{21}dx_1 + Q_{22}dx_2 + P_{11}dx_1 + P_{12}dx_2,$$
$$dy_2 = -Q_{11}dx_1 - Q_{12}dx_2 + P_{12}dx_1 + P_{22}dx_2,$$
$$dy_3 = Q_{41}dx_1 + Q_{42}dx_2 + P_{31}dx_1 + P_{32}dx_2.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{4} P_i^2 = 1$, то, продифференцировав по x_k и воспользовавшись выбором вектора $\boldsymbol{P}$, получим $P_{3k} = 0$, где $k = 1, 2, 3, 4$. Аналогично $Q_{4k} = 0$ для $k = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, $dy_3 = 0$. Таким образом,

$$4S'^2_{mp} = [(P_{11} + Q_{21})(P_{22} - Q_{12}) - (Q_{22} + P_{12})(P_{21} - Q_{11})]^2 \times \\ \times (dx_1d'x_2 - dx_2d'x_1)^2.$$

Рассматривая отношение $\dfrac{S'_{mp}}{S_{mp}}$, определим кривизну

$$|k_y| = |(P_{11} + Q_{21})(P_{22} - Q_{12}) - (Q_{22} + P_{12})(P_{21} - Q_{11})|.$$

Аналогично построим сферическое отображенче треугольника $MM'M''$ вдоль вектора $\boldsymbol{z}$. Получим на единичной сфере трехмерного евклидова пространства E_3 треугольник $M_2M_2'M_2''$. Найдем его площадь

$$4S''^2_{mp} = (dz_1d'z_2 - dz_2d'z_1)^2 + (dz_1d'z_3 - dz_3d'z_1)^2 + (dz_2d'z_3 - - dz_3d'z_2)^2,$$

$$dz_1 = d(Q_2P_3 - P_2Q_3 - Q_4P_1 + P_4Q_1) = Q_{21}dx_1 + Q_{22}dx_2 - - P_{11}dx_1 - P_{12}dx_2,$$

$$dz_2 = d(Q_3P_1 - P_3Q_1 - Q_4P_2 + P_4Q_2) = -Q_{11}dx_1 - Q_{12}dx_2 - - P_{21}dx_1 - P_{22}dx_2,$$

$$dz_3 = d(Q_1P_2 - P_1Q_2 - Q_4P_3 + P_4Q_3) = 0.$$

Получим

$$4S''^2_{mp} = [-(Q_{21} - P_{11})(P_{22} + Q_{12}) + (Q_{22} - P_{12})(Q_{11} + P_{21})]^2 \times \times (dx_1d'x_2 - dx_2d'x_1)^2.$$

Величина k_z определяется как отношение $\frac{S''_{mp}}{S_{mp}}$,

$$|k_z| = |(Q_{22} - P_{12})(Q_{11} + P_{21}) - (Q_{21} - P_{11})(P_{22} + Q_{12})|.$$

Величинам k_y и k_z можно приписать знак, определив их так:

$$k_y = \frac{1}{2}\frac{y\,[dyd'y]}{S_{mp}}, \quad k_z = \frac{1}{2}\frac{z\,[dzd'z]}{S_{mp}}.$$

В случае выбора специальной системы координат

$$k_y = P_{11}P_{22} - P_{11}Q_{12} + Q_{21}P_{22} - Q_{21}Q_{12} - Q_{22}P_{21} + + Q_{22}Q_{11} - P_{12}P_{21} + P_{12}Q_{11},$$

$$k_z = -Q_{22}Q_{11} - Q_{22}P_{21} + P_{12}Q_{11} + P_{12}P_{21} + + Q_{21}P_{22} + Q_{21}Q_{12} - P_{11}P_{22} - P_{11}Q_{12}.$$

Величину $K_Г = \frac{1}{2}(k_y - k_z)$ назовем гауссовой кривизной системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4.

В выбранной системе координат

$$K_Г = (P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}) + (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}). \tag{18}$$

Сравнивая полученные выражения для $K_Г$ и $K_П$ (п. 3), приходим к следующей зависимости между ними:

$$K_Г = K_П - \frac{1}{4}G_1^2 - \frac{1}{4}G_2^2. \tag{19}$$

При выполнении условий интегрируемости (10) гауссова кривизна системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4 совпадает с полной кривизной этой системы.

Данный результат обобщает известное соотношение между полной и гауссовой кривизной для системы интегральных кривых уравнения Пфаффа в пространстве E_3 [6, с. 47].

Величина $\frac{1}{2}(k_y + k_z)$ тоже имеет геометрический смысл. Действительно,

$$\frac{1}{2}(k_y + k_z) = Q_{21}P_{22} - P_{11}Q_{12} - Q_{22}P_{21} + P_{12}Q_{11}.$$

Если условия интегрируемости (10) выполнены, то

$$\frac{1}{2}(k_y + k_z) = P_{12}(Q_{11} - Q_{22}) + Q_{12}(P_{22} - P_{11}). \tag{20}$$

Это выражение с точностью до числового множителя совпадает с выражением основных инвариантов эллипса нормальной кривизны. При обращении в ноль величины $\frac{1}{2}(k_y + k_z)$ эллипс нормальной кривизны распадается на пару параллельных прямых.

5. Средняя кривизна системы интегральных кривых (1)

Выберем в касательной 2-плоскости системы интегральных кривых (1) ортонормированную пару направлений $\{x_i'\}_1^4$ и $\{\dot{x}_i\}_1^4$. Для произвольно выбранной пары интегральных кривых системы (1), касающихся выбранных направлений, рассмотрим сумму нормальных кривизн

$$k_{н1} + k_{н2} = -\sum_{i,\,k=1}^{4} P_{ik}(x_i x_k - \dot{x}_i \dot{x}_k)\,P - \\ - \sum_{i,\,k=1}^{4} Q_{ik}(x_i' x_k' + x_i \dot{x}_k)\,Q.$$

Учитывая выбор системы координат, запишем

$$\{x_i'\}_1^4 = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0,\ 0),\quad \{\dot{x}_i\}_1^4 = \pm\ -\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0,\ 0).$$

В этом случае

$$k_{н1} + k_{н2} = -(P_{11} + P_{22})\,\boldsymbol{P} - (Q_{11} + Q_{22})\,\boldsymbol{Q}. \tag{21}$$

Сумма векторов нормальной кривизны одна и та же для любой ортогональной пары линий системы интегральных кривых (1) Сумма $\frac{1}{2}(k_{н1} + k_{н2})$ образует инвариантный вектор нормальной плоскости, который назовем вектором средней кривизны H совокупности интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4, а модуль этого вектора — средней кривизной системы (1).

Возвращаясь к эллипсу нормальной кривизны, полученному в п. 2, можно проверить, что, если кривая (11) не распадается на пару параллельных прямых, то центр ее лежит в точке, определенной вектором

$$\boldsymbol{R} = -\frac{1}{2}(P_{11} + P_{22})\boldsymbol{P} + (Q_{11} + Q_{22})\boldsymbol{Q}. \tag{22}$$

т. е. вектор, соединяющий точку M с центром эллипса нормальной кривизны системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4, совпадает с вектором средней кривизны этой системы.

6. Геодезическая кривизна

Проекцию вектора $\frac{d^2 r}{ds^2}$ на касательную 2-плоскость назовем геодезической кривизной кривой. Проектируя векторы, стоящие в равенстве (7), на касательную 2-плоскость, получим $K_g = X_2$, где K_g — геодезическая кривизна. Чтобы найти X_2, обе части равенства (7) умножим скалярно на $\vec{\sigma}$,

$$X_2 = \frac{d^2 r}{ds^2}\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^{4} \frac{d^2 x_i}{ds^2}\frac{d' x_i}{d' s}.$$

В силу ортонормированности базиса, величины $\frac{d' x_i}{d' s}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{4} P_i \frac{d' x_i}{d' s} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} Q_i \frac{d' x_i}{d' s} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{d x_i}{ds}\frac{d' x_i}{d' s} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{d' x_i}{d' s}\right)^2 = 1.$$

Разрешив эту систему относительно $\frac{d' x_i}{d' s}$, получим

$$\frac{d' x_i}{d' s} = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} \Delta_i^2}}$$

для $i = 1, 2, 3, 4$, где

$$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ x_2' & x_3' & x_4' \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} P_1 & P_3 & P_4 \\ Q_1 & Q_3 & Q_4 \\ x_1' & x_3' & x_4' \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_4 \\ Q_1 & Q_2 & Q_4 \\ x_1' & x_2' & x_4' \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix}.$$

Величина K_g может быть представлена в виде

$$K_g = \frac{1}{\pm\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4} \Delta_i^2}} \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{vmatrix}. \qquad (23)$$

Поскольку главная нормаль геодезических «прямейших» линий лежит в нормальной 2-плоскости, то линия, в каждой точке которой геодезическая кривизна равна нулю, является геодезической «прямейшей» системы интегральных кривых (1).

Верно утверждение, что нормальная кривизна интегральной кривой системы (1) в данной точке и для данного направления есть кривизна геодезической «прямейшей» линии системы (1), проходящей через данную точку и в данном направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березина Л. Я. Классическая дифференциальная геометрия. Рига, 1970. 104 с.
2. Глова Н. И. О геодезических линиях системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4.— «Укр. геометр. сб.», вып. 17, Харьков, 1975, с. 44—50.
3. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М., Изд-во Моск. ун-та, 1960. 307 с.
4. Рамазанова К. Ш. К теории двумерных поверхностей в E_4.—«Волжский мат. сб.», № 3, Саратов, 1965, с. 29—36.
5. Рамазанова К. Ш. Теория кривизны X_2 в E_4.— «Изв. вузов. Математика», 1966, № 6, с. 137—144.
6. Синцов Д. М. Работы по неголономной геометрии. Киев, «Вища школа», 1972. 293 с.
7. Чакмазян А. В. О двумерных поверхностях D_2, вложенных в евклидово пространство E_4.—«Докл. АН Арм. ССР», 1965, т. 33, № 1, с. 3—6.
8. Чакмазян А. В. К теории кривизны двумерных поверхностей четырехмерного пространства.— «Докл. АН Арм. ССР», 1965, т. 33, № 4, с. 177—181.
9. Kommerell K. Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen.— «Math. annalen», 1905, Bd. 60, S. 548—596.
10. Scherrer W. Über die Krummung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit im vierdimensionalen Euklidischen Raum.— «Comment math helv», 1934, S. 149—157.

Поступила 13 ноября 1974 г.

УДК 513

Т. А. ГОРЗИЙ

О ЛОКАЛЬНОЙ НЕИЗГИБАЕМОСТИ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Однозначная определенность замкнутых выпуклых гиперповерхностей в классе гладких была установлена в работе [1]. Жесткость общих замкнутых выпуклых гиперповерхностей и локальная жесткость в окрестности точек строгой выпуклости — в [2].

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Выпуклая гиперповерхность n-мерного эллиптического пространства, не содержащая плоских областей размерности $n-1$, жесткая в окрестности каждой точки, не лежащей в плоской области размерности $n-2$, $n-3$. Если же гиперповерхность содержит $(n-1)$-мерные плоские области, то она жесткая вне $(n-1)$-мерных плоских областей в окрестности указанных точек.*

Теорема 2. *Пусть F_1 и F_2 — две изометричные гладкие выпуклые гиперповерхности. Пусть P_1 — точка на F_1, не принадлежащая плоским областям размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$, а P_2 — точка на F_2, соответствующая по изометрии P_1. Тогда достаточно малые окрестности точек P_1 и P_2 конгруэнтны.*

Доказательство теоремы 1.

Пусть F — выпуклая гиперповерхность, а P — точка на ней, не принадлежащая плоским областям размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$. Пусть x — радиус-вектор этой гиперповерхности, а ζ — изгибающее поле в окрестности точки P. Рассмотрим гиперповерхность Φ евклидова пространства, отвечающую F при преобразованиях А. В. Погорелова [2].

Радиус-вектор этой гиперповерхности

$$y = \frac{x-(e_0x)e_0}{(e_0x)},$$

а изгибающее поле

$$z = \frac{\zeta - e_0(e_0\zeta)}{(e_0x)}.$$

Тогда можно утверждать, что точка P^*, отвечающая точке P на Φ, также не принадлежит плоским областям размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$. По теореме 1 [3] изгибающее поле гиперповерхности Φ будет тривиальным, а значит, тривиальным будет и изгибающее поле гиперповерхности F эллиптического пространства. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть F_1 и F_2 — две изометричные гладкие выпуклые гиперповерхности эллиптического пространства. И пусть P_1 — точка на F_1, не принадлежащая плоским областям размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$, а P — точка на F_2, соответствующая по изометрии P_1. Преобразования А. В. Погорелова [1] ставят в соответствие поверхностям F_1 и F_2 две изометричные выпуклые гладкие гиперповерхности Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства. Точкам P_1 и P_2 отвечают точки P_1^* на Φ_1 и P_2^* на Φ_2, не принадлежащие плоским областям размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$. Как показано Е. П. Сенькиным [3], достаточно малые окрестности точек P_1^* и P_2^* конгруэнтны. Но тогда конгруэнтны и соответствующие окрестности точек P_1 и P_2 [2]. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горзий Т. А. Однозначная определенность гладких выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства. — «Укр. геометр. сб.», вып. 15, Харьков, 1974, с. 36—42.
2. Горзий Т. А. Жесткость выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства. — «Укр. геометр. сб.», вып. 3. Харьков, 1973, с. 66—68.
3. Сенькин Е. П. Дополнение к статье «Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей». — «Укр. геометр. сб.», вып. 17. Харьков, 1974, с. 132—134.

Поступила 31 августа 1974 г.

УДК 513

В. И. ДЕНИСОВ

ОБ УСЛОВИЯХ НАРИАИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Пусть g_{ik} — решение уравнений тяготения Эйнштейна, принадлежащее классу (C°, C^{3}) в области Ω. Это значит, что в области Ω существует гиперповерхность S, на которой производные метрического тензора g_{ik} пространства-времени могут иметь разрыв.

Предположим, что в Ω — тензор энергии импульса материи T^{ik} кусочно непрерывен и S — гиперповерхность разрыва первых производных g_{ik}. Тогда на S должны выполняться условия совместимости разрывов первых производных $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^{l}}$, которые могут быть записаны в виде [1, 2]

$$\left[\Gamma^{j}_{ik} - \frac{\delta^{j}_{i}\Gamma^{l}_{kl} + \delta^{j}_{k}\Gamma^{l}_{il}}{2}\right] n_{j} = 0, \tag{1}$$

$$[T^{ik}]\, n_{k} = 0, \tag{2}$$

где [ ] — знак разрыва, n_{k} — четырехнормаль к S.

В работе [3] Нариаи показал, что на S разрывы Γ^{l}_{jk} и T^{ik} должны удовлетворять, кроме условий (1), (2), условиям

$$K^{l}_{jl} = Q_{j}, \tag{3}$$

где K^{l}_{j} и Q_{j} определяются разрывами Γ^{l}_{jk} и T_{ik}:

$$Q_{j} = -\frac{1}{4} g^{mn} \left([\Gamma_{lm,n}]\, [T^{l}_{j}] - [\Gamma_{jl,n}]\, [T^{l}_{m}]\right), \tag{4}$$

$$K_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} E, \tag{5}$$

где

$$E_{ij} = g^{lr} E_{lijr}; \; E = g^{ij} E_{ij}; \tag{6}$$

$$E_{lijr} = -\frac{1}{4} g^{mn} ([\Gamma_{lr,\,m}][\Gamma_{ij,\,n}] - [\Gamma_{lj,\,m}][\Gamma_{ir,\,n}]). \tag{7}$$

В работе [4] рассмотрен случай сферически-симметричного пространства-времени с метрикой

$$ds^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} - 3\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{1 - 3\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}} \right) dt^2 - \dfrac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\sigma^2, \; r \leqslant a \\ \left(\dfrac{2\sqrt{1 - \frac{a^3}{rR^2}}}{1 - 3\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}} \right) dt^2 - \dfrac{dr^2}{1 - \frac{a^3}{rR^2}} - r^2 d\sigma^2, \; r \geqslant a \end{cases} \tag{8}$$

которая определяет поле тяготения шара радиуса a, заполненным идеальной жидкостью постоянной плотности. Доказано, что в этом случае условия Нариаи (3) выполняются тривиально, т. е. $K_{ij} = 0$, $Q_i = 0$ на гиперповерхности $r = a$ разрыва первых производных метрического тензора (8). Более того, отмечается, что условия (3) выполняются тривиально и в случае сферически-симметричного пространства-времени с произвольным статически сферически-симметричным распределением материи.

Цель нашей работы — выяснить, в каких случаях условия Нариаи (3) нетривиальны. В связи с этим докажем следующее утверждение:

Условия (3) *выполняются тривиально, т. е.* $K_{ij} = 0$, $Q_i = 0$, *если в области* Ω, *содержащей* S:

1) $g_{ik} \in (C^\circ, C^3)$;
2) T^{ik} — *кусочно-непрерывен;*
3) $[\Gamma^l_{ik}]$ и $[T^{ik}]$ *удовлетворяют условиям* (1), (2);
4) *гиперповерхность* S *разрыва* Γ^l_{ik} *и* T^{ik} *неизотропна.*

Доказательство. Из представления Адамара следует, что разрывы производных $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ определяются выражением

$$\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right] = h_{ik} n_j,$$

где n_j — четырехнормаль к S, h_{ik} — симметричный тензор, заданный на S.

Тогда

$$[\Gamma^l_{ik}] = \frac{1}{2} g^{jl} (h_{ij} n_k + h_{kj} n_i - h_{ik} n_j), \tag{9}$$

4*

поэтому условия согласования (1) принимают вид

$$n_i (h_{kl} n^l - \sigma n_k) + n_k (h_{il} n^l - \sigma n_i) = (n^l n_l) h_{ik}, \tag{10}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} g^{ik} h_{ik}.$$

Общее решение системы уравнений (10) относительно h_{ik} в случае неизотропной гиперповерхности S можно записать в виде [5]

$$h_{ik} = n_i a_k + n_k a_i, \tag{11}$$

где a_i — векторное поле на S.

Разрыв вида (11) будем называть продольным. Покажем, что в случае продольного разрыва $Q_j = 0$. Подставляя (9) и (11) в (4), после простых преобразований получим

$$Q_j = -\frac{1}{4} \sigma n_l ([T^l_j] - 2 n_j a_l n_k [T^{lk}]),$$

откуда в силу (2) следует, что $Q_j = 0$. Подставляя (9) и (11) в (6), убеждаемся, что в случае продольного разрыва $E_{ij} = 0$. Мы не приводим соответствующих вычислений ввиду их громоздкости. Утверждение доказано.

В случае изотропной гиперповерхности S общее решение уравнений (10) имеет вид [5]

$$h_{ik} = n_i a_k + n_k a_i + B^{\alpha\beta} \underset{\alpha}{\tau}_i \underset{\beta}{\tau}_k \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{12}$$

где $\underset{\alpha}{\tau}_i$ — линейно-независимые векторы на S, ортогональные n_i, $B^{\alpha\beta} = B^{\beta\alpha}$ — скаляры на S, удовлетворяющие условию $B^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = 0$, $\sigma_{\alpha\beta} = \left(\underset{\alpha}{\tau}^l \underset{\beta}{\tau}_l\right)$. Из (11) следует, что разрыв первых производных g_{ik} на изотропной гиперповерхности наряду с продольной частью содержит и поперечную часть — $B^{\alpha\beta} \underset{\alpha\beta}{\tau_i \tau_k}$. Наличие поперечной части в разрыве приводит к тому, что K_{ij} и Q_j отличны от нуля. Подставляя (9) и (12) в (5), (6) получаем соответственно

$$Q_j = \frac{1}{8} n_j B^{\alpha\beta} \underset{\alpha}{\tau}_l \underset{\beta}{\tau}_m [T^{lm}], \tag{13}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2} n_i n_j B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что условия (3) выполняются тривиально и на изотропной гиперповерхности разрыва, если h_{ik} не имеет поперечной части. Поэтому имеет место следующее утверждение:

Если в области Ω, содержащей S,

1) $g_{ik} \in (C^0, C^3)$;

2) T^{ik} *кусочно-непрерывен*;

3) *разрывы* Γ^i_{jk}, T^{ik} *удовлетворяют условиям* (1), (2);

4) *разрыв* $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ *продолен, то условия* (3) *выполняются тривиально, т. е.* $K_{ij} = 0$, $Q_j = 0$.

В работе (6) доказано, что на изотропной гиперповерхности разрыв первых производных метрического тензора сферически-симметричного пространства-времени с кусочно-непрерывным T^{ik} продолен. Поэтому условия (3) в случае сферически-симметричного пространства-времени класса (C°, C^{3}) с кусочно-непрерывным тензором T^{ik} выполняются тривиально.

Проведенное рассмотрение позволяет выделить из решений уравнений тяготения Эйнштейна класса (C°, C^{3}) с кусочно-непрерывным тензором энергии-импульса метерии T^{ik} те, для которых условия (3) нетривиальны. Именно, условия (3) нетривиальны, если гиперповерхность разрыва производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{l}}$ изотропна, разрывы $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{l}}$ имеют поперечную составляющую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов В. И. Условия соединения на гиперповерхности разрыва первых производных метрического тензора пространства-времени.— «Укр. геометр. сб.», вып. 3, Харьков, 1966, с. 33—42.
2. Lichnerowicz A. Sur les ondes de choc gravitationnelles. — «Compt. Rend. Acad. Sci.», t. 273, 12, s. A, 1971, p. 528—532.
3. Nariai N. On the boundari conditions in General Relativity.— «Prog. Theor. Phys.», 1965, vol. 34, 1, p. 173—186.
4. Kofinti N. K. On a New Boungary Condition in General Relativity.— «Prog. Theor. Phys.», 1972, vol. 47, 4, p. 1410—1417.
5. Денисов В. И. Разрывы первых производных метрического тензора пространства-времени.—«Журн. эксп. и теорет. физики», 1972, т. 62, вып. 6, с. 1990—1997.
6. Денисов В. И. О непрерывности производных метрического тензора сферически-симметричного пространства-времени. Препринт ин-та теорет. физики АН УССР, 73—12Р.

Поступила 17 февраля 1975 г.

УДК 513

В. И. ДИСКАНТ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ МИНКОВСКОГО ДЛЯ ШАРА

Пусть X — ограниченное замкнутое собственное выпуклое тело в n-мерном евклидовом пространстве E^n, E — единичный шар в E^n. Для объема $V(H_t)$ тела $H_t=(1-t)X+tE, 0\leqslant t\leqslant 1$ справедлива формула

$$V(H_t)=\sum_{m=0}^{n} C_n^m(1-t)^m t^{n-m} V_m(X),$$

в которой коэффициент $V_m(X)$ называется m-м интегралом кривизны тела X [1].

А. Д. Александров в [1] показал, что для интегралов кривизны справедливы неравенства

$$V_k^m(X)\geqslant V_m^k(X)V^{m-k}(E), \tag{1}$$

где $1 \leqslant k < m \leqslant n$, а для $V_m(H_t)$ справедливо обобщенное неравенство Брунна

$$\sqrt[m]{V_m(H_t)} \geqslant (1-t)\sqrt[m]{V_m(X)} + t\sqrt[m]{V(E)}. \qquad (2)$$

При этом знак равенства в (1) и в (2) стоит тогда и только тогда, когда X гомотетично E.

Положим теперь

$$\Delta_{mk}(X) = V_k^m(X) - V_m^k(X)V^{m-k}(E),$$

$$\Phi_m(X, t) = \sqrt[m]{V_m(H_t)} - (1-t)\sqrt[m]{V_m(X)} - t\sqrt[m]{V(E)}.$$

Уравнения $\Delta_{mk}(X) = 0$, $\Phi_m(X, t) \equiv 0$ (тождество по t) назовем обобщенными уравнениями Минковского для шара.

Если $V_m(X) = V(E)$, то из утверждения А. Д. Александрова, сформулированного выше, следует, что каждое из этих уравнений имеет единственное решение $X = E$.

В настоящей работе будут доказаны теоремы устойчивости решений обобщенных уравнений Минковского для шара.

Теорема 1. *Если* $\Delta_{mk}(X) < \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ *и* $V_m(X) = V(E)$, *то* $\delta(X, E) < C_1\varepsilon^a$, *где* $\delta(X, E)$ — *отклонение тел* X *и* E.

Теорема 2. *Если* $\Phi_m(X, t) < \varepsilon$ *для всех* t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *и* $V_m(X) = V(E)$, *то* $\delta(X, E) < C_2\varepsilon^a$.

В работе $a = \frac{1}{2^{n-2}n!}$ и через $C, C_1, C_2, \ldots, C_{25}, \varepsilon_0$ обозначены величины, зависящие от k, m, n и не зависящие от выбора тела X.

По постановке задачи эта работа является обобщением работы [2], в которой рассматривалась устойчивость сферы при ограничении на m-ю функцию кривизны. Действительно, можно легко показать, что если удельная m-я функция кривизны отличается от единицы не более, чем на ε, то $\Delta_{m+1\, m}(X) < C\varepsilon$. Таким образом, в настоящей работе дифференциальное условие, каким является условие работы [2] на m-ю функцию кривизны, заменено на более общее интегральное условие, каким является условие для интегралов кривизны в теореме.

1. Предварительно докажем три леммы.

Лемма 1.

$$\Delta_{21}(X) \leqslant C_3\Delta_{mk}(X).$$

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{n-m}$, K, L — выпуклые тела в E^n. Положим

$$V_{mk}(A, K, L) = V(A_1, \ldots, A_{n-m}, \underbrace{K, \ldots, K}_{m-k}, \underbrace{L, \ldots, L}_{k}),$$

$$0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n,$$

[3, с. 66]. Справедливо неравенство

$$V_{mk}^m(A, K, L) \geqslant V_{m0}^{m-k}(A, K, L)\, V_{mm}^k(A, K, L)$$

[3, с. 67]. Запишем $V_k(X)$ в виде

$$V(X,\ E,\ \ldots,\ E,\ \underbrace{E,\ \ldots,\ E,\ \overbrace{X,\ \ldots,\ X}^{k-1}}_{m-1})$$

и применим к нему предыдущее неравенство.

Получим

$$V_k^{m-1}(X) \geqslant V_1^{m-k}(X)\, V_m^{k-1}(X),$$

откуда

$$V_1(X) \leqslant \left(\frac{V_k^{m-1}(X)}{V_m^{k-1}(X)}\right)^{\frac{1}{m-k}}.$$

Из неравенства (1) имеем

$$V_2(X) \geqslant \left(V_m^2(X)\, V^{m-2}(E)\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Используя оценки для $V_1(X)$ и $V_2(X)$, получаем

$$\Delta_{21} = V_1^2(X) - V_2(X)\, V(E) \leqslant \left(\frac{V_k^{m-1}(X)}{V_m^{k-1}(X)}\right)^{\frac{2}{m-k}} - \left(V_m^2(X)\, V^{m-2}(E)\right)^{\frac{1}{m}} \times$$

$$\times\ V(E) = \frac{1}{V_m^{\frac{2(k-1)}{m-k}}(X)} \left[V_k^{\frac{2(m-1)}{m-k}}(X) - V_m^{\frac{2k(m-1)}{m(m-k)}}(X)\, V^{\frac{2(m-1)}{m}}(E)\right] =$$

$$= \frac{V_k^m(X) - V_m^k(X)\, V^{m-k}(E)}{V_m^{\frac{2(k-1)}{m-k}}(X)\left(g^{p-1} + g^{p-2}b + \ldots + b^{p-1}\right)},$$

где

$$p = \frac{m(m-k)}{2(m-1)};\ \ g = V_k^{\frac{2(m-1)}{m-k}}(X);\ \ b = V_m^{\frac{2k(m-1)}{m(m-k)}}(X)\, V^{\frac{2(m-1)}{m}}(E).$$

Так как $V_m(X) = V(E)$, то из последнего неравенства имеем

$$\Delta_{21}(X) \leqslant C_3 \Delta_{mk}(X).$$

Лемма доказана.

Замечание. Справедливо более общее утверждение. Если $m' \leqslant m$, $k' \leqslant k$, то $\Delta_{m'k'}(X) < C_4 \Delta_{mk}(X)$. Это утверждение можно доказать так же, как и лемму 1.

Пусть теперь X_u — проекция тела X на гиперплоскость пространства E^n, перпендикулярную к единичному вектору $\boldsymbol{u}$, E_u — единичный шар в этой гиперплоскости.

Лемма 2. *Если $\Delta_{21}(X) < \varepsilon$, то $\Delta_{21}(X_u) \leqslant C_5 \varepsilon^{\frac{1}{2n}}$.*

Доказательство. Воспользуемся n-мерным обобщением неравенства Бенсона, полученным Хакерианом [4, с. 37].

Это обобщение имеет вид

$$\Delta_{21}(X) = V_1^2(X) - V_2(X)V(E) \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{V_2(X)}{\lambda(\boldsymbol{u})} - V(E)\lambda(\boldsymbol{u})\right)^2, \tag{3}$$

где $\lambda(\boldsymbol{u}) = \dfrac{V_1(X_u)}{V(E_u)}$ и $\boldsymbol{u}$ — произвольный вектор в E^n.

Оценим $V_1(X_u)$, используя (3) и условие леммы. Имеем

$$V^2(E)\lambda^4 - (4\Delta_{21}(X) + 2V_2(X)\,V(E))\lambda^2 + V_2^2(X) \leqslant 0,$$

откуда

$$V^2(E_u)\left(\frac{V_2(X)}{V(E)} - C_6\sqrt{\varepsilon}\right) \leqslant V_1^2(X_u) \leqslant V^2(E_u)\left(\frac{V_2(X)}{V(E)} + C_6\sqrt{\varepsilon}\right). \tag{4}$$

Покажем теперь, что

$$\int_\Omega \Delta_{21}(X_u)\,d\omega < C_7\sqrt{\varepsilon}, \tag{5}$$

где Ω — $(n-1)$-мерная единичная сфера в E^n, $d\omega$ — элемент площади на Ω.

Имеем

$$\int_\Omega \Delta_{21}(X_u)\,d\omega = \int_\Omega (V_1^2(X_u) - V(E_u)V_2(X_u))\,d\omega =$$
$$= \int_\Omega V_1^2(X_u)\,d\omega - V(E_u)\int_\Omega V_2(X_u)\,d\omega.$$

По формуле Кубота [4, с. 34]

$$\int_\Omega V_2(X_u)\,d\omega = nV(E_u)\,V_2(X).$$

Применяя (4), получаем

$$\int_\Omega \Delta_{21}(X_u)\,d\omega = \int_\Omega V_1^2(X_u)\,d\omega - nV^2(E_u)\,V_2(X) \leqslant$$
$$\leqslant V^2(E_u)\,nV(E)\left(\frac{V_2(X)}{V(E)} + C_5\sqrt{\varepsilon}\right) - nV^2(E_u)\,V_2(X) \leqslant C_7\sqrt{\varepsilon}.$$

Покажем, наконец, что из (5) следует утверждение леммы. Известно, что

$$V_2(X_u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{nu}|\,F_2(X, d\omega),$$

где $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u} \in \Omega$, а $F_2(X, \omega)$ — вторая поверхностная функция тела X [1, с. 1223].

Для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Omega$ имеем

$$|V_2(X_u) - V_2(X_v)| \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \big|\,|\boldsymbol{nu}| - |\boldsymbol{nv}|\,\big|\,F_2(X, d\omega) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{nu} - \boldsymbol{nv}|\,F_2(X, d\omega) =$$
$$= \int_\Omega \left|\sin\frac{\widehat{\boldsymbol{nu}} + \widehat{\boldsymbol{nv}}}{2}\right|\left|\sin\frac{\widehat{\boldsymbol{nu}} - \widehat{\boldsymbol{nv}}}{2}\right| F_2(X, d\omega) \leqslant \frac{\varphi_0}{2}V_2(X), \tag{6}$$

где $\widehat{nu}$ — угол между векторами n и u; $\varphi_0 = \widehat{uv}$; $V_2(X) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega} F_2(X, d\omega)$ [1, с. 1223].

Пусть теперь $\max \Delta_{21}(X_u) = A$ и достигается при $u = u_0$. Рассмотрим на Ω сегмент с центром в точке u_0, для точек которого выполнено неравенство $uu_0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Используя (4) и (6), получаем

$$\Delta_{21}(X_u) = A + (\Delta_{21}(X_u) - \Delta_{21}(X_{u_0})) = A + (V_1^2(X_u) - V_1^2(X_{u_0})) + V(E_u)(V_2(X_{u_0}) - V_2(X_u)) \geqslant A - 2V^2(E_u) C_5 \sqrt{\varepsilon} - \frac{\varphi_0}{2} n V_2(X) V(E_u) \geqslant A - C_8(\sqrt{\varepsilon} + \varphi_0).$$

Здесь мы воспользовались неравенством $V_2(X) \leqslant C_9$, которое будет показано при доказательстве теоремы 1.

Отсюда

$$\int\limits_{\Omega'} \Delta_{21}(X_u)\, d\omega \geqslant (A - C_8(\sqrt{\varepsilon} + \varphi_0))\, F(\Omega'),$$

где $F(\Omega')$ — площадь Ω', для которой

$$F(\Omega') \geqslant V(E_u)\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^{n-1}.$$

Так как $\Delta_{21}(X_u) \geqslant 0$, то

$$(A - C_8(\sqrt{\varepsilon} + \varphi_0))\, F(\Omega') \leqslant \int\limits_{\Omega} \Delta_{21}(X_u)\, d\omega \leqslant C_7 \sqrt{\varepsilon},$$

откуда

$$A \leqslant C_8(\sqrt{\varepsilon} + \varphi_0) + \frac{C_7 \varepsilon}{F(\Omega')} \leqslant C_{10}\left(\sqrt{\varepsilon} + \varphi_0 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varphi_0^{n-1}}\right).$$

Функция $\varphi + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varphi^{n-1}}$ на $[0, \pi]$ достигает минимума при $\varphi = C_{11}\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$. Возьмем $\varphi_0 = C_{11}\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$. Тогда для A получим оценку $A \leqslant C_6\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$.

Лемма 2 доказана.

Пусть теперь X_2 — проекция тела X на произвольную плоскость E^2 пространства E^n, E_2 — единичный круг в E^2.

Лемма 3. *Если* $\Delta_{21}(X) < \varepsilon$, *то* $\Delta_{21}(X_2) \leqslant C_{12}\varepsilon^{2a}$.

Доказательство. Пусть $E^{n-1}, E^{n-2}, \ldots, E^2$ — последовательность плоскостей E^n таких, что $E^{n-1} \supset E^{n-2} \supset \ldots \supset E^2$. Обозначим через X_i проекцию X на плоскость E^i $(i = 2, \ldots, n-1)$. Очевидно X_i — проекция X_j на E^i $(j > i)$. Если $\Delta_{21}(X_i) < \gamma$, то по лемме 2 имеем

$$\Delta_{21}(X_{i-1}) < C_{13}\gamma^{\frac{1}{2i}} \quad (i > 2).$$

Следовательно, из $\Delta_{21}(X) < \varepsilon$ имеем $\Delta_{21}(X_2) < C_{12}\varepsilon^{2a}$.

Замечание. Если $\Delta_{21}(X) < \varepsilon$ и $V_2(X) = V(E)$, то

$$V_2(X_2) = V_2(E_2)(1 + C_{14}\varepsilon^{2a}).$$

Это утверждение можно получить из леммы 2 и неравенст (4), проектируя X последовательно на плоскости $E^{n-1}, \ldots, E$

Доказательство теоремы 1. Покажем, что услови $\Delta_{mk}(X) < \varepsilon$ и $V_m(X) = V(E)$ теоремы 1 могут быть заменены условия $\Delta_{21}(X) < C_{15}\varepsilon$ и $V_2(X) = V(E)$.

Действительно, если $\Delta_{mk}(X) < \varepsilon$, то по лемме 1 и замечани к ней будет

$$\Delta_{21}(X) < C_{16}\varepsilon, \quad \Delta_{k1}(X) < C_{17}\varepsilon.$$

Из

$$\Delta_{mk}(X) < \varepsilon, \quad \Delta_{21}(X) < C_{16}\varepsilon, \quad \Delta_{k1}(X) < C_{17}\varepsilon, \quad V_m(X) = V(E)$$

следует, что

$$V_2(X) = V(E)(1 + C_{18}\varepsilon).$$

Заменив тело X на $X' = \sqrt{1 + C_{18}\varepsilon}X$, получим $V_2(X') = V($ и $\Delta_{21}(X') < C_{19}\varepsilon$. Доказав теорему для X', получим теорему для X.

Итак, пусть $\Delta_{21}(X) < C_{15}\varepsilon$ и $V_2(X) = V(E)$. По лемме 3 замечанию к ней имеем $\Delta_{21}(X_2) < C_{20}\varepsilon^{2a}$ и $V_2(X_2) = V_2(E_2)\times(1 + C_{21}\varepsilon^{2a})$. Величина $\Delta_{21}(X_2)$ является изопериметрическ разностью фигуры X_2, и мы воспользуемся леммой 3 рабо [5, с. 672]:

Если

$$\Delta_{n1}(A, X) < \varepsilon, \quad 0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0, \quad V(A) = V(X),$$

то

$$\delta(A, X) < C\varepsilon^{\frac{1}{n}},$$

где ε_0 *и* C *зависят только от* n, r_A, R_A.

