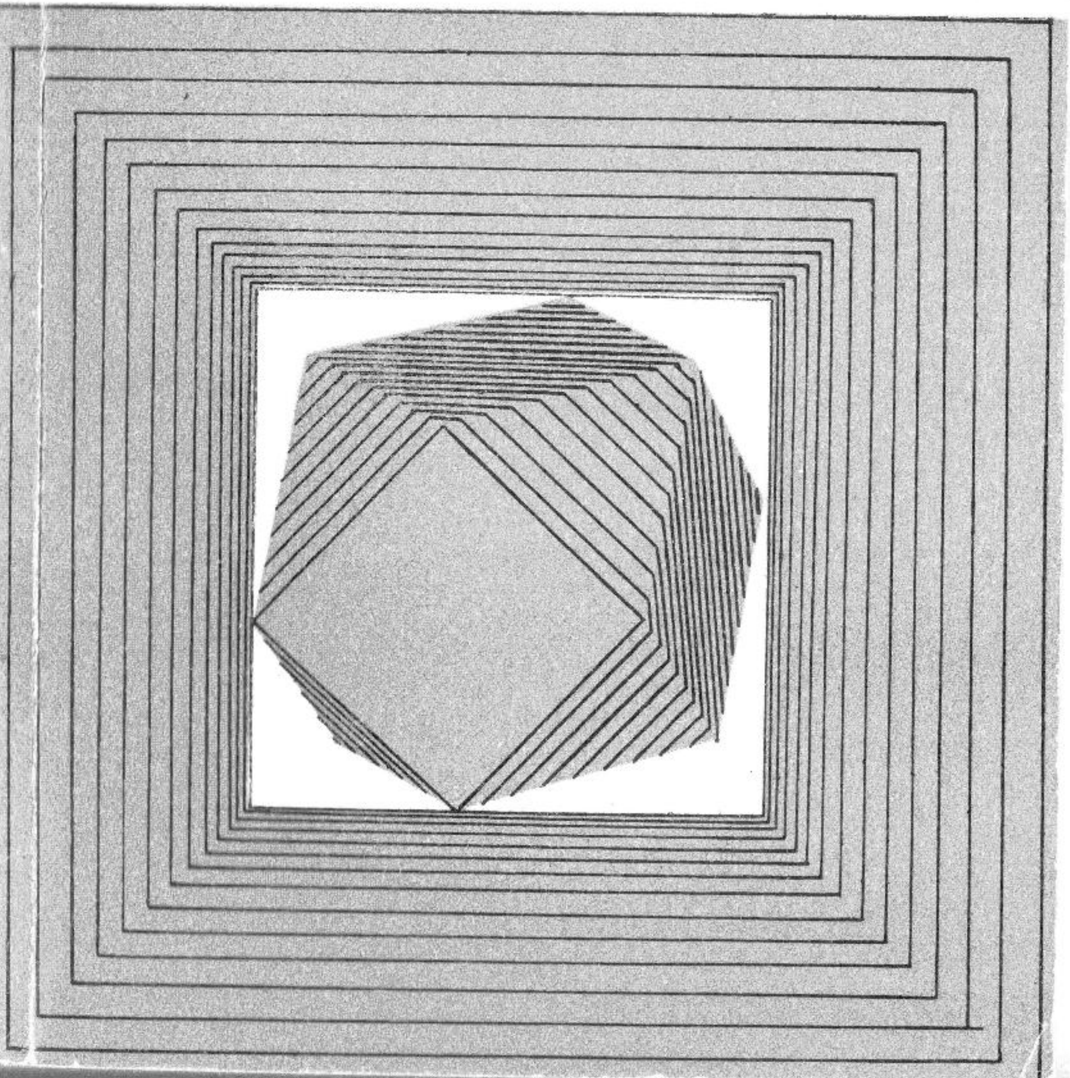
УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск **17**



УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
тематический
научный сборник

ВЫПУСК 17

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
Харьков — 1975

В сборнике рассматриваются сети на поверхностях в изотропном пространстве, кручение двумерных поверхностей в многомерном пространстве, строение невыпуклых поверхностей разных размерностей в сферическом пространстве, поведение кратчайшей на выпуклой поверхности, изгибание выпуклой поверхности с границей, однозначная определенность выпуклых гиперповерхностей, некоторые типы обобщенных пространств, строение комплексов прямых и другие вопросы геометрии.

Предназначен для научных работников, аспирантов математических специальностей.

Адрес редакционной коллегии:

310077, Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

Редакция естественнонаучной литературы
И. о. зав. редакцией *А. Г. Роскопыт*

$У \frac{20203-248}{М226(04)-75}$ 133—75

УДК 513

Ю. А. АМИНОВ

КРУЧЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Оценка кручения поверхности в E^n

Так как на любой замкнутой поверхности в E^3 класса C^2 существует точка, в которой гауссова кривизна $K>0$, то замкнутую поверхность с $K\leqslant 0$ нельзя погрузить в этом классе в E^3. В то же время известно, что в E^4 существуют тор Клиффорда, полный лист Мебиуса и бутылка Клейна с локально евклидовой метрикой. В E^4 существуют замкнутые поверхности с $K\leqslant 0$ и эйлеровой характеристикой $\chi<0$ [1] и более того с $K<0$ [2]. Как показано в [3], любая компактная область на плоскости с метрикой класса $C^{3,\alpha}$ погружается в E^4 в виде поверхности класса $C^{2,\alpha}$. В этой же работе дан обзор имеющихся результатов.

Невозможность погружения замкнутой поверхности с $K\leqslant 0$ в E^3 геометрически можно интерпретировать тем обстоятельством, что если она погружена в E^n, то ее «кручение» в E^n должно быть $\neq 0$. Мы дадим численное выражение для «кручения» поверхности и оценим его через радиус содержащего поверхность шара, площадь поверхности и эйлерову характеристику. Определим кручение $\varkappa$ поверхности F^2 в E^n. Рассмотрим в точке $x\in F^2$ эллипс нормальной кривизны [4, с. 252]. Если $\frac{d^2x}{ds^2}$ — вторая производная радиус-вектора по геодезической на F^2, то конец этого вектора, отложенного от точки x, при изменении направления геодезической описывает кривую — эллипс нормальной кривизны. Он расположен в нормальном пространстве N_x. Возьмем начало декартовых координат в N_x в точке x и первые две оси направим параллельно осям эллипса, третью ось направим по кратчайшей, соединяющей x с плоскостью эллипса, остальные им ортогонально. Пусть a и b — величины полуосей эллипса, $(\alpha, \beta, \gamma, 0 \ldots 0)$ — координаты его центра. Если F^2 лежит в E^3, то эллипс вырождается в отрезок прямой, проходящей через x. В общем случае имеется *«кручение»* $\varkappa$, *величину которого определим следующим числом*:

$$\varkappa=(a+|\alpha|+\gamma)(b+|\beta|+\gamma). \tag{1}$$

Если F^2 лежит в E^3, то очевидно $\varkappa\equiv 0$.