В нашем случае из этой леммы следует, что $\delta(X_2, E_2) < C_{22}\varepsilon^a$, причем C_{22} зависит только от чисел k, m, n.

Воспользуемся теперь теоремой из [6, с. 537]:

Если для всех плоскостей E^k *данной размерности* k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ $\delta(X_k, E_k) < \varepsilon$, *то* $\delta(X, E) < C\varepsilon$, *где* C *зависит только от*

Условия этой теоремы выполнены у нас для $k = 2$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 можно получить таким методом как в работе [5, с. 672].

Поэтому здесь мы только отметим основные моменты это доказательства.

Из условия $V_m(X) = V(E)$ следует существование точки t_1, $0 < t_1 < 1$, в которой $V_m'(H_{t_1}) = 0$. Для $V_m'(H_t)$ справедлива формула

$$V_m'(H_t) = m\left(V_{m-1}(H_t) - V_{m1}(E, H_t, X)\right),$$

поэтому

$$V_{m1}(E,\ H_{t_1},\ X) = V_{m-1}(H_{t_1}).$$

Так как

$$V_m(H_t) = tV_{m-1}(H_t) + (1-t)\,V_{m1}(E,\ H_t,\ X),$$

то

$$V_m(H_{t_1}) = V_{m-1}(H_{t_1}).$$

Отсюда

$$\Delta_{mm-1}(H_{t_1}) = V_{m-1}^m(H_{t_1}) - V_m^{m-1}(H_{t_1})\,V(E) = \\ = V_m^{m-1}(H_{t_1})\,(V_m(H_{t_1}) - V(E)).$$

Из условия $\Phi_m(X,\ t) < \varepsilon$ следует, что

$$V_m(H_{t_1}) - V(E) < C_{23}\varepsilon.$$

Следовательно, $\Delta_{mm-1}(H_{t_1}) < C_{24}\varepsilon$ и по теореме 1 $\delta(H_{t_1},\ E) \leqslant C_{25}\varepsilon^a$. Как показано в [5, с. 673] $2\delta(H_{t_1},\ E) \geqslant \delta(X,\ E)$, откуда $\delta(X,\ E) < 2C_{25}\varepsilon^a$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел.— «Мат. сб.», вып. 2 (44), № 6, 1937, с. 1205—1235.
2. Дискант В. И. Некоторые оценки для выпуклых поверхностей с ограниченной функцией кривизны.— «Сиб. мат. журн.», 1971, т. XII, № 1, с. 109—125.
3. Буземан Г. Выпуклые поверхности. М., «Наука», 1964. 238 с.
4. Chakerian G. D. Higher Dimensional Analogues of an Isoperimetric Inequality of Benson.—«Math. Nachr.», 1971, vol. 48, № 1—6, p. 33—41.
5. Дискант В. И. Устойчивость решения уравнений Минковского.— «Сиб. мат. журн.», 1973, т. XIV, № 3, с. 669—673.
6. Фет А. И. Теоремы устойчивости для выпуклых поверхностей, близких к сфере.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 3, с. 537—540.

Поступила 2 января 1975 г.

УДК 513

В. Ф. ИГНАТЕНКО

НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРЕНОСА

1°. С. Ли поставил задачу нахождения всех алгебраических поверхностей с $q \geqslant 2$ сетями переноса [1]; при $q > 2$ множество сетей переноса поверхности бесконечно. Б. Гамбье установил, что произвольная алгебраическая поверхность с $q \geqslant 2$ сетями переноса в E^3 аффинным преобразованием (вещественным или мнимым) приводится к одному из девяти типов [2]:

1) $x_1 x_2 - x_3 = 0$;

2) $x_1^3 - 3x_1 x_2 + 2x_3 = 0$ (линейчатая поверхность Кэли);

3) $x_1 (x_1^2 - x_2) - 2x_1 = 0$;

4) $x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

5) $x_1^3 x_2 - 3(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3) + 3 = 0;$

6) $x_1^3 + 3x_2^2 - 4x_1 x_3 - 3 = 0;$

7) $x_1^4 - 2x_1^2 x_2 - x_2^2 + 2x_3 = 0;$

8) $x_1^5 - 5x_1 x_2^2 + 4x_3 = 0;$

9) $x_1^5 + 20x_1^3 - 5x_1 x_2^2 + 180x_1 + 4x_3 = 0.$

Я. П. Бланк определил все поверхности переноса относительно двух плоскостей [3]; поверхность переноса относительно конечной плоскости проективно эквивалентна обычной поверхности переноса. Эти поверхности включают параболоид и поверхность Кэли; все другие алгебраические поверхности переноса исчерпываются пятью типами:

10) $x_1^2 (x_2^2 - x_3) + 1 = 0;$

11) $x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 - x_2 = 0;$

12) $x_1^2 (\alpha x_3^2 + x_1 x_3 - x_2) + \beta = 0;$

13) $45x_1^4 (x_2 - x_3^2) - 15x_1^2 x_3 + 1 = 0;$

14) $\gamma x_1^6 - x_1^4 x_2^2 + x_1^4 x_2 - x_1^3 x_3 - \frac{1}{5} = 0.$

В настоящей заметке устанавливаются некоторые свойства поверхностей 1—14, связанные с их геометрическим образованием при помощи поверхностей низших порядков. В связи с этим в m-мерном евклидовом пространстве E^m находятся конструктивные свойства произвольной алгебраической $(m-1)$-мерной поверхности F_n порядка n.

2°. Уравнение поверхности $F_n\,(n > 1)$ в E^m можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{r} A_i(x)\, B_i(x) = 0, \quad 1 < r \leqslant m, \tag{1}$$

где $A_i(x)$, $B_i(x)$ — многочлены относительно координат вектора $x(x_1, \ldots, x_m)$, причем отношение любых двух многочленов из $A_i(x)$ (или $B_i(x)$) не равно вещественному числу.

Рассмотрим $(r-1)$-параметрическую связку поверхностей, заданных системой уравнений

$$A\colon\ A_{j+1}(x) + \lambda_j A_1(x) = 0 \quad (j = 1, \ldots, r-1),$$

имеющих в общем случае размерность $m - r + 1$, и $(r-1)$-параметрическую связку $(m-1)$-поверхностей

$$B\colon\ B_1(x) - \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j B_{j+1}(x) = 0.$$

Параметры λ_j пробегают расширенную числовую прямую, которая получается присоединением к числовой прямой R элементов $+\infty$ и $-\infty$ [4, с. 165]; при этом каждая последовательность $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1})$ может содержать только один параметр, равный $+\infty$ или $-\infty$. Если $|\lambda_{j'}| = \infty$ $(1 \leqslant j' \leqslant r-1)$, то при любых

$(j \neq j'$ в связке A имеем в общем случае $(m-r+1)$-поверхность $A_i(x) = 0$ $(i \neq j'+1)$, которой в связке B соответствует поверхность $B_{j+1}(x) = 0$; эти элементы связок A и B пересекаются на поверхности F_n.

Из уравнения (1) следует, что связки A и B образуют поверхность F_n (ср. [5], [6, п. 2°]). В случае

$$A_i(x) = x_i \quad (i = 1, \ldots, r)$$

связки A, B переобозначим через S, Q; S есть связка $(m-r+1)$-плоскостей, а Q — связка поверхностей порядка $h \leqslant n-1$. Базисные поверхности $B_i(x) = 0$ связки Q в общем находятся неоднозначно; пример поверхности F_n, для которой они определяются единственным образом, задает уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^n = 0 \quad (r = m).$$

Многочлены $B_i(x) = x_i^{n-1}$; базисные поверхности связки Q являются $(n-1)$-кратными координатными плоскостями. Если $n=2$, то эта поверхность — изотропный конус и $A \equiv S$, $B \equiv Q$.

3°. Обозначим через f (соответственно φ) отображение множества $\{\lambda\}$ всех последовательностей $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1})$ на множество всех $(m-r+1)$-плоскостей (соответственно $(m-1)$-поверхностей) связки S (соответственно Q), при котором λ переходит в элемент с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ соответствующей связки; f и φ индуцируют новое отображение ψ: $S \to Q$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \{\lambda\} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & S \arrow[dl, "\psi"] \\ & Q & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Пусть все $\lambda_j \in R$ $(j = 1, \ldots, r-1)$, тогда f биективно (две поверхности в заданной координатной системе называются различными, если соответствующие коэффициенты их уравнений не пропорциональны). Так как диаграмма (2) коммутативна, то отображение ψ биективно в том и только в том случае, когда биективно φ. Предположим, что φ отображает различные последовательности $\lambda' = (\lambda_1', \ldots, \lambda_{r-1}')$ и $\lambda'' = (\lambda_1'', \ldots, \lambda_{r-1}'')$ в одну поверхность связки Q. Находим

$$(\mu - 1) B_1(x) + \sum_{j=1}^{r-1} \left(\mu\lambda_j'' - \lambda_j'\right) B_{j+1}(x) \equiv 0, \quad 0 \neq \mu \in R. \tag{3}$$

При $\mu \neq 1$ многочлен $\sum\limits_{j=1}^{r-1} B_{j+1}(x)$ содержит с ненулевыми вещественными множителями все одночлены $B_1(x)$. Если $\mu = 1$ и, для определенности, $\lambda_1' \neq \lambda_1''$ $(\lambda' \neq \lambda'')$, то $r > 2$ и не все

$\lambda_k' = \lambda_k''$ $(k = 2, \ldots, r-1)$, ибо в противном случае $B_2(x) \equiv 0$, что исключается (п. 2°). Многочлен $\sum_{k=2}^{r-1} B_{k+1}(x)$ содержит с ненулевыми вещественными множителями все одночлены $B_2(x)$. Возьмем, например, в E^4 поверхность

$$x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 = 0, \tag{4}$$

имеющую двойную прямую $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (ось x_1). Выберем связку

$$Q:\ x_1x_2^2 - \lambda_1(x_1x_2^2 + x_3) - \lambda_2x_3 - \lambda_3x_4 = 0;$$

φ отображает две последовательности $\lambda' = (2, -1, -1)$ и $\lambda'' = (3, -1, -2)$ в одну поверхность

$$x_1x_2^2 + x_3 - x_2 = 0.$$

Здесь число $\mu = \frac{1}{2}$ и $B_2(x) = B_1(x) + x_3$.

Многочлены $B_i(x)$ в уравнении (1) всегда можно выбрать так, чтобы они не удовлетворяли тождеству (3) (в определенной системе координат). В частности, для поверхности (4) имеем

$$Q:\ x_2^3 - \lambda_1x_1^2x_2 - \lambda_2(x_2 + x_3) - \lambda_3x_4 = 0.$$

В случае $|\lambda_{j'}| = \infty$ $(1 \leqslant j' \leqslant r-1)$ отображение ψ переводит $(m-r+1)$-плоскость $x_i = 0$ $(i \neq j'+1)$ в одну поверхность $B_{j'+1}(x) = 0$ (п. 2°). Таким образом, *произвольная поверхность F_n в E^m есть множество всех $(m-r)$-поверхностей пересечения соответственных элементов связки S $(m-r+1)$-плоскостей и биективной ей связки Q поверхностей порядка $h \leqslant n-1$; при $r > 2$ в плоскости $x_1 = 0$ исключаются все точки F_n, не лежащие в $(m-r+1)$-плоскостях*

$$[E^m \ominus \Pi^r(x_1, \ldots, x_r)] \oplus \Pi_j^1(x_{j+1}),\ j = 1, \ldots, r-1.$$

Это предложение расширяет теорему Зейдевича на поверхности F_n пространства E^m (ср. [7]). Если в некоторой координатной системе уравнение F_n принимает вид

$$\sum_{i=1}^{r} x_iB_i(x_1, \ldots, x_s) = 0 \quad (s < m),$$

то она допускает и более простое образование: *Q представляет собой связку $(m-s)$-цилиндров*. Все поверхности переноса 1—14 (п. 1°) удовлетворяют этому условию (табл. 1, $r = 3$). Для них связка S задается уравнениями $x_2 + \lambda_1x_1 = 0$, $x_3 + \lambda_2x_1 = 0$; в табл. 1 они не приводятся. Запись «x_1, x_2, $x_3 - x_2$», например, в табл. 1 означает, что введена новая система координат заменой x_1, x_2, x_3 переменными x_1, x_2, $x_3 - x_2$ соответственно (аффинное преобразование ζ); кроме случаев 1 и 4 преобразование ζ — параллельный перенос. Оно переносит начало координат O на поверхности 5, 6, 10 и 12—14. Поверхности 1 и 4 проходят через точку O, но система координат изменена, так как в первоначальной координатной системе при любом выборе многочленов $\theta_i(x)$ (отношение любых двух из них не равно вещественному числу, п. 2°) связка Q или однопараметрическая (поверхность 1), или двупараметрическая (поверхность 4). Следовательно, *каждая из поверхностей 1—14 есть множество всех точек пересечения соответственных элементов связки S прямых и биективной ей связки Q цилиндров порядка $h \leqslant n-1$; при этом в плоскости $x_1 = 0$ исключаются все точки поверхности переноса F_n, не лежащие на координатных осях x_2 и x_3.*

Таблица 1

Тип поверхности	ζ	Преобразование уравнений поверхности	Связка Q цилиндров
1	$x_1 + x_3,\ x_2,\ x_1$	$x_1 - x_2(x_1 + x_3) = 0$	$1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$
2	—	—	$x_1^2 + 3\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0$
3	—	—	$2 - \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_1^2 = 0$
4	$x_1,\ x_2\ x_3 - x_2$	$x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_1 + x_3 = 0$	$x_2 x_3 + 1 + \lambda_1 x_1 x_2 - \lambda_2 = 0$
5	$x_1 + 1,\ x_2,\ x_3$	$(x_1+1)^3 x_2 - 3(x_1^2 + {}$ $+ x_1 x_2 + x_2 x_3 + 2x_1 + x_2) = 0$	$3(x_1+2) + \lambda_1(x_1^3 + {}$ $+ 3x_1^2 - 2) - 3\lambda_2 x_2 = 0$
6	$x_1,\ x_2 + 1,\ x_3$	$x_1^4 - 4x_1 x_3 + 3x_2(x_2+2) = {}$ $= 0$	$x_1^3 - 3\lambda_1(x_2+2) - {}$ $- 4\lambda_2 x_1 = 0$
7	—	—	$x_1^3 - 2x_1 x_2 + \lambda_1 x_2 - {}$ $- 2\lambda_2 = 0$
8	—	—	$x_1^4 + 5\lambda_1 x_1 x_2 - 4\lambda_2 = 0$
9	—	—	$x_1^4 + 20x_1^2 + 180 + {}$ $+ 5\lambda_1 x_1 x_2 - 4\lambda_2 = 0$
10	$x_1 + 1,\ x_2,\ x_3 + 1$	$(x_1+1)^2(x_2^2 - x_3) - x_1 \times {}$ $\times (x_1+2) = 0$	$x_1 x_2^2 - x_1 - 2 - \lambda_1 x_2 \times {}$ $\times (2x_1+1) + \lambda_2(x_1 + {}$ $+ 1)^2 = 0$
11	—	—	$x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 x_1^2 x_2 = 0$
12	$x_1 + 1,\ x_2 + \beta,\ x_3$	$(x_1+1)^2(\alpha x_3^2 + x_1 x_3 - x_2 + {}$ $+ x_3) - \beta x_1(x_1+2) = 0$	$(x_1+2)(\alpha x_3^2 - \beta) + {}$ $+ \lambda_1(x_1+1)^2 - \lambda_2[(x_1 + {}$ $+ 1)^3 + \alpha x_3] = 0$
13	$x_1 + 1,\ x_2 - {}$ $- \frac{1}{45},\ x_3$	$45(x_1+1)^4(x_2 - x_3^2) - {}$ $- 15x_3(x_1+1)^2 - x_1(x_1^3 + {}$ $+ 4x_1^2 + 6x_1 + 4) = 0$	$(x_1^3 + 4x_1^2 + 6x_1 + 4) \times {}$ $\times [45(x_2 - x_3^2) - 1] - {}$ $- 45\lambda_1 + 15\lambda_2 \times {}$ $\times [3x_3 + (x_1+1)^2] = 0$
14	$x_1 + 1,\ x_2,$ $x_3 + \gamma - \frac{1}{5}$	$\gamma[(x_1+1)^6 - 1] + {}$ $+ x_2(1 - x_2)(x_1+1)^4 - {}$ $- x_3(x_1+1)^2 - (\gamma - \frac{1}{5}) \times {}$ $\times (x_1^2 + 2x_1) = 0$	$\gamma(x_1^5 + 6x_1^4 + 15x_1^3 + {}$ $+ 20x_1^2 + 14x_1 + 4) + {}$ $+ \frac{1}{5}(x_1+2) - \lambda_1(1 - {}$ $- x_2)(x_1+1)^4 + \lambda_2(x_1 + {}$ $+ 1)^2 = 0$

Пусть левая часть уравнения поверхности $F_n = 0$ имеет слагаемое

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^{p_i} \left(\prod_{i=1}^{m} a_i p_i \neq 0 \right).$$

Тогда число $r = m$ (п. 2°) и это слагаемое появляется в уравнении каждой из поверхностей 7, 10, 12—14 в результате любого аффинного преобразования, которое помещает начало координат на поверхность. Поэтому *из поверхностей переноса* 1—14 *только поверхности* 1—6, 8, 9 *и* 11 *могут быть образованы линиями пересечения соответственных плоскостей пучка S и цилиндров порядка $h \leqslant n-1$ биективного ему пучка Q.*

Уравнения пучков S и Q для каждого из указанных девяти типов поверхностей переноса приведены в табл. 2 ($r = 2$). При этом поверхности 1 и 4—6 (соответственно 2, 3 и 8, 9, 11) задаются уравнениями табл. 1 (соответственно п. 1°).

Таблица 2

Тип поверхности	Пучок S плоскостей	Пучок Q цилиндров
1	$x_2 + \lambda_1 x_1 = 0$	$1 + \lambda_1 (x_1 + x_3) = 0$
2	$x_3 + \lambda_2 x_1 = 0$	$x_1^2 - 3x_2 - 2\lambda_2 = 0$
3	$x_2 + \lambda_1 x_1 = 0$	$x_1 x_3 - 2 + \lambda_1 x_3 = 0$
4	$x_3 + \lambda_2 x_1 = 0$	$x_2 x_3 - x_2^2 + 1 - \lambda_2 = 0$
5	$x_2 + \lambda_1 x_1 = 0$	$3(x_1 + 2) + \lambda_1 (x_1^3 + 3x_1^2 - 3x_3 - 2) = 0$
6	$x_2 + \lambda_1 x_1 = 0$	$x_1^3 - 4x_3 - 3\lambda_1 (x_2 + 2) = 0$
8	$x_3 + \lambda_2 x_1 = 0$	$x_1^4 - 5x_2^2 - 4\lambda_2 = 0$
9	$x_3 + \lambda_2 x_1 = 0$	$x_1^4 + 20x_1^2 - 5x_2^2 + 180 - 4\lambda_2 = 0$
11	$x_2 + \lambda_1 x_1 = 0$	$x_1 - \lambda_1 (x_1^2 x_3 - 1) = 0$

Замечание. Конструкция п. 2° позволяет проверить линейчатость поверхности переноса Кэли. Возьмем связку

$$A: \quad \begin{aligned} &x_1(\lambda_1 x_1 - 3) = 0, \\ &\lambda_2 x_1^2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

и связку плоскостей

$$B: x_1 - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_3 = 0.$$

При $\lambda_2 \neq 0$ уравнения A задают параллельные плоскости. Если, например, $2\lambda_1^2 + 9\lambda_2 = 0$, то одна из двух плоскостей $\lambda_2 x_1^2 + 2 = 0$ совпадает с плоскостью $\lambda_1 x_1 - 3 = 0$. Эта плоскость пересекает соответственную плоскость связки B (ее уравнение $9x_1 - 9\lambda_1 x_2 + 2\lambda_1^2 x_3 = 0$) по прямой — образующей поверхности Кэли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Lie S. Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig, 1896. 693 S.
Gambier B. Surfaces de translation de Sophus Lie.— «Comptes rendus», № 170, 1920, p. 1371—1374.
Бланк Я. П. Решение проблемы Энгеля о поверхностях переноса.— «Зап. ин-та мат. и мех. ХГУ и Харьк. мат. о—ва», 1948, сер. 4, т. 19, с. 121—140.
Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М., Физматгиз, 1969. 392 с.
Castelnuovo G. und Enriques F. Grundeigenschaften der algebraischen Flächen.—«Enz. Mat. Wiss.», Bd. III, H. 6, Leipzig, 1915, S. 635—673.
Игнатенко В. Ф. О некоторых свойствах алгебраических поверхностей. «Укр. геометр. сб.», вып. 7, Харьков, Изд-во ХГУ, 1970, с. 36—38.
Lotze A. Über die von Seydewitzsche Erzeugung von Quadriken und ihre m-dimensionale verallgemeinerung. — «Jahresber. Dtsch. Mat. Ver», 1960, vol. 63, N 2, S. 85—88.

Поступила 2 декабря 1974 г.

УДК 513

Н. И. КОВАНЦОВ
В. И. МЯГКОВ

О *К*-РАССЛОЕНИИ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

Вопрос о расслоении комплекса в нормальные конгруэнции ставился и решался Абелем Трансоном еще в 1861 г. [1]. В 1958 г. его рассматривал Н. И. Кованцов в статье, относящейся к векторным полям комплекса [2]. Н. И. Кованцов и Т. В. Носаль в ряде статей [3—5] рассмотрели несколько специальных расслоений, обратив внимание на то, что, если взять какую-либо однопараметрическую совокупность поверхностей заданного вида, то совокупность нормалей к таким поверхностям в общем случае является комплексом. Однако в общем случае этот комплекс уже не допускает другого расслоения в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям заданного вида, тем более он не допускает множества таких расслоений, определяемого с функциональным произволом. В работах [3—5] пара уравнений, определяющих расслоение комплекса, является вполне интегрируемой, следовательно, определяет решение с произволом в две постоянные. Это означает, что существует двупараметрическое семейство нормальных конгруэнций, составляющих один и тот же комплекс, или, что то же, двупараметрическое семейство поверхностей заданного вида, ортогональных к таким конгруэнциям. Беря произвольное однопараметрическое семейство таких поверхностей, мы получаем комплекс прямых как совокупность их нормалей. Поскольку комплекс прямых расслаивается в конгруэнции заданного вида с произволом в одну функцию одного аргумента, то такое расслоение называют функциональным.

Оказалось, что единственным комплексом, допускающим функциональное расслоение в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной полной или постоянной средней кривизны, является линейный комплекс. Для линейного комплекса найдены все функциональные расслоения.

Интегрирование уравнений расслоения дает решение, зависящее от одной функции одного аргумента ($\psi(u)$). Задав произвольно эту функцию, мы получаем однопараметрическое семейство поверхностей, нормали к которым порождают заданный линейный комплекс. К этим поверхностям принадлежат, в частности, и поверхности постоянной средней кривизны. При этом линейный комплекс есть единственный комплекс, состоящий из нормалей к двупараметрическому семейству поверхностей постоянной средней кривизны. Если средняя кривизна равна нулю, то класс комплексов оказывается более широким. Его отыскание сводится к интегрированию уравнения Лапласа. Каждый такой комплекс состоит из нормалей к более общим поверхностям, частным случаем которых оказываются минимальные. Для таких поверхностей отношение средней кривизны к полной есть функция одного параметра, имеющего геометрический смысл.

Во всех этих результатах поверхности, ортогональные к лучам комплекса, вдоль каждого луча имеют одну и ту же полную кривизну (постоянную) или одну и ту же среднюю кривизну (постоянную, в частности, равную нулю), или одно и то же отношение средней кривизны к полной.

В настоящей статье мы ставим задачу рассмотреть функциональное расслоение комплекса, для которого поверхности, ортогональные к нормальным конгруэнциям комплекса, в общем случае не являются поверхностями постоянной кривизны, но имеют вдоль каждого его луча одну и ту же полную кривизну. В частности, показано, что комплексы, ортогональные к двупараметрическому семейству поверхностей, которые имеют вдоль луча одну и ту же полную кривизну, составляют шестипараметрическое семейство, в состав которого входят и линейные комплексы. Найден способ построения таких комплексов (безынтегральное представление).

1. Общий случай

Уравнения комплекса прямых, отнесенного к нормальному трехграннику [9], имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1, \\ \omega_1^2 &= p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\ dk &= \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Уравнения расслоения записываются в виде

$$\begin{aligned} \omega^1 &= a\omega_3^1 + k\omega_3^2, \\ \omega^3 + dt &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Если система (1.2) вполне интегрируема, то точка ($\boldsymbol{A}$ — радиус-вектор вершины нормального трехгранника, e_3 — орт, параллельный лучу)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + te_3$$

описывает поверхность (обозначим σ), ортогональную к лучам конгруэнции комплекса, заданной уравнениями (1.2). Полная кривизна поверхности σ определяется равенством

$$K = \frac{1}{t^2 + at - k^2}. \tag{1.3}$$

Все приведенные формулы и уравнения можно найти в работах Н. И. Кованцова и Т. В. Носаль [3—5].

Предположим, что полная кривизна поверхности σ в точке ее пересечения с лучом комплекса зависит только от параметров этого луча. Назовем соответствующее расслоение K-расслоением. В этом случае имеет место равенство

$$dK = l\omega^1 + m\omega_3^1 + n\omega_3^2,$$

где l, m, n — некоторые функции указанных параметров. Будем искать комплексы, допускающие K-расслоение. Для этого из уравнения (1.3) определим a,

$$a = \frac{1 - K(t^2 - k^2)}{Kt}, \tag{1.4}$$

Внесем (1.4) в (1.2). Условие полной интегрируемости уравнений расслоения

$$\omega^1 = \frac{1 - K(t^2 - k^2)}{Kt}\omega_3^1 + k\omega_3^2,$$
$$\omega^3 + dt = 0$$

запишем в виде

$$t^4K^2p - 2K^2\alpha t^3 + (-2Kp + K^2q + 2K^2k\beta)t^2 + (n + lk - 2K^2k\gamma + 2K\alpha)t + Kr + K^2k^2r + p + Kk^2p = 0. \tag{1.5}$$

Уравнение четвертой степени тождественно исчезает, если все его коэффициенты равны нулю. Сейчас существенным является то, что K зависит только от параметров луча комплекса и не зависит от точки на этом луче, т. е. от t. Следовательно, уравнение (1.5) в своих коэффициентах параметра t не содержит. Приравнивая нулю коэффициенты уравнения (1.5), получим пять условий

$$p = 0,\ \alpha = 0,\ q + 2k\beta = 0$$
$$n = 2K^2k\gamma - lk,\ r(1 + Kk^2) = 0. \tag{1.6}$$

Возможны два случая.

1. $1 + Kk^2 \neq 0$ (общий).
2. $1 + Kk^2 = 0$ (специальный).

В общем случае система (1.6) накладывает следующие ограничения на коэффициенты уравнений (1.1):

$$p = 0,\ \alpha = 0,\ q = -2k\beta,\ r = 0.$$

Уравнения искомого комплекса принимают вид (выписываем вместе с продолжением)

$$\begin{gathered}\omega^2 = k\omega_3^1,\\ \omega_1^2 = \beta\omega_3^2,\\ dk = -2k\beta\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2,\\ -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1,\\ d\beta = -(1 + \beta^2)\omega_3^1,\\ d\gamma = -3\gamma\beta\omega_3^1.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Можно убедиться, что комплекс (1.7) существует с произволом в 6 постоянных [10]. При $\gamma = 0$ комплекс (1.7) становится линейным.

Дадим геометрическое построение комплекса (1.7). Прежде всего замечаем, что

$$D\omega_3^1 = 0, \; D\sqrt{1+\beta^2}\omega_3^2 = 0, \; D\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\omega^3 = 0$$

(D — символ внешнего дифференцирования).
Следовательно, можно положить

$$\omega_3^1 = du, \; \sqrt{1+\beta^2}\omega_3^2 = d\theta, \; \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\omega^3 = dv. \tag{1.8}$$

Интегрируя пятое и шестое уравнения (1.7), получаем

$$\beta = -\operatorname{tg}(u + C_1), \; \gamma = \frac{C_2}{\cos^3(u + C_1)}. \tag{1.9}$$

Из уравнений (1.8) определим формы ω_3^2 и ω^3

$$\omega_3^2 = d\theta\sqrt{\cos^2(u + C_1)}, \quad \omega^3 = -dv\operatorname{tg}(u + C_1)\sqrt{\cos^2(u + C_1)}.$$

Всюду в дальнейшем будем пользоваться соотношениями

$$\omega_3^1 = du, \; \omega^3 = \sin(u + C_1)\,dv, \; \omega_3^2 = -\cos(u + C_1)\,d\theta, \tag{1.10}$$

т. е. будем предполагать, что $\cos(u + C_1) < 0$.

Проинтегрировав третье уравнение (1.7), получим

$$k = \frac{-C_2\theta + C_3}{\cos^2(u + C_1)}. \tag{1.11}$$

В выражениях (1.9), (1.11) величины C_1, C_2, C_3 являются постоянными интегрирования. Вводя обозначение $u + C_1 = u'$ и отбрасывая штрих, будем иметь

$$\beta = -\operatorname{tg} u, \; \gamma = \frac{C_2}{\cos^3 u}, \; k = \frac{-C_2\theta + C_3}{\cos^2 u}. \tag{1.12}$$

Для линейного комплекса $C_2 = 0$.

Вектор ($\boldsymbol{e}_1$ — орт, параллельный главной нормали комплекса)

$$\boldsymbol{k} = \frac{-\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\beta^2}}, \tag{1.13}$$

как легко убедиться, является постоянным. При фиксированном u ($\omega_3^1 = 0$) смещение центра луча может быть представлено в виде

$$d\boldsymbol{A} = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2 + \omega^3\boldsymbol{e}_3 = -\omega^1\frac{-\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1+\beta^2}}\sqrt{1+\beta^2} + k\beta\omega_3^2\boldsymbol{e}_3$$

или

$$d\boldsymbol{A} = -\omega^1\sqrt{1+\beta^2}\boldsymbol{k} + k\beta\omega_3^2\boldsymbol{e}_3. \tag{1.14}$$

Из этого равенства непосредственно видно, что центр луча описывает поверхность, касательные плоскости которой параллельны фиксированному вектору (1.13). Следовательно, каждая такая поверхность есть цилиндр, образующие которого параллельны указанному вектору. Каждому значению параметра u соответствует определенный цилиндр.

Дадим геометрическую интерпретацию параметру θ. Для этого рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{e}_1 \sin u \sin\theta + \boldsymbol{e}_2 \cos\theta - \boldsymbol{e}_3 \cos u \sin\theta, \\ \boldsymbol{j} &= -\boldsymbol{e}_1 \sin u \cos\theta + \boldsymbol{e}_2 \sin\theta + \boldsymbol{e}_3 \cos u \cos\theta, \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{e}_1 \cos u + \boldsymbol{e}_3 \sin u. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Можно убедиться, что векторы (1.15) постоянны. Пусть оси неподвижной системы координат имеют направления векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. В таком случае имеем разложения векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ по координатным векторам

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{i} \sin u \cdot \sin\theta - \boldsymbol{j} \sin u \cos\theta + \boldsymbol{k} \cos u, \\ \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{i} \cos\theta + \boldsymbol{j} \sin\theta, \\ \boldsymbol{e}_3 &= -\boldsymbol{i} \cos u \sin\theta + \boldsymbol{j} \cos\theta + \boldsymbol{k} \sin u. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Из второго равенства (1.16) заключаем, что θ есть угол между векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{e}_2$. Вектор $\boldsymbol{e}_3$ образует с вектором $\boldsymbol{k}$ угол, равный $u - \frac{\pi}{2}$.

Используя (1.16), найденное значение β и уравнения (1.8), мы можем общее смещение точки A

$$dA = \omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2 + \omega^3 \boldsymbol{e}_3$$

представить в виде

$$\begin{aligned} dA &= \boldsymbol{i} \{\omega_3^1 (k \cos\theta + \gamma \cos u \sin\theta) + \omega_3^2 k \sin u \sin\theta\} + \\ &+ \boldsymbol{j} \{\omega_3^1 (k \sin\theta - \gamma \cos u \cos\theta) - \omega_3^2 k \sin u \cos\theta\} + \\ &+ \boldsymbol{k} \left\{\omega^1 \frac{1}{\cos u} - \omega_3^2 \gamma \sin u - \omega_3^2 k \frac{\sin^2 u}{\cos u}\right\}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Для определения направляющей цилиндра $u = \text{const}$ пересечем его плоскостью XOY. Внося (1.16) в (1.14), получим

$$dA = \boldsymbol{i} (k\beta \cos^2 u \sin\theta d\theta - \boldsymbol{j} k\beta \cos^2 u \cos\theta d\theta +$$

$$+ \boldsymbol{k} \left(\frac{\omega^1}{\cos u} - k\beta \cos u \, d\theta\right).$$

Точка $\boldsymbol{A}$, будет двигаться в плоскости XOY, если

$$\omega^1 - k\beta \cos^2 u \, d\theta = 0.$$

Векторное дифференциальное уравнение кривой, описываемой точкой $\boldsymbol{A}$,

$$dA = k\beta \cos^2 u \, (\boldsymbol{i} \sin\theta - \boldsymbol{j} \cos\theta) \, d\theta$$

можно переписать в виде двух скалярных уравнений

$$\begin{aligned} dx &= k\beta \cos^2 u \sin\theta d\theta, \\ dy &= -k\beta \cos^2 u \cos\theta d\theta. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Вносся в (1.18) значения k и β, после интегрирования получим

$$x = -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\cos\theta - C_2\sin\theta - C_3\cos\theta + C_4),$$
$$y = -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\sin\theta + C_2\cos\theta - C_3\sin\theta + C_5), \qquad (1.19)$$

где C_4 и C_5 — некоторые функции, зависящие от u. Система (1.19) определяет форму каждого отдельно взятого цилиндра $u = u_0$. Необходимо определить взаимное расположение этих цилиндров, т. е. найти C_4 и C_5.

Определим линию, которую опишет точка A в плоскости XOY при постоянном θ. Для этого на общее смещение точки A (1.17) надо наложить ограничения: $d\theta = 0$, означающее, что точка A движется по поверхности $\theta = \text{const}$, и $(d\bar{A}\,\boldsymbol{k}) = 0$, указывающее на то, что точка $\bar{A}$ движется в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{k}$. При указанных ограничениях уравнение линии принимает вид

$$d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}\,(k\cos\theta + \gamma\sin\theta\cos u)\,du + \boldsymbol{j}\,(k\sin\theta - \gamma\cos\theta\cos u)\,du.$$

Координаты точек этой линии удовлетворяют уравнениям

$$dx = (k\cos\theta + \gamma\sin\theta\cos u)\,du,$$
$$dy = (k\sin\theta - \gamma\cos\theta\cos u)\,du. \qquad (1.20)$$

Вносся в (1.20) значения k и γ, после интегрирования получим

$$x = -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\cos\theta - C_2\sin\theta - C_3\cos\theta) + C_6,$$
$$y = -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\sin\theta + C_2\cos\theta - C_3\sin\theta) + C_7, \qquad (1.21)$$

C_6 и C_7 нужно рассматривать как некоторые функции, зависящие от θ.

Если через точку (u_0, θ_0) провести кривые (1.19) и (1.21), то, записывая условие пересечения этих кривых, получим

$$-\operatorname{tg} u_0\, C_4(u_0) = C_6(\theta_0),$$
$$-\operatorname{tg} u_0\, C_5(u_0) = C_7(\theta_0). \qquad (1.22)$$

Но уравнения (1.22) должны выполняться для любого набора u_0, θ_0. А это будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$C_4 = -\frac{C_6}{\operatorname{tg} u_0},\quad C_5 = -\frac{C_7}{\operatorname{tg} u_0},\quad C_6,\ C_7 - \text{const}.$$

Таким образом, цилиндры $u = \text{const}$ пересекают плоскость XOY по кривым (1.21), где C_6 и C_7 — постоянные.

Перенося начало координат в плоскости XOY в подходящую точку, можно привести постоянные C_6 и C_7 к нулю.

Уравнения линий пересечения цилиндров с плоскостью XOY имеют вид

$$x = -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\cos\theta - C_2\sin\theta - C_3\cos\theta),$$
$$y = -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\sin\theta + C_2\cos\theta - C_3\sin\theta), \qquad (1.23)$$
$$u = \text{const}.$$

Это эвольвенты окружностей. Чтобы построить эвольвенту (1.23), проводим через начало координат прямую, образующую с осью абсцисс угол φ, определяемый равенством

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{C_3}{C_2}.$$

Каждая эвольвента получается развертыванием окружности с центром в начале координат и радиусом $R = -C_2 \operatorname{tg} u$), начиная от точки ее пересечения с указанной прямой, с последующим поворотом на $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке. Теперь можно дать безынтегральное представление комплекса (1.7).

Чтобы построить комплекс (1.7), достаточно в плоскости XOY взять однопараметрическую совокупность эвольвент (1.23). Через эти эвольвенты проведем цилиндры с образующими, параллельными оси OZ. В каждой касательной плоскости цилиндра проведем пучок параллельных прямых, составляющих с вектором k угол $u - \frac{\pi}{2}$. Совокупность всех таких прямых, построенных для каждой касательной плоскости каждого цилиндра и образует рассматриваемый комплекс.

Мы можем теперь геометрически истолковать и те шесть постоянных, которые определяют комплекс (1.7). Четыре таких постоянных идут на определение прямой, с которой у нас сейчас совпадает ось OZ. Постоянные C_2, C_3 находим так. Положив в уравнениях (1.23) $\theta = 0$, получаем

$$x = C_3 \operatorname{tg} u, \qquad (1.24)$$
$$y = -C_2 \operatorname{tg} u.$$

Фиксировав точку x, y, получим определенную проходящую через нее эвольвенту. Проведем через нее цилиндр с образующими, параллельными оси OZ. Фиксируем для этого цилиндра значение параметра u. Тогда равенства (1.24) определят постоянные C_2, C_3.

На каждой эвольвенте параметр u становится определенным.

2. Расслоение комплекса (1.7) в нормальные конгруэнции

Общее смещение центра луча комплекса (1.7) определяется равенством (1.17). Из четвертого уравнения (1.7) определим форму ω^1

$$\omega^1 = -\frac{1}{\beta}\,\omega^3 - \frac{\gamma}{\beta}\,\omega_3^1 + k\omega_3^2.$$

Заменяя k, β, γ их найденными значениями по формулам (1.12) и учитывая соотношения (1.10), получим

$$\omega^1 = du\,\frac{C_2}{\cos^2 u \sin u} + dv \cdot \cos u + d\theta\,\frac{C_2\theta - C_3}{\cos u}. \qquad (2.1)$$

Внесем найденное значение ω^1 в (1.17). Учитывая (1.12) и (1.10), перепишем равенство (1.17) в виде

$$dA = i dx + j dy + k dz, \tag{2.2}$$

где

$$dx = du \frac{(-C_2\theta + C_3)\cos\theta + C_2 \sin\theta}{\cos^2 u} + d\theta \operatorname{tg} u\,(C_2\theta - C_3)\sin\theta,$$

$$dy = du \frac{(-C_2\theta + C_3)\sin\theta - C_2\cos\theta}{\cos^2 u} + d\theta \operatorname{tg} u\,(-C_2\theta + C_3)\cos\theta, \tag{2.3}$$

$$dz = du \frac{C_2}{\cos u \sin u} + dv + d\theta\,(C_2\theta - C_3).$$

Проинтегрировав три скалярных уравнения (2.3), соответствующих одному векторному уравнению (2.2), получим

$$x = -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\cos\theta - C_2\sin\theta - C_3\cos\theta), \tag{2.4}$$

$$y = -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\sin\theta + C_2\cos\theta - C_3\sin\theta),$$

$$z = v + \int \frac{C_2}{\cos u \cdot \sin u} du + \frac{1}{2} C_2\theta^2 - C_3\theta.$$

При интегрировании (2.3) возникает три постоянных интегрирования. Не ограничивая общности, все их можно считать равными нулю.

Каждый луч комплекса (1.7) определяется тремя параметрами u, v, θ. Координаты центра каждого такого луча в неподвижной декартовой системе координат $Oijk$ будут параметрически задаваться системой (2.4).

Если задано расслоение комплекса в конгруэнции, то этим самым однозначно определяется и расслоение трехпараметрической совокупности центров лучей комплекса в однопараметрическую совокупность поверхностей $\{\sigma^*\}$; σ^* представляет поверхность, образованную центрами только тех лучей комплекса, которые принадлежат одной из расслаивающих конгруэнций комплекса.

Будем называть поверхности σ^* опорными поверхностями для расслаивающих конгруэнций.

Перейдем теперь к K-расслоению комплекса в нормальные конгруэнции. При таком расслоении кривизна ортогональных поверхностей удовлетворяет условию

$$dK = l\omega^1 + m\omega_3^1 + (2K^2k\gamma - lk)\,\omega_3^2. \tag{2.5}$$

Введем обозначения

$$dl = \mu_1\omega^1 + \mu_2\omega_3^1 + \mu_3\omega_3^2,$$

$$dm = \lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega_3^1 + \lambda_3\omega_3^2. \tag{2.6}$$

Продифференцируем внешним образом уравнение (2.5). Учитывая (1.7) и (2.6), получим

$$[\omega^1\omega_3^1](-\mu_2 + \lambda_1 - l\beta) + [\omega_3^1\omega_3^2](-8K^2k\gamma\beta + 4Kk\gamma m - lk\beta - \lambda_3 - k\mu_2) + [\omega_3^2\omega^1](-4Kk\gamma l + \mu_3 + k\mu_1) = 0.$$

В силу независимости базисных форм комплекса выражения, стоящие в круглых скобках, должны обращаться в нуль

$$-\mu_2+\lambda_1-l\beta=0,$$
$$-8K^2k\gamma\beta+4Kk\gamma m-lk\beta-\lambda_3-k\mu_2=0.$$
$$-4Kk\gamma l+\mu_3+k\mu_1=0.$$

Следуя известному методу [10], получаем

$$\begin{aligned} &s_1=1, && q=2, && N=3,\\ &s_2=1. && Q=3, && N=Q.\\ &s_3=0, \end{aligned}$$

Критерий Картана выполнен. Кривизна ортогональных поверхностей при K-расслоении определяется с произволом в одну функцию двух аргументов.

Заменим четыре дифференциальные формы, входящие в уравнения расслоения (1.1), их найденными значениями по формулам (1.10) и (2.1). Учитывая (1.4), уравнения расслоения можно записать в таком виде

$$dv=\frac{1}{\cos u}\,\Phi_1 du,\ dt=-\operatorname{tg} u\Phi_1 du. \tag{2.7}$$

Здесь через Φ_1 обозначено следующее выражение:

$$\Phi_1=\frac{1-K\left[t^2-\left(\dfrac{-C_2\theta+C_3}{\cos^2 u}\right)^2\right]}{Kt}-\frac{C_2}{\cos^2 u\sin u}. \tag{2.8}$$

В системе (2.7) искомыми функциями являются v и t, а независимыми переменными должны были бы быть u, θ. Поскольку, однако, dv и dt выражаются только через один дифференциал du, то функции v и t не зависят от переменной θ. Выражение (2.8) также не может зависеть от θ, т. е.

$$\Phi_1=\Phi_1(u,\ v,\ t),$$

$\Phi_1(u,\ v,\ t)$ не может быть произвольной функцией трех аргументов. Решим (2.8) относительно K,

$$K=\frac{1}{t^2+\left[\Phi_1(uvt)+\dfrac{C_2}{\cos^2 u\sin u}\right]t-\left(\dfrac{-C_2\theta+C_3}{\cos^2 u}\right)^2}. \tag{2.9}$$

Поскольку K не зависит от t, то из (2.9) определим вид функции $\Phi_1(u,\ v,\ t)$,

$$\Phi_1(u,\ v,\ t)=\frac{\Phi_2(u,\ v)}{t}-t-\frac{C_3}{\cos^2 u\sin u}. \tag{2.10}$$

Функция $\Phi_2(u,\ v)$ — произвольная функция двух аргументов. Только при выполнении условия (2.10) правые части уравнений (2.7) действительно являются полными дифференциалами.

Пусть

$$v = v(u,\ C_8,\ C_9), \tag{2.11}$$

$$t = t(u,\ C_8,\ C_9) \tag{2.12}$$

является решением системы (2.7), соответствующим определенному выбору функции $\Phi_2(u,\ v)$ (см. (2.10)), C_8, C_9 — постоянные интегрирования.

Если теперь в (2.4) вместо v подставить его значение (2,11), то получим уравнения двухпараметрической совокупности опорных поверхностей σ^*. (Параметры C_8, C_9). От каждой точки A, лежащей на соответствующей поверхности σ^*, в направлении вектора e_3 отложим отрезок, длина которого определяется равенством (2.12). Концы таких отрезков опишут двухпараметрическую совокупность базисных поверхностей σ. Выпишем уравнения поверхностей σ

$$\begin{aligned} x &= -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\cos\theta - C_2\sin\theta - C_3\cos\theta) - t\cos u\sin\theta,\\ y &= -\operatorname{tg} u\,(C_2\theta\sin\theta + C_2\cos\theta - C_3\sin\theta) + t\cos u\cos\theta,\\ z &= v + \int\frac{C_2}{\cos u\sin u}\,du + \frac{1}{2}C_2\theta^2 - C_3\theta + t\sin u. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Покажем, что вектор e_3 ортогонален к поверхности (2.13). Действительно, дифференцируя уравнения (2.13) по u и по θ, получим

$$x_u = -\frac{1}{\cos^2 u}(C_2\cos\theta - C_2\sin\theta - C_3\cos\theta) + t\sin u\sin\theta - t'\cos u\sin\theta,$$

$$y_u = -\frac{1}{\cos^2 u}(C_2\theta\sin\theta + C_2\cos\theta - C_3\sin\theta) - t'\sin u\cos\theta + {}$$
$$+ t'\cos u\cos\theta,$$

$$z_u = v' + \frac{C_2}{\cos u\sin u} + t\cos u + t'\sin u,$$

$$x_\theta = \operatorname{tg} u\sin\theta\,(C_2\theta - C_3) - t\cos u\cos\theta,$$

$$y_\theta = -\operatorname{tg} u\cos\theta\,(C_2\theta - C_3) - t\cos u\sin\theta,$$

$$z_\theta = C_2\theta - C_3.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости двух тождеств, доказывающих утверждение,

$$(\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{e}_3) \equiv 0,\quad (\boldsymbol{R}_\theta\boldsymbol{e}_3) \equiv 0,$$

где

$$\boldsymbol{R}_u = \boldsymbol{i}x_u + \boldsymbol{j}y_u + \boldsymbol{k}z_u,$$

$$\boldsymbol{R}_\theta = \boldsymbol{i}x_\theta + \boldsymbol{j}y_\theta + \boldsymbol{k}z_\theta.$$

Поскольку вектор e_3 является нормалью к поверхности (2.13), то для вычисления полной кривизны этой поверхности воспользуемся формулой

$$K = \frac{(\boldsymbol{e}_3\,(\boldsymbol{e}_3)_u\,(\boldsymbol{e}_3)\,\theta)}{(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{R}_\theta)}.$$

Опуская выкладки, запишем окончательный результат

$$K = \frac{-\cos u}{-\Phi_2(u,\ v)\cos u - \dfrac{(-C_2\theta + C_3)^2}{\cos^3 u}},$$

или

$$K = \frac{1}{\Phi_2(u,\ v) - \left(\dfrac{-C_2\theta + C_3}{\cos^2 u}\right)^2}, \qquad (2.14)$$

т. е. полная кривизна поверхностей (2.13) действительно определяется только лучом комплекса и не зависит от параметров C_8, C_9. Если положить

$$C_8 = \psi(C_9),$$

где ψ — произвольная функция, то получим функциональное расслоение комплекса (1.7) в однопараметрическое семейство нормальных конгруэнций, полная кривизна ортогональных к ним поверхностей будет определяться равенством (2.14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Trancon A. Memoire sur les propriétes d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace suivant une loi continue. — «Journal de l'Ecole Polytecnique», 1861, vol. 22, № 38.
2. Кованцов Н. И. О векторных полях, присоединенных к линейчатому комплексу. — «Укр. мат. журн», 1958, т. 10, № 1, с. 37—58.
3. Кованцов Н. И. Поверхности, ортогональные к конгруэнциям линейного комплекса. — «Укр. геометр. сб.», вып. 17. Харьков, 1974, с. 82—92.
4. Кованцов Н. И., Носаль Т. В. Расслоение линейного комплекса в конгруэнции, нормальные к поверхностям постоянной кривизны. — «Укр. геометр. сб.», вып. 16, Харьков, 1974, с. 31—35.
5. Кованцов Н. И., Носаль Т. В. Расслоение комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве в нормальные конгруэнции. — «Укр. геометр. сб.», вып. 14. Харьков, 1973, с. 28—44.
6. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 292 с.
7. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., ОГИЗ—ГИТТЛ, 1948. 432 с.

Поступила 7 октября 1974 г.

ДК 513

Н. И. КОВАНЦОВ

РАССЛОЕНИЕ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ В НОРМАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

В работе [1] было рассмотрено расслоение комплекса прямых нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной кривизны. Вид уравнения расслаивающих конгруэнций

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2, \quad [\omega_3^1\omega_3^2] \neq 0 \qquad (1)$$

исключал конгруэнции, ортогональные к поверхностям нулевой кривизны. Для последних $[\omega_3^1\omega_3^2] = 0$. В настоящей заметке мы рассмотрим исключенный случай.

Будем предполагать, что комплекс прямых в трехмерном евклидовом пространстве E_3 отнесен к своему нормальному трехграннику [2]. Дифференциальные уравнения комплекса имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1, \\ \omega_1^2 &= p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\ dk &= \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Уравнение торсов, ортогональных к лучам комплекса, представим в виде

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= a\omega_3^2, \\ \omega^3 + dt &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Условия интегрируемости этих уравнений таковы;

$$a = 0, \ p = 0. \qquad (4)$$

Равенство $p=0$ означает, что один из инфлекционных центров луча комплекса удален в бесконечность. Такие комплексы рассматривались С. П. Финиковым [3]. У них каждый цилиндр вырождается в плоскость. Из уравнений торса (3) видно, что эта плоскость проходит через образующую торса и перпендикулярна к нему. В работе [3] дается способ построения указанного комплекса (мы будем впредь этот последний характеризовать равенством $p=0$): в каждой фокальной плоскости произвольно выбранной конгруэнции (обозначим γ), касающейся (плоскости) одной какой-либо фокальной поверхности, проводится пучок прямых, параллельных лежащему в этой плоскости лучу конгруэнций γ. Совокупность таких прямых и составит комплекс $p=0$.

Перепишем с учетом (4) уравнение (2) и (3):

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= k\omega_3^1,\\
\omega_1^2 &= \alpha\omega_3^1+\beta\omega_3^2,\\
dk &= \alpha\omega^1+q\omega_3^1+\gamma\omega_3^2, \qquad (5)\\
-\omega^3+k\omega_1^2 &= \beta\omega^1+\gamma\omega_3^1+r\omega_3^2,\\
\omega_3^1 = 0,&\ \ \omega^3+dt=0. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Формы ω^i, ω_i^j следующим образом выражаются через координаты x^i вершины A и α_i^j ортонормированной тройки векторов e_i подвижного репера $T(A, e_i)$ в некотором неподвижном ортонормированном же репере пространства E_3:

$$
\begin{aligned}
\omega^i &= \alpha_k^i dx^k,\\
&\qquad\qquad i,\ j,\ k=1,2,3\\
\omega_i^j &= \alpha_k^{\prime j} d\alpha_i^k. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Здесь $\alpha_k^{\prime i}$ — элементы матрицы, обратной к ортогональной матрице (α_i^k). Следовательно, все девять величин α_i^k можно известным образом выразить через три угла Эйлера φ^i. Таким образом, формы ω^i, ω_i^j выражаются через x^i, φ^i и их дифференциалы.

В уравнениях (5) за независимые переменные можно принять x^i, тогда искомыми функциями будут φ^i, k, α, β, γ, q, r. В системе (5) — (6) за независимые переменные можно принять, например, x^1, x^2, тогда искомыми функциями будут x^3, φ^i, k, α, β, γ, q, r, t.

Как показывает способ образования комплексов $p=0$, широта их класса — две функции двух аргументов. Это — широта класса лежащих в основании построения конгруэнций. Поскольку с каждой конгруэнцией может быть сопоставлен комплекс $p=0$, то можно характеризовать свойства конгруэнции свойствами сопоставленного с нею комплекса и наоборот. Мы найдем на таком пути один новый вид сопряженности на поверхности, а также отметим одно интересное свойство семейств, геодезических на поверхности.

Продолжим второе уравнение (5):

$$d\alpha = a\omega_3^1 + b\omega_3^2,$$
$$d\beta = (b - 1 - \alpha^2 - \beta^2)\,\omega_3^1 + c\omega_3^2. \tag{8}$$

При $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$, полагая, что $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1 - \beta\boldsymbol{e}_3$, имеем

$$d\boldsymbol{A} = \omega^1(\boldsymbol{e}_1 - \beta\boldsymbol{e}_3) = \omega^1\boldsymbol{e},$$
$$d\boldsymbol{e} = a,\ d\boldsymbol{e}_2 = 0,$$
$$d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}_3) = 0.$$

Это значит, что вершина A луча комплекса описывает в неподвижной плоскости $\Pi\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}_3)$ прямую $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e})$ (линию центров). Плоскость Π ортогональна к постоянному вектору $\boldsymbol{e}_2$. Это и есть фокальная плоскость конгруэнции γ, определяющей комплекс. Чтобы найти фокус конгруэнции, в котором плоскость Π касается соответствующей фокальной поверхности (обозначим Σ), составим уравнение плоскости Π:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{e}_2 = 0 \tag{9}$$

($\boldsymbol{R}$ — текущий радиус-вектор и, продифференцировав его, приравняем нулю коэффициенты при ω_3^1, ω_3^2:

$$k + \alpha(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{e}_1 = 0,\ \beta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{e}_3 = 0. \tag{10}$$

Из (9) и (10) находим

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} - \frac{k}{\alpha}\boldsymbol{e},\ \alpha \neq 0. \tag{11}$$

Это и есть искомый фокус. Легко видеть, что он лежит на линии центров. Равенство (11) есть уравнение поверхности Σ. Дифференцируя это уравнение, получаем

$$d\boldsymbol{R} = V\boldsymbol{e} + V_3\boldsymbol{e}_3,$$

где

$$V = \frac{k}{\alpha^2}(a\omega_3^1 + b\omega_3^2) + \frac{k\beta}{\alpha}\,\omega_3^1 - \frac{1}{\alpha}(\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2), \tag{12}$$

$$V_3 = \frac{k}{\alpha}\,(b - 1)\,\omega_3^1 + c\omega_3^2 + (k\alpha - \gamma)\,\omega_3^1 + (k\beta - r)\,\omega_3^2. \tag{13}$$

Направление луча конгруэнции определяется равенством $V = 0$, направление прямой центров — равенством $V_3 = 0$.

Итак, в каждой точке фокальной поверхности конгруэнции определяются два направления: направление луча конгруэнции и направление линии центров комплекса $p = 0$, определяемого этой конгруэнцией. Эти направления характеризуют некоторую новую сопряженность на поверхности (обозначим π^*). Однако в общем случае эта сопряженность не обладает симметрией: у конгруэнции линий центров линия центров определяемого ею комплекса $p = 0$ не совпадает с лучом конгруэнции γ.

Дадим полное геометрическое описание сопряженности π^*. Пусть γ — некоторая конгруэнция и Σ — одна из ее фокальных поверхностей. Пусть R — одна из точек этой поверхности, l^* — проходящий через нее луч конгруэнции γ, M_1 — произвольная точка плоскости П, касающейся Σ в точке R, l — прямая, проходящая через M_1 и параллельная l^*. Проведем через M_1 все плоскости, касающиеся Σ. Пусть П$'$ — одна из них, отличная от П, R' — ее точка прикосновения, l'^* — проходящий через R' луч конгруэнции γ, l' — прямая, проходящая через M_1 и параллельная l'^*. Прямые l' образуют конус с вершиной M_1. Пусть $П_1$ — касательная плоскость к этому конусу вдоль l. Перемещая точку M_1 по l, найдем такое ее положение A, при котором плоскость $П_1$ становится перпендикулярной к П. Поскольку цилиндр комплекса $p=0$ вырождается в плоскость П, то найденная точка A будет центром луча этого комплекса. Все точки A в плоскости П лежат на одной прямой, проходящей через R (ниже это будет показано применительно к произвольно выбранной конгруэнции). Прямая AR и есть прямая, сопряженная лучу l^* в сопряженности π^*.

Найдем уравнение прямой AR, задавшись произвольной поверхностью Σ и конгруэнцией γ, для которой Σ — фокальная. Пусть

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

уравнение Σ,

$$(\rho - \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v) = 0 \tag{14}$$

уравнение касательной к ней в точке R плоскости П. Пусть конгруэнция γ задается вектором

$$\boldsymbol{l}^* = \boldsymbol{r}_u + \boldsymbol{r} f_v, \quad f = f(u, v). \tag{15}$$

Пусть

$$R_1 = \boldsymbol{r} + x_1 \boldsymbol{r}_u + y_1 \boldsymbol{r}_v$$

— точка M_1 на плоскости П. В точке R', близкой к R, касательная к Σ плоскость П$'$ имеет уравнение

$$(\rho - \boldsymbol{r} - d\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u + d\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v + d\boldsymbol{r}_v) = 0.$$

Потребуем, чтобы эта плоскость проходила через точку M_1:

$$(x_1 \boldsymbol{r}_u + y_1 \boldsymbol{r}_v - d\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u + d\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v + d\boldsymbol{r}_v) = 0,$$

или, ограничиваясь членами первого порядка малости,

$$(x_1 \boldsymbol{r}_u + y_1 \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_u d\boldsymbol{r}_v - \boldsymbol{r}_v d\boldsymbol{r}_u) = 0,$$

или, наконец,

$$x_1 (L du + M dv) + y_1 (M du + N dv) = 0; \tag{16}$$

L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности Σ.

Уравнение (16) есть дифференциальное уравнение конической линии на Σ, вдоль которой плоскости Π', проходящие через точку M_1, касаются Σ.

Из (16) находим

$$dv = -\frac{x_1L + y_1M}{x_1M + y_1N}\,du = \lambda du,\ \lambda = -\frac{x_1L + y_1M}{x_1M + y_1N}. \tag{17}$$

В точке R', близкой к точке R, имеем вектор $\boldsymbol{l}'^*$, параллельный лучу конгруэнции γ:

$$\boldsymbol{l}'^* = \boldsymbol{r}_u + d\boldsymbol{r}_u + f\boldsymbol{r}_v + fd\boldsymbol{r}_v + df\boldsymbol{r}_v.$$

Проведем прямую l' через точку M_1 параллельно вектору $\boldsymbol{l}^*$. Касательная плоскость к конусу комплекса (образованного прямыми l'), имеющему вершину в M_1, определится вектором

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{l}^*\boldsymbol{l}'^*] = [\boldsymbol{r}_u + f\boldsymbol{r}_v,\ d\boldsymbol{r}_u + df\boldsymbol{r}_v + fd\boldsymbol{r}_v] = (Adu + Bdv)\,[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v] +$$
$$+ ((L + fM)\,du + (M + fN)\,dv)[(\boldsymbol{r}_u + f\boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{n}], \tag{18}$$

где

$$A = \Gamma_{11}^2 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - f^2\Gamma_{12}^1 + f_u,$$
$$B = \Gamma_{12}^2 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - f^2\Gamma_{22}^2 + f_v, \tag{19}$$

а Γ_{ij}^k $(i,\ j,\ k = 1,\ 2)$ — символы Кристоффеля второго рода на поверхности Σ, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к этой поверхности. Уравнение прямой l имеет вид

$$y - y_1 = f\,(x - x_1).$$

Для любой точки $M\,(x,\ y)$ этой прямой дифференциальное уравнение конической линии, образованной касанием поверхности Σ с конусом, вершина которого совпадает с M, имеет вид

$$x\,(Ldu + Mdv) + y\,(Mdu + Ndv) = 0, \tag{20}$$

откуда

$$dv = -\frac{xL + (y_1 + fx - fx_1)\,M}{xM + (y_1 + fx - fx_1)N}\,du.$$

В частности, для бесконечно удаленной точки прямой l (коническая линия (20) в этом случае становится цилиндрической) имеем

$$dv = -\frac{L + fM}{M + fN}du. \tag{21}$$

Формула (18) после внесения в нее этого значения и сокращения на du приводит к равенству

$$\boldsymbol{N}_\infty = \left(A - B\,\frac{L + fM}{M + fN}\right)[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]. \tag{22}$$

Это означает, что при

$$A\,(M + fN) - B\,(L + fM) \neq 0$$

касательная плоскость к цилиндру комплекса совпадает с плоскостью П. В нашем случае цилиндр комплекса вырождается в плоскость П. Исключительный случай

$$A\,(M+fN)-B\,(L+fM)=0. \tag{23}$$

Вектор N_∞ становится равным нулю. Это означает, что $\boldsymbol{l}^* \parallel \boldsymbol{l}'^*$. Следовательно, в точках цилиндрической линии (20), соответствующей бесконечно удаленной точке прямой l, лучи конгруэнции γ параллельны друг другу. Конгруэнция γ в этом случ е составлена из образующих однопараметрического семейства цилиндров, касающихся поверхности Σ.

Как уже отмечалось выше, плоскость с нормальным вектором (18) касается конуса лучей комплекса вдоль l. Для центра этого луча вектор $\boldsymbol{N}$ должен быть перпендикулярен к вектору $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]$ (последний нормален к плоскости П). Вектор $[\boldsymbol{r}_u+f\boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{n}]$ перпендикулярен к вектору $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v] \parallel \boldsymbol{n}$. Следовательно, в (18) коэффициент при $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]$ должен обратиться в нуль:

$$A\,du+B\,dv=0.$$

Если внести сюда вместо dv его значение, определяемое равенством (20), и сократить получающееся при этом выражение на du, то придем к следующему уравнению:

$$A\,(xM+yN)-B\,(xL+yM)=0. \tag{24}$$

Поскольку уравнение линейно относительно x, y, то оно определяет на плоскости П прямую — линию центров комплекса $p=0$. Эта линия проходит через точку $R\,(x=y=0)$. При заданной конгруэнции γ прямая (24) определяется однозначно. Обратим внимание на то, что прямая (24) определяется не вектором $\boldsymbol{l}^*$, а именно конгруэнцией γ, так как в уравнение (24) входят, кроме f, также и ее частные производные f_u, f_v.

Если обозначить

$$\frac{y}{x}=f',$$

то равенство (24) перепишется в виде

$$A\,(M+f'N)-B\,(L+f'M)=0. \tag{25}$$

Вектор $\boldsymbol{r}_u+f'\boldsymbol{r}_v$ определяет луч конгруэнции, вектор $\boldsymbol{r}_u+f'\boldsymbol{r}_v$ — линию центров. Равенство (25) определяет сопряженность π^*, в которой каждому направлению $V=0$ отвечает направление $V_3=0$. Как и обычная сопряженность, сопряженность (25) определяется окрестностью второго порядка точки R. Однако в отличие от обычной сопряженности сопряженность π^*, как уже говорилось выше, не симметрична относительно f, f'.

Симметрия будет иметь место тогда и только тогда, когда равенство (25) может быть представлено в виде

$$A'\,(M+fN)-B'\,(L+fM)=0, \tag{26}$$

где

$$A' = \Gamma_{11}^2 + f'(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - f'^2\Gamma_{12}^1 + f'_u,$$

$$B' = \Gamma_{12}^2 + f'(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - f'^2\Gamma_{22}^2 + f'_v, \tag{27}$$

$$f' = \frac{MA - LB}{-NA + MB}. \tag{28}$$

Уравнение (26) есть дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка на функцию $f(u, v)$. Решение его для произвольной поверхности существует с широтой две функции одного аргумента. Каждое частное решение определяет конгруэнцию γ, лучу такой конгруэнции в сопряженности π^* соответствует некоторая линия центров. Если теперь взять конгруэнцию γ', образованную линиями центров, то лучи конгруэнции γ будут линиями центров конгруэнции γ'.

Совпадение линии центров с лучом конгруэнции γ в произвольной сопряженности π^* выделяет направления, являющиеся аналогом асимптотических направлений. Чтобы получить такие направления, следует в (26) положить $f' = f$:

$$A(M + fN) - B(L + fM) = 0. \tag{29}$$

Это совпадает с (23). Равенство (29) есть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка на функцию $f(u, v)$. Каждое решение его определяет конгруэнцию γ, являющуюся однопараметрической совокупностью цилиндров, описанных около Σ. Если в каждой касательной плоскости этой поверхности провести пучок прямых, параллельных лучу конгруэнции, то получим однопараметрическое семейство связок параллельных прямых, т. е. некоторый комплекс. Такой комплекс системой (2) описан быть не может, так как у него формы ω_3^1, ω_3^2 линейно зависимы. Это — цилиндрический комплекс. Все конусы цилиндрического комплекса параллельны друг другу, в силу чего нормальная корреляция на луче вырождена, а потому отсутствует и центр луча.

Класс цилиндрических комплексов существует с широтой одной функции одного аргумента. Это соответствует тому факту, что решение уравнения (29) существует именно с таким произволом. Широта класса поверхностей Σ (одна функция двух аргументов) оказывается сейчас больше широты класса определяемых ими комплексов.

Вернемся к общему случаю. Пусть

$$f = \frac{dv}{du}.$$

Предположим, что конгруэнция γ образована касательными к однопараметрическому семейству геодезических линий. В таком случае

$$\frac{d^2v}{du^2} = f_u + f_v f = -\Gamma_{11}^2 - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)f + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)f^2 + \Gamma_{22}^1 f^3,$$

откуда

$$\Gamma_{11}^2 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - f^2\Gamma_{12}^1 + f_u + f[\Gamma_{12}^2 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - f^2\Gamma_{22}^1 + f_v] = 0,$$

или

$$A + fB = 0. \tag{30}$$

Внесем это в (25). Считая, что A и B отличны от нуля, придем к равенству

$$L + M(f + f') + Nff' = 0. \tag{31}$$

Это означает, что направления луча конгруэнции и линии центров соответствующего ей комплекса $p = 0$ сопряжены на поверхности в обычном смысле. Наоборот, если такая сопряженность имеет место, то, умножая (31) на B и сравнивая результат с (25), заключим о справедливости равенства (30), откуда следует, что конгруэнция образована касательными к однопараметрическому семейству геодезических линий. Этот результат сформулируем в виде теоремы:

необходимым и достаточным условием того, чтобы конгруэнция была образована касательными к однопараметрическому семейству геодезических линий на поверхности, является сопряженность направления луча конгруэнции (в обычном смысле) направлению линии центров порождаемого этой конгруэнцией комплекса $p = 0$.

Укажем теперь способ построения торсов, ортогональных к лучам произвольного комплекса $p = 0$. С этой целью вернемся к уравнениям (5), (6) и (8). При $\overset{1}{\omega}_3 = \overset{2}{\omega}_3 = 0$ плоскость Π остается неподвижной. В этом случае

$$d\boldsymbol{M} = d(\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{e}_3) = \omega^1\ \boldsymbol{e}_1,\ d\boldsymbol{e}_1 = 0,$$

следовательно, точка M описывает в Π прямую, ортогональную к лучам комплекса. Эта прямая и есть образующая торса $\omega^3 + dt = 0$.

Пусть

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} + h\boldsymbol{e}_1$$

— точка этой образующей. Поскольку торс, ортогональный к лучам комплекса $p = 0$, характеризуется равенством $\overset{1}{\omega}_3 = 0$, то, принимая во внимание это последнее равенство, будем иметь

$$d\boldsymbol{F} = (\omega^1 + dh)\,\boldsymbol{e}_1 + \overset{2}{\omega}_3\,(t + h\beta)\,\boldsymbol{e}_2;$$

$\boldsymbol{F}$ будет фокусом торса $\omega^3 + dt = 0$ тогда и только тогда, когда

$$t + h\beta = 0,$$

следовательно,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} - \frac{t}{\beta}\,\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{A} - \frac{t}{\beta}\,\boldsymbol{e},$$

а это означает, что фокус лежит на линии центров. Поскольку координата t из уравнения $\omega^3 + dt = 0$ находится с произволом в одну постоянную, то каждая конгруэнция $\omega_3^1 = 0$ допускает однопараметрическое семейство ортогональных к ней торсов. Фокусы всех таких торсов лежат на линии центров.

В каждой плоскости П имеем линию центров. Конгруэнция γ', образованная такими линиями, имеет Σ одной из своих фокальных поверхностей. Каждая конгруэнция $\omega_3^1 = 0$ пересекает конгруэнцию γ' по линейчатой поверхности, точнее, выделяет в γ' линейчатую поверхность. Покажем, что этой поверхностью является торс, фокус которого лежит на второй фокальной поверхности конгруэнции γ'. Действительно, при $\omega_3^1 = 0$ имеем

$$(d\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{e},\ d\boldsymbol{e}) = (V\boldsymbol{e} + V_3\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e},\ -d\beta\boldsymbol{e}_3) = 0,$$

а это и доказывает, что поверхность, описанная линией центров при $\omega_3^1 = 0$, есть торс (обозначим τ). Так как

$$d\boldsymbol{R} = \left[\left(\frac{kb}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}\right)\boldsymbol{e} + \left(\frac{kc}{\alpha} + (k\beta - r)\right)\boldsymbol{e}_3\right]\omega_3^2 \nparallel \boldsymbol{e} \quad (\omega_3^1 = 0)$$

(см. (5), (6), (8)), то это значит, что фокус торса τ принадлежит второй фокальной поверхности конгруэнции γ'. Плоскость П является касательной плоскостью этого торса. Касательные прямые к торсу τ, параллельные лучам l^* конгруэнции γ (каждой касательной плоскости П этого торса соответствует один луч l^* конгруэнции γ, ему соответствует пучок параллельных касательных прямых к τ), определяет на τ фокальное семейство кривых. Возьмем ортогональные траектории этого семейства. Это и будут ребра возврата торсов $\omega^3 + dt = 0$, которые можно построить таким способом.

Взяв какое-либо однопараметрическое семейство найденных торсов (трансверсальное к конгруэнции $\omega_3^1 = 0$), получим расслоение комплекса $p = 0$ в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям нулевой кривизны. Взяв другое трансверсальное к $\omega_3^1 = 0$ (т. е. по одному торсу в каждой конгруэнции $\omega_3^1 = 0$) семейство торсов $\omega^3 + dt = 0$, получим то же самое расслоение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кованцов Н. И., Носаль Т. В. Расслоение комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве в нормальные конгруэнции. — «Укр. геометр. сб.», вып. 14. Харьков, 1973, с. 28—44.
2. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 292 с.
3. Фиников С. П. Геометрия комплекса прямых. — «Учен. зап. МГПИ им. В. П. Потемкина», 1940, т. 1, вып. 1, с. 1—26.

Поступила 24 января 1974 г.

УДК 513.71

Н. КУРБАНОВ

КВАДРАТИЧНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ПРЯМЫХ, ИМЕЮЩИЕ КАСАНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАДАННОЙ ПАРОЙ КОМПЛЕКСОВ

Известно, что одним из характерных свойств пары T комплексов является существование общего касательного линейного комплекса [1]. В настоящей работе показывается, что любая пара комплексов с заданным соответствием между лучами имеет в каждой паре лучей соприкасающийся (т. е. имеющий касание второго порядка) квадратичный комплекс.