Обратно, если кручение $\varkappa\equiv 0$ и гауссова кривизна $K\neq 0$, то поверхность F^2 лежит в трехмерном пространстве E^3. (Добавочное условие на K аналогично условию на кривизну кривой

$k \neq 0$, для того чтобы кривая с кручением $\varkappa = 0$ лежала в плоскости). Действительно, в случае $\varkappa = 0$ имеем, например, $a + \gamma + |\alpha| = 0$. Это означает, что в точке $x \in F^2$ $\gamma = 0$, т. е. плоскость эллипса проходит через x, $a = 0$ — эллипс вырождается в отрезок прямой, $\alpha = 0$ — эта прямая проходит через x. Направим единичный вектор $\boldsymbol{n}_1$ вдоль этой прямой, а векторы $\boldsymbol{n}_\rho$, $\rho \geqslant 2$, ортогонально к $\boldsymbol{n}_1$. Пусть $II^k = L^k_{ij} du^i du^j$ вторые квадратичные формы по отношению к векторам $\boldsymbol{n}_k$. Тогда $II^\rho = 0$ при $\rho \geqslant 2$. Из уравнений Кодацци [5, с. 196]

$$L^\rho_{ij,k} - L^\rho_{ik,j} = \sum_\tau \nu_{\tau\rho|k} L^\tau_{ij} - \nu_{\tau\rho|j} L^\tau_{ik},$$

где $\nu_{\tau\rho|k} = (n_\tau n_{\rho u^k})$, получим при $\rho \geqslant 2$

$$\nu_{1\rho|1} L^1_{22} - \nu_{1\rho|2} L^1_{12} = 0,$$

$$\nu_{1\rho|1} L^1_{12} - \nu_{1\rho|2} L^1_{11} = 0.$$

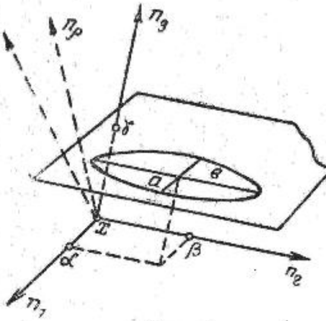


Рис. 1

Так как гауссова кривизна $K = L^1_{11} L^1_{22} - (L^1_{12})^2 \neq 0$, то отсюда следует $\nu_{1\rho|1} = \nu_{1\rho|2} = 0$, т. е. $(n_\rho n_{1u^i}) = 0$. Вдоль кривой $u^i = u^i(t)$ на F^2 возьмем пространство $E^3(t)$, натянутое на векторы $\boldsymbol{x}_{u^1}$, $\boldsymbol{x}_{u^2}$ и $\boldsymbol{n}_1$. Пусть $\boldsymbol{y}(t)$ — произвольное гладкое поле вдоль кривой на F^2, такое что $\boldsymbol{y}(t) \in E^3(t)$. Полученные условия $\nu_{1\rho|i} = 0$ и $II^\rho = 0$ при $\rho \geqslant 2$ показывают, что $y'_t \in E^3(t)$. Отсюда сведением к системе трех линейных дифференциальных уравнений устанавливаем, что существует такое поле $\boldsymbol{e}_1(t) \in E^3(t)$, что $\boldsymbol{e}'_1 = 0$. Плоскость $E^2(t) \subset E^3(t)$, ортогональная к $\boldsymbol{e}_1$, аналогично $E^3(t)$ обладает свойством: если поле $\boldsymbol{z}(t) \subset E^2(t)$, т. $\boldsymbol{z}'_t \in E^2(t)$. Поэтому существуют поля $\boldsymbol{e}_2(t)$ и $\boldsymbol{e}_3(t)$ такие, что $\boldsymbol{e}'_i \in E^3(t)$ и $\boldsymbol{e}'_i = 0$. Это означает, что $E^3(t)$ постоянно на кривой, а в силу ее произвольности и на F^2. Следовательно, F^2 лежит в некотором трехмерном пространстве, параллельном E^3

В отличие от кручения кривой, в выражение которого входят третьи производные, кручение поверхности $\varkappa$ определяется с помощью вторых производных радиус-вектора.

Имеются также и другие характеристики кручения — гауссово кручение $\varkappa_г$, на котором мы подробнее остановимся в § 2, а так же коэффициенты кручения $\nu_{ij|k}$, обращение которых в ноль не влечет принадлежность поверхности трехмерному пространству.

Теорема 1. *Пусть замкнутая ориентируемая поверхность $F^2 \subset E^n$ класса C^2 с гауссовой кривизной $K \leqslant 0$, характеристикой Эйлера χ и площадью S содержится в шаре радиуса R. Тогда*

$$\frac{S}{R^2} - \pi |\chi| \leqslant \int_{F^2} \varkappa dS. \qquad (2)$$

Отсюда для плоского тора T мы получаем оценку кручения

$$\frac{1}{R^2} \leqslant \max_i \varkappa.$$

Эта оценка точная, так как равенство выполняется для тора Клиффорда. В этом случае $\varkappa$ постоянно. Для поверхности с $\chi < 0$ оценка кручения получается лишь при достаточно малом R. Заметим еще, что неравенство (2) показывает при уменьшении радиуса погружения кручение поверхности увеличивается.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор поверхности и $\rho = \boldsymbol{r}^2/2$. Установим уравнение для ρ, аналогичное уравнению Дарбу для поверхности в E^3. Пусть локально в координатах u_1, u_2, метрика F^2 имеет вид $ds^2 = g_{ij} du_i du_j$, $g = \det \| g_{ij} \|$. Пусть $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2, \ldots$ ортонормированный базис в нормальном пространстве, L_{ij}^k — коэффициенты второй квадратичной формы II^k по отношению к $\boldsymbol{n}_k$. Тогда уравнение имеет вид

$$\nabla_{22}\rho + 1 - \nabla_2\rho = \sum_{k,\, l=1}^{n-2} (L_{11}^k L_{22}^l - L_{12}^k L_{12}^l) \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k)(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_l)}{g}, \tag{3}$$

где ∇_{22} — оператор Монж-Ампера на F^2, ∇_2 — оператор Бельтрами. Действительно,

$$\rho_{u_i} = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{u_i}), \;\; \rho_{u_i u_j} = (\boldsymbol{r}_{u_i u_j}\boldsymbol{r}) + g_{ij} =$$

$$= \Gamma_{ij}^k \rho_{u_k} + L_{ij}^l (\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_l) + g_{ij},$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля метрики ds^2. Пусть ρ_{ij} — вторые ковариантные производные функции ρ,

$$\rho_{ij} = \rho_{u_i u_j} - \Gamma_{ij}^k \rho_{u_k}.$$

Тогда можем записать

$$\rho_{ij} - g_{ij} = L_{ij}^l (\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_l).$$

Отсюда находим

$$\det | \rho_{ii} - g_{ij} | = \sum_{k,\, l} (L_{11}^k L_{22}^l - L_{12}^k L_{12}^l)(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k)(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_l).$$

Принимая во внимание определение ∇_{22} и ∇_2

$$\nabla_{22}\rho = (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)/g, \quad \nabla_2\rho = \rho_{ij} g^{ij},$$

получим уравнение (3). Оценим теперь его правую часть. Возьмем $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ лежащими в плоскости эллипса нормальной кривизны, причем $\boldsymbol{n}_2$ выберем ортогонально к проекции $\boldsymbol{r}$ на эту плоскость. Вектор $\boldsymbol{n}_3$ направим по перпендикуляру, опущенному из точки x на плоскость эллипса. Пусть γ — расстояние от x до этой плоскости. Тогда, считая в точке x $g_{ij} = \delta_{ij}$, имеем

$$II^3 = \gamma du_1^2 + \gamma du_2^2, \quad II^\rho = 0, \;\; \rho > 3.$$

Положим $K(\boldsymbol{n}_i) = \det \| L^i_{lk} \| / g$. Уравнение Гаусса имеет вид

$$K = K(\boldsymbol{n}_1) + K(\boldsymbol{n}_2) + \gamma^2.$$

Правая часть уравнения (3) будет такой:

$$K(\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1)^2 + (L^1_{11} + L^1_{22})\gamma(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_3) + \gamma^2(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_3)^2. \tag{4}$$