Совместим текущий луч l комплекса K с ребром A_1A_2 подвижного репера, а соответствующий ему луч l' комплекса K' — с ребром A_3A_4. В таком случае получим следующие дифференциальные уравнения комплексов K и K' [1]:

$$\omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + c\omega_2^4, \tag{1}$$
$$\omega_3^1 = a'\omega_4^1 + b'\omega_3^2 + c'\omega_4^2.$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения и раскрывая получающиеся квадратичные уравнения по лемме Картана, получаем соотношения, определяющие вторую дифференциальную окрестность лучей l и l':

$$da + a(\omega_1^2 - \omega_1^1) + a^2\omega_2^1 - (ab + c)\,\omega_3^4 - \omega_1^2 = p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4,$$
$$db + b(\omega_3^3 - \omega_4^4) - b^2\omega_3^4 + (ab + c)\,\omega_2^1 + \omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 + \gamma\omega_2^4,$$
$$dc + c(\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4) + ac\omega_2^1 - bc\omega_3^4 -$$
$$- a\omega_4^3 + b\omega_1^2 = \beta\omega_2^3 + \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4;$$
$$da' + a'(\omega_4^4 - \omega_3^3) + a'^2\omega_4^3 - (a'b' + c')\,\omega_1^2 - \omega_3^4 =$$
$$= p'\omega_4^1 + \alpha'\omega_3^2 + \beta'\omega_4^2,$$
$$db' + b'(\omega_1^1 - \omega_2^2) - b'^2\omega_1^2 + (a'b' + c')\,\omega_4^3 + \omega_2^1 =$$
$$= \alpha'\omega_4^1 + q'\omega_3^2 + \gamma'\omega_4^2,$$
$$dc' + c'(\omega_4^4 + \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3) + a'c'\omega_4^3 - b'c'\omega_1^2 +$$
$$+ b'\omega_3^4 - a'\omega_2^1 = \beta'\omega_4^1 + \gamma'\omega_3^2 + r'\omega_4^2.$$

Найдем для каждого комплекса K, K' пары соответствующее ему множество соприкасающихся квадратичных комплексов. Как показано в [2], совокупность таких квадратичных комплексов для каждого комплекса пары зависит от девяти параметров. Вид уравнения квадратичного комплекса возьмем из работы [2], т. е. запишем его так:

$$\sum_{i,j,k,l}^{1,\dots,4} C_{ij,\,kl}\,p^{ij}p^{kl} = 0, \tag{2}$$

где p^{ij}, p^{kl} — плюккеровы координаты прямой. Для двух прямых p, q запишем полярную форму

$$\sum_{i,j,k,l}^{1,\dots,4} C_{ij,\,kl}\,p^{ij}q^{kl},$$

где p^{ij}, q^{kl} — плюккеровы координаты соответственно прямых p, q. Опуская индексы, запишем уравнение (2) в виде

$$\Sigma C\,[p]^2 = 0. \tag{3}$$

Аналогично для простоты вместо $[A_iA_j]$ будем писать $[ij]$. При этом будем иметь в виду равенства

$$C_{ij,\,kl} = -C_{ji,\,kl},\quad C_{ij,\,kl} = C_{kl,\,ij}. \tag{4}$$

Итак,

$$\Sigma C\,[12]^2 = 0 \tag{5}$$

есть условие того, что квадратичный комплекс (3) проходит через луч A_1A_2. Потребуем, чтобы этот комплекс соприкасался с комплексом K, т. е. чтобы этому квадратичному комплексу принадлежали первая и вторая дифференциальные окрестности луча l комплекса K. Продифференцируем уравнение (5), учитывая соотношения (1). Приравнивая нулю коэффициенты при базисных формах комплекса K, получим условия:

$$\begin{gathered}\Sigma C\,\{a\,[12]\,[32] + [12]\,[13]\} = 0,\\ \Sigma C\,\{b\,[12]\,[32] + [12]\,[42]\} = 0,\\ \Sigma C\,\{c\,[12]\,[32] + [12]\,[14]\} = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Продифференцировав два раза уравнение (5) и приравняв нулю коэффициенты при $(\overset{3}{\omega}_2)^2$, $(\overset{4}{\omega}_1)^2$, $(\overset{4}{\omega}_2)^2$, $\overset{3}{\omega}_2\overset{4}{\omega}_1$, $\overset{3}{\omega}_2\overset{4}{\omega}_2$, $\overset{4}{\omega}_1\overset{4}{\omega}_2$, заставим принадлежать комплексу (3) и вторую дифференциальную окрестность луча комплекса K. Однако вместо того, чтобы дважды дифференцировать уравнения (5), можно продифференцировать уравнение (6) и приравнять нулю коэффициенты при базисных формах. Получится 9 соотношений, из которых независимыми являются только 6. Они имеют вид:

$$\begin{gathered}\Sigma C\,\{p\,[12]\,[32] + a^2\,[32]^2 + 2a\,[32]\,[13] + [13]^2\} = 0,\\ \Sigma C\,\{q\,[12]\,[32] + b\,[32]^2 + 2b\,[32]\,[42] + [42]^2\} = 0,\\ \Sigma C\,\{\alpha\,[12]\,[32] + ab\,[32]^2 + a\,[32]\,[42] + b\,[13]\,[32] + [12]\,[43] +\\ + [13]\,[42]\} = 0,\\ \Sigma C\,\{\beta\,[12]\,[32] + ac\,[32]^2 + a\,([12]\,[34] + [32]\,[14]) +\\ + c\,[13]\,[32] + [13]\,[14]\} = 0,\\ \Sigma C\,\{\gamma\,[12]\,[32] + bc\,[32]^2 + b\,([12]\,[34] + [32]\,[14]) +\\ + c\,[42]\,[32] + [42]\,[14]\} = 0,\\ \Sigma C\,\{r\,[12]\,[32] + 2c\,([12]\,[34] + [32]\,[14]) + c^2\,[32]^2 + [14]^2\} = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Аналогичная процедура для комплекса K' приведет к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}\Sigma C\,[34]^2 = 0,\qquad \Sigma C\,\{a'\,[34]\,[14] + [34]\,[31]\} = 0,\\ \Sigma C\,\{b'\,[34]\,[14] + [34]\,[24]\} = 0,\ \Sigma C\,\{c'\,[34]\,[14] + [34]\,[32]\} = 0,\\ \Sigma C\,\{p'\,[34]\,[14] + a'^2\,[14]^2 + 2a'\,[14]\,[31] + [31]^2\} = 0,\\ \Sigma C\,\{q'\,[34]\,[14] + b'^2\,[14]^2 + 2b'\,[14]\,[24] + [24]^2\} = 0,\\ \Sigma C\,\{\alpha'\,[34]\,[14] + a'b'\,[14]^2 + a'\,[14]\,[24] + b'\,[31]\,[14] +\\ + [21]\,[34] + [31]\,[24]\} = 0,\end{gathered} \tag{7'}$$

$$\Sigma C\,\{\beta'[34][14] + a'c'[14]^2 + a'([12][34] + [14][32]) + c'[31][14] + [31][32]\} = 0,$$

$$\Sigma C\,\{\gamma'[34][14] + b'c'[14]^2 + b'([12][34] + [14][32]) + c'[24][14] + [24][32]\} = 0,\quad \Sigma C\,\{r'[34][14] + 2c'([12][34] + [14][32]) + c'^2[14]^2 + [32]^2\} = 0.$$

Системы уравнений (5) — (7) определяют множество соприкасающихся квадратичных комплексов для комплекса K, а система (7') — для комплекса K'. Объединив эти уравнения, получим условия на коэффициенты общего для комплексов K и K' соприкасающегося квадратичного комплекса — всего 20 условий на 20 коэффициентов квадратичного комплекса. Однако еще рано утверждать, что таким образом найден и притом только один определенный квадратичный комплекс, имеющий касание второго порядка для произвольной пары комплексов. Дело в том, что в силу фундаментального условия Плюккера некоторые коэффициенты квадратичного комплекса имеют особый вид. В общем уравнении квадратичного комплекса есть такие члены:

$$C_{12,34}p^{12}p^{34} + C_{13,24}p^{13}p^{24} + C_{14,23}p^{14}p^{23}. \tag{8}$$

При помощи условия Плюккера

$$p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0$$

группа членов (8) преобразуется так:

$$(C_{12,34} + C_{13,24})\,p^{13}p^{24} + (C_{14,23} + C_{13,24})\,p^{14}p^{23}. \tag{9}$$

Отсюда видно, что если можно определить две комбинации коэффициентов в (9), то нет необходимости определять каждый коэффициент в отдельности в (8), а в данном случае только такие комбинации и встречаются. Таким образом, существенных коэффициентов оказывается 19. Они должны удовлетворять системе из 20 уравнений, которая могла бы быть несовместной, но, как показывают исследования, среди уравнений (5) — (7') не все являются независимыми.

Примем за тетраэдр, в котором записано уравнение (2), тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, тогда у каждой прямой A_iA_j не будет исчезать лишь координата p^{ij}. Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &C_{12,32} = x,\quad C_{32,32} = y,\quad C_{14,34} = x',\quad C_{14,14} = y',\\ &C_{13\,32} = u,\quad C_{32,42} = v,\quad C_{14,31} = u',\quad C_{14,24} = v', \end{aligned} \tag{10}$$

Объединив системы (5) — (7), получим

$$\begin{gathered} C_{12,12} = 0,\ C_{12,31} = ax,\ C_{12,24} = bx,\ C_{12,41} = cx,\\ px + a^2y + 2au + C_{13\,13} = 0,\ qx + b^2y + 2bv + C_{42,42} = 0,\\ \alpha x + aby + av + bu + C_{12,43} + C_{13,42} = 0,\\ \beta x + acy + cu - u' + a\,(C_{12,34} + C_{32,14}) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\gamma x + bcy + cv - v' + b\,(C_{12,34} + C_{32,14}) = 0,$$
$$rx + c^2y + y' + 2c\,(C_{12,34} + C_{32,14}) = 0.$$

Системы уравнений (5) — (7) и (7′) симметричны относительно индексов 1,3 и 2,4, а также относительно букв со штрихами и без штрихов. Тем же свойством обладают и величины (10). Система (7′) дает уравнения, симметричные уравнениям (11):

$$C_{34,34} = 0,\ C_{34,13} = a'x',\ C_{34,42} = b'x',\ C_{34,23} = c'x',$$
$$p'x' + a'^2y' + 2a'u' + C_{13,13} = 0,\ q'x' + b'^2y' + 2b'v' + C_{24,24} = 0,$$
$$\alpha'x' + a'b'y' + a'v' + b'u' + C_{34,21} + C_{31,24} = 0,$$
$$\beta x' + a'c'y' + c'u' - u + a'\,(C_{34,12} + C_{14,32}) = 0,$$
$$\gamma'x' + b'c'y' + c'v' - v + b'\,(C_{34,12} + C_{14,32}) = 0, \qquad (11')$$
$$r'x' + c'^2y' + y + 2c'\,(C_{34,12} + C_{14,32}) = 0.$$

Коэффициенты $C_{13,13}$, $C_{24,24}$, $C_{12,43} + C_{13,42}$, $C_{12,34} + C_{32,14}$ в силу (4) симметричны сами себе. Сравнивая их значения из (11) и (11′), получим восемь соотношений между $x,\ x';\ y,\ y';\ u,\ u';\ v,\ v'$:

$$px + a^2y + 2au = p'x' + a'^2y' + 2a'u',$$
$$qx + b^2y + 2bv = q'x' + b'^2u' + 2b'v',$$
$$\alpha x + aby + av + bu = \alpha'x' + a'b'y' + a'v' + b'u',$$
$$2c'\,(rx + c^2y + y') = 2c\,(r'x' + c'^2y' + y),$$
$$2c\,(\beta x + acy + cu - u') = a\,(rx + c^2y + y'),$$
$$2c\,(\gamma x + bcy + cv - v') = b\,(rx + c^2y + y'),$$
$$2c\,(\beta'x' + a'c'y' - u + c'u') = a'\,(r'x' + c'^2y' + y),$$
$$2c\,(\gamma'x' + b'c'y' - v + c'v') = b'\,(r'x' + c'^2y' + y).$$

Исключая отсюда $u,\ u',\ v,\ v'$, получим

$$\lambda_1x + \lambda_1'x' + \frac{y'}{c} - \frac{y}{c'} = 0,$$
$$\lambda_2x + \lambda_2'x' + \frac{y'}{c} - \frac{y}{c'} = 0,$$
$$\lambda_3x + \lambda_3'x' + (ab' + ba')\left(\frac{y'}{c} - \frac{y}{c'}\right) = 0, \qquad (12)$$
$$rc'x - r'cx' + (1 - cc')\,cc'\left(\frac{y'}{c} - \frac{y}{c'}\right) = 0,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{2ac\beta - c^2p - a^2r}{ac\,(a'c - a)} - \frac{p}{a\,(ac' - a')},$$
$$\lambda_2 = \frac{2bc\gamma - c^2q - b^2r}{bc\,(b'c - b)} - \frac{q}{b\,(bc' - b')},$$
$$\lambda_3 = \frac{a^2q + b^2p - 2ab\alpha}{ab} + ab'\lambda_2 + a'b\lambda_1,$$

и λ_i' ($i = 1, 2, 3$) вычисляются по тем же формулам, только над каждой буквой нужно поставить штрих, если его нет, и убрать, если он есть; кроме того, все величины, стоящие в знаменателях формул для λ_i и λ_i', не равны нулю.

Исключая из (12) $\frac{y'}{c} - \frac{y}{c'}$, получим три соотношения между x, x':

$$x = \frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\lambda_1 - \lambda_2} x', \quad x = \frac{r' - c'(1 - cc')\lambda_2'}{r - c(1 - cc')\lambda_2} x',$$

$$x = \frac{(ab' + ba')\lambda_1' - \lambda_3'}{(a'b + b'a)\lambda_1 - \lambda_3} x'.$$

Отсюда следует, что в общем случае $x = x' = 0$, и поэтому $c'y' = cy$. На инварианты комплексов не налагаются никакие условия.

Объединенные вместе системы уравнений (11) и (11′) теперь будут иметь вид:

$$C_{12,32} = C_{12,13} = C_{12,14} = C_{12,24} = C_{12,12} = 0;$$

$$C_{34,13} = C_{34,14} = C_{34,24} = C_{34,23} = C_{34,34} = 0;$$

$$C_{14,14} = \frac{c}{c'} C_{32,32}; \quad C_{13,13} = \frac{aa'}{c'} C_{32,32}; \quad C_{24,24} = \frac{bb'}{c'} C_{32,32};$$

$$C_{12,34} + C_{32,14} = -\frac{1 + cc'}{2c'} y, \quad C_{13,43} + C_{13,42} = -\frac{ab' + ba'}{2c'} y,$$

$$C_{14,24} = -\frac{bc' + b}{2c'} y, \quad C_{32,42} = -\frac{bc' + b'}{2c'} y,$$

$$C_{32,13} = -\frac{ac' + a'}{2c'} y, \quad C_{14,31} = -\frac{a'c + a}{2c'} y.$$

Таким образом, получается 19 соотношений, которые определяют единственный квадратичный комплекс, имеющий касание второго порядка с парой комплексов K, K'. Уравнение этого квадратичного комплекса имеет вид

$$2c'p^{32}p^{32} + 2cp^{14}p^{14} + (ab' + ba')p^{13}p^{24} + (1 + cc')p^{23}p^{14} +$$
$$+ 2aa'p^{13}p^{13} + 2bb'p^{24}p^{24} + (a'c + a)p^{13}p^{14} - (bc' + b')p^{23}p^{24} +$$
$$+ (a'c + a)p^{13}p^{23} - (b'c + b)p^{14}p^{24} = 0.$$

Итак, доказана следующая теорема:

Произвольная пара комплексов в общем случае имеет единственный соприкасающийся квадратичный комплекс в каждой паре соответствующих лучей.

Отсюда следует вывод — произвольную пару комплексов можно рассматривать как огибающую второго порядка трехпараметрической совокупности квадратичных комплексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковавцов Н. И. Теория комплексов. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 196[illegible] 292 с.
2. Кованцов Н. И. Соприкасающийся квадратичный комплекс. — «Ук[illegible] мат. журн.», 1964, т. 16, № 3, с. 237—245.

Поступила 24 мая 197[illegible]

УДК 513

А. И. МЕДЯНИК

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ. II

В предыдущей статье [1] установлено существование аналитической выпуклой поверхности F, для которой сферическое изображение совпадает с данной строго выпуклой областью ω, главные радиусы кривизны R_1 и R_2 $(R_1 \geqslant R_2 > 0)$ во внутренней точке $\boldsymbol{n} \in \omega$ удовлетворяют аналитическому уравнению

$$f(R_1, R_2) = \varphi(\boldsymbol{n}), \qquad (1)$$

а опорная функция $H(\boldsymbol{n})$ на границе $\partial\omega$ сферического изображения обращается в заданную аналитическую функцию

$$H(\boldsymbol{n})|_{\partial\omega} = \psi(\boldsymbol{n}). \qquad (2)$$

Теорема существования получена при условии, что $f(R_1, R_2)$ является симметричной по обеим переменным функцией, т. е.

$$f(R_1, R_2) \equiv g(R_1R_2, R_1 + R_2), \qquad (3)$$

причем функция $g(x, y)$ в области $x > 0,\ y > 0,\ y^2 \geqslant 4x$ является вогнутой функцией

$$d^2g(x, y) \leqslant 0, \qquad (4)$$

удовлетворяющей следующим условиям:

$$\lim_{x\to 0} g(x, y) = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x, y) = \infty; \qquad (5)$$

при фиксированном $x = m$

$$g(x, y) \leqslant C_m,$$
$$2xg_x + yg_y \geqslant c_m > 0, \qquad (6)$$

где C_m, c_m — постоянные, зависящие только от m.

Как показано в [1], из условий (4), (5) вытекает

$$\frac{\partial g}{\partial y} \geqslant 0, \quad \frac{\partial f}{\partial R_1} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial R_2} > 0. \qquad (7)$$

В настоящей статье снимается условие аналитичности функций f, φ и ψ, а также условие строгой выпуклости области ω и условие аналитичности кривой, ограничивающей ω.

Так же как и в предыдущей работе вместо области ω вводим область G, которая получается из ω с помощью центрального проектирования на плоскость $z=1$ и последующего ортогонального проектирования на плоскость $z=0$. Напомним, что главные радиусы кривизны поверхности F выражаются следующими формулами:

$$R_1R_2 = (rt - s^2)(1 + x^2 + y^2)^2,$$
$$R_1 + R_2 = [(1 + x^2) r + 2xys + (1 + y^2) t](1 + x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (8)$$

где r, s, t — обычные обозначения вторых производных функции $h(x, y) = H(x, y, 1)$, где $H(x, y, z)$ — опорная функция поверхности F.

Имеет место следующая теорема, сформулированная в [1].

Теорема 1. *Пусть $f(R_1, R_2)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная в области $R_1 \geqslant R_2 > 0$ и удовлетворяющая условиям (3) — (6), и $\varphi(n)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная в выпуклой области ω, лежащей строго внутри полусферы. Если функция φ ограничена снизу некоторой положительной постоянной, то существует выпуклая поверхность F, у которой сферическое изображение совпадает с ω, опорная функция $H(\boldsymbol{n})$ на границе сферического изображения обращается в заданную непрерывную функцию $\psi(\boldsymbol{n})$, а главные радиусы кривизны в каждой внутренней точке поверхности удовлетворяют уравнению (1).*

Для доказательства теоремы 1 достаточно приблизить функции f, φ и ψ аналитическими, а область ω — областями, ограниченными аналитическими строго выпуклыми контурами. После решения последней задачи (теорема 2 из [1]) надо сделать предельный переход в решении. Регулярность предельной поверхности обеспечивается регулярностью уравнения (1) и возможностью получения априорных оценок для функции $h(x, y)$ и ее производных до второго порядка во внутренних точках области G. Существование таких оценок устанавливается следующей леммой.

Лемма. *Пусть функции f, φ и ψ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда функция $h(x, y) = H(x, y, 1)$ и ее производные первых двух порядков во внутренних точках области G допускают априорные оценки, зависящие только от функций f и φ и их производных до второго порядка, функции ψ и расстояния точки до границы области G.*

Доказательство. Что касается оценок модуля функции h то полученные при доказательстве леммы из [1] оценки не зависят от производных функции ψ. Модули же первых производных во внутренних точках области G не превосходят $\frac{2m_0}{\delta}$, где

m_0 — максимум $|h|$ в G, δ — расстояние точки до границы облас
Таким образом, осталось оценить модули вторых производн
Получение таких оценок эквивалентно оценке главных радиус
кривизны поверхности F. Но так как по условиям леммы прои
ведение главных радиусов кривизны поверхности F ограниче
сверху и снизу положительными постоянными, то достаточ
оценить сверху R_1.

Получим оценку для R_1 в некоторой внутренней точке M поверхности F. Пусть M' — соответствующая M точка поверхнос F', задаваемой уравнением $z = h(x, y)$. Обозначим $\overline{M}$ проекц M' на плоскость $z = 0$. Пусть δ — расстояние точки $\overline{M}$ от гра цы области G. Проведем плоскость $z = h_0(x, y)$, разделяющ точку M' и границу поверхности F', причем такую, чтобы каждой точке области G, расстояние которой до ∂G не боль $\delta/2$, выполнялось неравенство $h_0(x, y) - h(x, y) \leqslant 0$. Обознач

$$\Delta(\overline{M}) \equiv \sup (h_0(\bar{x}, \bar{y}) - h(\bar{x}, \bar{y}))$$

по всем плоскостям, обладающим указанным свойством. Как по казал А. В. Погорелов [2, с. 517—518], для $\Delta(\overline{M})$ можно полу чить оценку снизу, зависящую только от δ, максимума моду функции $h(x, y)$ и минимума k_0 функции

$$rt - s^2 = \frac{R_1 R_2}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Пусть

$$z = h_0(x, y) = a_0 x + b_0 y + c_0$$

уравнение плоскости, удовлетворяющей условию $h_0 - h \leqslant 0$ в точках G, удаленных от границы на расстояние не большее $\delta/2$, и $h_0 - h = \Delta(\overline{M})$ — в точке $\overline{M}$.

Обозначим d диаметр множества, состоящего из точек повер ности F и точки (a_0, b_0, c_0). Пусть

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{4d^2}, \frac{k_0}{2d^4}\right). \tag{9}$$

Рассмотрим функцию точки $\boldsymbol{n}$ на единичной сфере и направлени τ в ней

$$w(\boldsymbol{n}, \tau) = (\overline{H}(\boldsymbol{n}) - \overline{H}(\boldsymbol{n}))(H(\boldsymbol{n}) + H_{ss}(\boldsymbol{n}))\, e^{\alpha(H_s - \overline{H}_s)^2}, \tag{10}$$

где $\overline{H}(\boldsymbol{n})$ — опорная функция точки (a_0, b_0, c_0), а индекс s ук зывает на дифференцирование по длине дуги большого круг $K(\boldsymbol{n}, \tau)$, проходящего через точку $\boldsymbol{n}$ в направлении τ.

Как известно, выражение $H + H_{ss}$ представляет собой радиу кривизны цилиндра, касающегося поверхности F, с образующим перпендикулярными $K(\boldsymbol{n}, \tau)$ [2, с. 535]. Кроме того, в точке направлением внешней нормали $(\bar{x}, \bar{y}, 1)$ имеем

$$\overline{H} - H = \frac{\Delta(\overline{M})}{\sqrt{1 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}}.$$

Так как при $\boldsymbol{n}$, близких к $\partial\omega$, функция $w(\boldsymbol{n}, \tau)$ отрицательна по построению, то она достигает максимума во внутренней точке области ω. Пусть w достигает максимума в точке $\boldsymbol{n}_0$ в направлении τ_0. При параллельном переносе системы координат величины $\overline{H}(\boldsymbol{n}) - H(\boldsymbol{n})$ и $H_s(\boldsymbol{n}) - \overline{H}_s(\boldsymbol{n})$ не меняются, поскольку первая представляет собой разность расстояний от начала координат до опорных плоскостей точки (a_0, b_0, c_0) и поверхности F с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$, а вторая разность длин отрезков касательных, параллельных τ, от точки касания до основания перпендикуляра, опущенного из начала координат [2, с. 498—499]. Поэтому не ограничивая общности можно считать, что начало координат находится в точке поверхности F с внешней нормалью $\boldsymbol{n}_0$. Будем рассматривать функцию $w(\boldsymbol{n}, \tau)$ в малой окрестности начала координат. Повернем оси координат так, чтобы ось z совпала с вектором $\boldsymbol{n}_0$. Угол между осью x и вектором τ_0 обозначим φ. Тогда функция $w(\boldsymbol{n}, \tau)$ примет вид

$$w(x, y, z) = (ax + by + cz - H(x, y, z))(H + H_{ss})\, e^{\alpha\mu^2}, \qquad (11)$$

где

$$H + H_{ss} = \frac{H_{xx}\cos^2\varphi + 2H_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + H_{yy}\sin^2\varphi}{1 - (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2},$$

$$p = \frac{[H_x - xH - a + x(ax + by + cz)]\cos\varphi + [H_y - yH - b + y(ax + by + cz)]\sin\varphi}{\sqrt{1 - (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2}},$$

причем $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant d^2$.

Положим $\varphi = 0$ и перейдем в (11) к функции $h(x, y) = H(x, y, 1)$. С точностью до постоянного множителя получим

$$w(x, y) = \lambda r, \qquad (12)$$

где

$$\lambda = (ax + by + c - h)\left(1 + \frac{x^2}{1 + y^2}\right) e^{\alpha v},$$

причем

$$v = \frac{(p + cx - a)^2 + 2ay(ay - bx) + u(x, y, p, h)}{(1 + y^2)(1 + x^2 + y^2)} - a^2$$

и $u(x, y, p, h)$ представляет собой многочлен, все производные которого по x, y до второго порядка включительно при $x = y = 0$ обращаются в нуль.

Так как функция $w(x, y, z)$, определяемая формулой (11), достигает максимума при $\varphi = 0$, то в точке максимума

$$s = -\alpha abr. \qquad (13)$$

Уравнение (1) можно записать в виде

$$g(R_1R_2,\ R_1 + R_2) = \varphi(x, y), \qquad (14)$$

где вместо R_1R_2 и $R_1 + R_2$ надо подставить их выражения из (8).

Так как в точке (0, 0) функция w, определяемая равенством (12), достигает максимума, то в ней

$$w_x = w_y = 0,$$

откуда

$$\begin{gathered} r_x = w\,(1/\lambda)_x, \ r_{xx} = \frac{w_{xx}}{\lambda} + w\,(1/\lambda)_{xx}, \\ r_y = w\,(1/\lambda)_y, \ r_{yy} = \frac{w_{yy}}{\lambda} + w\,(1/\lambda)_{yy}, \\ r_{xy} = \frac{w_{xy}}{\lambda} + w\,(1/\lambda)_{xy}. \end{gathered} \tag{15}$$

Дифференцируя уравнение (14) дважды по x, получаем

$$(g_1 r + g_2)\,t_x - 2g_1 s r_y + (g_1 t + g_2)\,r_x = \varphi_x, \tag{16}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_i a_j g_{ij} + g_1\,[r r_{yy} - 2s r_{xy} + t r_{xx} + 4\,(rt - x^2) + 2\,(r_x t_x - r_y^2)] + g_2\,(r_{yy} + r_{xx} + 3r + t) = \varphi_{xx},$$

где

$$a_1 = (R_1 R_2)_x, \ a_2 = (R_1 + R_2)_x.$$

Последнее уравнение с помощью равенств (15, 16) можно привести к виду

$$\lambda^2\,[g_1\,(r w_{yy} - 2s w_{xy} + t w_{xx}) + g_2\,(w_{xx} + w_{yy})] + \lambda^3 \sum_{i,\,j=1}^{2} a_i a_j g_{ij} = A_1 g_1 + A_2 g_2 + \lambda^3 \varphi_{xx} + \frac{2g_1 w}{g_1 r + g_2}\,[A g_2 + (1 - 2\alpha w - 2\alpha\lambda^2)\,a\lambda\varphi_x], \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} A_1 = (r\lambda_{yy} - 2s\lambda_{xy} + t\lambda_{xx})\,\lambda w - 4\lambda^3\,(rt - s^2), \\ A_2 = (\lambda\lambda_{yy} - 2\lambda_y^2 + \lambda\lambda_{xx} - 2\lambda_x^2)\,w - \lambda^3\,(3r + t), \\ A = 2s\lambda_x\lambda_y + (r - t)\,\lambda_x^2. \end{gathered}$$

В точке (0, 0) имеем

$$\begin{gathered} \lambda = c; \ \lambda_x = a\,[1 - \alpha\,(w + c^2)]; \ \lambda_y = b - \alpha acs; \\ \lambda\lambda_{xx} = (\alpha + \alpha^2 a^2)\,(w + c^2)^2 - (1 + 2\alpha a^2)\,w + c^2\,(2 - 3\alpha a^2 - \alpha a r_x); \\ \lambda\lambda_{xy} = (\alpha + \alpha^2 a^2)\,(w + c^2)\,cs - (1 + \alpha a^2)\,cs - \alpha ab\,(w + c^2) - \alpha ac^2\,(b + r_y); \\ \lambda\lambda_{yy} = (\alpha + \alpha^2 a^2)\,(cs)^2 - ct - 2\alpha abcs - \alpha ac^2 t_x. \end{gathered}$$

От уравнений (16), (16′) с помощью (8), (17) приходим в точке максимума функции w к уравнению

$$
\begin{aligned}
& c^2 [(g_1 r + g_2) w_{yy} - 2g_1 s w_{xy} + (g_1 t + g_2) w_{xx}] + \\
& + c^3 \sum_{i,\, j=1}^{2} a_i a_j g_{ij} = cR_1 f_1 [\alpha w^2 - (2 + 4\alpha a^2) w - 4c^2] + \\
& \quad + A_1' g_1 + A_2' g_2 + \frac{2g_1 g_2 w}{g_1 r + g_2} A + c^3 \varphi_{xx} - \qquad (18) \\
& \quad - \left[2\alpha w + (2\alpha w + 2\alpha c^2 - 1) \frac{2g_1 r}{g_1 r + g_2}\right] c^2 a \varphi_x,
\end{aligned}
$$

причем для A_1', A_2' на основании равенств (9), (13) и неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant d^2$ имеем

$$A_1' \geqslant 0; \; A_2' \geqslant 2\alpha c^2 w^2 - \alpha c^2 R_1 R_2 w - 2d^2 (1 + \alpha d^2) w.$$

Из последнего равенства вытекает, что w ограничено сверху некоторой постоянной C. Действительно, левая часть равенства отрицательна: коэффициент при c^2 отрицателен на основании (7) потому, что в точке (0, 0) $R_2 \leqslant t \leqslant r \leqslant R_1$ и достигается максимум, а коэффициент при c^3 отрицателен в силу вогнутости g. Поэтому правая часть (18) не может принимать положительных значений, что при положительном α не выполняется, если предположить неограниченность w. Последнее вытекает из того, что при достаточно большом w $g_1 > 0$ по условию (5), $A_2' > 0$ из-за ограниченности $R_1 R_2$, $A \geqslant 0$, так как по (13), (17) $s\lambda_x \lambda_y \geqslant 0$, а коэффициент при φ_x имеет порядок w, в то время как $R_1 f_1$ больше некоторой положительной постоянной, так как по условиям леммы

$$2f_1 R_1 \geqslant f_1 R_1 + f_2 R_2 = 2R_1 R_2 g_1 + (R_1 + R_2) g_2 \geqslant c > 0.$$

Если теперь вместо функции $w(\boldsymbol{n}, \tau)$, определяемой равенством (10), рассмотреть функцию $w(\boldsymbol{n}, \tau^0)$, где τ^0 некоторое фиксированное направление, то для нее получим

$$w(\boldsymbol{n}, \tau^0) \leqslant \max w(\boldsymbol{n}, \tau) \leqslant C. \qquad (19)$$

Возьмем в качестве τ^0 то направление в исследуемой точке M поверхности F, для которого $H + H_{ss} = R_1$. Так как $\overline{H} - H$ в этой точке по построению ограничено снизу, то на основании неравенства (19) получаем из (10) оценку для R_1 в точке M. Лемма доказана.

Теорема 1 не дает полного решения рассматриваемого вопроса в случае, когда функции f и φ принадлежат классу функций, обладающих более высокими производными. Этот пробел устраняется следующей теоремой.

Теорема 2. *Поверхность F, существование которой устанавливается теоремой 1, принадлежит классу C^{k+1}, если функции f и φ принадлежат классу C^k $(k \geqslant 3)$. Если функции f и φ аналитические, то поверхность F также аналитическая.*

Доказательство. Пусть $\overline{M}$ точка области G, соответств-
ющая внутренней точке M поверхности F. Оценки верхней гр
модулей функции $h(x, y)$ и ее производных до второго поря
внутри области G установлены доказанной выше леммой. По
этого на основании теоремы А. В. Погорелова [3, с, 172
могут быть получены оценки для третьих и четвертых произв
ных в зависимости от расстояния точки $\overline{M}$ до границы облас
верхней грани модулей производных функции $h(x, y)$ до втор
порядка и верхней грани модулей выражений

$$\frac{1}{g_r},\ \frac{1}{g_t},\ \frac{1}{g_r g_t-\frac{1}{4}g_s^2}.$$

Но оценки для верхних граней последних выражений легко
лучаются из уравнения (14) и свойств функции f. Действитель

$$\begin{aligned}
g_r&=[g_1 t(1+x^2+y^2)^{3/2}+g_2(1+x^2)](1+x^2+y^2)^{1/2},\\
g_t&=[g_1 r(1+x^2+y^2)^{3/2}+g_2(1+y^2)](1+x^2+y^2)^{1/2},\\
g_s&=2[-g_1 s(1+x^2+y^2)^{3/2}+g_2 xy](1+x^2+y^2)^{1/2},
\end{aligned}$$

где g_1 и g_2 — производные функции $g(R_1R_2,\ R_1+R_2)$.

Так как из (20) следует, что

$$g_r t_t-\left(\frac{1}{2}g_s\right)^2=(1+x^2+y^2)^2\frac{\partial f}{\partial R_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial R_2}>0,$$

то в силу непрерывности первых производных функции f
выражение отделено от нуля постоянной c_0. Отсюда следует,
$g_r g_t \geqslant c_0$ и, значит, чтобы получить для $|g_r|$ и $|g_t|$ оценку сни
достаточно получить для этих производных оценку сверху.

Из формул (20) получаем

$$g_r(1+y^2)-g_s xy+g_t(1+x^2)=(1+x^2+y^2)^{3/2}(f_1+f_2).$$

Отсюда, в частности, следует, что g_r и g_t положительны. Искл
чая из равенств (21), (22) g_s, имеем

$$\begin{aligned}
&(1+2x^2)[g_t-(f_1+f_2)q^{3/2}]+(g_r y^2-g_t x^2)^2+\\
&+(1+2y^2)[g_r-(f_1+f_2)q^{3/2}]+2g_r g_t q+\\
&+2(g_r y^2+g_t x^2)(f_1+f_2)q^{3/2}+4x^2y^2q^2f_1f_2+\\
&+(f_1+f_2)^2q^3=2(f_1+f_2)^2q^4,
\end{aligned}$$

где $q=1+x^2+y^2$.
Из ограниченности f_1 и f_2 следует ограниченность g_r и g_t, т
как все члены левой части последнего равенства неотрицатель

Построим последовательность аналитических функций f_m,
равномерно сходящихся к функциям f и φ вместе с их произв
ными до третьего порядка в замкнутой области ω^-. След
А. В. Погорелову [2, с. 119], построим последовательность равн
мерно сходящихся к ω областей ω_m, ограниченных аналити
скими контурами с положительной геодезической кривизн

Построим, наконец, последовательность определенных на $\partial\omega_m$ аналитических функций ψ_m, равномерно сходящихся к функции ψ.

По теореме 2 из [1] существует аналитическая поверхность F_m, удовлетворяющая уравнению

$$f_m(R_1, R_2) = \varphi_m(\boldsymbol{n})$$

и опорная функция которой на границе $\partial\omega_m$ ее сферического изображения равна функции $\psi_m(\boldsymbol{n})$. Пусть $H_m(\boldsymbol{n})$ — опорная функция поверхности F_m. Так как функции $h_m(x, y) = H_m(x, y, 1)$ по доказанному выше равномерно ограничены, то из последовательности поверхностей F'_m, задаваемых этими функциями, можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что сама последовательность выпуклых поверхностей F'_m сходится к выпуклой поверхности F', задаваемой уравнением $z = h(x, y)$.

В области $G_\delta \subset G$, точки которой удалены от границы G не меньше чем на δ, так же, как и при доказательстве леммы, можно для модулей первых производных функций h_m указать оценки, не зависящие от m. Отсюда и из условий теоремы следует, что гауссова кривизна поверхности F'_m в точке, проектирующейся в G_δ, заключена в положительных пределах, не зависящих от m. Следовательно, удельная кривизна любой области на F', проектирующейся внутрь G_δ, заключена в тех же пределах. Тогда по теореме А. Д. Александрова [4] поверхность F' является гладкой и существенно выпуклой.

Так как предельная поверхность не содержит прямолинейных отрезков, то для введенных при доказательстве леммы величин $\lambda^m(\overline{M})$, которые входят в оценки для вторых производных внутри области, можно найти положительную нижнюю грань, не зависящую от m, и положения точки $\overline{M}$ в области G_δ.

По теореме А. В. Погорелова (3, с. 172—182) для производных функций $h_m(x, y)$ до четвертого порядка в G_δ можно указать оценки, не зависящие от m. Отсюда следует, что предельная функция — трижды непрерывно дифференцируемая. Поэтому по теореме А. В. Погорелова (3, с. 168) функция $h(x, y)$ дифференцируема по крайней мере $k+1$ раз, так как по условию теоремы функции f и φ дифференцируемы k раз. Значит, опорная функция поверхности F, равная $h(x, y)/\sqrt{1+x^2+y^2}$, также дифференцируема $k+1$ раз. Если функции f и φ аналитические, то аналитичность F следует из теоремы С. Н. Бернштейна об аналитической природе решений эллиптических уравнений. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медяник А. И. Теоремы существования для выпуклых поверхностей с краем. I. — «Укр. геометр. сб.», вып. 17 1974, с. 111—120.
2. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 760 с.

3. Погорелов А. В. Изгибание выпуклых поверхностей. М. — Л., ГИТТЛ, 1951. 184 с.
4. Александров А. Д. Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной.—Докл. АН СССР, 1942, т. XXXVI, № 7, с. 211—216.

Поступила 11 февраля 1974 г.

УДК 513 *А. Д. МИЛКА*

А. Д. МИЛКА

КРАТЧАЙШАЯ С НЕСПРЯМЛЯЕМЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ. II

Пусть Λ — кратчайшая линия на выпуклой поверхности в E^3. Точка $X \in \Lambda$ называется особой, если сферическое изображение Λ в сколь угодно малой окрестности X не спрямляемо. В [1] построен пример кратчайшей с изолированной особой внутренней точкой. В данной статье устанавливается следующее утверждение:

(*) Пусть Λ^0 — открытый отрезок, а $M^0 \subset \Lambda^0$ — замкнутое нигде не плотное множество. Тогда на некоторой выпуклой поверхности F^* существует кратчайшая линия Λ^*, изометричная Λ^0, такая, что множеством особых точек Λ^* является множество $M^* \subset \Lambda^*$, соответствующее множеству M^0 по изометрии.

Таким образом, существуют кратчайшие, множества особенностей на которых — континуальные и положительной линейной меры, например, берем в качестве M^0 надлежащее канторовское множество. Применяемая в статье конструкция позволяет строить кратчайшие, все точки которых — особые.

Статья является продолжением работы [1]. В дальнейшем будем пользоваться полученными там результатами и некоторыми введенными обозначениями. Доказательство утверждения (*) содержится в п. 1—3. Некоторые другие примеры кратчайших с изолированными особенностями приводятся в п. 4. В заключении статьи излагается способ, применявшийся для нахождения подобных примеров, в частности, примера [1].

Повторим конструкцию примера [1], заменив плоскости E_k и E сферами S_k и S радиуса $R > 1$: сфера $S_k(S)$ содержит точку $T_k(T)$ и имеет в ней внешнюю нормаль $\boldsymbol{n}_k$ $(\boldsymbol{n} = (1, 0, 0))$. На новой поверхности F через точку T в направлении $\vec{\tau}$ проходит кратчайшая линия с особенностью в T; F строго выпукла, удельная кривизна F не меньше $1/R^2$. С помощью поверхности F строится пример строго выпуклой поверхности с удельной кривизной $\geqslant 1/R^2$, содержащей кратчайшую линию с особенностями типа множества M^*, а также другие примеры — с добавлением особенностей у второй производной радиуса вектора кратчайшей. Исследование подобных примеров довольно громоздко.

По-видимому, на выпуклой поверхности в E^3 с удельной кривизной, ограниченной сверху, сферическое изображение крат-

[крат]чайшей линии всегда спрямляемо. Как показано в [2], это имеет место для случая дважды непрерывно дифференцируемой поверхности.

Замечание. Рис. 1 в [1] содержит неточность. Линии P_kQ_k и P_kQ_{k+1} на этом рисунке должны быть продолжением друг друга.

1. Вспомогательные поверхности

Часть поверхности F, построенной в [1], принадлежащую полупространству $y \geqslant 0$, обозначим F_n. Поверхность F_n определяется плоскостями $\{E_i\}_{i=n}^{\infty}$. По аналогии вводится поверхность F_k — с помощью плоскостей $\{E_i\}_{i=k}^{\infty}$ — и затем последовательность поверхностей $\{F_k\}_{k=n}^{\infty}$. Поверхности F_k и F_{k-1} имеют общие грани определяемые плоскостями E_{k+2}, E_{k+3}, ... Кроме того, грани F_{k-1} в плоскостях E_k и E_{k+1} принадлежат соответствующим граням F_k.

Участок геодезической $g \subset F$, принадлежащий поверхности F_k, также является на F_k геодезической; орт звена этого участка, находящегося в плоскости E_k, направленный от точки T, обозначим g_k. Вершина Q_k поверхности F лежит на ребре F_k, исходящем из вершины Q_{k+1} и принадлежащем пересечению $E_k \cap \cap E_{k+1}$. Проведем через Q_k плоскость E^k, перпендикулярную к вектору g_k. Утверждается, что при большом k пересечение E^k с сетью ребер F_k состоит только из точки Q_k. Доказательство приводится в п. 3. Плоскость E^k определяет два замкнутых полупространства. Объединение части поверхности F^k, принадлежащей тому из полупространств, которое содержит точку T, и поверхности, симметричной этой части относительно E^k, обозначим $\overline{F}_k$. Точку $T \in \overline{F}_k$ обозначим T^k, а ей симметричную — T'^k.

Поверхность $\overline{F}_k$ — бесконечногранная. Точки T^k и T'^k на этой поверхности соединяются геодезической линией g^k, имеющей в окрестности каждой из этих точек неспрямляемое сферическое изображение. Эта геодезическая определяется как объединение соответствующего участка g и симметричной ему линии относительно E^k.

Пусть d_k — длина g^k. Далее будем рассматривать поверхность, полученную из поверхности $\overline{F}_k$ преобразованием подобия с коэффициентом d_k^{-1}. Такую нормированную поверхность условимся также обозначать $\overline{F}_k$, сохранив старые обозначения для образов точек T^k и T'^k и геодезической g^k. Длина геодезической g^k теперь равняется единице.

В границу поверхности $\overline{F}_k$ входят: два прямолинейных отрезка со срединами в точках T^k и T'^k, перпендикулярных на поверхности к геодезической g^k; две бесконечнозвенные ломаные, соединяющие соответственно «верхние» и «нижние» концы отрезков.

При $k \to \infty$ длины прямолинейных отрезков и расстояния указанных ломаных от геодезической g^k стремятся к бесконечности, внутренние вершины $\overline{F}_k$ располагаются в сколь угодно малой окрестности g^k, диаметр сферического изображения $\overline{F}_k$ стремится к нулю, а сама поверхность сходится к бесконечной плоской полоске шириной единица. Для поверхности $\overline{F}_k$ существует константа ε_k ($\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ такая, что для любого набора вершин на этой поверхности сумма ω кривизн $\overline{F}_k$ в этих вершинах допускает внутренне геометрическую оценку

$$\omega \leqslant \varepsilon_k h.$$

Здесь h — наибольшая из высот вершин набора над геодезической g^k. Приведенные утверждения вытекают из свойств поверхности F [1].

Поверхности $\{\overline{F}_k\}$ в дальнейшем рассматриваются как вспомогательные.

2. Доказательство утверждения (*)

Пусть F^o — прямоугольник в плоскости, Λ^o — прямолинейный открытый отрезок на средней линии F^o, $M^o \subset \Lambda^o$ — замкнутое нигде не плотное множество. Дополнение M^o до Λ^o состоит из не более чем счетного (считаем для определенности — счетного) множества открытых интервалов $U_1, U_2, \ldots$.

Поверхность F^* получается как предел некоторой последовательности выпуклых поверхностей $F^1, F^2, \ldots$; кратчайшая Λ^* на F^* определяется как предел последовательности $\Lambda^1 \subset F^1$, $\Lambda^2 \subset F^2$, ... кратчайших на этих поверхностях. Исходными считаются поверхность F^o и кратчайшая Λ^o. Предполагая, что F^{j-1} и $\Lambda^{j-1} \subset F^{j-1}$ уже найдены, опишем построение пары (F^j, Λ^j). Считается, что линия Λ^{j-1} на поверхности F^{j-1} единственная в следующем смысле: концы этой линии на поверхности не соединяются какой-либо другой кратчайшей.

Переход от прямоугольника F^o к поверхностям $F^1, F^2, \ldots, F^j, \ldots$ во внутренне геометрическом смысле заключается в некотором изменении метрики прямоугольника. Если $F^1, F, \ldots, F^{j-1}$ уже построены, то на кратчайшей $\Lambda^{j-1} \subset F^{j-1}$ остаются отмеченными интервалы U_j, U_{j+1}, ... и можно говорить о прямолинейных (в пространстве) отрезках на F^{j-1}, перпендикулярных к Λ^{j-1}, проведенных через концы интервала U_j. Вырежем из поверхности F^{j-1} прямоугольную полоску, содержащую U_j, определенную этими перпендикулярами. Преобразуем поверхность $\overline{F}_k$ подобно с коэффициентом подобия $\lambda^{-1}{}_j$, где λ_j — длина интервала U_j. Нормированную поверхность $\overline{F}_k$, образы геодезической g^{k_j} и точек T^{k_j}, T'^{k_j} условимся обозначать прежними символами. На место выреза на F^{j-1} подклеим поверхность $\overline{F}_{k_j}$; точки

T^{k_j} и T'^{k_j} склеиваются с бывшими концами интервала U_j, а прямолинейные граничные отрезки на $\overline{F}_{k_j}$, проходящие через эти точки — с берегами прямоугольного выреза на соответствующих частях F^{j-1}. Подклеивание осуществляется непосредственным совмещением в пространстве соответствующих элементов. При этом добиваемся, чтобы получилась выпуклая поверхность F^j, гладкая в точках склеивания. Линия Λ^{j-1} переходит в геодезическую Λ^j на F путем замены участка $U_j \subset \Lambda^{j-1}$ геодезической g^{k_j}. Число k_j подбирается достаточно большое, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon_{k_1}/\lambda_1 + \varepsilon_{k_2}/\lambda_2 + \ldots + \varepsilon_{k_j}/\lambda_j < 1/2\lambda,$$

где λ — длина интервала Λ^o.

Утверждается, что при большом k_j линия Λ^j на F^j — кратчайшая, единственная в том же смысле, что и Λ^{j-1} на F^{j-1}. Допустим противное. Тогда на F^j существует кратчайшая $\tilde{\Lambda}^j \neq \Lambda^j$, соединяющая концы Λ^j. При $k_j \to \infty$ эта кратчайшая, как и геодезическая Λ^j, сходится к Λ^{j-1}, а $F^j \to F^{j-1}$. Таким образом, на F^j при достаточно большом k_j возникает достаточно узкая луночка H^j, ограниченная линиями Λ^j и $\tilde{\Lambda}^j$ или их меньшими участками. Применяя оценки площади этой луночки, как это выполнялось в [1], находим

$$\delta(H^j)\, h \leqslant \omega\lambda \leqslant (\varepsilon_{k_1}/\lambda_1 + \ldots + \varepsilon_{k_j}/\lambda_j)\, h\lambda,$$

или

$$\delta(H^j) \leqslant 1/2,$$

что невозможно. Здесь h — высота луночки над Λ^j, ω — кривизна луночки, и

$$\delta(H^j) \to 1$$

при $k_j \to \infty$. Тем самым нужное свойство линии установлено.

Пусть

$$F^* = \lim_{j\to\infty} F^j, \quad \Lambda^* = \lim_{j\to\infty} \Lambda^j.$$

Линия Λ^* — кратчайшая на F^*. При переходах

$$\Lambda^o \to \Lambda^1 \to \ldots$$

множество M^o по существу сохраняется; пусть $M^* \subset \Lambda^*$ — соответствующий образ этого множества. Теперь естественно определяется изометрия

$$\Lambda^o \leftrightarrow \Lambda^* \text{ и } M^o \leftrightarrow M^*,$$

и утверждение (*) доказано: каждая точка из M^* особая на Λ^*.

3. Пересечение $F_k \cap E^k$

Рассмотрим поверхность F_k $(k > n+2)$, считая для определенности, что k — четное. Введем обозначения: e_i — орт «почти вертикального» ребра поверхности F, начинающегося в вершине Q_i; e_k^+ (e_k^-) — орт звена пересечения $F_k \cap E^k$ в окрестности точки Q_k, идущего из этой точки в направлении полупространства $z > 0$ (соответственно $z < 0$); $\widetilde{e}_k^+$ и $\widetilde{e}_k^-$ — аналогично определяемые орты для случая пересечения $F_k \cap \widetilde{E}^k$, где $\widetilde{E}^k$ — плоскость, проходящая через Q_k перпендикулярно к единичному вектору $\widetilde{g}_k = \overrightarrow{P_kP_{k-1}}/|\overrightarrow{P_kP_{k-1}}|$; φ_k^+ (φ_k^-) — угол между векторами e_k^+ и $\widetilde{e}^+$ (соответственно e_k^- и $\widetilde{e}_k^-$), а ξ_k — угол между g_k и $\widetilde{g}_k$.

Доказательство факта, что пересечение E^k с сетью ребер F состоит только из точки Q_k, осуществляется в два этапа. Сначала это устанавливается для случая $F_k \cap \widetilde{E}^k$. Находится, что

$$\left[\widetilde{e}_k^+ e_{k+1}\right] = a_k^+ n_k \text{ и } \left[e_k \widetilde{e}_k^-\right] = a_k^- n_{k+1},$$

где a_k^+ и a_k^- — положительные величины. Из левого равенства следует, что «вертикальное» ребро F_k, исходящее из вершины Q_{k+1}, не пересекается с множеством $F_k \cap \widetilde{E}^k$; то же самое вытекает из правого равенства — для пересечения $F_k \cap \widetilde{E}^k$ и «вертикального» ребра F_k, исходящего из вершины Q_{k+2}. На втором этапе показывается, что характер пересечения $\widetilde{E}^k$ с сетью ребер F_k не меняется при переходе $\widetilde{E}^k \to E^k$. Здесь достаточно проверить неравенства

$$a_k^+ \gg \varphi_k^+ = \xi_k \quad \text{и} \quad a_k^- \gg \varphi_k^- = \delta(k)\,\xi_k.$$

Проведем соответствующие выкладки.

Имеем

$$\widetilde{e}_k^+ = [n_k \widetilde{g}_k], \quad e_{k+1} = [n_{k+2} n_k]/|[n_{k+2} n_k]|.$$

Тогда

$$[\widetilde{e}_k^+ e_{k+1}] = n_k\,(n_k n_{k+2} \widetilde{g}_k)/|[n_{k+2} n_k]|;$$

$$a_k^+ = \delta(k)\,[\operatorname{tg}\gamma_k \cos(\alpha_k - \alpha_{k+2}) - \operatorname{tg}\gamma_{k+2}]/$$

$$|[n_{k+2} n_k]| = \delta(k)\,\frac{1}{k^2 (\ln k)^{\gamma}} \Big/ \frac{\alpha}{k\,(\ln k)^{1+\alpha}} = \frac{\delta(k)}{\alpha\,k}\,(\ln k)^{1+\alpha-\gamma} > 0,$$

поэтому

$$\xi_k \leqslant \frac{\alpha\delta(k)}{k^2 (\ln k)^{1+\alpha+\gamma}} \ll a_k^+.$$

Равенство $\varphi_k^- = \delta(k)\xi_k$ очевидно. Аналитические соотношения, связанные с индексом (—), устанавливаются так же, как и относящиеся к индексу (+).

4. Другие примеры кратчайших с особенностями

1. Для поверхности F_n из [1] грань и несущую ее плоскость условимся обозначать одним символом. Грань E_k определяется вершинами Q_{k-1}, Q_k, Q_{k+1}. Воспользуемся обозначениями: $\pi-\delta_k$, η_k, $\pi-\eta_k''$ — плоские углы на F_n при вершине Q_k в гранях E_k, E_{k+1}, E_{k-1} соответственно; $\nu_k = \widehat{n_k n_{k-1}}$, $\nu_k = \widehat{n_{k-1} n_{k+1}}$ — углы между внешними нормалями; δ_{k+1}', δ_{k-1}'' и $\bar\rho_k$ — соответственно углы при вершинах Q_{k+1}, Q_{k-1} и длина стороны к ним прилежащей в $\Delta Q_k Q_{k+1} Q_{k-1} \subset E_k$; ρ_k — длина ребра $Q_{k-1}Q_k$; l_k — луч, исходящий из вершины Q_k и содержащий ребро $E_{k-1} \cap E_{k+1}$.

Поверхность F_n строилась с помощью ломаной L и плоскостей $\{E_k\}$. Эта поверхность может быть задана и иным способом — с помощью величин $\{\delta_k\}$, $\{\nu_k\}$, $\{\rho_k\}$. Для F_n

$$\delta_k = \frac{\alpha\delta(k)}{(\ln k)^{1+\alpha-\gamma}}, \quad \nu_k = \frac{2\delta(k)}{k(\ln k)^{\gamma}}, \quad \rho_k = \frac{\alpha\delta(k)}{2k(\ln k)^{1+\alpha}}.$$

Придадим величинам (δ, ν, ρ) другие значения:

$$\delta_k = q^k, \quad \nu_k = 1/k^{\varkappa}, \quad \rho_k = 1/k^{2\varkappa},$$

где $0 < q < 1$, $1/2 < \varkappa \leqslant 1$. Этим определяется новая выпуклая поверхность, которую обозначим F_n'. Для элементов F_n' будем использовать те же обозначения, что и для поверхности F_n. Покажем, что F_n' содержит кратчайшую линию с изолированной особой внутренней точкой.

Имеем

$$\eta_k' = \delta(k)kq^k, \quad \eta_k'' = \delta(k)kq^k, \quad \bar\nu_k = \delta(k)/k^{2\varkappa},$$
$$\delta_{k+1}' = \delta(k)q^k/2, \quad \delta_{k-1}'' = \delta(k)q^k/2, \quad \bar\rho_k = 2\delta(k)/k^{\varkappa}.$$

Ясно, что плоскости $\{E_k\}$ сходятся к предельному положению — плоскости E, проходящей через точку $T = \lim Q_k$ $(k \to \infty)$. Отсюда следует, что при большом n поверхность F_n' однозначно проектируется на E. Ломаная $Q_{n+1}Q_{n+2}\ldots Q_k\ldots$ — с ограниченной вариацией поворота и имеет в T определенное направление τ; исходящий из T луч в E в направлении $(-\tau)$ обозначим l.

Рассмотрим грань $E_k \subset F_n'$. Она ограничена ребрами $Q_k Q_{k-1}$, Q_kQ_{k+1} и лучами l_{k-1}, l_{k+1}. Действительно, l_{k-1} и l_{k+1} не пересекаются. Для доказательства перенесем луч l_{k+1} в грани E_k параллельно, чтобы его начало совпало с Q_{k-1}. Перенесенный луч образует с отрезком $Q_{k-1}Q_k$ угол, равный

$$\eta_{k+1}'' + \delta_k = \delta(k)kq^{k+1},$$

а луч l_{k-1} — угол η_{k-1}. Но

$$\delta(k)\,kq^{k-1} - \delta(k)\,kq^{k+1} = \delta(k)\,kq^{k-1}[1 - \delta(k)\,q^2] > 0.$$

Очевидно,

$$l = \lim_{k\to\infty} l_k \text{ и } l,\ l_k \subset F_n'.$$

Утверждается, что через точку T на F_n' в направлении τ проходит кратчайшая линия Λ, содержащая некоторый участок луча l, имеющая точку T изолированной особой точкой.

Рассмотрим на F_n' две ломаные $L^+ \equiv Q_{n+2}Q_{n+4}\ \dots\ Q_{n+2k}\ \dots$ и $L^- \equiv Q_{n+1}Q_{n+3}\ \dots\ Q_{n+2k+1}\ \dots$. Они выделяют на поверхности систему треугольников $\Delta \equiv \Delta Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3} \cup \dots \cup \Delta Q_{k-1}Q_k \times \times Q_{k+1} \cup \dots$. Поворот ζ_k в точке Q_k линий L^+ или L^- со стороны Δ равен

$$\zeta_k = \delta_k - \delta_k' - \delta_k'' = q^k - \delta(k)\,q^{k+1}/2 - \delta(k)\,q^{k-1}/2 = \\ = -\delta(k)\,Cq^k < 0,$$

где

$$C = (q + q^{-1})/2 - 1 > 0.$$

Отсюда следует, что L^+ и L^- — линии с ограниченной вариацией поворота, и далее, что эти линии имеют в T общее направление τ. Кроме того устанавливается, что в области Δ существует открытая геодезическая (пусть g — ее замыкание), исходящая из точки T в том же направлении. Ясно, что линия $\Lambda = l \cup g$ — квазигеодезическая на F_n' с нулевым поворотом на обе стороны.

Линия Λ и есть искомая. Достаточно установить, что эта линия в окрестности T — кратчайшая на F_n'.

Пусть h_k — высота на F_n' точки Q_k над Λ. При большом k высота h_k совпадает с высотой Q_k над g в Δ. Поэтому

$$h_k = \sum_{i=k+1}^{\infty}{}' \bar{\rho}_i \sum_{j=i+1}^{\infty}{}' \zeta_j > C_1 q^k/k^{2\varkappa},$$

где C_1 — положительная постоянная, а суммирование проводится по всем i одинаковой четности с $k+1$ и всем j одинаковой четности с $i+1$. Кривизна F_n' в точке Q_k: $\omega_k = \delta(k)\,q^k/2k^{2\varkappa}$. Так что

$$\sum_{i=k}^{\infty} \omega_i < C_2 q^k/k^{2\varkappa},$$

где C_2 — положительная постоянная.

На основании выражений h_k и $\Sigma\omega_i$, как и в [1], устанавливается, что линия Λ в окрестности T — кратчайшая.

Пусть $\bar{E}$ — плоскость, проходящая через точку $T \in F_n$ перпендикулярно к Λ. Пусть далее $\bar{F}$ и $\bar{\Lambda}$ — выпуклая поверхность и кривая, соответственно полученные объединением частей F'_n и Λ, определяемых этой плоскостью, не содержащих l, и образов этих частей при их отражении относительно $\overline{E}$. Линия $\overline{\Lambda}$ на $\overline{F}$ — квазигеодезическая с нулевыми поворотами на обе стороны; точка T — особая точка на $\overline{F}$, являющаяся для поверхности точкой строгой выпуклости. Линия $\overline{\Lambda}$ — кратчайшая на $\overline{F}$ в окрестности T. Для доказательства последнего утверждения достаточно получить надлежащие оценки для кривизны $\overline{F}$ в вершинах, находящихся в плоскости $\overline{E}$.

2. В ортогональной системе координат (x, y, z) рассматривается ломаная L с бесконечным числом звеньев, сгущающихся к точке $T(1, 0, 0)$ и система плоскостей $\{E_k;\ k = n, n+1, \ldots\}$, заданных следующими уравнениями.

Несущая прямая k-го звена L

$$x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k = \cos \alpha_k + \varphi(k).$$

Плоскость E_k:

$$x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k + z(-1)^k \operatorname{tg} \gamma_k = \cos \alpha_k + \varphi(k).$$

Здесь

$$\alpha_k = \frac{1}{(\ln k)^{\alpha}}, \quad \operatorname{tg} \gamma_k = \frac{1}{k(\ln k)^{\gamma}}, \quad \varphi(k) = \frac{1}{(\ln k)^{\alpha+\alpha'}}$$

и

$$\alpha > 0, \quad \gamma = 1/2 + \beta/2, \quad 0 < \alpha' \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Выпуклость ломаной L проверяется непосредственно; k-е звено этой ломаной имеет длину

$$s_k = D(\alpha, \alpha')\, \delta(k) \frac{1}{k(\ln k)^{1+\alpha'}},$$

где D — константа, зависящая от α и α', а $\delta(k) \to 1$ при $k \to \infty$.

С помощью ломаной L и плоскостей $\{E_k\}$, как и в [1], строится новый пример (F, Λ) с особенностью у кратчайшей Λ в точке T. Кривизна в T ветви кривой Λ, касающейся L, равна нулю при $\alpha < \alpha'$, конечному числу при $\alpha = \alpha'$, бесконечности при $\alpha > \alpha'$. Новая поверхность по своему строению существенно не отличается от поверхности, описанной в [1].

Изложим метод, отмечавшийся в [1], с помощью которого были найдены выпуклые поверхности с особенностями у кратчайших.

Пусть F — выпуклая поверхность, заданная, как в [1], с помощью ломаной L и плоскостей $\{E_k\}$. Линия L определяется парой функций $\alpha = \alpha_k$, $\varphi = \varphi_k$; эквивалентное представление L — при помощи длин звеньев $\alpha = \alpha_k$, $s = s_k$. Плоскости E_k соответствует функция $\gamma = \gamma_k$. Пусть $\pi - \delta_k = \pi - \delta_{k-1} + \delta_{k+1}$ — угол у $\Delta Q_{k-1} Q_k Q_{k+1}$ в вершине Q_k; функция $\delta = \delta_k$ просто выражается через α и γ [1, с. 45].

Допустим, что линия $l \cup L$ — геодезическая на поверхности (на самом деле такое имеет место лишь в приближении). Для этого необходимо и достаточно [1, с. 51—52], чтобы в окрестности точки T выполнялись неравенства

$$\sum_{i=k}^{\infty}{}' \omega_i \leqslant Ch_k^{\triangle} \ (k \geqslant K), \qquad (1)$$

где i — одной четности с k, а C и K — постоянные. Здесь дополнительно предполагается, что вблизи T кривизна F локализована только в вершинах $\{Q_k\}$.

Систему (1) можно рассматривать как некоторое «уравнение» для определения поверхности F. Неизвестными являются функции α, s, γ. Поверхности-решения этой системы находятся с достаточным произволом.

Решение (1) изучается в следующем плане: локализация кривизны F; нахождение квазигеодезической Λ; доказательство, что линия Λ в окрестности точки T — кратчайшая на поверхности (здесь применяется (1). Одновременно должно выполняться условие, что

$$2\sum_i \gamma_i \sim \sum_i \nu_i = \infty,$$

это гарантирует существование особенности у Λ в точке T.

Нами использовалась система неравенств, в определенном смысле эквивалентная (1):

$$\sum_{i=k}^{\infty}{}' \gamma_i^2 \delta_i \leqslant Cs_k \delta_k \ (k \geqslant K). \qquad (2)$$

Одно из решений (2) указывается непосредственно. Требуем от δ достаточно быстрого убывания по k. Подходящей является функция $\delta = q^k$ $(0 < q = \text{const} < 1)$. Неравенства (2) теперь заменяются почти эквивалентными

$$\gamma_k^2 \leqslant Cs_k \ (k \geqslant K),$$

которым, очевидно, удовлетворяют функции $\gamma = k^{-\varkappa}$, $s = k^{-2\varkappa}$. В данном случае удобно освободиться от связи с линией L, перейдя к другим функциям, также описывающим поверхность. Имеем

$$s_k \sim |Q_{k-1}Q_k| \equiv \rho_k, \quad 2\gamma_k \sim \nu_k$$

при $k \to \infty$. Искомая поверхность определяется соотношениями

$$\delta_k = q^k, \quad \nu_k = 1/k^{\varkappa}, \quad \rho_k = 1/k^{2\varkappa}, \quad 1/2 < \varkappa \leqslant 1.$$

Она рассматривалась в п. 4 (F_n').

Поверхность (F, Λ) [1], частное решение системы (2), выделяется важными свойствами. Этими свойствами обеспечивается построение кратчайших линий с континуальными особенностями и исследование вопроса о поведении особенности у кратчайшей при изгибании поверхности. Автором установлено, что особенность у конца кратчайшей на выпуклой поверхности — не инвариант изгибания. Существуют две сколь угодно близкие, выпуклые поверхности, на одной из которых сферический образ кратчайшей линии не спрямляем, а соответствующая кратчайшая на другой поверхности имеет спрямляемое сферическое изображение. Это утверждение выполняется и для внутренней и для конечной точки кратчайшей, когда кратчайшая — непродолжаемая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милка А. Д. Кратчайшая с неспрямляемым сферическим изображением. «Укр. геометр. сб.», вып. 16. Харьков, 1974, с. 35—52.
2. Залгаллер В. А. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. «Укр. геометр. сб.», вып. 10. Харьков, с. 12—18.

Поступила 3 февраля 1975 г.

УДК 513.71

В. В. МОЖАРСКИЙ

НОРМАЛЬНО-ИНФЛЕКЦИОННЫЕ КОМПЛЕКСЫ С ТРОЙНЫМ ИНФЛЕКЦИОННЫМ ЦЕНТРОМ

Произвольный линейчатый комплекс определяет в каждой точке пространства конус с вершиной в этой точке, образующие которого принадлежат комплексу. Если этот конус вырождается в плоский пучок, то вершина пучка есть инфлекционный центр для всех лучей, проходящих через нее. Линейчатый комплекс называется квазиспециальным, если он распадается в двупараметрическое семейство плоских пучков. Квазиспециальный комплекс называется нормально-инфлекционным, если плоскости пучков прямых ортогональны к поверхности, описанной их центрами.

Впервые нормально-инфлекционные комплексы исследовала Е. Н. Ищенко [1]. Она показала, как построить нормально-инфлекционные комплексы с простым и двойным инфлекционными центрами.

Н. И. Кованцов получил безынтегральное представление нормально-инфлекционного комплекса с четырехкратным инфлекционным центром [2].

Класс всех нормально-инфлекционных комплексов зависит от четырех функций одного аргумента. Здесь найден более узкий класс этих комплексов (его широта — три функции одного аргумента), указано его безынтегральное представление и приведены геометрические свойства поверхностей, порождающих исследуемые комплексы. Исследования проводятся методом внешних форм Картана, основы которого изложены в монографии С. П. Финикова [3].

1. В монографии Н. И. Кованцова [4] было показано, как построить произвольный комплекс с тройным инфлекционным центром на каждом луче в проективном пространстве. Для этого рассматривалась конгруэнция K_3, обладающая следующим свойством. Пусть Σ_1 — фокальная поверхность этой конгруэнции; σ_1 — фокальная кривая, расположенная на Σ_1; M_1 — точка кривой σ_1; M_2 — второй фокус луча конгруэнции, касающегося кривой σ_1 в точке M_1. Тогда в нуль-системе любого линейного комплекса из пучка линейных комплексов, проходящего через четыре бесконечно близкие касательные к линии σ_1, точке M_2 соответствует плоскость, касательная к поверхности Σ_1 в точке M_1. Для построения произвольного комплекса с тройным инфлекционным центром на каждом луче следует взять произвольную конгруэнцию K_3, отнесенную к своей фокальной поверхности Σ_1, и через каждую точку этой поверхности в фокальной плоскости, не касающейся Σ_1, провести пучок прямых.

Так как группа евклидовой геометрии является подгруппой проективной группы, то при помощи аналогичных построений можно получить произвольный метрический комплекс с тройным инфлекционным центром на каждом луче. Полученный комплекс будет квазиспециальным. Потребуем, чтобы этот комплекс был нормально-инфлекционным. Тогда всякая фокальная плоскость конгруэнции K_3, не касающаяся поверхности Σ_1, должна быть нормальной плоскостью этой поверхности. Следовательно, фокальные плоскости конгруенции K_3 взаимно ортогональны, и поэтому конгруэнция K_3, порождающая нормально-инфлекционный комплекс с тройным инфлекционным центром, должна быть нормальной [5].

Задача о безынтегральном представлении исследуемого комплекса сводится, таким образом, к задаче о безынтегральном представлении нормальной конгруэнции K_3 (такую конгруэнцию будем в дальнейшем обозначать K_{n3}).

2. Рассмотрим произвольную нормальную конгруэнцию K_n. Выберем сопровождающий трехгранник этой конгруэнции $A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ следующим образом: A — центр произвольного луча конгруэнции K_n, вектор $\boldsymbol{e}_3$ параллелен этому лучу, $\boldsymbol{e}_2$ — вектор нормали фокальной поверхности Σ_1 конгруэнции K_n. Тогда вектор $\boldsymbol{e}_1$ определяется однозначно и лежит в плоскости, касательной к поверхности Σ_1. В таком случае дифференциальные уравнения конгруэнции K_n имеют вид

$$\omega^1 = a\omega_3^1,$$
$$\omega^2 = -a\omega_3^2. \qquad (1)$$

Построим первое и второе продолжение системы (1). В результате получим

$$da - \omega^3 = \alpha_1\omega_3^1 + \alpha_2\omega_3^2,$$

$$
\begin{gathered}
-2a\omega_2^1 = \alpha_2\omega_3^1 + \alpha_3\omega_3^2,\\
da + \omega^3 = -\alpha_3\omega_3^1 + \alpha_4\omega_3^2,\\
d\alpha_1 - \frac{\alpha_2\alpha_3}{2a}\,\omega_3^2 = \beta_1\omega_3^1 + \beta_2\omega_3^2,\\
d\alpha_2 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{2a}\,\omega_3^1 = \beta_2\omega_3^1 + \beta_3\omega_3^2,\\
-d\alpha_3 - \frac{\alpha_2\alpha_3}{2a}\,\omega_3^2 = \beta_4\omega_3^1 + \beta_5\omega_3^2,\\
d\alpha_4 - \frac{\alpha_2\alpha_3}{2a}\,\omega_3^1 = \beta_5\omega_3^1 + \beta_6\omega_3^2,\\
\beta_3 + \beta_4 - 2a = \frac{2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3)}{2a}.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Точка $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{A} + a\boldsymbol{e}_3$ — фокус луча конгруэнции, принадлежащий поверхности Σ_1, а

$$\omega_3^1 = 0 \tag{3}$$

является дифференциальным уравнением торса конгруэнции, ребро возврата которого лежит на этой поверхности. Шесть плюккеровых координат p^{41}, p^{42}, p^{43}, p^{23}, p^{31}, p^{12} луча l конгруэнции K_n, проходящего через точку M_1, можно определить соответственно как две тройки декартовых координат векторов $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{e}_3$.

Потребуем теперь, чтобы конгруэнция K_n являлась конгруэнцией K_{n3}. Построим пучок линейных комплексов, проходящий через четыре бесконечно близкие касательные к фокальной кривой $\omega_3^1 = 0$ поверхности Σ_1. Уравнение линейного комплекса, содержащего луч l, может быть записано в виде

$$\boldsymbol{m}\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{e}_3) = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ — постоянные векторы, координаты которых играют роль коэффициентов в уравнении линейного комплекса. Продифференцируем трижды (4) в направлении фокальной кривой $\omega_3^1 = 0$:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{m}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{e}_2) = 0,\\
\frac{\alpha_3}{2a}\{\boldsymbol{m}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{e}_1)\} + \alpha_4\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_1 = 0,\\
2\alpha_3^2\alpha_4\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_2 + \{2a(\alpha_4\beta_5 + \alpha_3\beta_6) + 2\alpha_3\alpha_4^2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\}\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_1 = 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Примем трехгранник $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ за координатный. Тогда векторы $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ будут иметь такие координаты:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_1(0,\ 0,\ 0);\ \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1(1,\ 0,\ 0);\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2(0,\ 1,\ 0);\\
\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3(0,\ 0,\ 1\ ,
\end{gathered}
$$

а соотношения (4), (5) примут соответственно вид

$$
\begin{gathered}
m^3 = 0,\\
m^2 = 0,\\
\frac{\alpha_3}{2a} m^1 + \alpha_4 n^1 = 0,\\
2\alpha_3^2\alpha_4 n^2 + \{2a(\alpha_4\beta_5 + \alpha_3\beta_6) + 2\alpha_3\alpha_4^2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\} n^1 = 0,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где m^i, n^i ($i = 1, 2, 3$) — координаты векторов m, n. Так как коэффициенты линейного комплекса определяются с точностью до постоянного множителя, то мы можем положить $n^1 = 1$, $n^3 = \lambda$, где λ — параметр. Тогда из (6) находим

$$
m^1 = -\frac{2a\alpha_4}{\alpha_3},
$$

$$
n^2 = -\frac{2a(\alpha_4\beta_5 + \alpha_3\beta_6) + 2\alpha_3\alpha_4^2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4}{2\alpha_3^2\alpha_4}.
$$

Следовательно, уравнение искомого пучка линейных комплексов в репере $\boldsymbol{M_1 e_1 e_2 e_3}$ имеет вид

$$
2a\alpha_4 p^{14} + \alpha_3 p^{23} + \lambda\alpha_3 p^{12} + \frac{2a(\alpha_4\beta_5 + \alpha_3\beta_6) + 2\alpha_3\alpha_4^2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4}{2\alpha_3\alpha_4} p^{13} = 0.
\tag{7}
$$

Пусть M_2 — второй фокус луча l. Точка M_2 имеет координаты $(0, 0, -2a)$ в репере $\boldsymbol{M_1 e_1 e_2 e_3}$. Найдем уравнение плоскости, соответствующей точке M_2 в нуль-системе каждого из линейных комплексов пучка (7). Для этого рассмотрим матрицу

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a & 1\\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & 1 \end{pmatrix},
$$

где ξ^i — координаты произвольной точки евклидова пространства E_3 в репере $\boldsymbol{M_1 e_1 e_2 e_3}$. Из этой матрицы находим

$$
p^{12} = 0;\quad p^{13} = 2a\xi^1;\quad p^{14} = -\xi^1;\quad p^{23} = 2a\xi^2.
$$

Подставим эти координаты в (7)

$$
\frac{2a(\alpha_4\beta_5 + \alpha_3\beta_6) + 2\alpha_3\alpha_4^2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4}{2\alpha_3\alpha_4} 2a\xi^1 - 2a\alpha_4\xi^1 + 2a\alpha_3\xi^2 = 0.
\tag{8}
$$

Эта плоскость одна и та же для всех линейных комплексов пучка (7). Для того чтобы исследуемая конгруэнция была конгруэнцией K_{n3}, необходимо, чтобы плоскость (8) совпадала с касательной плоскостью к фокальной поверхности Σ_1 в точке M_1, т. е. с плоскостью $\xi^2 = 0$. Поэтому коэффициент при ξ^1 в (8) должен равняться нулю:

$$
2a(\alpha_4\beta_5 + \alpha_3\beta_6) + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 0.
\tag{9}
$$

Следовательно, конгруэнция K_{n3} определяется системой уравнений (1), (2), (9). Построив продолжение этой системы, находим, что первый характер системы $s_1 = 4$, а второй — $s_2 = 0$. Таким образом, число Картана $Q = 4$. Таково же и число параметров продолжения $N = 4$. Решение исследуемой системы, следовательно, существует с произволом четыре функции одного аргумента. Этот факт подтверждается результатом Е. Н. Ищенко: нормально-инфлекционные комплексы с тройным инфлекционным центром существуют с произволом четыре функции одного аргумента [1].

3. Выясним теперь, каким условиям должна удовлетворять произвольная поверхность для того, чтобы она могла служить фокальной поверхностью Σ_1 конгруэнции K_{n3}. Для этого выберем на поверхности некоторую полугеодезическую сеть и определим ортонормированный сопровождающий трехгранник $A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ следующим образом: A — произвольная точка поверхности, $\boldsymbol{e}_3$ — вектор нормали к поверхности, $\boldsymbol{e}_1$ — вектор касательной к геодезической линии σ_1. Тогда вектор $\boldsymbol{e}_2$ определяется однозначно; он является вектором касательной к ортогональной траектории семейства геодезических линий. Так как касательная плоскость к исследуемой поверхности определяется векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, то

$$\omega^3 = 0.$$

Продолжение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a_1\omega^1 + a_2\omega^2, \\ \omega_2^3 &= a_2\omega^1 + a_3\omega^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Так как кривая σ_1, которой касается вектор $\boldsymbol{e}_1$ — геодезическая, то $d\boldsymbol{e}_1 \parallel \boldsymbol{e}_3$. Следовательно, вдоль этой кривой $\omega_1^2 = 0$. Поскольку вдоль той же кривой $\omega^2 = 0$ $(d\boldsymbol{A} = \omega^1\boldsymbol{e}_1)$, то

$$\omega_1^2 = a_4\omega^2. \tag{11}$$

Продолжение системы (10), (11) имеет вид

$$\begin{aligned} da_1 &= b_1\omega^1 + b_2\omega^2, \\ da_2 &= (b_2 - 2a_2a_4)\,\omega^1 + b_3\omega^2, \\ da_3 &= (a_1a_4 - a_3a_4 + b_3)\,\omega^1 + b_4\omega^2, \\ da_4 &= (a_2^2 - a_1a_3 - a_4^2)\,\omega^1 + b_5\omega^2. \end{aligned}$$

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в п. 2 можно установить, что уравнение пучка линейных комплексов проходящего через четыре бесконечно близкие касательные к линии σ_1, в репере $A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ имеет вид

$$a_2p^{42} + \lambda p^{23} - a_2^2p^{31} + \frac{2a_2a_4 - b_2}{2}\,p^{12} = 0. \tag{12}$$

При этом предполагаем, что $a_2 \neq 0$.