Оказывается в случае неположительной гауссовой кривизны $K \leqslant 0$ это выражение оценивается сверху через $\varkappa R^2$. Оценим сначала первый член в (4). Имеем

$$K(\boldsymbol{n}_1) = \frac{K}{2} + \frac{K(n_1) - K(n_2) - \gamma^2}{2}.$$

Оценим разность $|K(\boldsymbol{n}_1) - K(\boldsymbol{n}_2)|$. Для этого рассмотрим следующие выражения:

$$A = K(\boldsymbol{n}_1) - K(\boldsymbol{n}_2),$$
$$B = L^1_{11}L^2_{22} - 2L^1_{12}L^2_{12} + L^1_{22}L^2_{11}.$$

Если векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ повернуть в плоскости эллипса на угол φ, то соответствующие выражения $\overline{A}$ и $\overline{B}$ для повернутых нормальных векторов выражаются через A и B так:

$$\overline{A} = \cos 2\varphi A + \sin 2\varphi B,$$
$$\overline{B} = -\sin 2\varphi A + \cos 2\varphi B.$$

Поэтому $\sqrt{A^2 + B^2}$ есть локальный инвариант вложения F^2 в E^n. Очевидно

$$|K(\boldsymbol{n}_1) - K(\boldsymbol{n}_2)| \leqslant \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Выберем теперь $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ параллельно главным осям эллипса нормальной кривизны, причем ортогональные координаты u_1, u_2 на F^2 выберем так, что конец вектора $d^2\boldsymbol{r}/ds^2$ для направления $u_2 = \mathrm{const}$ попадает в точку эллипса, лежащую на оси, параллельную $\boldsymbol{n}_1$. Тогда, как известно [4, с. 253],

$$\begin{aligned} L^1_{11} &= \alpha + a, \quad L^1_{12} = 0, \quad L^1_{22} = \alpha - a, \\ L^2_{11} &= \beta, \qquad L^2_{12} = b, \quad L^2_{22} = \beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Следовательно, можем записать

$$A^2 + B^2 = [\alpha^2 - a^2 - \beta^2 + b^2]^2 + 4\alpha^2\beta^2 =$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)^2 - 4(a^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2).$$

Так как $K \leqslant 0$ и $|K| = a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$, то получим

$$K + K(\boldsymbol{n}_1) - K(\boldsymbol{n}_2) - \gamma^2 \leqslant K + \sqrt{A^2 + B^2} - \gamma^2$$
$$\leqslant 2(a + |\alpha|)(b + |\beta|)$$

Далее второй член в (4) оценивается сверху в инвариантном виде числом

$$(|\alpha| + |\beta|)\gamma R^2$$

Таким образом, правая часть (4) оценивается сверху выражением

$$[(a + |\alpha|)(b + |\beta|) + (|\alpha| + |\beta|)\gamma + \gamma^2] R^2 \leqslant \varkappa R^2. \tag{6}$$

Далее используем формулу (2) из работы [6], которую применим к замкнутой поверхности и к функции ρ:

$$\int_{F^2} \nabla_{22}\rho dS = \frac{1}{2}\int_{F^2} K |\operatorname{grad}\rho|^2 dS.$$

Заметим, что имеет место оценка

$$|\operatorname{grad}\rho|^2 \leqslant 2\rho \leqslant R^2.$$

Интегрируя уравнение (3) по F^2 и используя оценку (6) для его правой части, получим

$$S \leqslant R^2 \int_{F^2} \varkappa dS - \frac{R^2}{2}\int_{F^2} K dS = R^2 \int_{F^2} \varkappa dS + \pi |\chi| R^2,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Инвариант Уитни и кручение Гаусса

Рассмотрим поверхность F^2 в четырехмерном евклидовом пространстве E^4. Локально в окрестности точки на F^2 всегда можно построить регулярное нормальное поле, но может оказаться, что в целом на всей поверхности это сделать нельзя. Вопрос о построении регулярного единичного нормального поля решается с помощью инварианта Уитни.

Пусть E^4 ориентировано, тогда ориентация касательной плоскости T_x задает ориентацию в нормальной плоскости N_x. Именно. если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — базис, задающий положительную ориентацию в T_x, то векторы $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in N_x$ задают положительную ориентацию в N_x, если базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ задает положительную ориентацию в E^4.

Пусть $\boldsymbol{n}(x)$ — нормальное поле на F^2, имеющее особенности в конечном числе точек $x_1, \ldots, x_k$, и пусть $\boldsymbol{a}(x)$ — регулярное нормальное поле, заданное в окрестности x_l. Точку x_l окружим кривой Γ_l.

Пусть φ_l — угол между $\boldsymbol{n}(x)$ и $\boldsymbol{a}(x)$, отсчитываемый от $\boldsymbol{n}(x)$ к $\boldsymbol{a}(x)$ в положительном направлении согласно ориентации в N_x. Обозначим через $\Delta\varphi_l$ приращение этого угла при обходе Γ_l в положительном направлении на F^2. Тогда индекс точки x_l нормального поля $\boldsymbol{n}$

$$\operatorname{Ind}_{\boldsymbol{n}}(x_l) = \frac{1}{2\pi}\Delta\varphi_l.$$

Как будет видно, величина индекса не зависит от выбора поля $\boldsymbol{a}(x)$. *Инвариант Уитни* ν *равен сумме индексов*

$$\nu = \sum_i \operatorname{Ind}_n(x_i)$$

Величина ν не зависит от выбора поля $\boldsymbol{n}$ и является инвариантом при гладких гомотопиях в E^4. Если $\nu = 0$, то на F^2 существует регулярное нормальное поле и $\nu \neq 0$ в противном случае. Мы рассмотрим связь инварианта Уитни с геометрией поверхности.

Теорема 2. *Пусть* F^2 — *замкнутая ориентируемая поверхность в* E^4 *с эйлеровой характеристикой* χ, *инвариантом Уитни* ν *и* $\boldsymbol{H}$-*вектором средней кривизны. Тогда имеет место неравенство*:

$$|\nu| + \chi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{F^2} \boldsymbol{H}^2 dS. \tag{7}$$

Для доказательства рассмотрим связь инварианта Уитни с кручением Гаусса. По определению кручение Гаусса $\varkappa_\text{г} = \pm 2ab$, где a и b — полуоси эллипса нормальной кривизны, причем знак $+$ берется в том случае, когда при вращении направления $\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}$ в положительном направлении в T_x, конец вектора $d^2\boldsymbol{x}/ds^2$ пробегает эллипс нормальной кривизны в положительном направлении, согласно ориентации в N_x.

В работе [7] указывается на связь инварианта Уитни с кручением Гаусса.

Довольно просто установим следующую формулу для $F^2 \subset E^4$:

$$2\pi\nu = -\int_{F^2} \varkappa_\text{г} dS. \tag{8}$$

Из формулы (8) следует инвариантный смысл ν. Если эллипс нормальной кривизны ни в одной точке не вырождается, то $\nu \neq 0$. Например, поверхность Веронезе, расположенная в сфере S^4, имеет окружность постоянного радиуса в качестве эллипса нормальной кривизны. Поэтому поверхность Веронезе, как поверхность в S^4, имеет инвариант Уитни $\nu \neq 0$ и ее регулярная проекция на E^4 имеет $\nu \neq 0$.

Пусть $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ — единичные ортогональные к F^2 и друг к другу векторные поля, регулярные на F^2 за исключением конечного числа точек, причем пусть $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ задают положительную ориентацию в N_x. Тогда

$$\varkappa_\text{г} = \frac{(\boldsymbol{n}_{1u_1}\boldsymbol{n}_{2u_2}) - (\boldsymbol{n}_{2u_1}\boldsymbol{n}_{1u_2})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}. \tag{9}$$

Используем уравнения Вейнгартена. которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$n_{iu_j} = -L^l_{jk} g^{kl} \boldsymbol{x}_{,l} + (n_{iu_j} n_a) n_a.$$

Отсюда находим

$$(n_{1u_1} n_{2u_2}) - (n_{2u_1} n_{1u_2}) = (L^1_{1i} L^2_{2k} - L^2_{2i} L^2_{2k}) g^{ik}.$$

Выражение в правой части (9) инвариантно относительно поворота векторов n_1, n_2 в плоскости N_x, т. е. если

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\varphi n_1 + \sin\varphi n_2, \\ a_2 &= -\sin\varphi n_1 + \cos\varphi n_2, \end{aligned} \tag{10}$$

то

$$(n_{1u_1} n_{2u_2}) - (n_{1u_2} n_{2u_1}) = (a_{1u_1} a_{2u_2}) - (a_{1u_2} a_{2u_1}).$$

Кроме того, оно инвариантно относительно замены координат (u_1, u_2). Поэтому для вычисления (9) в фиксированной точке x мы можем выбрать координаты (u_1, u_2) и поля a_1 и a_2 в этой точке так, что коэффициенты L^k_{ij} будут иметь вид (5). Тогда получим

$$(L^1_{1i} L^2_{2k} - L^1_{2i} L^2_{2k}) g^{ik} = 2ab = \varkappa_\Gamma.$$

Используя (9), можем записать

$$\int\limits_{F_2} \varkappa_\Gamma dS = \frac{1}{2} \int\limits_{F^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} [(n_1 n_{2u_2}) - (n_2 n_{1u_2})] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial u_2} [(n_1 n_{2u_1}) - (n_2 n_{1u_1})] \right\} du^1 du^2 =$$

$$= \lim_{\Gamma_i \to x_i} \sum_i \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_i} (n_1 dn_2) - (n_2 dn_1). \tag{11}$$

Пусть теперь в окрестности особых точек определены регулярные, нормальные, ортогональные друг другу поля a_1 и a_2, задающие положительную ориентацию в нормальных плоскостях и следовательно, связанные с полями n_1 и n_2 в виде (10). Тогда непосредственным вычислением находим

$$(n_1 dn_2) - (n_2 dn_1) = (a_1 da_2) - (a_2 da_1) - 2d\varphi. \tag{12}$$

При стягивании Γ_i к особой точке в силу регулярности a_k имеем

$$\lim \int\limits_{\Gamma_i} (a_k da_l) = 0.$$

Если регулярны к тому же и поля n_k в окрестности точки x_i, то из выражения (12) следует, что индекс точки для поля n_1 равен 0. Отсюда и из формулы (12) следует, что определение индекса точки не зависит от выбора регулярного нормального поля $a(x)$. В общем случае для индекса особой точки x_i поля n_1 имеем

$$\mathrm{Ind}_{n_1}(x_i) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} d\varphi. \tag{13}$$

Используя (11) и (13), получим формулу (9). Далее запишем

$$2\pi|\nu| = \left|\int_{F^2} 2ab dS\right| \leqslant \int_{F^2} (a^2+b^2)\, dS = -\int_{F^2} K dS + \int_{F^2} H^2 dS,$$

где мы использовали формулу Гаусса $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2$. Отсюда и следует неравенство (7).

Рассмотрим теперь поверхность в E^4 с нулевым гауссовым кручением. В этом случае на поверхности существуют два семейства ортогональных линий кривизны, т. е. таких линий, вдоль которых проекция абсолютного дифференциала любого нормального вектора на T_x будет касательной к ним [14, с. 255]. Сеть линий кривизны может иметь особенность только в омбилических точках, т. е. в тех точках поверхности, где эллипс нормальной кривизны вырождается в точку. Если $K < 0$, то омбилические точки отсутствуют. Обращение в ноль гауссова кручения недостаточно для того, чтобы поверхность лежала в E^3. Например, тор Клифорда имеет нулевое гауссово кручение. Однако имеет место

Теорема 3. *Если поверхность $F^2 \subset E^4$ с нулевым гауссовым кручением не имеет омбилических точек, и некоторая ее линия l, не касающаяся главных направлений, вместе со своей окрестностью лежит в E^3, то тогда весь кусок поверхности, заключенный между линиями кривизны, исходящими из концов l, лежит в E^3.*

Пусть l_1 и l_2 — линии кривизны, U — окрестность l, лежащая в E^3. Расположим нормальные векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ соответственно параллельно и ортогонально отрезку γ^x — вырожденному эллипсу нормальной кривизны. Так как мы предполагаем, что на F^2 нет омбилических точек, то γ_x не вырождается в точку. Из четырех уравнений Кодации рассмотрим два

$$L^2_{11,2} - L^2_{21,1} + L^1_{21}\nu_1 - L^1_{11}\nu_2 = 0,$$

$$L^2_{22,1} - L^2_{12,2} + L^1_{12}\nu_2 - L^1_{22}\nu_1 = 0,$$

где $\nu_i = (\boldsymbol{n}_{2u_i}\boldsymbol{n}_1)$. Для коэффициентов вторых квадратичных форм имеют место соотношения (5). Так как гауссово кручение равно нулю, то можем положить $b = 0$. Тогда второй возможный случай $a = 0$ исключается, так как по предположению омбилические точки отсутствуют. После подстановки получим уравнения

$$\beta_{u_2} - (\alpha + a)\,\nu_2 = 0,$$

$$\beta_{u_1} - (\alpha - a)\,\nu_1 = 0. \tag{14}$$

Кроме того, используем уравнение [5, с. 197], которое в силу $\varkappa_\Gamma = 0$ имеет вид

$$\nu_{1u_2} - \nu_{2u_1} = 0.$$

Следовательно, $\nu_1 = \varphi_{u_1}$, $\nu_2 = \varphi_{u_2}$, где φ — некоторая функция. Используя (14), получим для φ гиперболическое уравнение

$$2a\varphi_{u_1u_2} + \varphi_{u_2}(\alpha + a)_{u_1} + \varphi_{u_1}(a - \alpha)_{u_2} = 0,$$

в котором коэффициент $a \neq 0$, и характеристиками которого являются линии кривизны. Так как окрестность U лежит в E^3, то в этой окрестности $\nu_1 = \nu_2 = 0$, следовательно и $\varphi = 0$ в U. Заметим, что угол φ, определенный с точностью до аддитивной постоянной, имеет геометрический смысл: φ - угол, который составляет параллельно переносимый в N_x нормальный вектор с отрезком нормальной кривизны. По теореме единственности для гиперболического уравнения имеем $\varphi \equiv 0$ в области D, ограниченной кривыми l_1 и l_2. Отсюда следует $\nu_1 = \nu_2 = \beta = 0$ в области D, что влечет принадлежность поверхности E^3.

§ 3. Поверхности с окружностью в качестве эллипса нормальной кривизны

Точки, в которых эллипс нормальной кривизны — окружность, называются круговыми [8—10]. Если эта окружность в каждой точке $x \in F^2 \subset E^4$ имеет центром точку x, то поверхность минимальна и она называется R-поверхностью [8]. Такие поверхности локально представимы в виде $\{x,\ y,\ u(x,\ y),\ v(x,\ y)\}$, где $u + iv$ — аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$.

Класс поверхностей, на которых каждая точка — круговая, в некотором роде противоположен классу поверхностей с нулевым гауссовым кручением.