Проведем все касательные к линиям σ_1 исследуемой поверхности. Так как линии σ_1 геодезические, то в результате получим некоторую нормальную конгруэнцию [5]. Найдем второй фокус произвольного луча l построенной конгруэнции. Если точка $F = A + te_1$ является таким фокусом, то вектор dF параллелен лучу l, следовательно $t = -\frac{1}{a_4}$, и точка F в репере $Ae_1e_2e_3$ имеет координаты

$$F\left(-\frac{1}{a_4},\ 0,\ 0\right).$$

Тогда уравнение плоскости, полярно сопряженной точке F в нуль-системе произвольного линейного комплекса пучка (12) в репере $Ae_1e_2e_3$ имеет вид

$$a_2\xi^2 - \frac{2a_2a_4 - b_2}{2a_4}\xi^2 - \frac{a_2^2}{a_4}\xi^3 = 0.$$

Чтобы построенная конгруэнция являлась конгруэнцией K_{n3}, необходимо, чтобы эта плоскость касалась исследуемой поверхности, т. е. совпадала с плоскостью $\xi^3 = 0$. Следовательно, $b_2 = 0$, и система дифференциальных уравнений, определяющая фокальную поверхность Σ_1 конгруэнции K_{n3}, имеет вид

$$\begin{gathered}
\omega^3 = 0,\\
\omega_1^3 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2,\\
\omega_2^3 = a_2\omega^1 + a_3\omega^2,\\
\omega_1^2 = a_4\omega^2,\\
da_1 = b_1\omega^1,\\
da_2 = -2a_2a_4\omega^1 + b_3\omega^2,\\
da_3 = (a_1a_4 - a_3a_4 + b_3)\,\omega^1 + b_4\omega^2,\\
da_4 = (a_2^2 - a_1a_3 - a_4^2)\,\omega^1 + b_5\omega^2.
\end{gathered} \tag{13}$$

Выясним геометрический смысл функций a_1, a_2, a_3, a_4. Вдоль кривой σ_1 $\omega^2 = 0$, следовательно,

$$\begin{gathered}
de_1 = a_1\omega^1 e_3 \ (\mathrm{mod}\ \omega^2 = 0),\\
de_3 = -(a_1e_1 + a_2e_2)\,\omega^1 \ (\mathrm{mod}\ \omega^2 = 0)
\end{gathered} \tag{14}$$

вдоль той же кривой. Пусть k_1, $\varkappa_1$ — соответственно кривизна и кручение кривой σ_1. Тогда, учитывая, что e_1 — орт касательной, а e_3 — орт главной нормали этой кривой и $ds_1 = \omega^1$ (s_1 — длина дуги кривой σ_1), получим по формулам Серре—Френе $de_1 = k_1e_3\omega^1$. Следовательно, a_1 является кривизной линии σ_1. Ортом бинормали кривой $\omega^2 = 0$ является вектор $-e_2$. Следовательно, по формулам Серре—Френе $de_3 = -(k_1e_1 + \varkappa_1e_2)\,\omega^1$, и поэтому (см. (14)) a_2 является кручением кривой σ_1.

Рассмотрим ортогональную траекторию геодезических линий σ_1. Вдоль этой линии $\omega^1 = 0$. Ортом касательной к этой линии является вектор e_2. Следовательно, вектором кривизны рассматриваемой кривой будет вектор $de_2 = -(a_4 e_1 + a_3 e_3)\,\omega^2$. Поэтому a_3 является нормальной кривизной ортогональной траектории геодезических линий σ_1, а $-a_4$ — ее геодезической кривизной.

Из формул (13) следует, что $da_1 = 0$ вдоль линий $\omega^1 = 0$. Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Геодезические линии σ_1 поверхности Σ_1, которые служат фокальными кривыми конгруэнции K_{n3}, вдоль каждой своей ортогональной траектории имеют одну и ту же кривизну.*

Из формул (13) следует также, что вдоль линии σ_1

$$da_2 = -2a_2 a_4 \omega^1.$$

Поэтому

$$-a_4 = \frac{1}{2}\frac{d \ln a_2}{ds_1}$$

и справедлива

Теорема 2. *Существует зависимость между кручением $\varkappa_1$ геодезических линий σ_1 фокальной поверхности Σ_1 и геодезической кривизной k_{g2} их ортогональных траекторий, выражающаяся формулой*

$$k_{g2} = \frac{1}{2}\frac{d \ln \varkappa_1}{ds_1},$$

где s_1 — длина дуги кривой σ_1.

Мы делали все предыдущие выкладки, предполагая, что $a_2 \neq 0$. Если же $a_2 = 0$, то это означает, что геодезические линии σ_1 являются плоскими и поверхность Σ_1 — резной [6]. Комплекс, построенный подобно тому, как в п. 3, будет специальным. Действительно, плоскости меридианов резной поверхности, образуя однопараметрическое семейство, огибают некоторый торс. Поэтому все лучи рассматриваемого комплекса будут касаться этого торса.

4. Очевидно, требованию теоремы 1 удовлетворяет всякая линейчатая поверхность, так как прямолинейные образующие всюду имеют кривизну, равную нулю, а в частности, и вдоль своих ортогональных траекторий. Однако нельзя сразу утверждать, что всякая линейчатая поверхность порождает нормально-инфлекционный комплекс с тройным инфлекционным центром. Это объясняется тем, что если в качестве фокальной поверхности конгруэнции K_{n3} взять линейчатую поверхность, то конгруэнция выродится в эту поверхность. Сразу же нужно исключить из рассмотрения торсы как частный случай резных поверхностей. Для косых линейчатых поверхностей необходимо провести дополнительное исследование.

Как установила Е. Н. Ищенко [1], система дифференциальных уравнений, задающая произвольный нормально-инфлекционный комплекс, имеет вид

$$
\begin{gathered}
\omega^2 = k\omega_3^1 + q\omega_3^2, \\
\omega^3 = b\omega^2, \\
dq + (1+q^2)\,\omega_1^2 = l\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\
dk + q\omega^3 + qk\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + m\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\
-\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1, \\
db + (1+b^2)\,\omega_2^3 + \frac{1+b^2}{k}\,\omega^1 = -\lambda\omega^2.
\end{gathered} \tag{15}
$$

При этом сопровождающий репер $Ae_1e_2e_3$ был выбран следующим образом: точка A совмещена с центром плоского пучка, вектор e_3 параллелен лучу комплекса, вектор e_1 перпендикулярен к плоскости пучка. Точка A описывает поверхность, определяемую уравнением

$$\omega^3 = b\omega^2. \tag{16}$$

Уравнение, определяющее инфлекционные центры произвольного луча комплекса, имеет вид

$$lt^4 - 2(\alpha + \beta q)\,t^3 + (2k\beta + 2\gamma q + m)\,t^2 - 2k\gamma t = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим нормально-инфлекционный комплекс, у которого поверхность (16) является косой линейчатой поверхностью, а плоскость пучка прямых (ортогональная к этой поверхности) содержит прямолинейную образующую. Если точка A движется по прямолинейной образующей, то $\omega^1 = 0$ и

$$dA = \omega^2(e_2 + be_3).$$

Вектор $f = e_2 + be_3$ является направляющим вектором прямой, описываемой точкой A, поэтому

$$df \times f = 0 \pmod{\omega^1 = 0}, \tag{18}$$

но

$$df = -\frac{\gamma}{k}\,\omega_3^1 e_1 + b\omega_3^2 e_2 + (b^2\omega_3^2 - \lambda k\omega_3^1)\,e_3.$$

Подставим это выражение в (18):

$$\lambda k e_1 + \frac{\gamma b}{k}\,e_2 - \frac{\gamma}{k}\,e_3 = 0.$$

Из последнего равенств следует

$$\lambda k = 0; \quad \frac{\gamma}{k}\,b = 0; \quad \frac{\gamma}{k} = 0.$$

В нашем случае $k \neq 0$ (как показала Е. Н. Ищенко [1], если $k = 0$, то центры плоских пучков, являясь четырехкратными центрами, описывают некоторую кривую и комплекс состоит из всех лучей, пересекающих эту кривую), следовательно

$$\gamma = 0, \tag{19}$$

$$\lambda = 0. \tag{20}$$

Подставим (20) в последнее уравнение системы (15):

$$db + (1 + b^2)\,\omega_2^3 + \frac{1 + b^2}{k}\,\omega^1 = 0.$$

Продифференцируем его внешним образом, учитывая (19):

$$(2\beta k + m)\,\frac{1 + b^2}{k^2}\,[\omega^1\omega_3^1] = 0.$$

Так как формы ω^1, ω_3^1 линейно независимы и $1 + b^2 \neq 0$, (мы ограничиваемся рассмотрением лишь действительных комплексов), то из последнего равенства следует

$$2\beta k + m = 0. \tag{21}$$

Подставим (19), и (21) в (17):

$$lt^4 - 2\,(\alpha + \beta q)\,t^3 = 0.$$

Это означает, что рассматриваемый комплекс является нормально-инфлекционным комплексом с тройным инфлекционным центром.

Теорема 3. *Если через каждую точку косой линейчатой поверхности в нормальной плоскости, содержащей прямолинейную образующую, провести пучок прямых, то полученный в результате этого комплекс будет нормально-инфлекционным комплексом с тройным инфлекционным центром.*

Широта класса таких комплексов определяется произволом задания косой линейчатой поверхности — три функции одного аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ищенко Е. Н. Квазиспециальные комплексы. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук, Киев, 1971. 12 с.
2. Кованцов Н. И. Нормально-инфлекционные комплексы с четырехкратным инфлекционным центром. — «Demonstratio mathematica» т. 6, ч. 2, Warszawa, 1973.
3. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М. — Л., ОГИЗ — ГИТТЛ, 1948. 430 с.
4. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 290 с.
5. Фиников С. П. Теория конгруэнций. М. — Л., ГИТТЛ, 1950. 528 с.
6. Норден А. П. Теория поверхностей. М., ГИТТЛ, 1956. 260 с.

Поступила 27 февраля 1974 г.

УДК 513.73

М. Р. РОГОВОЙ

О СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ V_n^{n-1} В P_n

В статье Н. М Остиану [3] методом Г. Ф. Лаптева построена в инвариантной аналитической форме геометрия распределения гиперплоскостей в многомерном проективном пространстве. Построен ряд геометрических объектов, охваченных фундаментальными объектами распределения и дана их геометрическая интерпретация.

В настоящей статье изучаются соприкасающиеся гиперповерхности этого распределения; вводится канонический репер, строится инвариантная соприкасающаяся гиперповерхность и с ее помощью методом Г. Ф. Лаптева строится канонический пучок проективных нормалей распределения.

1. Общие сведения

Рассмотрим в проективном пространстве P_n распределение с образующим элементом (M_0, μ), где M_0 — точка пространства, μ — инцидентная этой точке гиперплоскость. Это распределение называют неголономным многообразием V_n^{n-1} в P_n, если в P_n не существует такого однопараметрического семейства гиперповерхностей, что каждая гиперплоскость μ элемента (M_0, μ) распределения касалась бы в точке M_0 соответствующей гиперповерхности.

Отнесем многообразие V_n^{n-1} к реперу нулевого порядка R $(M_0M_1M_2\ldots M_n)$, где точки M_0, $M_1\ldots M_{n-1}$ лежат в гиперплоскости μ. Инфинитезимальное преобразование репера R определяется уравнениями

$$dM_{\bar{J}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} M_{\bar{K}}. \tag{1}$$

Компоненты инфинитезимального преобразования $\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{K}}. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем индексы будут иметь следующие значения:

$$\bar{J}, \bar{K}, \bar{L}, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, n;\ J, K, L, \ldots = 1, 2, \ldots, n;$$
$$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ i, j, k, l, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1;$$

Очевидно, когда формы ω_0^K, ω_i^n обращаются в нуль, элемент (M_0, μ) распределения остается неподвижным и, следовательно, эти формы зависят от дифференциалов только главных параметров.

Поэтому формы ω_i^n могут быть представлены как линейные комбинации форм ω_0^K,

$$\omega_i^n = \Gamma_{iK}^n \omega_0^K. \tag{3}$$

Система уравнений (3) — это основная система дифференциальных уравнений неголономного многообразия V_n^{n-1}. Система величин Γ_{iK}^n образует первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект многообразия V_n^{n-1}. При этом компоненты Γ_{ij}^n образуют тензор, который в общем случае несимметричен по индексам i, j:

$$\Gamma_{ij}^n \neq \Gamma_{ji}^n, \tag{4}$$

и ранг матрицы, составленной из компонент этого тензора, равен $n-1$.

Для смещений точки M_0 в гиперплоскости μ выполняется условие

$$\omega_0^n = 0; \tag{5}$$

уравнение (5) называется уравнением, ассоциированным с заданным распределением [2].

Кривые линии, которые в каждой своей точке касаются гиперплоскости, образующей вместе с этой точкой элемент неголономного многообразия V_n^{n-1}, называются допустимыми кривыми или кривыми, принадлежащими многообразию V_n^{n-1}. Они определяются системой уравнений

$$\omega_0^n = 0, \ \omega_0^i = \lambda^i \tau, \tag{6}$$

где τ — параметрическая форма.

Если всюду в пространстве тензор Γ_{ij}^n симметричен относительно индексов i, j, т. е. выполняется равенство

$$\Gamma_{ij}^n = \Gamma_{ji}^n, \tag{7}$$

уравнение (5) будет вполне интегрируемым; множество допустимых кривых многообразия V_n^{n-1}, инцидентных фиксированной точке M_0 пространства, расположено на одной гиперповерхности. Пространство расслаивается на однопараметрическое семейство гиперповерхностей так, что в каждой точке пространства гиперплоскость, составляющая с этой точкой элемент распределения, касается в этой точке соответствующей гиперповерхности. Такое распределение называется голономным, его мы рассматривать не будем.

Для неголономного многообразия V_n^{n-1} во всем пространстве тензор Γ_{ij}^n несимметричен относительно индексов i, j, т. е. выполняется условие (4); уравнение (5) не будет вполне интегрируемым и множество допустимых кривых многообразия V_n^{n-1}, инцидентных фиксированной точке M_0 пространства, не расположено на одной гиперповерхности. Такое множество кривых часто называют неголономной гиперповерхностью.

2. Теорема Бомпиани

Для неголономного многообразия V_n^{n-1} в P_n имеет место теорема, которую для V_3^2 в P_3 доказал Бомпиани [4].

Теорема. *Существует гиперповерхность, которая имеет касание второго порядка со всеми допустимыми кривыми многообразия V_n^{n-1}, проходящими через данную фиксированную точку M_0 пространства P_n.*

Доказательство. Окрестность второго порядка допустимой кривой многообразия V_n^{n-1} определяется дифференциалами

$$dM_0 = \omega_0^0 M_0 + \omega_0^k M_k,$$

$$d^2M_0 = \left(d\omega_0^0 + \omega_0^{\bar{i}}\omega_{\bar{i}}^0\right) M_0 + \left(d\omega_0^k + \omega_0^{\bar{i}}\omega_{\bar{i}}^k\right) M_k + \omega_0^i\omega_i^n M_n, \tag{8}$$

или, принимая во внимание системы уравнений (3) и (6),

$$dM_0 = O(\tau) M_0 + \lambda^k\tau M_k,$$

$$d^2M_0 = O(\tau^2) M_0 + O(\tau^2) M_k + \Gamma_{ij}^n\lambda^i\lambda^j\tau^2 M_n. \tag{9}$$

Для точки M на допустимой кривой в окрестности точки M_0 имеем

$$M = M_0 + dM_0 + \frac{1}{2} d^2M_0 + \ldots,$$

или, воспользовавшись формулами (9),

$$M = (1 + O(\tau)) M_0 + (\lambda^k + O(\tau^2)) M_k + (\Gamma_{ij}^n\lambda^i\lambda^j\tau^2 + O(\tau^3)) M_n.$$

В неоднородных проективных координатах x^k относительно репера R получаем параметрические уравнения допустимой кривой многообразия V_n^{n-1}:

$$x^k = \lambda^k\tau + O(\tau^2),$$

$$x^n = \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^n\lambda^i\lambda^j\tau^2 + O(\tau^3).$$

Нетрудно проверить, что гиперповерхность, о существовании которой говорится в теореме, — это гиперповерхность, которая в окрестности точки M_0 задается следующим разложением:

$$x^n = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n\right) x^i x^j + \ldots \tag{10}$$

3. Соприкасающиеся гиперповерхности

Выделим из множества допустимых кривых неголономного многообразия V_n^{n-1}, инцидентных точке M_0 пространства P_n, семейство кривых, зависящих от $n-2$ параметров. Это семейство кривых образует гиперповерхность и, как следует из теоремы Бомпиани, эта гиперповерхность содержит окрестности второго порядка всех допустимых кривых многообразия V_n^{n-1}, инцидентных этой точке M_0.

Дадим следующее

Определение. *Гиперповерхность, образованную* $(n-2)$-параметрическим семейством допустимых кривых многообразия V_n^{n-1}, инцидентных точке M_0 пространства P_n, назовем *соприкасающейся гиперповерхностью многообразия* V_n^{n-1}, *соответствующей точке* M_0, а точку M_0 — *точкой прикосновения* этой гиперповерхности с многообразием V_n^{n-1}.

Очевидно, что таких соприкасающихся гиперповерхностей можно построить в данной точке M_0 бесчисленное множество; любая из них будет иметь прикосновение 2-го порядка с гиперповерхностью 2-го порядка, определяемой первым членом разложения (10). Интерес может представить соприкасающаяся гиперповерхность, инвариантно связанная с многообразием V_n^{n-1}. Чтобы построить такую гиперповерхность, рассмотрим проективно-геодезические линии многообразия V_n^{n-1}.

Отметим, что соприкасающиеся поверхности неголономных многообразий, построенные из геодезических линий, изучались еще Роджерсом [6] в трехмерном эвклидовом пространстве и В. В. Вагнером [5] в многомерном римановом пространстве. Однако на свойство соприкасающихся поверхностей для неголономного многообразия V_3^2 в P_3, изложенное в теореме, впервые указал Е. Бомпиани [4].

4. Канонический репер многообразия V_n^{n-1}. Проективно-геодезические линии

Как было показано в [7], уже в окрестности 2-го порядка может быть построен канонический репер $R\,(M_0M_1M_2\ldots M_n)$ для неголономного многообразия V_n^{n-1} в P_n. Отнесем многообразие V_n^{n-1} к каноническому реперу, совместив вершину M_0 с центром элемента (M_0, μ) распределения, а прямые M_0M_1, M_0M_2, ..., M_0M_{n-1} в гиперплоскости μ — с инвариантными образующими асимптотического конуса многообразия V_n^{n-1}. Вершинами M_1, M_2, ..., M_{n-1} канонического репера служат точки пересечения этих инвариантных образующих с $(n-2)$-плоскостью, которая соответствует прямой M_0M_n в проективитете Бомпиани — Пантази [7]. Прямая M_0M_n в каноническом репере совмещена с инвариантной прямой, построенной из геометрических соображений в статье [7] и получившей название проективной нормали. С этой нормалью совпадает нормаль $\{M_n^i\}$, полученная аналитическим путем Н. М. Остиану [3].

Компоненты инфинитезимального преобразования канонического репера R могут быть представлены, как линейные комбинации базисных форм ω_0^L

$$\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}} = \Gamma_{\overline{I}L}^{\overline{K}} \omega_0^L. \tag{11}$$

Выбор вершин M_k канонического репера на инвариантных образующих асимптотического конуса в гиперплоскости μ налагает следующие условия на первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект Γ_{iK}^n многообразия V_n^{n-1}:

$$\Gamma_{iK}^n = 0 \ (i + K \neq n). \tag{12}$$

Условия, которым удовлетворяют компоненты инфинитезимального преобразования репера при выборе вершины M_n на проективной нормали ввиду их громоздкости мы не приводим.

Проективно-геодезическая линия, принадлежащая многообразию V_n^{n-1}, — это такая линия, в каждой точке которой соприкасающаяся 2-плоскость проходит через проективную нормаль многообразия V_n^{n-1} в этой точке. Соприкасающаяся 2-плоскость допустимой линии многообразия V_n^{n-1} определяется точками M_0, $M_0 + dM_0$, $M_0 + dM_0 + \frac{1}{2} d^2 M_0$, поэтому проективно-геодезические линии удовлетворяют условию

$$(M_0 dM_0 d^2 M_0 M_n) = 0. \tag{13}$$

Подставив в (13) выражения для dM_0 и d^2M_0 из (8), получим уравнения, определяющие проективно-геодезические линии многообразия V_n^{n-1},

$$d\omega_0^k + \omega_0^i \omega_i^k = \tau \omega_0^k, \ \omega_0^n = 0, \tag{14}$$

где τ — параметрическая форма, которую можно считать совпадающей с параметрической формой в формуле (6).

5. Инвариантная соприкасающаяся гиперповерхность S_{n-1} многообразия V_n^{n-1}

Через данную точку M_0 пространства P_n в каждом направлении, определяемом отношением $\lambda^1 : \lambda^2 : \ldots : \lambda^{n-1}$, проходит одна проективно-геодезическая линия. Это $(n-2)$-параметрическое семейство линий образует соприкасающуюся гиперповерхность S_{n-1}, инвариантно связанную с многообразием V_n^{n-1}. Составим параметрические уравнения этой гиперповерхности.

Подсчитаем, воспользовавшись формулами (1), (6), (11) и уравнениями проективно-геодезических линий (14),

$$dM_0 = \Gamma_{0i}^0 \lambda^i \tau M_0 + \lambda^k \tau M_k,$$

$$d^2 M_0 = 0(\tau^2) M_0 + (\Gamma_{0i}^0 \lambda^i \lambda^k + \lambda^k) \tau M_k + \Gamma_{ij}^n \lambda^i \lambda^j \tau^2 M_n,$$

$$d^3M_0 = 0(\tau^3)M_0 + 0(\tau^3)M_k + \{3\Gamma^n_{ij}\lambda^i\lambda^j + [(\Gamma^n_{ij})_k - \Gamma^l_{ij}(\Gamma^n_{kl} + \Gamma^n_{lk}) + \Gamma^n_{ij}(\Gamma^n_{0k} + \Gamma^n_{nk})]\lambda^i\lambda^j\lambda^k\}\tau^3M_n. \tag{15}$$

Подставляя эти выражения в разложение

$$M = M_0 + dM_0 + \frac{1}{2}d^2M_0 + \frac{1}{6}d^3M_0 + \ldots,$$

и обозначая через x^K неоднородные проективные координаты относительно рассматриваемого репера, получаем

$$x^k = \lambda^k\tau + \frac{1}{2}(\lambda^k - \Gamma^0_{0i}\lambda^i\lambda^k)\tau^2 + 0(\tau^3),$$

$$x^n = \frac{1}{2}\Gamma^n_{ij}\lambda^i\lambda^j\tau^2 + \{3\Gamma^n_{ij}\lambda^i\lambda^j + [(\Gamma^n_{ij}) - \Gamma^l_{ij}(\Gamma^n_{kl} + \Gamma^n_{lk}) + \Gamma^n_{ij} \times \times (\Gamma^n_{0k} + \Gamma^n_{nk})]\lambda^i\lambda^j\lambda^k\}\tau^3 + 0(\tau^4). \tag{16}$$

Это и есть параметрические уравнения гиперповерхности S_{n-1}, инвариантно связанной с многообразием V^{n-1}_n в точке M_0.

Составим также уравнение гиперповерхности S_{n-1} в неоднородных проективных координатах x^k. В окрестности точки M_0 это уравнение запишется в виде ряда

$$x^n = \frac{1}{2}a_{ij}x^ix^j + \frac{1}{6}a_{ijk}x^ix^jx^k + \ldots, \tag{17}$$

где коэффициенты a_{ij}, a_{ijk} симметричны по индексам $i, j, k, \ldots$; определим эти коэффициенты. Подставим выражения для x^k из (16) в (17):

$$x^n = \frac{1}{2}a_{ij}\lambda^i\lambda^j\tau^2 + \left[\left(\frac{1}{6}a_{ijk} - \frac{1}{2}a_{ij}\Gamma^0_{0k}\right)\lambda^i\lambda^j\lambda^k + \frac{1}{2}a_{ij}\lambda^i\lambda^j\right]\tau^3 + \ldots \tag{18}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ в (16) и (18), а затем при одинаковых произведениях λ^k, находим

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^n_{ij} + \Gamma^n_{ji}), \tag{19}$$

$$a_{ijk} = \frac{1}{6}[(\Gamma^n_{ij})_k - \Gamma^l_{ij}(\Gamma^n_{kl} + \Gamma^n_{lk}) + \Gamma^n_{ij}(\Gamma^n_{0k} + \Gamma^n_{nk})]_{[ijk]}, \tag{20}$$

индексный символ $[ijk]$ указывает на то, что берется сумма по всем перестановкам индексов i, j, k.

Как было отмечено выше, в каноническом репере R многообразия V^{n-1}_n

$$\Gamma^n_{ij} = 0 \ (i + j \neq n).$$

Формулы (19) и (20) упрощаются.

Прежде всего, $a_{ij} = 0$, если $i + j \neq n$.

Отличными от нуля будут только коэффициенты

$$a_{i,\,n-i} = \frac{1}{2}(\Gamma^n_{i,\,n-i} + \Gamma^n_{n-i,\,i}); \tag{21}$$

В формуле (20) для немого индекса l остается только одно значение $l = n - k$:

$$a_{ijk} = \frac{1}{6}\left[(\Gamma_{ij}^{k})_k - \Gamma_{ij}^{n-k}\left(\Gamma_{k,\ n-k}^{n} + \Gamma_{n-k,\ k}^{n}\right) + \Gamma_{ij}^{n}\left(\Gamma_{0k}^{n} + \Gamma_{nk}^{n}\right)\right]_{[ijk]}; \quad (22)$$

когда $i + j \neq n$, коэффициенты a_{ijk} приобретают еще более простой вид

$$a_{ijk} = -\frac{1}{6}\Gamma_{ij}^{n-k}\left(\Gamma_{k,\ n-k}^{n} + \Gamma_{n-k,\ k}^{n}\right)_{[ijk]}.$$

6. Деривационные формулы для канонического репера R многообразия V_n^{n-1} при перемещении по инвариантной гиперповерхности S_{n-1}

Обозначим компоненты бесконечно малого перемещения репера по инвариантной гиперповерхности S_{n-1} через $\Omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$, тогда

$$\delta M_{\overline{I}} = \Omega_{\overline{I}}^{\overline{K}} M_{\overline{K}}, \quad (23)$$

где формы $\Omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\Omega_{\overline{I}}^{\overline{K}} = \Omega_{\overline{I}}^{\overline{L}} \wedge \Omega_{\overline{L}}^{\overline{K}}; \quad (24)$$

при этом можно положить

$$\Omega_0^i = \omega_0^i. \quad (25)$$

Полная система дифференциальных уравнений, определяющая инвариантную поверхность S_{n-1}, запишется так:

$$\Omega_0^n = 0,$$
$$D\Omega_0^n = \omega_0^i \wedge \Omega_i^n = 0. \quad (26)$$

Продолжение системы (26) приведут к следующим уравнениям:

$$\Omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,$$
$$(27)$$
$$d\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ik}^n \Omega_j^k + \Lambda_{jk}^n \Omega_i^k - \Lambda_{ij}^n\left(\Omega_0^0 + \Omega_n^n\right) + \Lambda_{ijk}^n \omega_0^k.$$

Воспользовавшись разложением (17), определим формы Ω_i^K через коэффициенты a_{ij}, a_{ijk} этого ряда.

С этой целью зададим произвольную точку M пространства ее однородными проективными координатами $x^{\overline{I}}$ относительно репера R,

$$M = x^{\overline{I}} M_{\overline{I}}. \quad (28)$$

При перемещении репера R по поверхности S_{n-1} точка M остается неподвижной, если выполняется условие

$$\delta M = \delta\lambda M. \tag{29}$$

Пользуясь уравнениями (23), равенством (28) и полагая $x^0 = 1$, получаем из условия (29)

$$\Omega_0^0 + x^I \Omega_I^0 = \delta\lambda,$$
$$\delta x^K + x^I \Omega_I^K + \omega_0^K = x^K \delta\lambda;$$

или, исключая $\delta\lambda$, находим условия стационарности точки M:

$$\delta x^K = -\omega_0^K - x^I \Omega_I^K + x^K \left(x^I \Omega_I^0 + \Omega_0^0\right). \tag{30}$$

Для поверхности S_{n-1}

$$\delta x^n = \frac{\partial x^n}{\partial x^k} \delta x^k. \tag{31}$$

Подставляя сюда выражения для δx^n и δx^k из (30) и выражения для частных производных $\dfrac{\partial x^n}{\partial x^k}$ — из уравнения поверхности (17), приравнивая затем коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях равенства (31), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \Omega_i^n = a_{ik}\omega_0^k, \\ a_{jk}\Omega_i^k - \frac{1}{2} a_{ij}\left(\Omega_0^0 + \Omega_n^n\right) = -\delta_{ijk} a_{ijk}\omega_0^k, \end{gathered} \tag{32}$$

где δ_{ijk} — символ, принимающий значение $\delta_{ijk} = \frac{1}{2}$, если $i = j = k$, и значение $\delta_{ijk} = 1$ во всех других случаях.

Учитывая, что в каноническом репере R многообразия V_n^{n-1} коэффициенты $a_{jk} = 0$, когда $j + k \neq n$, находим из системы уравнений (32)

$$\begin{gathered} \Omega_i^n = a_{i,\, n-1}\omega_0^{n-i}, \\ \Omega_i^j - \frac{a_{i,\, n-j}}{2a_{j,\, n-j}}\left(\Omega_0^0 + \Omega_n^n\right) = -\delta_{i,\, n-j,\, k}\frac{a_{i,\, n-j,\, k}}{a_{j,\, n-j}}\omega_0^k; \end{gathered} \tag{33}$$

коэффициенты a_{ij}, a_{ijk} определяются по формулам (21) и (22).

7. Канонический пучок проективных нормалей многообразия V_n^{n-1}

В статье [8] построен канонический пучок проективных нормалей многообразия V_3^2 в P_3 — это канонический пучок проективных нормалей соприкасающейся поверхности S_2, инвариантно связанной с многообразием V_3^2.

Такое построение для многообразия V_n^{n-1} в P_n существенно отличается от соответствующего построения для многообразия V_3^2 в P_3. Это отличие обусловлено тем, что для инвариантной соприкасающейся поверхности S_2 многообразия V_3^2 может быть построен канонический репер в P_3, а для соприкасающейся гиперповерхности S_{n-1}, инвариантно связанной с многообразием V_n^{n-1}, построение канонического репера в P_n невозможно.

Построение канонического пучка проективных нормалей для многообразия V_n^{n-1} в P_n может быть осуществлено с помощью теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г. Ф. Лаптева [1].

Первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект инвариантной гиперповерхности S_{n-1}

$$\Lambda_{ij}^n = a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n\right) \tag{34}$$

это тензор, который симметричен по индексам i и j, как и должно быть для голономной гиперповерхности. При этом, как было отмечено выше, $\Lambda_{ij}^n = 0$, когда $i + j \neq n$.

Дискриминант второго порядка гиперповерхности S_{n-1}, — это определитель a, составленный из компонент тензора a_{ij},

$$a = | a_{ij} |. \tag{35}$$

Все элементы этого определителя, кроме элементов побочной диагонали, равны нулю, поэтому

$$a = - \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,\ n-i} \neq 0. \tag{36}$$

Можно ввести в рассмотрение приведенные миноры матрицы $\| a_{ij} \|$,

$$a^{ij} = \frac{1}{a} A^{ij}, \tag{37}$$

где A^{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя (36). Очевидно,

$$\begin{gathered} a^{ij} = 0 \ \ (i + j \neq n), \\ a^{i,\ n-i} = \frac{(-1)^n}{a_{i,\ n-i}}. \end{gathered} \tag{38}$$

Компоненты Λ_{ijk}^n фундаментального объекта второго порядка поверхности S_{n-1} (см. уравнения (27)) позволяют ввести систему величин

$$b_k = a^{ij}\Lambda_{ijk}^n = a^{i,\ n-1}\Lambda_{i,\ n-i,\ k}^n,$$

$$b^k = a^{kj} b_j = a^{k,\ n-k} b_k = (-1)^n \frac{b_k}{a_{k,\ n-k}},$$

с помощью которых определяется обобщенный тензор Дарбу b_{ijk} — основной трехвалентный тензор третьего порядка гиперповерхности S_{n-1} [1]:

$$b_{ijk} = (n+1)\Lambda^n_{ijk} - a_{(ij}b_{k)}, \tag{39}$$

где (ijk) означает циклическую перестановку индексов.

Тензор Дарбу позволяет ввести двухвалентный тензор

$$b_{ij} = a^{kp}a^{lq}b_{kli}b_{pqj} = a^{k,\,n-k}a^{l,\,n-l}b_{kli}b_{n-k,\,n-l,\,j}, \tag{40}$$

свертка которого с основным контравариантным тензором второго порядка a^{ij} дает объект

$$b_0 = a^{ij}b_{ij} = a^{i,\,n-i}b_{i,\,n-i}. \tag{41}$$

Этот объект является относительным инвариантом. Г. Ф. Лаптев называет его основным дискриминантом третьего порядка гиперповерхности, а определитель, составленный из компонент тензора b_{ij},

$$b = |\, b_{ij}\,|, \tag{42}$$

дополнительным дискриминантом третьего порядка гиперповерхности [1].

Дифференциальные уравнения для b_i и b_0

$$db_i = b_k\Omega^k_i - b_i\Omega^0_0 - (n+1)\left(\Omega^0_i - a_{i,\,n-i}\Omega^{n-i}_n\right) + l_{ij}\omega^j_0,$$
$$db_0 = \Omega^n_n - \Omega^0_0 + c_k\omega^k_0$$

определяют две системы новых величин четвертого порядка l_{ij} и c_k, с помощью которых строятся квазитензоры l^k и I^k следующим образом [1]:

$$l = a^{ij}l_{ij} = a^{i,\,n-i}l_{i,\,n-i},$$
$$\hat{l} = l - \frac{b}{n+1},$$
$$\hat{l}_{ij} = l_{ij} - \frac{b_ib_j}{n+1} - \frac{\hat{l}a_{ij}}{n-1},\ (a_{ij}=0,\ i+j\neq n),$$
$$\hat{l}_k = a^{ip}a^{jq}\hat{l}_{ij}b_{pqk} = a^{i,\,n-i}a^{j,\,n-j}\hat{l}_{ij}b_{n-i,\,n-j,\,k}, \tag{43}$$
$$l^k = b^{kj}\hat{l}_j;$$

$$I_k = \frac{1}{2}\left(c_k - \frac{b_k}{n+1}\right),$$
$$I^k = a^{ki}I_i = a^{k,\,n-k}I_k = \frac{(-1)^n}{a_{k,\,n-k}}I_k. \tag{44}$$

Квазитензоры l^k и I^k дают возможность построить пучок прямых, инвариантно присоединенных к гиперповерхности S_{n-1} и не лежащих в ее касательной гиперплоскости μ. Каждая из прямых пучка определяется двумя точками: M_0 и

$$M = [(\lambda - 1)\, l^k + \lambda I^k]\, M_k + M_n, \tag{15}$$

где λ — абсолютный инвариант [1].

Инвариантный пучок прямых может служить обобщением канонического пучка нормалей для неголономного многообразия V_n^{n-1} в P_n. В случае голономности он совпадает с каноническим пучком проективных нормалей гиперповерхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. «Тр. Моск. мат. о-ва», 1953, т. 2, М., с. 275—382.
2. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. — «Тр. геометр. семинара ВИНИТИ», 1971, т. 3, М., с. 49—94.
3. Остиану Н. М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. — «Тр. геометр. семинара ВИНИТИ», 1973, М., т. 4, с. 71—120.
4. Bompiani E. Sulle Varietà anolonome. — «Rend. dei Lincei», 1938, vol. XXVII, F. 6, p. 37—52.
5. Вагнер В. В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. — VIII Международный конкурс на соискание премии им. Лобачевского. Отчет. Казань, 1937, с. 197—262.
6. Rogers. Some differential properties of the orthogonal trajectories of a congruence of curves etc. — «Proc. Irish Academy», 1912, vol. 29, sect. A, № 6.
7. Роговой М. Р. К проективно дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности. — «Укр. геометр. сб.», вып. 8, 1970, с. 112—119.
8. Роговой М. Р. О соприкасающихся поверхностях неголономного многообразия V_3^2 в P_3, II. — «Укр. геометр. сб.», вып. 14, 1973, с. 88—98.

Поступила 25 марта 1974 г.