Теорема 4. *На любой компактной поверхности $F^2 \subset E^n$ с эйлеровой характеристикой $\chi(F^2) \neq 0$ существует круговая точка.*

Допустим, что это не так, тогда в каждой точке x эллипс нормальной кривизны имеет большую и меньшую оси, длины которых обозначим через a и b соответственно. Возьмем точки эллипса y_1 и y_2, расположенные в концах большей оси. Этим точкам соответствуют два направления τ_1 и τ_2 в T_x, таким образом, что конец вектора $d^2\mathbf{x}/ds^2$, где производная берется в направлении τ_i, попадает в точку y_i. Так как y_1 и y_2 — диаметрально противоположные точки эллипса, то направления τ_1 и τ_2 ортогональны. Интегральные кривые, касающиеся τ_1 и τ_2, образуют на поверхности регулярную сеть. Но так как по предположению $\chi(F^2) \neq 0$, то такая сеть невозможна [11, с. 98].

В доказанном утверждении круговая точка может быть омбилической. Если же гауссова кривизна поверхности $K < 0$, то обязательно существует точка, в которой эллипс нормальной кривизны — окружность ненулевого радиуса. Отсюда следует, что компактную поверхность F^2 с гауссовой кривизной $K < 0$ нельзя погрузить в E^n с нулевым гауссовым кручением. Действительно если $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ — декартовы координаты центра этого эллипса в N_x, то

$$K = \sum_i \alpha_i^2 - a^2 - b^2.$$

Так как $K < 0$, то $a^2 + b^2 \neq 0$ и следовательно, на F^2 нет омбилических точек.

Рассмотрим теперь поверхность $F^2 \subset E^4$, состоящую из круговых точек.

Теорема 5. *Пусть $F^2 \subset E^4$ и в каждой точке эллипс нормальной кривизны — окружность. Пусть ds^2 — метрика на F^2 и $\boldsymbol{H}$ — вектор средней кривизны. Тогда метрика $\boldsymbol{H}^2 ds^2$ имеет гауссову кривизну $+1$. Если F^2 замкнутая ориентируемая поверхность и $\boldsymbol{H} \neq 0$, то F^2 — сфера в E^3.*

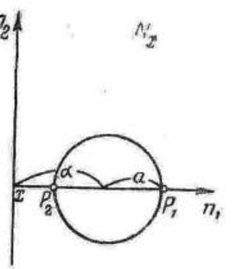


Рис. 2

Направим $\boldsymbol{n}_1$ вдоль вектора средней кривизны. Обозначим через a — радиус окружности нормальной кривизны, $\alpha = |\boldsymbol{H}|$. Пусть координаты (u, v) на F^2 такие, что касательное направление к u-линии при отображении в N_x соответствует точке P_1 (см. рис. 2), а касательное направление к v-линии соответствует точке P_2. Так как P_1 и P_2 диаметрально противоположны, то координаты (u, v) на F^2 ортогональны. Пусть $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$. Тогда имеем из общих уравнений Кодацци:

$$(aE)_v + \alpha_v E - a\sqrt{EG}\nu_1 = 0,$$

$$-(aG)_u + \alpha_u G - a\sqrt{EG}\nu_2 = 0; \qquad (I)$$

$$-(\ln G)_u a\sqrt{EG} - \sqrt{EG}a_u - (\alpha + a) E\nu_2 = 0,$$

$$-(\ln E)_v a\sqrt{EG} - \sqrt{EG}a_v - (\alpha - a) G\nu_1 = 0. \qquad (II)$$

Из первого уравнения системы (I) имеем

$$\nu_1 = \frac{E}{a\sqrt{EG}}\left\{a_v + \frac{aE_v}{E} + \alpha_v\right\}. \qquad (15)$$

Подставив это выражение во второе уравнение системы (II), получим

$$a(\ln E)_v = a(\ln \alpha)_v - \alpha_v - a_v. \qquad (16)$$

Подставим это выражение в (15). Имеем

$$\nu_1 = \frac{E}{\sqrt{EG}} (\ln \alpha)_v. \tag{17}$$

Аналогично найдем выражение для ν_2:

$$\nu_2 = -\frac{E}{\sqrt{EG}} (\ln \alpha)_u. \tag{18}$$

Используем теперь уравнение [5, с. 197], которое в случае $a = b$ имеет вид

$$\nu_{2u} - \nu_{1v} = 2a^2 \sqrt{EG}. \tag{19}$$

Принимая во внимание выражения для ν_1 (17) и для ν_2 (18) и уравнение (19), находим

$$\nabla_2 \ln \alpha = -2a^2. \tag{20}$$

Заметим, что уравнение Гаусса в нашем случае записывается так

$$K = \alpha^2 - 2a^2.$$

Следовательно, имеем уравнение

$$\nabla_2 \ln \alpha = K - \alpha^2. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь метрику $d\sigma^2 = \alpha^2 ds^2$, гауссова кривизна которой K_σ в силу (21) будет равна

$$K_\sigma = \frac{1}{\alpha^2} (K - \nabla_2 \ln \alpha) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Если F^2 — замкнутая ориентируемая поверхность с $H \neq 0$, то интегрируя уравнение (20) получим

$$\int_{F^2} a^2 dS = 0$$

т. е. $a \equiv 0$. Следовательно, F^2 — сфера, лежащая в E^3. Заметим, что в E^4 существуют куски поверхностей, отличных от сферы, каждая точка которых является круговой. Кроме упоминавшихся выше минимальных R-поверхностей можно указать и другие. Например, рассмотрим поверхность F^2 такую, что в каждой точке $x \in F^2$ окружность нормальной кривизны проходит через x. Тогда уравнение (16) и аналогичное уравнение, содержащее G_u после подстановки $a = \alpha$, имеют вид:

$$(\ln E)_v = -(\ln \alpha)_v,$$

$$(\ln G)_u = (\ln \alpha)_u.$$

Отсюда находим после подходящего выбора параметров

$$ds^2 = \frac{du^2}{\alpha} + \alpha dv^2.$$

Величины ν_1 и ν_2 определим с помощью (17) и (18):

$$\nu_1 = \alpha_v/\alpha^2, \quad \nu_2 = -\alpha_u.$$

Уравнение Гаусса имеет вид

$$K = -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)_{vv} + \alpha_{uu}\right\} = \alpha^2 - 2a^2 = -\alpha^2.$$

В то же время уравнение (19) записывается так:

$$-\alpha_{uu} - \left(\frac{\alpha_v}{\alpha^2}\right)_v = 2a^2 = 2\alpha^2.$$

Из этих двух уравнений находим

$$\alpha_{uu} = 0, \quad \left(\frac{1}{\alpha}\right)_{vv} = 2\alpha^2.$$

Второе уравнение, которое легко интегрируется подстановкой $d(1/\alpha^2)/dv = p$, имеет решение $\alpha(v)$ на некотором интервале изменения параметра v. Положим

$$ds^2 = \frac{du^2}{\alpha} + \alpha dv^2, \; II^1 = 2du^2, \; II^2 = 2\alpha du dv,$$