УДК 513

Е. В. СКРЫДЛОВА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ПАР

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные конгруэнции $(CP)_{1,2}$ пар фигур C и P, где C — коника, а P — точка, не инцидентная плоскости коники, в которых семейство (C) коник C — однопараметрическое, а многообразие (P) точек P — двупараметрическое (конгруэнция) [2].

Построен геометрически фиксированный репер конгруэнций $(CP)_{1,2}$. Найдены условия инцидентности всех коник семейства (C) конгруэнции $(CP)_{1,2}$ инвариантной квадрике. Исследованы некоторые частные классы конгруэнций $(CP)_{1,2}$.

1. Репер конгруэнций $(CP)_{1,2}$.

Отнесем пространство P_3 к реперу $R = \{A_\alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma = 0, \ldots, 3)$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta,$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0.$$

Рассмотрим вырожденные конгруэнции $(CP)_{1,2}$. Каждой точке P поверхности P соответствует единственная коника C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является некоторая линия Γ_c поверхности (P). В дальнейшем будем рассматривать лишь конгруэнции $(CP)_{1,2}$ общего типа.

1) Касательная плоскость поверхности (P) в точке P пересекает соответствующую конику C в двух несовпадающих точках D_1 и D_2.

2) Поверхность, описанная полюсом прямой D_1D_2 относительно коники C, не является огибающей однопараметрического семейства плоскостей коник C.

Репер $R = \{A_\alpha\}$ специализируем следующим образом: вершину A_0 совмещаем с точкой P, вершины A_i $(i, j, k = 1, 2)$ — с точками D_i, A_3 помещаем в полюс прямой A_1A_2 относительно коники C.

Уравнения коники C (с учетом соответствующей нормировки вершин) и система уравнений Пфаффа конгруэнций $(CP)_{1,2}$ в репере R приводятся соответственно к виду

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \ x^0 = 0;$$

$$\begin{gathered}
\omega_i^0 = a_i\omega_3^0, \ \omega_i^j = \Gamma_i^j \omega_3^0, \ \omega_3^0 = \lambda_k\omega^k, \\
\omega_1^3 = \varphi\omega^1 + \psi\omega^2, \ \omega_2^3 = \psi\omega^1 + \eta\omega^2, \ \omega_0^3 = 0, \\
\omega_3^i = b^i\omega_3^0 + \omega_i^3, \ 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = p\omega_3^0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где линейно независимые формы

$$\omega_0^i = \omega^i$$

приняты в качестве базисных. Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i, j суммирование не производится.

В силу предположения, что поверхность (A_3) не является огибающей семейства плоскостей коник C, будем иметь

$$\omega_3^0 \neq 0.$$

Исследуя систему (1), убеждаемся, что конгруэнции $(CP)_{1,2}$ определяются с произволом двух функций двух аргументов[1].

---

[1] Геометрический смысл этого факта очевиден.

2. Условия инцидентности всех коник семейства (C) инвариантной квадрике

Поставим задачу: найти условия, при которых все коники однопараметрического семейства (C) принадлежат некоторой квадрике Q, уравнение которой в общем случае может быть записано в виде

$$Q \equiv a_{00}(x^0)^2 + 2a_{01}x^0x^1 + 2a_{02}x^0x^2 + 2a_{03}x^0x^3 - 2x^1x^2 + (x^3)^2 = 0. \quad (2)$$

Условие инвариантности квадрики

$$dQ = 2(\theta - \omega_3^3 - a_{03}\omega_3^0)\, Q$$

может быть получено при дифференцировании уравнения (2) при помощи уравнений стационарности точки [1]:

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha, \quad (D\theta = 0).$$

При этом на коэффициенты системы (1) и на функции a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03} накладываются следующие связи:

$$\Gamma_i^j - a_{0i}a_i = 0, \quad b^i - a_{0j} - a_{03}a_j = 0,$$
$$p + a_{01}a_2 + a_{02}a_1 + 2a_{03} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\, da_{00} + a_{00}(\omega_3^3 - \omega_0^0) - a_{0k}\omega^k + a_{00}a_{03}\omega_3^0 = 0. \quad (4)$$

$$da_{0i} + \omega^j - a_{00}\omega_i^0 - a_{0i}(\omega_i^i + \omega_0^0 - 2\omega_3^3) - a_{0j}\omega_i^j - a_{03}\omega_i^3 +$$
$$+ 2a_{0i}a_{03}\omega_3^0 = 0,$$
$$da_{03} + 2(a_{03})^2\omega_3^0 - a_{00}\omega_3^0 - a_{0k}\omega_3^k - a_{03}(\omega_0^0 - \omega_3^3) = 0.$$

Система конечных и дифференциальных уравнений (3) — (5) полностью определяет коэффициенты a_{00}, a_{01} a_{02}, a_{03} квадрики Q и специализирует семейство коник (C) так, чтобы все коники C были инцидентны квадрике Q.

Таким образом, конгруэнции $(CP)_{1,2}$, характеризующиеся принадлежностью всех коник C одной поверхности второго порядка, будут определяться системой пфаффовых и конечных уравнений (1), (3) — (5). Осуществляя замыкание и продолжение этой системы, находим произвол существования конгруэнций $(CP)_{1,2}$ рассматриваемого типа — две функции двух аргументов. Одна из этих функций определяет поверхность (P), а другая — семейство кривых Γ_c.

3. Конгруэнции $(CP)_{1,2}^Q$.

Определение 1. *Конгруэнциями $(CP)_{1,2}^Q$ называются конгруэнции $(CP)_{1,2}$, в которых семейство коник (C) принадлежит квадрике Q, проходящей через точку P.*

В этом случае поверхность P инцидентна квадрике Q.

Для конгруэнций $(CP)_{1,2}$ справедливо равенство

$$a_{00} = 0, \tag{6}$$

в силу которого уравнение (4) принимает вид

$$a_{01}\omega^1 + a_{02}\omega^2 = 0.$$

Так как формы Пфаффа ω^1, ω^2 линейно независимы, последнее условие эквивалентно следующим равенствам:

$$a_{01} = 0, \ a_{02} = 0. \tag{7}$$

С учетом соотношений (6) (7) системы конечных и дифференциальных уравнений (3), (5) преобразуются к виду

$$\Gamma^j_i = 0, \ b^i - a_{03}a_i = 0, \ p + 2a_{03} = 0, \tag{8}$$

$$a_{03}\omega^3_i - \omega^i = 0, \tag{9}$$

$$da_{03} + a_{03}(\omega^3_3 - \omega^0_0) + 2(a_{03})^2\omega^0_3 = 0. \tag{10}$$

Из уравнений (9) непосредственно следует, что для конгруэнций $(CP)^Q_{1,2}$ будут выполняться условия

$$\varphi = \eta = 0, \ a_{03}\psi = 1.$$

Осуществим нормировку вершин репера R таким образом, чтобы $\psi = 1$,
тогда

$$a_{03} = 1. \tag{11}$$

Учитывая равенство (11) в системе уравнений (8), (10), получим

$$b^i = a_i, \ p + 2 = 0.$$

$$\omega^3_3 - \omega^0_0 = -2\omega^0_3,$$

откуда будем иметь

$$\omega^3_3 = -\omega^0_3, \ \omega^0_0 = \omega^0_3, \ \omega^1_1 + \omega^2_2 = 0$$

Таким образом, система пфаффовых уравнений конгруэнций $(CP)^Q_{1,2}$ принимает вид

$$\omega^j_i = 0, \ \omega^0_i = a_i\omega^0_3, \ \omega^3_i = \omega^i, \ \omega^i_3 = \omega^0_i + \omega^i,$$

$$\omega^0_3 = \lambda_k\omega^k, \ \omega^3_3 = -\omega^0_3, \ \omega^0_0 = \omega^0_3, \ \omega^1_1 + \omega^2_2 = 0. \tag{12}$$

Система (12) определяет конгруэнции $(CP)^Q_{1,2}$ с произволом одной функции двух аргументов.

Квадрика Q, инцидентная всем коникам семейства (C) конгруэнций $(CP)^Q_{1,2}$, определяется уравнением

$$Q \equiv 2x^0x^3 - 2x^1x^2 + (x^3)^2 = 0.$$

З а м е ч а н и е. Точки $A_0, A_i, K = A_0 - 2A_3$ принадлежат квадрике Q следовательно, описываемые ими поверхности совпадают с Q. Прямые A_0A_i и A_iK целиком лежат на квадрике Q и являются ее прямолинейными образующими.

Теорема 1. *Конгруэнции $(CP)^{Q}_{1,2}$ обладают следующими свойствами: 1) плоскости $A_0A_iA_3$ касаются квадрики Q в точках A_i; 2) четвертая гармоническая к одному из фокусов луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) относительно вершин A_1 и A_2 является двойной точкой гомографии [8] пары поверхностей (A_0) и (A_3); 3) одна из фокальных поверхностей прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) вырождается в линию, касательная к которой пересекает плоскость коники C в полюсе характеристики плоскости относительно этой коники.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из системы уравнений (12) и формул

$$dA_i = \omega_i^0 A_0 + \omega_i^i A_i + \omega^j A_3.$$

2. Фокальные поверхности (F_i) прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) описываются точками $F_1 = a_1A_2 - a_2A_1$ и $F_2 = \lambda_2A_1 + \lambda_1A_2$. Находим

$$dA_0|_{\omega_3^0=0} = \frac{\omega^1}{\lambda_2}(\lambda_2A_1 - \lambda_1A_2),$$

$$dA_3|_{\omega_3^0=0} = \frac{\omega^1}{\lambda^2}(\lambda_2A_1 - \lambda_1A_2).$$

Имеем

$$(A_1,\ A_2;\ \lambda_2A_1 + \lambda_1A_2,\ \lambda_2A_1 - \lambda_1A_2) = -1,$$

что и требовалось доказать.

3. Фокусы Φ_i луча A_0A_3 прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) определяются формулами

$$\Phi_1 = A_0 - A_3,$$
$$\Phi_2 = A_3 - (1 + a_1\lambda_2 + a_2\lambda_1)A_0.$$

Имеем

$$d\Phi_1 = \omega_3^0 B,$$

где

$$B = A_3 - a_1A_2 - a_2A_1.$$

Поляра точки B относительно коники C определяется уравнениями

$$x^1a_1 + x^2a_2 + x^3 = 0,\ x^0 = 0,$$

которые совпадают с уравнениями характеристики плоскости коники C. Тем самым теорема доказана.

Точка $\tilde{\Phi}_1$ — четвертая гармоническая к фокусу Φ_1 луча A_0A_3 прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) относительно вершин A_0 и A_3, определяется формулой

$$\tilde{\Phi}_1 = A_0 + A_3.$$

Плоскости, инцидентные прямой A_1A_2 и проходящие через Φ_1 или $\tilde{\Phi}_1$, описывают двупараметрические семейства и пересекают квадрику Q соответственно по коникам

$$C_1: \begin{cases} (x^3)^2 + 2x^1x^2 = 0, \\ x^0 + x^3 = 0; \end{cases} \quad C_2: \begin{cases} 3\,(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \\ x^0 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, с конгруэнциями $CP^{Q}_{1,2}$ ассоциируется пара конгруэнций (C_1, C_2) коник C_1 и C_2.

Теорема 2. *Конгруэнции (C_1) и (C_2) коник C_1 и C_2 расслояемы* [3], [4] *к линейчатым многообразиям (A_0A_i)* и (A_iK).

Доказательство. Рассмотрим, например, условия расслоения от конгруэнции коник (C_1) к линейчатой поверхности (A_0A_1). Произвольная точка коники C_1 записывается в виде

$$M = 2\rho A_0 + 2\rho^2 A_1 - A_2 - 2\rho A_3,$$

причем должно выполняться соотношение

$$(dM,\ M,\ A_0,\ A_1) = 0,$$

которое эквивалентно следующему уравнению:

$$d\rho = \rho^2\,(2\omega_1^0 + \omega^2) + \rho\,(\omega_2^2 + \omega_3^0) - \frac{1}{2}\omega^1.$$

Замыкание последнего уравнения удовлетворяется тождественно, что и доказывает расслояемость конгруэнции (C_1) к линейчатой поверхности (A_0A_1). Аналогично доказывается справедливость всех расслоений, указанных в теореме.

4. Расслояемые конгруэнции $(CP)_{1,2}$.

Определение 2. *Расслояемыми конгруэнциями $(CP)_{1,2}$ называются конгруэнции $(CP)_{1,2}$, удовлетворяющие следующим свойствам: 1) существуют односторонние расслоения* [6] *от прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) к конгруэнции касательных к линиям Γ_c; 2) сеть линий на поверхности (P), огибаемая прямыми A_0A_i, сопряжена.*

Пронормируем вершины репера R таким образом, чтобы единичная точка $E = A_1 + A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна касательной к линии Γ_c в точке A_0, тогда

$$\omega_3^0 = \lambda(\omega^1 - \omega^2).$$

Условия 1), 2) определения 2 аналитически записываются в виде

$$\begin{gathered} (\omega_i^3 + \omega_j^3) \wedge \omega_i^j = 0, \\ (\omega_i^i - \omega_j^j - \omega_i^j + \omega_j^i) \wedge \omega_3^j = 0, \qquad (13) \\ (\omega_i^i - \omega_j^j) \wedge \omega_j^i + (\omega_i^3 + \omega_j^3) \wedge \omega_3^i = 0, \end{gathered}$$

$$\psi = 0. \qquad (14)$$

Отметим, что

$$(\omega_1^3+\omega_2^3)\wedge\omega_0^3\neq 0, \tag{15}$$

ибо в противном случае либо система уравнений (1), (13), (14) оказывается противоречивой, либо происходит вырождение прямолинейных конгруэнций $(A_i\ A_3)$, $(A_0\ E)$. Учитывая (15), систему уранений (13) приводим к виду

$$\omega_i^j=0, \tag{16}$$

$$(\omega_i^3+\omega_j^3)\wedge\omega_3^i=0,\ (\omega_i^j-\omega_j^j)\wedge\omega_3^i=0,$$

откуда непосредственно получаем

$$b^1+b^2=0,$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=\mu(\omega_1^3+\omega_2^3).$$

Положим

тогда

$$b^1=b,$$

$$\omega_3^1=b\omega_3^0+\omega_2^3,\ \omega_3^2=-b\omega_3^0+\omega_1^3,$$

а также

$$b\lambda(\varphi+\eta)=\varphi\eta. \tag{17}$$

Замыкая уравнения (16), получим

$$a_2=\eta b,\ a_1=-\varphi b.$$

Таким образом, система пфаффовых уравнений расслояемых конгруэнций $(CP)_{1,2}$ приводится к виду:

$$\omega_1^0=-\varphi b\omega_3^0,\ \omega_2^0=\eta b\omega_3^0,$$

$$\omega_1^3=\varphi\omega^1,\ \omega_2^3=\eta\omega^2, \tag{18}$$

$$\omega_3^1=b\omega_3^0+\omega_2^3,\ \omega_3^2=-b\omega_3^0+\omega_1^3,$$

$$\omega_i^j=0,\ \omega_3^0=\lambda(\omega^1-\omega^2), \tag{19}$$

$$2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=p\omega_3^0,\ \omega_1^1-\omega_2^2=\mu(\omega_1^3+\omega_2^3),$$

причем справедливо равенство (17).

В силу неравенства (15) последнюю нормировку вершин репера R можно осуществить таким образом, что

$$\varphi+\eta=1. \tag{20}$$

Замыкая и продолжая уравнения (18) с учетом нормировки (20), получим

$$d\varphi+\varphi(\omega_0^0+\omega_3^3-2\omega_1^1)=p\lambda\omega^1, \tag{21}$$

$$[db+b(\omega_1^1-\omega_0^0)+p\omega_2^3+\omega^1]\wedge\omega_3^0=0,$$

$$\omega_0^0-\omega_3^3=(2\varphi-1)(\omega_1^1-\omega_2^2) \tag{22}$$

$$b\mu + p + 2 = 0. \tag{23}$$
$$p\mu(2\varphi - 1) = 0, \tag{24}$$

причем в случае
$$p\mu = 0$$
система (17) — (24) оказывается противоречивой. Следовательно, равенство (24) принимает вид
$$2\varphi - 1 = 0. \tag{25}$$

Из уравнения (21) теперь получим
$$2p\lambda + \mu = 0. \tag{26}$$

Учитывая равенства (17), (20), (23), (25), (26), систему уравнений Пфаффа расслояемых конгруэнций $(CP)_{1,2}$ приводим к виду:
$$\begin{gathered}\omega_i^0 = \frac{1}{8}(\omega^j - \omega^i),\ \omega_i^j = 0,\ \ \omega_i^3 = \frac{1}{2}\omega^i,\\ \omega_3^0 = \lambda(\omega^1 - \omega^2),\ \ \omega_3^i = \frac{1}{4}(\omega^i + \omega^j),\ \ \omega_0^0 - \omega_3^3 = 0,\\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = 4\lambda(\omega^1 + \omega^2),\ 2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = -4\lambda\omega_3^0.\end{gathered} \tag{27}$$

Замыкание системы (27) удовлетворяется тождественно как алгебраическое следствие самой системы, следовательно, расслояемые конгруэнции $(CP)_{1,2}$ определяются вполне интегрируемой системой уравнений.

Рассмотрим фокальную точку
$$F = A_1 + A_2 - 2(A_2 + 4\lambda A_3)$$
луча E^*A_3 прямолинейной конгруэнции (E^*A_3), где $E^* = A_1 - A_2$ — четвертая гармоническая точка E относительно вершин A_1 и A_2 репера R.

Обозначим M_2 точку пересечения прямых EF и A_2A_3, а M_1 — точку характеристики плоскости коники C, инцидентную прямой A_2A_3, т. е.
$$M_1 = A_3 - 8\lambda A_2,\ \ M_2 = A_2 + 4\lambda A_3.$$

Имеем
$$\lambda^2 = -\frac{1}{32(M_1,\ M_2;\ A_2\ \ A_3)}.$$

Таким образом, получена характеристика абсолютного инварианта λ.

Теорема 3. *Расслояемые конгруэнции $(CP)_{1,2}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1) A_i суть характеристические точки граней $A_0A_iA_3$; 2) фокусы луча A_1A_2 конгруэнции A_1A_2 гармонически делят вершины A_1A_2 репера R; 3) плоскости коник C образуют пучок; 4) фокусы луча A_0A_3 прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) являются двойными точками гомографии* [8] *пары поверхностей (A_1) и (A_2), причем один из них $(K = A_0 - 2A_3)$*

вырождается в линию, касательная к которой проходит через полюс характеристики плоскости коники C относительно этой коники; 5) пространственный четырехугольник $A_1A_0A_2K$ описывает конфигурацию T [7, с. 177], причем прямолинейные конгруэнции (A_0A_i) являются конгруэнциями W [5, с. 89]; 6) пары прямолинейных конгруэнций (A_0A_3), (A_0E) двусторонне расслояемы.

Доказательство. Имеем

$$dA_i = \omega_i^0 A_0 + \omega_i^i A_i + \omega_i^3 A_3.$$

Фокальные точки $sA_1 + tA_2$ луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением

$$s^2 - t^2 = 0,$$

следовательно, они гармонически делят вершины A_1 и A_2 репера R.

Характеристику

$$x^1 - x^2 - 8\lambda x^3 = 0, \; x^0 = 0, \tag{28}$$

плоскости коники C можно задать двумя точками — E и $N = A_3 - 8\lambda A_2$. Имеем

$$d[EN] = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[EN],$$

т. е. характеристика неподвижна, следовательно, плоскости коник C образуют пучок.

Фокальные точки луча A_0A_3 конгруэнции (A_0A_3) определяются формулами

$$\tilde{K} = A_3, \; K = A_0 - 2A_3,$$

причем

$$dA_i|_{\omega^1 - \omega^2 = 0} = \omega_i^i A_i + \omega_i^3 \tilde{K},$$

$$dA_i|_{\omega^1 + \omega^2 = 0} = \omega_i^i A_i + \frac{(-1)^i}{4}\omega^2 K.$$

Рассмотрим

$$dK = -3\omega_3^0 K + \frac{1}{2}(\omega^1 - \omega^2)(A_1 - A_2 - 8\lambda A_3).$$

Нетрудно убедиться, что точка $A_1 - A_2 - 8\lambda A_3$ является полюсом прямой (28) относительно коники C, что и требовалось доказать.

Фокусы сторон пространственного четырехугольника $A_1A_0A_2K$, каждая из которых описывает двупараметрическое семейство (конгруэнцию), совпадают с вершинами этого четырехугольника. Отметим, что в нашем случае понятие конфигурации T отличается от общепринятого тем, что поверхность (K) вырождается в линию. Так как асимптотические линии поверхностей (A_0), (A_i) определяется одним и тем же уравнением

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0,$$

то конгруэнции (A_0A_i) являются конгруэнциями W.

Расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_0E) к конгруэнции (A_iA_3) задается уравнениями

$$(\omega_i^i - \omega_j^j) \wedge \omega_i^j + (\omega_i^3 + \omega_j^3) \wedge \omega_3^j = 0,$$
$$(\omega_i^i - \omega_j^j) \wedge \omega_i^0 + (\omega_i^3 + \omega_j^3) \wedge \omega_3^0 = 0,$$

которые удовлетворяются в силу системы (27). Обратная расслояемость этих пар вытекает из условия 1) определения 2. Теорема доказана.

Отметим, что каноническое представление поверхности (P), принадлежащей расслояемым конгруэнциям $(CP_{1,2})$, имеет вид

$$z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - \frac{2}{3}\lambda(x^3 - y^3) + [4],$$

где знаком [4] обозначены члены четвертой и выше степени, и

$$x = \frac{x^1}{x^0}, \quad y = \frac{x^2}{x^0}, \quad z = \frac{x^3}{x^0}.$$

Найдено трехпараметрическое семейство соприкасающихся поверхностей второго порядка к поверхности (P):

$$2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{33}(x^3)^2 + \frac{1}{2}a_{03}[4x^0x^3 - (x^1)^2 - (x^2)^2] = 0,$$

из которого выделен пучок квадрик Дарбу [7, с. 74]

$$4x^0x^3 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + 16\lambda x^1x^3 - 16\lambda x^2x^3 + 2a_{33}(x^3)^2 = 0,$$

причем линии Γ_c на поверхности (P) являются линиями Дарбу [7, с. 72—73].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. — „Тр. Моск. мат. об-ва", 1953, № 2, с. 273—283.
2. Малаховский В. С. 5-я Всесоюзная конференция по современным проблемам геометрии. Тезисы докладов. Самарканд. 1972, с. 133.
3. Малаховский В. С. Расслояемые пары конгруэнций фигур. — „Тр. геометр. семинара ВИНИТИ", 1971, № 3, с. 193—220.
4. Похила М. М. Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве (случай пары с общими гиперплоскостями). Дифференциальная геометрия многообразий фигур, — «Тр. Калининградск. ун-та», 1971, вып. 2, с. 43—54.
5. Фиников С. П. Теория конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1950. 180 с.
6. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956. 230 с.
7. Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия. ОНТИ НКТИ СССР, 1937. 146 с.
8. Фиников С. П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.—«Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1951, № 16, вып. 3, с. 235—260.

Поступила 1 марта 1974 г.

УДК 513.838:513.917

В. В. ТИМОШЕНКО

О ТРИ-ТКАНЯХ НАД КОММУТАТИВНЫМИ АССОЦИАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ

В настоящей работе рассматриваются аналитические три-ткани $W_2(A)$ на двумерном аналитическом многообразии над коммутативной ассоциативной алгеброй A с главной единицей. Выведены структурные уравнения и рассмотрена вещественная реализация таких три-тканей. Показано, что вещественной реализацией три-ткани $W_2(A)$ является три-ткань W_{2r} на гладком вещественном многообразии размерности $2r$ (где r — ранг алгебры A). При этом тензор кручения a^i_{jk} ткани W_{2r} равен нуль-тензору, а компоненты b^i_{jkl} тензора кривизны симметричны по нижним индексам и выражаются линейно при помощи структурных констант γ^k_{ij} алгебры A через компоненты аналитической функции $K(x, y)$ двух переменных из алгебры A.

Функция $K(x, y)$ названа кривизной три-ткани $W_2(A)$. При помощи этой функции проведена классификация вещественных три-тканей W_{2r}, являющихся вещественными реализациями тканей над алгебрами. Выделено три случая: 1) $K \equiv 0$, 2) кривизна K на $M_2(A)$ не имеет нулевых и равных делителям нуля значений, 3) кривизна K на $M_2(A)$ нигде не равна нулю и является во всех точках делителем нуля. Доказано, что первому случаю отвечает класс параллелизуемых тканей. Во втором случае при помощи канонизации кривизна K приводится к единице алгебры A. Компоненты b^i_{jkl} тензора кривизны три-ткани W_{2r} выражаются в этом случае только через структурные константы алгебры A. Для третьего случая возможна лишь частичная канонизация.

В заключительном параграфе полученные результаты применяются к изучению тканей над алгебрами комплексных, двойных и дуальных чисел.

1. Аналитические функции и многообразия над алгебрами

Пусть дана коммутативная ассоциативная алгебра A ранга r над полем вещественных чисел R с базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ и структурными константами γ^k_{ij} $(i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, r)$, так что

$$e_i e_j = \gamma^k_{ij} e_k, \tag{1}$$

$$\gamma^k_{ij} = \gamma^k_{ji}, \tag{2}$$

$$\gamma^m_{ij}\gamma^l_{mk} = \gamma^m_{jk}\gamma^l_{im}. \tag{3}$$

Пусть, кроме того, $\varepsilon = \varepsilon^k e_k$ — главная единица алгебры A, тогда

$$\gamma^i_{jk}\varepsilon^k = \delta^i_j, \tag{4}$$

где δ^i_j — символ Кронекера.

Согласно Шефферсу [1], алгебра подобного типа допускает существование аналитических функций. Если $x^1, \ldots, x^r$ — независимые вещественные переменные, а $f^i(x^1, \ldots, x^r)$ — гладкие функции со значениями из R, то положим

$$x = x^k e_k, \; f = f^k e_k.$$

Необходимое и достаточное условие аналитичности функции $f(x) = f^k e_k$, т. е. возможности представления дифференциала $df = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j e_i$ этой функции в виде $df = f' dx \, (dx = dx^k \cdot e_k)$, задается системой дифференциальных уравнений

$$\gamma^i_{kl} \frac{\partial f^l}{\partial x^j} = \gamma^i_{jl} \frac{\partial f^l}{\partial x^k}, \tag{5}$$

обобщающих обычные условия Коши—Римана, или же равносильной ей системой

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \gamma^i_{jk} \varepsilon^l \frac{\partial f^k}{\partial x^l}. \tag{6}$$

Функция f' при этом называется производной функции f по x. Для ее i-й координаты будет справедлива формула

$$f'^i = \varepsilon^j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}. \tag{7}$$

Наряду с обозначением f' для производной функции f по x будем использовать также обозначение $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Понятие аналитической функции от двух переменных $x = x^i e_i$, $y = y^j e_j$ из алгебры A можно ввести так (см. [2]): функция $f = f^i(x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r) \cdot e_i$ называеся аналитической функцией переменных x и y из алгебры A, если она аналитична по каждой из этих переменных в отдельности. Дифференциал такой функции может быть представлен в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

где символами $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ обозначены частная производная функции f по x и по y соответственно.

Свойства аналитических функций от переменных из коммутативной ассоциативной алгебры A с главной единицей во многом совпадают со свойствами аналитических функций комплексных переменных (например, [3]). Сумма, разность, произведение и частное (со знаменателем, не принимающим нулевых и равных делителям нуля значений), а также частные производные и суперпозиция аналитических функций двух переменных из алгебры снова будут аналитическими функциями. Выражения для дифференциала (производной) суммы, разности, произведения и частного двух аналитических функций, так же как и выражение для второго дифференциала аналитической функции, имеют обычный вид.

Введем понятие двумерного аналитического многообразия над алгеброй A.

Пусть M_{2r} — элементарное гладкое вещественное многообразие размерности $2r$. В M_{2r} можно ввести вещественные координаты $x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r$ так, что точка $z = (x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r)$ будет описывать в пространстве R^{2r} открытую область D. Наряду с данными координатами рассматриваются также любые другие допустимые системы координат $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^r, \tilde{y}^1, \ldots, \tilde{y}^r$, связанные с $x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r$ взаимно однозначно соотношениями вида

$$\tilde{x}^i = \varphi^i (x^k, y^l), \ \tilde{y}^j = \psi^j (x^k, y^l) \ (i, \ j, \ k, \ l = 1, \ 2, \ \ldots, \ r),$$

где $\psi^i (x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r)$, $\psi^j (x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r)$ — гладкие вещественнозначные функции, а матрица

$$\frac{\partial \left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^r, \tilde{y}^1, \ldots, \tilde{y}^r\right)}{\partial (x^1, \ldots, x^r, y^1 \ldots, y^r)}.$$

не вырождается.

Введем в области D пространства R^{2r} структуру двумерного пространства над алгеброй A, полагая

$$x = x^i e_i, \ y = y^j e_j. \tag{8}$$

При этом преобразование

$$\tilde{x} = \varphi (x, y), \ \tilde{y} = \psi (x, y) \tag{9}$$

определяет аналитическое преобразование переменных x, y из алгебры, если каждая из функций φ, ψ, задающих это преобразование, является аналитической функцией двух переменных из алгебры A.

Двумерным элементарным аналитическим многообразием $M_2 (A)$ над алгеброй A назовем $2r$-мерное элементарное гладкое вещественное многообразие M_{2r}, в котором посредством (8) введена структура двумерного пространства над алгеброй A и которое снабжено набором допустимых систем координат, связанных между собой аналитическими функциями (9).

На многообразии $M_2 (A)$ можно рассматривать линейные дифференциальные формы

$$\omega = a (x, \ y) \, dx + b (x, \ y) \, dy$$

со значениями из алгебры A (по аналогии с тем, как в [4] рассмотрены формы зо значениями в векторном пространстве) и внешние дифференциальные формы 2-й степени

$$\Omega = a (x, \ y) \ dx \wedge dy.$$

Коэффициентами этих форм являются аналитические функции двух переменных x, y из алгебры A.

Операции внешнего умножения и внешнего дифференцирования для дифференциальных форм со значениями из алгебры A можно ввести следующим способом [4]: если $\omega = \omega^i e_i$, $\theta = \theta^j e_j$ — — внешние дифференциальные формы над алгеброй степеней m и n соответственно, то их внешним произведением по определению будет форма $\omega \wedge \theta = (\omega^i \wedge \theta^j \gamma_{ij}^k) e_k$ степени $m+n$, а внешним дифференциалом $d\omega$ формы $\omega = \omega^i e_i$ будет форма $d\omega = d\omega^i \cdot e_i$ степени $m+1$. При этом останутся справедливыми основные свойства этих операций, имевшие место в действительном случае, а также лемма Картана и теорема Фробениуса.

2. Три-ткани над алгебрами

Пусть на двумерном элементарном аналитическом многообразии $M_2(A)$ над алгеброй A задана аналитическая функция $z = f(x, y)$ двух переменных x и y из алгебры A со значениями в A. Соотношением

$$f(x, y) = 0$$

в области G многообразия $M_2(A)$, где производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ одновременно не обращаются в нуль и не являются делителями нуля, определяется аналитическая одномерная над алгеброй A поверхность.

Если производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ является нулем или делителем нуля, т. е. $\det \| \gamma_{kj}^i f_x'^k \| = 0$, то в силу (6) и (7) это равносильно обращению в нуль определителя $\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$. Точно так же условие равенства нулю или делителю нуля производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ аналитической функции $f(x, y)$ равносильно условию

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \right) = 0.$$

На основании этого мы можем утверждать, что в области G вещественного многообразия M_{2r} оба определителя

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \text{ и } \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \right)$$

одновременно в нуль не обращаются. Поэтому одномерной над алгеброй A поверхности в этой области вещественного многообразия будет соответствовать r-мерная поверхность

$$f^i(x, y) = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, r),$$

где f^i — вещественные компоненты аналитической функции $f(x, y) = f^i e_i$. В силу того, что $f(x, y)$ — аналитическая функция переменных x и y, функции f^i, определяющие в M_{2r} r-мерную поверхность, удовлетворяют условиям (5) или (6) по обеим системам переменных x^j, y^k.

Семейство аналитических одномерных над алгеброй A поверхностей в рассматриваемой области G многообразия $M_2(A)$ можно определить уравнением $f(x, y) = C$, или уравнением Пфаффа $\omega = 0$, где $\omega = gdf$ и функция g не принимает нулевых и равных делителям нуля значений.

Пусть на многообразии $M_2(A)$ задана аналитическая три-ткань $W_2(A)$, т. е. три семейства S_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ аналитических одномерных над алгеброй A поверхностей V_α такие, что через каждую точку M многообразия $M_2(A)$ проходит одна и только одна поверхность каждого из трех семейств, а две поверхности различных семейств имеют не более одной общей точки. На вещественном многообразии M_{2r} ей соответствует вещественная три-ткань W_{2r}, т. е. три r-параметрических семейства r-мерных поверхностей, такие, что через каждую точку многообразия M_{2r} проходит ровно по одной поверхности каждого из трех семейств, а две поверхности различных семейств имеют не более одной общей точки.

Семейства S_α, образующие три-ткань $W_2(A)$, могут быть определены при помощи трех вполне интегрируемых уравнений Пфаффа

$$S_\alpha : \overline{\omega}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Условия полной интегрируемости этих уравнений записываются в виде

$$d\overline{\omega}_\alpha = \overline{\omega}_\alpha \wedge \overline{\theta}_\alpha.$$

Пусть M — произвольная точка многообразия $M_2(A)$. Так как две поверхности V_α и V_β, принадлежащие различным семействам ткани $W_2(A)$ и проходящие через точку M, пересекаются только в этой точке, то определяющие их формы $\overline{\omega}_\alpha$ и $\overline{\omega}_\beta$ при $\alpha \neq \beta$ линейно независимы и образуют базис кольца дифференциальных форм на многообразии $M_2(A)$. Поэтому имеет место соотношение

$$\overline{\omega}_3 = g_1\overline{\omega}_1 + g_2\overline{\omega}_2,$$

где g_1, g_2 — аналитические на $M_2(A)$ функции, не имеющие нулевых и равных делителям нуля значений.

Сделаем замену базиса в кольце дифференциальных форм, положив

$$\omega_1 = g_1\overline{\omega}_1, \quad \omega_2 = g_2\overline{\omega}_2, \quad \omega_3 = -\overline{\omega}_3.$$

Тогда семейства поверхностей S_α определятся соответствующими уравнениями

$$S_\alpha : \omega_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \tag{10}$$

Соотношение, связывавшее формы $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, теперь примет вид

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0. \tag{11}$$

При этом формы ω_α допускают только согласованные преобразования вида

$$\tilde{\omega}_\alpha = g\omega_\alpha, \tag{12}$$

сохраняющие соотношение (11). Здесь g — аналитическая функция двух переменных из алгебры A, не принимающая на многообразии $M_2(A)$ нулевых и равных делителям нуля значений.

Условия полной интегрируемости уравнений Пфаффа (10), определяющих на $M_2(A)$ семейства поверхностей три-ткани $W_2(A)$, имеют вид

$$d\omega_\alpha = \omega_\alpha \wedge \theta_\alpha. \tag{13}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (11) и используя при этом условия (13), получим равенство

$$\omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 + \omega_3 \wedge \theta_3 = 0.$$

Подставляя сюда вместо формы ω_3 ее выражение из (11) и группируя члены, содержащие базисные формы ω_1, ω_2, приходим к выражению

$$\omega_1 \wedge (\theta_1 - \theta_3) + \omega_2 \wedge (\theta_2 - \theta_3) = 0.$$

По лемме Картана формы $\theta_1 - \theta_3$ и $\theta_2 - \theta_3$ можно разложить по линейно независимым формам ω_1 и ω_2, причем разложение это будет иметь вид

$$\theta_1 - \theta_3 = u\omega_1 + v\omega_2$$
$$\theta_2 - \theta_3 = v\omega_1 + w\omega_2.$$

Здесь u, v, w — аналитические функции переменных x, y из алгебры A. Тогда выражения (13) для внешних дифференциалов форм ω_α примут следующий вид:

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge (\theta_3 + u\omega_1 + v\omega_2) = \omega_1 \wedge (\theta_3 + v(\omega_1 + \omega_2)),$$
$$d\omega_2 = \omega_2 \wedge (\theta_3 + v\omega_1 + w\omega_2) = \omega_2 \wedge (\theta_3 + v(\omega_1 + \omega_2)),$$
$$d\omega_3 = \omega_3 \wedge \theta_3 = \omega_3 \wedge (\theta_3 - v\omega_3) = \omega_3 \wedge (\theta_3 + v(\omega_1 + \omega_2)).$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$d\omega_\alpha = \omega_\alpha \wedge \omega, \tag{14}$$

где

$$\omega = \theta_3 + v(\omega_1 + \omega_2). \tag{15}$$

При преобразованиях (12) форм ω_α форма ω изменяется по закону

$$\tilde{\omega} = \omega - \frac{dg}{g}. \tag{16}$$

Действительно, в силу (12) и (14) мы можем записать, что

$$d\tilde{\omega}_\alpha = dg \wedge \omega_\alpha + g d\omega_\alpha = dg \wedge \omega_\alpha + g\omega_\alpha \wedge \omega = g\omega_\alpha \wedge$$
$$\wedge \left(\omega - \frac{dg}{g}\right) = \tilde{\omega}_\alpha \wedge \tilde{\omega},$$

откуда и следует справедливость соотношения (16).