$$\nu_1 = \frac{\alpha_v}{\alpha^2}, \quad \nu_2 = -\alpha_u = 0.$$

Так как условия интегрируемости выполнены, то в E^4 определится поверхность F^2, обладающая тем свойством, что в каждой точке $x \in F^2$ ее эллипс нормальной кривизны является окружностью, проходящей через точку x.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Otsuki T.* A constraction of closed surfaces of negative curvature in E^4. — «Math. Journal of Okayama University», 1954, vol. 3, p. 95—108.
2. *Розендорн Э. Р.* О полных поверхностях отрицательной кривизны $K \leqslant -1$ в евклидовых пространствах E_3 и E_4. — «Мат. сб.», т. 58, 100, № 4.
3. *Позняк Э. Г.* Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства. — УМН, 1973, XXVIII, вып. 4 (172), с. 47—76.
4. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М., Изд-во Моск. ун-та, 1960. 307 с.
5. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948. 316 с.
6. *Аминов Ю. А.* О внешнем диаметре поверхности отрицательной кривизны. — «Укр. геометр. сб.», вып. 13, Харьков, 1973, с. 3—10.
7. *Chern S. S.* On the curvatura Integra in a Riemannian Manifold. — «Ann of Math». 1945, vol. 46, p. 674—684.
8. *Kommerell K.* Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. — «Mat. Ann.», 1905, Bd 60, S. 546—596.
9. *Fabricius-Bjerre.* Sur les variétésa torsion nulle. — «Acta Math.», 1936, vol. 66, p. 49—77.
10. *Перепелкин.* Sur la curbure et les espaces normaux d'une V_m in R_n. — «Мат. сб.», 1935, т. 42, с. 81—100.
11 .*Бляшке В.* Введение в дифференциальную геометрию. М., ГИТЛ, 1957. 223 с.

Поступила 26 ноября 1973 г.

УДК 513

Ю. А. АМИНОВ

АНАЛОГ ВНУТРЕННЕГО УСЛОВИЯ РИЧЧИ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известно, что метрика минимальной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве E^3 не произвольна. Если K — ее гауссова кривизна, то $K \leqslant 0$ и, согласно условию Риччи, ds^2 является метрикой минимальной поверхности F^2 в E^3 тогда и только тогда, когда метрика $\sqrt{-K}\,ds^2$ имеет нулевую кривизну. Условие Риччи можно записать также в следующем виде:

$$\nabla_2 \ln \sqrt[4]{-K} = K, \tag{1}$$

где ∇_2 — оператор Бельтрами. В работах [1—3] были получены некоторые обобщения условия Риччи. Нами доказывается

Теорема 1. *Если K — гауссова кривизна метрики минимальной поверхности F^2 в четырехмерном римановом пространстве постоянной кривизны K_0, то выполняется следующее неравенство:*

$$\nabla_2 \ln \sqrt[4]{K_0 - K} - \frac{3}{2} K \geqslant -\frac{1}{2} K_0. \tag{2}$$

В частном случае, когда F^2 лежит в евклидовом пространстве E^4, это условие выражает, что гауссова кривизна K_δ метрики

$$d\delta^2 = \sqrt[3]{-K}\,ds^2$$

неположительна: $K_\delta \leqslant 0$. Если же $K_\delta \equiv 0$, то ds^2 погружается в E^4 в виде минимальной поверхности, причем индикатриса нормальной кривизны, лежащая в нормальной плоскости, является окружностью.

Из неравенства (2) вытекает следующее утверждение: если F^2 гомеоморфно сфере, ее метрика имеет кривизну $K < 1$ и F^2 — минимальная поверхность в пространстве постоянной кривизны $K_0 = 1$, то ее площадь $S \geqslant 12\pi$. Аналогичное условие установлено Калаби в работе [4] для минимальных F^2, гомеоморфных сфере и лежащих в n-мерной сфере единичного радиуса.

Равенство в (2) имеет место для минимальных поверхностей, у которых индикатриса нормальной кривизны является окружностью. Для таких поверхностей с помощью (2) мы устанавливаем.

Теорема 2. *Пусть F^2 — минимальная поверхность в римановом пространстве постоянной кривизны K_0 такая, что индикатриса нормальной кривизны в каждой точке является окружностью. Пусть в области на F^2 с внутренним радиусом r имеет место $K_0 - K \geqslant a$, где $a = \mathrm{const} > 0$. Тогда*

$$r \leqslant \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{a}}.$$

Далее рассмотрим минимальную гиперповерхность F^n в произвольном римановом пространстве R^{n+1}. Несмотря на большой произвол, можно установить вполне обозримое условие, аналогичное условию Риччи в дифференциальной форме (1), см. (16). Частным случаем этого условия является

Теорема 3. *Пусть F^n — минимальная гиперповерхность в римановом пространстве постоянной кривизны K_0. Тогда имеет место неравенство*

$$\nabla_2 R + R_{h\nu j\beta} R^{h\nu j\beta} + 2R_{\nu j} R^{\nu j} + 2K_0 (n-1) R \geqslant 0. \tag{3}$$

где R — скалярная кривизна F^n,
$R_{h\nu j\beta}$ — тензор Римана,
$R_{\nu j}$ — тензор Риччи

1. Двумерные минимальные поверхности в четырехмерном пространстве R^4 постоянной кривизны K_0

Пусть $F^2 \subset R^4$ имеет в каждой точке x касательную плоскость T_x и нормальную плоскость N_x. В N_x лежит индикатриса нормальной кривизны — эллипс [5, с. 252], центр которого вследствие минимальности F^2 лежит в точке x. Полуоси эллипса обозначим через a и b. Пусть ξ_1 и ξ_2 — единичные нормальные векторы, направленные по главным осям эллипса нормальной кривизны. Тогда вторые квадратичные формы определяют отображение направлений из T_x в эллипс нормальной кривизны, причем ортогональным направлениям в T_x соответствуют диаметрально противоположные точки эллипса. Если $a \neq b$, то в каждой точке $x \in F^2$ возьмем два ортогональных направления, которые отображаются в точки, лежащие на одной из главных осей эллипса, например, на оси, соответствующей ξ_1. Линии, касающиеся этих направлений, образуют на F^2 ортогональную сеть, которую примем за координатную. Пусть линейный элемент F^2 в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

Тогда вторые квадратичные формы относительно нормальных векторов ξ_1 и ξ_2 имеют вид

$$\mathrm{II}^1 = aEdu^2 - aGdv^2, \quad \mathrm{II}^2 = b\sqrt{EG}dudv.$$

Обозначим

$$\nu_1 = (\xi_1 \xi_{2u}), \quad \nu_2 = (\xi_1 \xi_{2v}).$$

Уравнения Кодацци в нашем случае запишутся в виде двух систем:

$$(aE)_v = \nu_1 b\sqrt{EG}, \tag{4}$$

$$(aG)_u = -\nu_2 b\sqrt{EG};$$

$$-\frac{G_u b\sqrt{EG}}{G} - \sqrt{EG}\, b_u = aE\nu_2,$$

$$-\frac{E_v b\sqrt{EG}}{E}-\sqrt{EG}\,b_v=-aG\nu_1. \qquad (5)$$

Кроме того имеет место уравнение Гаусса

$$K-K_0=-a^2-b^2$$

и уравнение см. [6, с. 197]

$$\nu_{2u}-\nu_{1v}-2ab\sqrt{EG}=0. \qquad (6)$$

Умножим первое уравнение системы (5) на b/E и второе уравнение системы (4) на $a/\sqrt{EG}$. Вычитая, получим

$$\sqrt{\frac{G}{E}}(bb_u-aa_u)+(b^2-a^2)\frac{u}{\sqrt{EG}}=0. \qquad (7)$$

Не ограничивая общности можно считать, что $b>a$. Из (7) получим

$$\frac{G_u}{\sqrt{EG}}=-\frac{(\ln\sqrt{b^2-a^2})_u\,G}{\sqrt{EG}}. \qquad (8)$$

Далее, умножая первое уравнение системы (4) на $a/\sqrt{EG}$ и второе уравнение системы (5) на b/G и вычитая, получим

$$\frac{E_v}{\sqrt{EG}}=-\frac{(\ln\sqrt{b^2-a^2})_v\,E}{\sqrt{EG}}. \qquad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) следует, что выбранная координатная сеть изотермическая, причем мы можем положить

$$E=G=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}.$$

Далее, с помощью (8) и (9) находим гауссову кривизну метрики ds^2:

$$K=\nabla_2\ln\sqrt[4]{b^2-a^2}. \qquad (10)$$

Используя уравнение (6), установим второе уравнение для величин a и b. Для этого сначала с помощью (4) и (5) найдем ν_1 и ν_2. Обозначим

$$a=r\cos\theta,\ \ b=r\sin\theta.$$

Имеем из (4)

$$\nu_1=\frac{(aE)_v}{b\sqrt{EG}}=\operatorname{ctg}\theta\frac{E}{\sqrt{EG}}(\ln r)_v-\frac{\theta_v E}{\sqrt{EG}}+\frac{\operatorname{ctg}\theta E_v}{\sqrt{EG}}.$$

Заменив E_v с помощью полученного ранее выражения (9), находим

$$\nu_1=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\operatorname{tg}\theta-1}{\operatorname{tg}\theta+1}\right)_v\frac{E}{\sqrt{EG}}. \qquad (11)$$

Аналогично, с помощью второго уравнения системы (4) и (8) находим

$$\nu_2=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\operatorname{tg}\theta-1}{\operatorname{tg}\theta+1}\right)_u\frac{G}{\sqrt{EG}}. \qquad (12)$$

Тогда уравнения (6), (11) и (12) дают

$$\frac{1}{2}\nabla_2 \ln\frac{a+b}{b-a} = -2ab. \qquad (13)$$

Легко найти

$$\frac{1}{2}\nabla_2 \ln\frac{a+b}{b-a} = \frac{\nabla_2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{2\,[\mathrm{grad}\,\theta]^2 \sin 2\theta}{\cos^2 2\theta}.$$

Уравнения (10) и (13) запишем в виде системы

$$\frac{\nabla_2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{2\,[\mathrm{grad}\,\theta]^2 \sin 2\theta}{\cos^2 2\theta} = -2ab,$$

$$\nabla_2 \ln r - \mathrm{tg}\, 2\theta\, \nabla_2\theta - \frac{2\,[\mathrm{grad}\,\theta]^2}{\cos^2 2\theta} = 2K.$$

Из первого уравнения этой системы выразим $\nabla_2\theta$ и подставим во второе. Тогда получим

$$\nabla_2 \ln r + 2ab \sin 2\theta = 2K + 2\,[\mathrm{grad}\,\theta]^2.$$

Заметим, что $r^2 = a^2 + b^2 = K_0 - K$. Кроме того

$$2ab \sin 2\theta \leqslant a^2 + b^2 = K_0 - K.$$

Поэтому можем записать

$$\nabla_2 \ln\sqrt{K_0 - K} + K_0 - 3K \geqslant 2\,[\mathrm{grad}\,\theta]^2 \geqslant 0,$$

что и доказывает теорему 1 в тех точках, где $a \neq b$.

Пусть теперь в некоторой области $D \subset F^2$ индикатриса нормальной кривизны является окружностью, т. е. пусть $b = a$. Возьмем на F^2 произвольную ортогональную координатную сеть. Из уравнений (4) имеем

$$\begin{aligned} \nu_1 &= [E_v + E\,(\ln a)_v]/\sqrt{EG}, \\ \nu_2 &= -[G_u + G\,(\ln a)_u]/\sqrt{EG}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Подставив эти выражения в уравнения (6), получим

$$K - \frac{1}{2}\nabla_2 \ln a = a^2.$$

Так как $2a^2 = K_0 - K$, то отсюда находим необходимое условие для вложения ds^2 в R^4 в виде минимальной поверхности с окружностью в качестве индикатрисы нормальной кривизны

$$\nabla_2 \ln\sqrt[4]{K_0 - K} + \frac{K_0}{2} - \frac{3}{2}K = 0. \qquad (15)$$

Это условие и достаточно для погружения ds^2 в R^4. Действительно, выбрав на F^2 произвольную ортогональную систему координат, зададим две вторые квадратичные формы

$$II^1 = aE\,du^2 - aG\,dv^2, \quad II^2 = a\sqrt{EG}\,du\,dv,$$

где $2a^2 = K_0 - K$. Равенствами (14) определим ν_1 и ν_2. Тогда уравнения Гаусса-Кодацци автоматически выполнены, а уравнение (6) сводится к уравнению (15), которое выполнено по условию. Заданием II^1, II^2, ν_1 и ν_2, удовлетворяющих основным уравнениям, поверхность определяется с точностью до движения в R^4.

В частном случае, когда на сфере S^2 задана метрика с постоянной кривизной $K=\frac{1}{3}$, то при $K_0=1$ уравнение (15) выполнено. Соответствующее минимальное погружение S^2 в сферу единичного радиуса S^4 известно как поверхность Веронезе.

Заметим, что на замкнутом двумерном многообразии F^2 с эйлеровой характеристикой $\chi \leqslant 0$ не существует метрики с кривизной K, удовлетворяющей условиям (15) и $K<K_0$. Действительно, интегрируя (15) по всему F^2, имеем

$$\frac{1}{2}\int_{F^2}(K_0-K)\,ds-2\pi\chi=0,$$

что невозможно.

Используем теперь (15) для доказательства теоремы 2. Пусть D — область на минимальной поверхности F^2 в пространстве R^4 постоянной кривизны K_0, такая что в каждой точке $x\in F^2$ эллипс нормальной кривизны — окружность. Пусть r — внутренний радиус D, т. е. наиболее удаленная точка O от границы ∂D отстоит на расстоянии r. Рассмотрим метрику

$$d\rho^2=\sqrt{K_0-K}\,ds^2.$$

Гауссова кривизна K_ρ метрики $d\rho^2$ равна

$$K_\rho=\frac{1}{\sqrt{K_0-K}}\left(K-\nabla_2\ln\sqrt[4]{K_0-K}\right)=\frac{\sqrt{K_0-K}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{a}}{2}.$$

По теореме Бонне расстояние от точки O до границы ∂D в метрике $d\rho^2 l_\rho$ удовлетворяет неравенству $l_\rho\leqslant\pi\sqrt{2}/a^{1/4}$, а также

$$l_\rho=\int\sqrt[4]{K_0-K}ds\geqslant a^{1/4}r,$$

где интеграл берется по кратчайшей в $d\rho^2$, соединяющей O с ∂D. Отсюда следует $r\leqslant\pi\sqrt{2}/\sqrt{a}$.

2. Минимальная гиперповерхность в римановом пространстве

Пусть y^i — координаты в R^{n+1} и $y^i=y^i(u^1,\ldots,u^n)$ — уравнения гиперповерхности F^n. Пусть R_{hijk}, $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензоры Римана для F^n и R^{n+1} соответственно. Пусть $ds^2=g_{ij}du^idu^j$ метрика F^n. Обозначим

$$T_{hijk}=R_{\alpha\beta\gamma\delta}y^{\alpha}_{,h}y^{\beta}_{,i}y^{\gamma}_{,j}y^{\delta}_{,k};$$

$$T_{ij}=T_{hijk}g^{hk};\ T=T_{ij}g^{ij}$$

Заметим, что величины T_{hijk} входят в уравнения Гаусса вследствие кривизны пространства. Следующие величины $T_{hj\alpha}$ входят в уравнения Кодацци

$$T_{hj\alpha}=\overline{R}_{\sigma\rho\gamma\delta}y^{\sigma}_{,h}y^{\gamma}_{,j}y^{\delta}_{,\alpha}\xi^{\rho},$$

где ξ^ρ — компонента единичной нормали. Пусть Ω_{ik} — компоненты второй квадратичной формы F^n и $\Omega_{ik,\beta}$ — их ковариантные производные в метрике ds^2. Пусть R — скалярная кривизна F^n.