Продифференцировав внешним образом уравнения (14), получим

$$d\omega \wedge \omega_\alpha = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$d\omega = K\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{17}$$

где K — аналитическая функция переменных x и y из алгебры A. Величину K будем называть кривизной ткани $W_2(A)$.

При всех допустимых преобразованиях форм ω_α в силу (16) будет справедливо равенство

$$d\tilde{\omega} = d\omega,$$

или, что то же самое,

$$\tilde{K}\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 = K\omega_1 \wedge \omega_2.$$

С использованием (12) это равенство перепишется в виде

$$g^2\tilde{K}\omega_1 \wedge \omega_2 = K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

откуда получаем следующий закон преобразования для кривизны K три-ткани $W_2(A)$:

$$K = g^2\tilde{K}. \tag{18}$$

Функция g^2, так же как и функция g, будет аналитической функцией двух переменных из алгебры A, не имеющей на многообразии $M_2(A)$ нулевых и равных делителям нуля значений.

Формула (18) показывает, что кривизна K является относительным инвариантом. Поэтому, если кривизна K три-ткани $W_2(A)$ является нулевым в какой-либо одной из допустимых систем координат многообразия $M_2(A)$, то она равна нулю и во всех допустимых системах координат. Если кривизна K не имеет нулевых и равных делителям нуля значений в какой-то одной допустимой системе координат, то и в любой другой допустимой системе координат кривизна ткани $W_2(A)$ не будет принимать таких значений. Если же кривизна K является делителем нуля ранга ρ, то она во всех допустимых системах координат будет делителем нуля этого ранга. (Под рангом делителя нуля $K = K^s e_s$ здесь понимается ранг ρ матрицы $\|\gamma_{sj}^{i} K^s\|$; при этом $0 < \rho < r$).

Проведем классиффикацию три-тканей $W_2(A)$ над коммутативной ассоциативной алгеброй A с единицей. Естественно выделить при этом три случая: кривизна K тождественно равна нулю на многообразии $M_2(A)$, K не принимает нулевых и равных делителям нуля значений и, наконец, кривизна K является всюду на $M_2(A)$ делителем нуля постоянного ранга ρ.

Продифференцируем далее внешним образом уравнение (17). Получим при этом

$$(dK - 2K\omega) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Отсюда по лемме Картана следует, что

$$dK - 2K\omega = h_2\omega_1 - h_1\omega_2, \tag{19}$$

где h_1 и h_2 — аналитические функции переменных x и y из алгебры A. Полученное соотношение еще раз подтверждает, что кривизна K является относительным инвариантом.

Таким образом, формы Пфаффа ω_α, определяющие три-ткань $W_2(A)$ на элементарном аналитическом многообразии $M_2(A)$, связаны зависимостью (11) и удовлетворяют уравнениям (14), которые представляют собой уравнения структуры три-ткани $W_2(A)$. В этих уравнениях и в их дифференциальных продолжениях содержится вся информация о таких тканях. Форма ω, входящая в уравнения структуры (14) и определяемая из (15), удовлетворяет соотношению (17).

По форме уравнения (14) и (17) совпадают с уравнениями структуры три-ткани кривых на действительной плоскости R^2, приведенными в книге [5]. Но по существу они имеют другой смысл, так как у нас входящие в эти уравнения величины являются функциями и формами над произвольной коммутативной и ассоциативной алгеброй A с единицей, а в книге [5] — над полем действительных чисел.

3. Вещественная реализация три-ткани $W_2(A)$ над алгеброй на многообразии M_{2r}

Рассмотрим на многообразии M_{2r}, при помощи которого строилось многообразие $M_2(A)$ над алгеброй A, вещественную реализацию три-ткани $W_2(A)$. Для этой цели воспользуемся разложениями величин со значениями из алгебры по базису $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ этой алгебры.

Тогда $\omega_\alpha = \omega_\alpha^i e_i$, и уравнениям (10), определяющим семейства поверхностей три-ткани $W_2(A)$, на многообразии M_{2r} соответствуют уравнения

$$S_\alpha : \omega_\alpha^i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, \ldots, r), \tag{20}$$

левые части которых в силу (11) связаны соотношениями

$$\omega_1^i + \omega_2^i + \omega_3^i = 0. \tag{21}$$

Представив форму ω в виде $\omega = \omega^k e_k$, мы сможем уравнения структуры (14) три-ткани $W_2(A)$ переписать так:

$$d\omega_\alpha = d\omega_\alpha^i e_i = \omega_\alpha^j e_j \wedge \omega^k e_k = \omega_\alpha^j \wedge \gamma_{jk}^i \omega^k \cdot e_i.$$

Отсюда следует, что на вещественном многообразии M_{2r}

$$d\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^i, \tag{22}$$

где через ω_j^i обозначены формы Пфаффа

$$\omega_j^i = \gamma_{jk}^i \omega^k. \tag{23}$$

Выражения (22) для внешних дифференциалов форм ω_α^i показывают, что системы уравнений Пфаффа (20) являются вполне интегрируемыми.

Расписывая покоординатно уравнение (17), получаем, что

$$d\omega^p = K^s \gamma_{sm}^p \gamma_{kl}^m \omega_1^k \wedge \omega_2^l, \tag{24}$$

где K^s — компоненты кривизны K, $K = K^s e_s$. Свертывая обе части (24) с γ_{pj}^i и учитывая (23), приходим к выражениям

$$d\omega_j^i = b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l \tag{25}$$

где положено

$$b_{jkl}^i = \gamma_{pj}^i \gamma_{sm}^p \gamma_{kl}^m K^s. \tag{26}$$

Таким образом, мы имеем три вполне интегрируемые системы уравнений Пфаффа (20), левые части которых связаны соотношениями (21) и удовлетворяют уравнениям структуры (22). Входящие в структурные уравнения формы Пфаффа ω_j^i, в свою очередь, удовлетворяют соотношениям (25). Такие системы уравнений Пфаффа определяют на многообразии M_{2r} вещественную три-ткань W_{2r} [6]. Сопоставляя уравнения (22) и (25) с соответствующими уравнениями [6], мы можем сделать вывод о том, что у три-ткани W_{2r} — вещественной реализации ткани $W_2(A)$ над алгеброй A на многообразии M_{2r} — отсутствует кручение, а компоненты b_{jkl}^i тензора кривизны подсчитываются по формуле (26).

Формула (26), в частности, показывает, что компоненты b_{jkl}^i тензора кривизны три-ткани W_{2r} не являются независимыми величинами, так как все они линейно выражаются при помощи структурных констант γ_{ij}^k алгебры A через r величин K^s — координаты аналитической функции $K = K^s e_s$ двух переменных x, y из этой алгебры. Поэтому у тензора кривизны три-ткани W_{2r} будет не более, чем r существенных компонент.

Из (26) и (2) вытекает симметричность тензора кривизны по индексам k и l. Можно показать, что тензор кривизны симметричен по всем парам нижних индексов. Действительно, свертывая разность $b^i_{jkl} - b^i_{kjl}$ с вектором e_i, мы получим

$$(b^i_{jkl} - b^i_{kjl})\, e_i = (\gamma^i_{pj}\gamma^p_{sm}\gamma^m_{kl}K^s - \gamma^i_{pk}\gamma^p_{sm}\gamma^m_{jl}K^s)\, e_i = \gamma^p_{sm}e_p e_j \gamma^m_{kl}K^s -$$
$$- \gamma^p_{sm}e_p e_k \gamma^m_{jl}K^s = e_j\gamma^m_{kl}e_m K^s e_s - e_k\gamma^m_{jl}e_m K^s e_s =$$
$$= (e_j e_k e_l - e_k e_j e_l)\, K = 0,$$

а так как векторы e_i линейно независимы, то отсюда и вытекает, что

$$b^i_{jkl} = b^i_{kjl}.$$

Симметричность тензора кривизны по нижним индексам для три-ткани W_{2r} — вещественной реализации ткани $W_2(A)$ над алгеброй — соответствует результату, полученному в работе [6] для многомерных три-тканей без кручения.

Свернув обе части (26) с $\varepsilon^k \varepsilon^l$, получим соотношение

$$\varepsilon^k \varepsilon^l b^i_{jkl} = \gamma^i_{sj}K^s. \tag{27}$$

Рассмотрим геометрический смысл классификации тканей $W_2(A)$ над алгебрами, которая была проведена в п. 2. Фиксируем произвольную точку M многообразия $M_2(A)$. Для этого надо закрепить главные параметры, т. е. положить

$$\omega_1 = \omega_2 = 0.$$

Тогда из (19) следует, что в рассматриваемой точке имеет место соотношение

$$\delta K = 2K\pi. \tag{28}$$

Символом δ обозначено дифференцирование по вторичным параметрам (при закрепленных главных), а π — это значение формы ω в точке M, т. е.

$$\pi = \omega\,|_{\omega_1=\omega_2=0}.$$

Расписывая покоординатно уравнение (28), мы придем к системе из r дифференциальных уравнений, разрешенной относительно δK^i:

$$\delta K^i = 2\gamma^i_{sj}K^s\pi^j \quad (i,\ j,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{29}$$

Выясним, какими особенностями обладают вещественные три-ткани W_{2r}, отвечающие каждому из трех выделенных в п. 2 классов три-тканей $W_2(A)$ над алгебрами.

1. Условие того, что кривизна $K = K^s e_s$ тождественно равна нулю на многообразии $M_2(A)$ равносильно равенству нулю на M_{2r} всех ее компонент K^s. Из (26) следует, что в этом случае тензор кривизны три-ткани W_{2r} — вещественной реализации ткани $W_2(A)$ на многообразии M_{2r} — равен нуль-тензору, т. е.

$$b^i_{jkl} = 0.$$

В совокупности с доказанным ранее равенством нулю тензора кручения ткани W_{2r} это означает (см. [6]), что вещественной реализацией три-ткани $W_2(A)$, у которой кривизна K тождественно равна нулю, является параллелизуемая три-ткань W_{2r} на многообразии M_{2r}. Поэтому и исходную три-ткань $W_2(A)$ мы в этом случае также будем называть параллелизуемой.

2. Кривизна K не равна нулю или делителю нуля на многообразии $M_2(A)$ тогда и только тогда, когда определитель матрицы $\|\gamma^i_{sj}K^s\|$ нигде на M_{2r} не обращается в нуль. В этом случае система (29) допускает разрешение относительно всех r вторичных форм π^j, и поэтому существует (см. [7]) канонический репер многообразия M_{2r}, в котором компоненты K^s кривизны K на всем многообразии сохраняют приданные им произвольные фиксированные значения (но, конечно, такие, что $\det\|\gamma^i_{sj}K^s\| \neq 0$). В частности, компонентам K^s могут быть приданы значения

$$K^s = \varepsilon^s, \tag{30}$$

ибо в этом случае в силу (4) имеем

$$\det\|\gamma^i_{sj}\varepsilon^s\| = \det\|\delta^i_j\| = 1.$$

Тогда $K = \varepsilon$ всюду на $M_2(A)$ и из (19) следует, что форма ω будет линейной комбинацией базисных форм ω_1, ω_2. Формулы (24), (26), (27) примут в соответствии с (30) и (4) более простой вид

$$d\omega^p = \gamma^p_{kl}\omega^k_1 \wedge \omega^l_2, \tag{31}$$

$$b^i_{jkl} = \gamma^i_{pj}\gamma^p_{kl}, \tag{32}$$

$$\varepsilon^k\varepsilon^l b^i_{jkl} = \delta^i_j. \tag{33}$$

В данном случае симметричность b^i_{jkl} по нижним индексам легко усматривается из (32) и (3). При этом мы пользуемся симметричностью γ^k_{ij} по нижним индексам. Кроме этого, формула (32) показывает, что после канонизации тензор кривизны три-ткани W_{2r}, являющейся вещественной реализацией три-ткани $W_2(A)$ рассматриваемого типа, выражается только через структурные константы алгебры A.

3. Кривизна $K = K^s e_s$ является делителем нуля постоянного ранга ρ на многообразии $M_2(A)$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\|\gamma^i_{sj}K^s\|$ всюду на M_{2r} равен ρ. В этом случае $\det\|\gamma^i_{sj}K^s\| = 0$, и канонизация, подобная проведенной во втором пункте, невозможна. Матрица $\|\varepsilon^k\varepsilon^l b^i_{jkl}\|$, куда входят компоненты тензора кривизны b^i_{jkl}, в силу (27) также будет иметь ранг ρ. В п. 4 для три-тканей над некоторыми конкретными алгебрами с делителями нуля будет показана возможность частичной канонизации.

4. Частные случаи

Применим полученные результаты к ряду конкретных коммутативных ассоциативных алгебр с главной единицей.

1. Алгебра $C = R_{(i)}$ комплексных чисел. Это алгебра ранга 2, без делителей нуля. В качестве ее базиса возьмем $\{1, i\}$, т. е. положим $e_1 = 1$, $e_2 = i$. Значения структурных констант γ_{ij}^k, соответствующих таблице умножения

	1	i
1	1	i
i	i	-1

запишем в виде квадратных матриц

$$\Gamma^1 = \| \gamma_{ij}^1 \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma^2 = \| \gamma_{ij}^2 \| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Матрицы (34) симметричны относительно главной диагонали. Так будет и в других рассматриваемых примерах, поскольку $\gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k$.

Пользуясь формулами (25), (34), запишем выражения для форм ω_j^i через координаты формы $\omega = \omega^1 + \omega^2 i$:

$$\| \omega_j^i \| = \begin{pmatrix} \omega^1 & -\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^1 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где i — номер строки, а j — номер столбца.

По формулам (24), (25), учитывая только что полученные выражения для ω_j^i, находим выражения для компонент тензора кривизны три-ткани $W(R(i))$ через координаты K^1, K^2 кривизны $K = K^1 + K^2 i$ рассматриваемой ткани. Результаты вычислений поместим в таблицу

$$\| b_{jkl}^i \| = \begin{pmatrix} B^1 & -B^2 \\ B^2 & B^1 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где i — номер строки, j — номер столбца, и

$$B^1 = K^1\Gamma^1 - K^2\Gamma^2, \quad B^2 = K^2\Gamma^1 + K^1\Gamma^2.$$

Если $K \equiv 0$, то, как было установлено в п. 3, все $b_{jkl}^i = 0$ т. е. тензор кривизны в этом случае — нуль-тензор.

Если $K \neq 0$ и не делитель нуля, то, проведя канонизацию, указанную в п. 3, для тензора кривизны ткани W_4 получим такое выражение:

$$\| b_{jkl}^i \| = \begin{pmatrix} \Gamma^1 & -\Gamma^2 \\ \Gamma^2 & \Gamma^1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Сравнивая матрицы (35) — (37), замечаем, что строение у них одинаково. Этот факт также является общим. В справедливости его нетрудно убедиться, рассмотрев формулы (23) и (26), которые используются при подсчете ω_j^i и b_{jkl}^i.

Случай $K \neq 0$, K — делитель нуля в рассматриваемом примере, невозможен, поскольку алгебра $C = R^{(i)}$ не содержит делителей нуля.

2. Алгебра $R^{(e)}$ двойных чисел. Ранг $R_{(e)}$ равен двум. Ее базис — $\{1, e\}$. Таблица умножения имеет вид

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & e \\ \hline 1 & 1 & e \\ e & e & 1 \end{array}$$

откуда

$$\Gamma^1 = \| \gamma_{ij}^1 \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \| \gamma_{ij}^2 \| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Как и в предыдущем случае, можно подсчитать, что

$$\| \omega_j^i \| = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^1 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

а затем найти выражения для компонент тензора кривизны три-ткани W_4 через компоненты кривизны $K = K^1 + K^2 e$ три-ткани $W_2(R(e))$:

$$\| b_{jkl}^i \| = \begin{pmatrix} B^1 & B^2 \\ B^2 & B^1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Здесь B^1, B^2 — матрицы, выражающиеся через матрицы (38) следующим образом:

$$B^1 = K^1\Gamma^1 + K^2\Gamma^2; \quad B^2 = K^2\Gamma^1 + K^1\Gamma^2.$$

Если кривизна $K \neq 0$ и не является делителем нуля ни в одной точке многообразия $M_2(R(e))$, то, проведя канонизацию, ее можно привести к единице ε алгебры $R(e)$. Координаты ε в выбранном базисе будут такими: $\varepsilon^1 = 1$, $\varepsilon^2 = 0$. Поэтому теперь таблица (40) примет вид

$$\| b_{jkl}^i \| = \begin{pmatrix} \Gamma^1 & \Gamma^2 \\ \Gamma^2 & \Gamma^1 \end{pmatrix},$$

где Γ^1 и Γ^2 берутся из (38).

Делителями нуля алгебры $R(e)$ являются числа вида $\varkappa(1 \pm e)$, где $\varkappa \in R(e)$ и $\varkappa(1 \pm e) \neq 0$. Поэтому в случае, когда кривизна K всюду на $M_2(R(e))$ является делителем нуля (ранга $\rho = 1$), она имеет вид

$$K = g(1 \pm e),$$

где $g = g(x, y)$ — аналитическая функция двух переменных из алгебры $A = R(e)$, не обращающаяся нигде на $M_2(A)$ в нуль и не допускающая ни в одной точке этого многообразия множителем числа $1 \mp e$ соответственно. Мы остановимся подробно лишь на случае $K = g(1+e)$, поскольку для $K = g(1-e)$ все делается аналогично.

Итак, пусть

$$K = g(1+e).$$

Условие того, что функция $g = g^1 + g^2 e$ нигде на $M_2(A)$ не обращается в нуль и не принимает значений вида $\varkappa(1-e)$, равносильно тому, что сумма $g^1 + g^2$ нигде на многообразии M_4 не обращается в нуль. Тогда уравнение (28) перепишется в виде

$$\delta g \cdot (1+e) = 2g(1+e)\pi.$$

Разлагая все входящие сюда величины по базису $\{1, e\}$ алгебры $R(e)$, получим, что

$$(\delta g^1 + \delta g^2 \cdot e)(1+e) = 2(g^1 + g^2 e)(1+e)(\pi^1 + \pi^2 e),$$

или

$$\delta(g^1+g^2) - 2(g^1+g^2)(\pi^1+\pi^2) + [\delta(g^1+g^2) - 2(g^1+g^2) \times \\ \times (\pi^1+\pi^2)]\, e = 0.$$

Отсюда следует единственное равенство

$$\delta(g^1+g^2) = 2(g^1+g^2)(\pi^1+\pi^2). \qquad (41)$$

Поскольку $g^1 + g^2 \neq 0$ во всех точках многообразия M_4, то при помощи канонизации можно привести $g^1 + g^2$ к вещественной единице всюду на M_4. Тогда из (41) следует, что

$$\pi^1 + \pi^2 = 0,$$

а это означает, что после канонизации форма $\omega^1 + \omega^2$ становится главной формой на многообразии M_4. При $g^1 + g^2 = 1$ мы получим такое значение для кривизны K:

$$K = g(1+e) = 1+e.$$

В случае $K = g(1-e)$ формула (41) будет выглядеть несколько иначе

$$\delta(g^1-g^2) = 2(g^1-g^2)(\pi^1-\pi^2).$$

В результате канонизации функция $g^1 - g^2$ может быть приведена к 1. Тогда форма $\omega^1 - \omega^2$ станет главной на M_4, а кривизна K примет значение

$$K = g(1-e) = 1-e.$$

Тензор кривизны три-ткани W_4, являющейся вещественной реализацией ткани $W_2(R(e))$, при $K = 1+e$ равен

$$\| b^i_{jkl} \| = \begin{pmatrix} \Gamma^1+\Gamma^2 & \Gamma^1+\Gamma^2 \\ \Gamma^1+\Gamma^2 & \Gamma^1+\Gamma^2 \end{pmatrix},$$

т. е. все его компоненты равны 1. Для три-ткани, соответствующей случаю $K = 1 - e$, получим

$$\|b^i_{jkl}\| = \begin{pmatrix} \Gamma^1 - \Gamma^2 & \Gamma^2 - \Gamma^1 \\ \Gamma^2 - \Gamma^1 & \Gamma^1 - \Gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь все компоненты, имеющие ровно три одинаковых индекса (1 или 2), равны -1, все же остальные компоненты тензора кривизны b^i_{jkl} равны 1.

3. Алгебра $R(\varepsilon)$ дуальных чисел. Ранг этой алгебры также равен двум. В качестве базиса возьмем $\{1, \varepsilon\}$, т. е. положим $e_1 = 1$, $e_2 = \varepsilon$. Таблица умножения для базисных элементов алгебры $R(\varepsilon)$ имеет вид

	1	ε
1	1	ε
ε	ε	0

а ее структурные константы — вид

$$\Gamma^1 = \|\gamma^1_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \|\gamma^2_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

$$\|\omega^i_j\| = \begin{pmatrix} \omega^1 & 0 \\ \omega^2 & \omega^1 \end{pmatrix},$$

и таблица компонент тензора b^i_{jkl} запишется в виде

$$\|b^i_{jkl}\| = \begin{pmatrix} B^1 & 0 \\ B^2 & B^1 \end{pmatrix},$$

где

$$B^1 = K^1\Gamma^1, \quad B^2 = K^2\Gamma^1 + K^1\Gamma^2.$$

В том случае, когда кривизна K не равна нулю и делителю нуля, после канонизации будем иметь

$$\|b^i_{jkl}\| = \begin{pmatrix} \Gamma^1 & 0 \\ \Gamma^2 & \Gamma^1 \end{pmatrix},$$

где Γ^1 и Γ^2 берутся из (42).

Делителями нуля алгебры $R(\varepsilon)$ являются числа вида $\varkappa\varepsilon$, где $\varkappa \in R(\varepsilon)$ и $\varkappa\varepsilon \neq 0$. Поэтому, если кривизна K ткани $W_2(R(\varepsilon))$ является делителем нуля всюду на $M_2(R(\varepsilon))$, то она имеет вид

$$K = g\varepsilon, \tag{43}$$

где $g = g^1 + g^2\varepsilon$ — аналитическая функция двух переменных из алгебры $R(\varepsilon)$, не принимающая на $M_2(R(\varepsilon))$ нулевых и равных делителям нуля значений. Последнее равносильно тому, что $g^1 \neq 0$ нигде на многообразии M_4. Подставляя K из формулы (43) в (28), получим

$$\delta g \cdot \varepsilon = 2g\varepsilon\pi.$$

Разлагая величины, входящие в эту формулу, по базису $\{1, \varepsilon\}$, мы придем к соотношению

$$\delta g^1 + \delta g^2 \cdot \varepsilon) \varepsilon = 2 (g^1 + g^2 \varepsilon) \varepsilon (\pi^1 + \pi^2 \varepsilon),$$

откуда снова следует лишь одно уравнение

$$\delta g^1 = 2 g^1 \pi^1. \tag{44}$$

Так как $g^1 \neq 0$, то эту функцию можно привести к вещественной единице на всем многообразии M_4. Тогда из (44) следует, что

$$\pi^1 = 0,$$

т. е. форма ω^1 после такой канонизации становится главной на многообразии M_4. В силу формулы (43)

$$K = \varepsilon.$$

Напомним, что здесь ε — элемент базиса $\{1, \varepsilon\}$ алгебры дуальных чисел. Тензор кривизны три-ткани W_4 — вещественной реализации ткани $W_2(R(\varepsilon))$ рассматриваемого типа — определится равенством

$$\| b^i_{jkl} \| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Равенство (45) показывает, что у тензора кривизны b^i_{jkl} лишь одна компонента отлична от нуля: $b^2_{111} = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scheffers G. Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich komplexen Functionen. Leipzig. Berichte, 1893, 45, S 828—848.
2. Широков А. П. Об одном типе G-структур, определяемых алгебрами.— «Тр. геометр. семинара ин-та науч. информ. АН СССР», 1966, 1, с. 425—456.
3. Ketchum P. W. Analytic functions of hypercomplex variables. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 30, № 4, 1928, p. 641—667.
4. Bernard D. Sur la géométrie différentielle des G-structures. Paris, 1960.
5. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М., Физматгиз, 1959. 144 с.
6. Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей.—«Тр. геометр. семинара ин-та науч. информ. АН СССР», 1969, 2, с. 7—31.
7. Остиану Н. М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Revue Math. Pures Appl. (RPR), 7 № 2, 1962, с. 231—340.

Поступила 3 декабря 1974 г.

СОДЕРЖАНИЕ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский межведомственный тематический научный сборник

Выпуск 18

Редактор *Л. Ф. Кизилова*

Обложка художника *А. И. Удовенко*

Технический редактор *Г. П. Александрова*

Корректоры *Л. П. Пипенко, Л. А. Федоренко*

Сдано в набор 5/V 1975 г. Подписано в печать 25/IX 1975 г. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Усл.-печ.л. 9,75. Уч.-изд.л. 9,6. Тираж 1000. Зак. 5-1133. БЦ 50343. Цена 67 коп.

Издательство издательского объединения «Вища школа» при Харьковском государственном университете 310003, Харьков, Университетская, 16.

Отпечатано с матриц Книжной фабрики «Коммунист» в Типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков, Университетская, 16. Зак. 2400.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Об оценках диаметра и объема подмногообразия евклидова пространства. А м и н о в Ю. А. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 3—15.

Доказывается, что область n-мерного риманова пространства F^n не может быть вложена изометрически в достаточно малый шар евклидова пространства E^{2n-3}. Для геодезического шара гиперповерхности устанавливаются оценки объема и диаметра, включающие интегральную кривизну. В работе дается также одно внутреннее условие неограниченности поверхности в E .

Список лит. 10 назв.

УДК 513

Конгруэнция осей коничеcкой сети. Б л а н к Я. П. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 16—20.

Получены необходимые и достаточные условия, чтобы конгруэнция осей конической сети поверхности Петерсона была конгруэнцией W.

Список лит. 3 назв.

УДК 513

Об эйлеровой характеристике компактных поверхностей отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве. Б о р и с е н к о А. А. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 20—25.

В статье рассматриваются компактные l-мерные поверхности F^l в $(2l-1)$-мерном римановом пространстве. Устанавливается, что если внешняя кривизна F^l отрицательна, то эйлерова характеристика F^l равна нулю, а универсальная накрывающая поверхности F^l является параллелизуемым многообразием. С помощью этого результата доказываются некоторые теоремы о невозможности изометрического погружения l-мерной поверхности в $(2l-1)$-мерное риманово пространство.

Список лит. 6 назв.

УДК 513

О седловых поверхностях в сферическом пространстве. Б о р и с е н к о А. А. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 25—27.

Рассматривается строение поверхности, гомеоморфной сфере, с неположительной внешней кривизной в сферическом пространстве. Доказывается теорема: пусть F — гомеоморфная сфере поверхность класса C^2 в сферическом пространстве S^3, гауссова кривизна которой не больше единицы. Если на F лежит большая окружность S^1 и F однозначно регулярно проектируется на большую сферу, то F — большая сфера.

Список лит. 4 назв.

УДК 513.838

Об одном классе четырехмерных шестиугольных три-тканей. Боцу В. П. „Украинский геометрический сборник“, вып, 18, 1975, с. 27—37.

В работе рассматривается специальный класс четырехмерных шестиугольных три-тканей, для которых поверхность третьего порядка тангенциально вырождена. В этом случае она становится конусом третьего порядка. Доказано, что при этом все основные тензоры три-ткани имеют ранг, равный единице. Дается полное описание локальной алгебры координатной лупы изучаемой три-ткани. Алгебраически рассматриваемая ткань характеризуется тем, что все коммутаторы и ассоциаторы координатных луп такой три-ткани коллинеарны между собой.

Список лит. 5 назв.

УДК 513

К теории кривизны системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4. Глова Н. И. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 37—48.

В работе дано обобщение теоремы Менье и построена индикатриса нормальной кривизны. Введены понятия полной кривизны системы — как кривизны двумерной поверхности, которую образуют в каждой точке E_4 геодезические „прямейшие“, и гауссовой кривизны — с помощью сферических изображений двумя векторами, соответствующими касательной 2-плоскости. Обе кривизны совпадают в случае выполнения условий интегрируемости. Рассмотрены также геодезическая кривизна интегральных линий, средняя кривизна системы и некоторые их свойства.

Список лит. 10 назв.

УДК 513

О локальной неизгибаемости выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства. Горзий Т. А. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 49—50.

Доказывается локальная неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства — выпуклая гиперповерхность n-мерного эллиптического пространства является жесткой и однозначно определяется метрикой окрестности каждой точки, не принадлежащей плоской области размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$.

Список лит. 3 назв.

УДК 513

Об условиях Нариаи в общей теории относительности. Денисов В. И. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 50—53.

В работе доказано, что дополнительные условия, полученные Нариаи, которым должны удовлетворять разрывы производных $\frac{dg_{ik}}{dx^j}$ и разрывы тензора энергии-импульса материи T^{ik}, выполняются тривиально, если разрыв $\left[\frac{dg_{ik}}{dx^j}\right]$ продолен.

Доказано, что условия Нариаи нетривиальны лишь в том случае, когда гиперповерхность разрыва изотропна и разрыв $\left[\frac{dg_{ik}}{dx^j}\right]$ имеет поперечную часть.

Список лит. 6 назв.

УДК 513

Устойчивость решений обобщенных уравнений Минковского для шара. Дискант В. И. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 53—59.

Пусть $V_m(X)$ — m-й интеграл кривизны выпуклого тела X в n-мерном евклидовом пространстве, E — единичный шар.

Доказано, что если для $1 \leqslant k < m < n$,
$\Delta_{m,k}(X) = V_k^m(X) - V_m^k(X)V^{m-k}(E) < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $V_m(X) = V(E)$, то отклонение тела X от единичного шара не превосходит $C\varepsilon^a$, где $a = \frac{1}{n!2^{n-2}}$ и постоянная C не зависит от выбора тела X.

Аналогичная теорема устойчивости доказана для обобщенного неравенства Брунна.

Список лит. 6 назв.

УДК 513

Некоторые конструктивные свойства алгебраических поверхностей переноса. Игнатенко В. Ф. „Украинский геометрический сборник", вып. 18. 1975, с. 59—65.

В статье находятся общие свойства алгебраических поверхностей переноса, связанные с их геометрическим образованием, например, с помощью связки прямых и биективной ей связки цилиндров. Попутно рассматривается образование произвольной алгебраической гиперповерхности в евклидовом E^m и дается обобщение теоремы Зейдевича.

Список лит. 7 назв.

УДК 513

Расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции, ортогональные к поверхностям нулевой кривизны. Кованцов Н. И. „Украинский геометрический сборник", вып. 18 1975, с. 65—73.

Доказывается, что комплексы, расслаивающиеся в однопараметрические семейства нормальных конгруэнций с ортогональными к ним поверхностями нулевой кривизны, есть комплексы с бесконечно удаленным инфлекционным центром. Каждый такой комплекс определяется заданием некоторой конгруэнции. На одной из фокальных поверхностей этой конгруэнции возникает несиметричная сопряженность, которая совпадает с обычной сопряженностью тогда и только тогда, когда одно семейство фокальных кривых на указанной фокальной поверхности состоит из геодезических. Дается способ построения торсов ортогональных к нормальным конгруэнциям рассматриваемых комплексов.

Список лит. 3 назв.

УДК 513

О К-расслоении комплекса прямых. Кованцов Н. И., Мягков В. И. „Украинский геометрический сборник", вып. 18, 1975, с. 74—84.

Рассматривается случай функционального расслоения комплекса в нормальные конгруэнции. Поверхности σ, ортогональные к этим конгруэнциям, имеют вдоль каждого луча полную кривизну, определяемую лишь этим лучом. Дается безынтегральное представление комплексов, допускающих указанное расслоение. Находятся уравнения поверхностей σ. K-расслоение таких комплексов определяется с произволом в одну функцию двух аргументов. Этим обобщается рассмотренный ранее случай, при котором поверхности σ есть поверхности постоянной кривизны.

Список лит. 10 назв.

УДК 513.71

Квадратичные комплексы прямых, имеющие касание второго порядка с заданной парой комплексов. Курбанов Н. «Украинский геометрический сборник», вып. 18, 1975, с. 84—90.

Доказывается, что произвольная пара комплексов прямых в трехмерном точечном пространстве допускает единственный квадратичный комплекс, имеющий с каждым из комплексов пары касание второго порядка.

Список лит. 2 назв.

УДК 513

Теоремы существования для выпуклых поверхностей с краем. II. Медяник А. И. „Украинский геометрический сборник", вып. 18, 1975, с. 90—98.

Доказана теорема существования для выпуклой поверхности ограниченной кривизны, у которой сферическое изображение совпадает с данной выпуклой областью, лежащей строго внутри полусферы, опорная функция на границе сферического изображения обращается в заданную непрерывную функцию, а главные радиусы кривизны R_1 и R_2 во внутренней точке поверхности с внешней нормалью n удовлетворяет уравнению

$$f(R_1R_2, R_1 + R_2) = \varphi(n),$$

где функции f и φ — дважды непрерывно дифференцируемы. Кроме того, функция f удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, основным из которых является условие вогнутости. Установлено также, что искомая поверхность принадлежит классу C^{k+1}, если функции f и φ принадлежат классу $C^k (\kappa \geqslant 3)$.

Список лит. 4 назв.

УДК 513

Кратчайшая с неспрямляемым сферическим изображением. II. Милка А. Д. „Украинский геометрический сборник", вып. 18, 1975, с. 98—107.

Доказывается утверждение: Пусть Λ — открытый отрезок, а $M \subset \Lambda$ — замкнутое непустое нигде не плотное множество. Тогда на некоторой выпуклой поверхности F существует кратчайшая линия Λ^*, изометричная Λ, такая, что сферическое изображение этой кратчайшей в сколь угодно малой окрестности любой из точек ее подмножества M^*, соответствующего множеству M по изометрии, не спрямляемо. Множество M^*, в определенном смысле составлено из особых точек кратчайшей Λ^*. Отмечается, что применяемая в статье конструкция позволяет строить кратчайшие, все точки которых — особые. Приводятся также некоторые другие примеры кратчайших с изолированными особыми точками. Описывается общий метод для построения подобных примеров, сводящийся к решению некоторой системы неравенств. Анонсируется утверждение: особая точка кратчайшей не инвариантна при изгибании выпуклой поверхности в классе выпуклых.

Список лит. 2 назв.

УДК 513.71

Нормально-инфлекционные комплексы с тройным инфлекционным центром. Можарский В. В. „Украинский геометрический сборник", вып. 18, 1975, с. 107—115.

В работе дается безынтегральное представление достаточно широкого класса нормально-инфлекционных комплексов с тройным инфлекционным центром. Широта этого класса — три функции одного аргумента (тогда как широта класса всех исследуемых комплексов — четыре функции одного аргумента). Одновременно приводятся геометрические свойства фокальных поверхностей тех конгруэнций, которые порождают исследуемые комплексы.

Список лит. 6 назв.

УДК 513.73

О соприкасающихся гиперповерхностях неголономного многообразия. V_n^{n-1}, Роговой М. Р. „Украинский геометрический сборник", вып. 18, 1975, 116—126.

Для неголономного многообразия V_n^{n-1} в P_n обобщается известная теорема, которую для V_3^2 в P_3 доказал Е. Бомпиани.

Строится соприкасающаяся гиперповерхность, инвариантно связанная многообразием V_n^{n-1} и с ее помощью методом Г. Ф. Лаптева строится канонический пучок проективных нормалей многообразия V_n^{n-1}.

Список лит. 8 назв.

УДК 513

Об одном классе вырожденных конгруэнций квадратичных пар. Скрыдлова Е. В. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с. 126—135.

В трехмерном проективном пространстве задано однопараметрическое множество коник C и биективное ему множество кривых Γ_c на некоторой поверхности S. Коника C и не лежащая в ее плоскости какая-либо точка P соответствующей кривой Γ_c составляют пару. Множество таких пар зависит от двух параметров, поэтому представляет собой конгруэнцию пар; конгруэнция названа вырожденной, так как соответствие между кониками C и точками P не биективно, и обозначена символом $(CP)_{1,2}$.

Построен репер конгруэнции, выяснено, что $(CP)_{1,2}$ определяется с произволом двух функций от двух аргументов. Найдены условия принадлежности всех коник C одной квадрике Q и подробно исследован случай — конгруэнция $(CP)^{Q}_{1,2}$, когда квадрика Q проходит через точку P. Исследованы расслояемые конгруэнции $(CP)_{1,2}$, т.е. такие, для которых существует одностороннее расслоение ассоциированных прямолинейных конгруэнций при условии сопряженности координатной сети на поверхности S.

Список лит. 8 назв.

УДК 513.838: 513.917

О три-тканях над коммутативными ассоциативными алгебрами. Тимошенко В. В. „Украинский геометрический сборник“, вып. 18, 1975, с.136—151.

В работе рассмотрены аналитические три-ткани $W_2(A)$ на двумерном аналитическом многообразии над коммутативной ассоциативной алгеброй A ранга r с главной единицей. Показано, что вещественной реализацией ткани над алгеброй является три-ткань W_{2r} на гладком вещественном многообразии размерности $2r$. Тензор кручения ткани W_{2r} равен нулю, а тензор кривизны симметричен и выражается через компоненты аналитической функции $K(x,y)$ двух переменных из алгебры A которая является кривизной ткани $W_2(A)$. С помощью функции $K(x,y)$ проведена классификация вещественных три-тканей W_{2r}, представляющих собой вещественную реализацию тканей над алгебрами. В качестве примеров рассмотрены три-ткани над алгебрами комплексных, двойных и дуальных чисел.

Список лит. 7 назв.