Теорема 4. *Для минимальной гиперповерхности F^n в произвольном римановом пространстве R^{n+1} имеет место уравнение*

$$\nabla_2 [R - T] - \left[T_{\alpha h}^{\alpha}\Omega^{hj} + T_{h\alpha}^{j}\Omega^{h\alpha}\right]_{,j} = -R_{h\nu j\beta}R^{h\nu j\beta} - 2R_{\nu j}R^{\nu j} - T_{\alpha h}^{\alpha}T_{j}^{hj} - \\ - \frac{1}{2} T_{hj\beta}T^{hj\beta} + 2\Omega^{ik,\beta}\Omega_{ik,\beta} + R_{h\nu j\beta}T^{h\nu j\beta} + R_{\nu j}T^{\nu j}. \qquad (16)$$

Левая часть этого равенства является дивергентным выражением, а члены правой части, за исключением члена $\|\Omega_{ik,\beta}\|^2$ при $n > 2$, выражаются через тензоры кривизны F^n и R^{n+1} и за исключением последних двух являются квадратами некоторых тензоров. Величина T в каждой точке $x \in F^n$ является скалярной кривизной касательной к F^n в x вполне геодезической гиперповерхности.

Доказательство (16). Найдем выражение оператора Бельтрами от скалярной кривизны R гиперповерхности

$$\nabla_2 R = R_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}.$$

Условие минимальности имеет вид $\Omega_{hk}g^{hk} = 0$.
Используем уравнение Гаусса

$$R_{hijk} = \Omega_{hj}\Omega_{ik} - \Omega_{hk}\Omega_{ij} + T_{hijk}.$$

Свертывая его с g^{hk}, получим выражение для тензора Риччи R_{ij} и скалярной кривизны R:

$$R_{ij} = \Omega_{hj}\Omega_i^h + T_{ij}, \qquad (17)$$

$$R = \Omega_{hj}\Omega^{hj} + T. \qquad (18)$$

Обозначая запятой ковариантную производную в метрике F^n имеем

$$[R - T]_{,\alpha} = 2\Omega_{hj,\alpha}\Omega_{ik}g^{hk}g^{ij}.$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$\nabla_2 [R - T] = 2\Omega_{hj,\alpha\beta}\Omega^{hj}g^{\alpha\beta} + 2\Omega_{hj,\alpha}\Omega^{hj,\alpha}. \qquad (19)$$

Первый член в правой части (19) обозначим через A. Для его преобразований используем уравнение Кодацци

$$\Omega_{hj,\alpha} - \Omega_{h\alpha,j} = T_{hj\alpha}.$$

Тензор $T_{hj\alpha}$, как легко проверить, обладает свойствами

$$T_{hj\alpha} = -T_{h\alpha j}, \quad T_{hj\alpha} + T_{j\alpha h} + T_{\alpha hj} = 0.$$

Первое равенство вытекает из косой симметрии тензора $\overline{R}_{\alpha\rho\gamma\delta}$, второе из тождества Бианки. С помощью уравнений Кодацци получим

$$A = 2\Omega_{h\alpha,j\beta}\Omega^{hj}g^{\alpha\beta} + 2T_{hj\alpha,\beta}\Omega^{hj}g^{\alpha\beta}. \qquad (20)$$

Далее используем соотношения для разности вторых ковариантных производных

$$\Omega_{h\alpha,j\beta} - \Omega_{h\alpha,\beta j} = -R_{h\nu j\beta}\Omega_\alpha^\nu - R_{\alpha\nu j\beta}\Omega_h^\nu$$

и снова уравнение Кодацци

$$\Omega_{\alpha h,\,\beta} - \Omega_{\alpha\beta,\,h} = T_{\alpha h\beta}.$$

После подстановки в (20) получим

$$A = 2\Omega_{\alpha\beta,\,hj}g^{\alpha\beta}\Omega^{hj} - 2R_{h\nu j\beta}\Omega^{\nu\beta}\Omega^{hj} - 2R^{\alpha}_{\alpha\nu j}\Omega^{\nu}_{h}\Omega^{hj} + \\ + T^{\alpha}_{\alpha h,\,j}\Omega^{jh} + T_{hj\alpha,\,\beta}\Omega^{hj}g^{\alpha\beta}. \tag{21}$$

Первый член в правой части (21) вследствие минимальности F^n равен нулю. Далее имеем для второго члена (обозначим его через B):

$$B = R_{h\nu j\beta}\left(\Omega^{\nu\beta}\Omega^{hj} - \Omega^{\nu j}\Omega^{h\beta}\right).$$

Используя уравнение Гаусса, выражение B можно записать так

$$B = R_{h\nu j\beta}R^{h\nu j\beta} - R_{h\nu j\beta}T^{h\nu j\beta}. \tag{22}$$

Для преобразований третьего члена, который обозначим через C, в правой части (21) используем выражение (17) для тензора Риччи R_{ij}

$$C = 2R^{\alpha}_{\alpha\nu j}\Omega^{\nu}_{h}\Omega^{hj} = 2R^{\alpha}_{\alpha\nu j}\left(R^{\nu j} - T^{\nu j}\right) = 2R_{\nu j}R^{\nu j} - 2R_{\nu j}T^{\nu j}. \tag{23}$$

Преобразуем теперь последние два члена в (21), которые обозначим соответственно через D и E. Имеем

$$D = T^{\alpha}_{h\alpha,\,j}\Omega^{jh} = \left[T^{\alpha}_{\alpha h}\Omega^{jh}\right]_{,j} - T^{\alpha}_{\alpha h}\Omega^{hj}_{,j}. \tag{24}$$

Используем уравнение Кодацци и условие минимальности:

$$\Omega^{jh}_{,j} = \Omega^{j\;\;h}_{j,} + T^{jh}_{j} = T^{jh}_{j}, \tag{25}$$

так как $\Omega^{j}_{j} = 0$. Подставив (25) в (24), получим

$$D = \left[T^{\alpha}_{\alpha h}\Omega^{hj}\right]_{,j} - T^{\alpha}_{\alpha h}T^{hj}_{j}. \tag{26}$$

Запишем последний член

$$E = T_{hj\alpha,\,\beta}\Omega^{hj}g^{\alpha\beta} = \left[T^{\beta}_{hj}\Omega^{hj}\right]_{,\beta} - T_{hj\beta}\Omega^{hj,\,\beta} = \left[T^{\beta}_{hj}\Omega^{hj}\right]_{,\beta} - \\ - \frac{1}{2}T_{hj\beta}\left(\Omega^{hj,\,\beta} - \Omega^{h\beta,\,j}\right) = \left[T^{\beta}_{hj}\Omega^{hj}\right]_{,\beta} - \frac{1}{2}T_{hj\beta}T^{hj\beta}, \tag{27}$$

где мы использовали равенство $T_{hj\beta} = -T_{h\beta j}$ и уравнение Кодацци. Принимая во внимание (21)—(26), получим

$$A = -R_{h\nu j\beta}R^{h\nu j\beta} - 2R_{ij}R^{ij} + R_{h\nu ij}T^{h\nu ij} + 2R_{ij}T^{ij} - \\ - T^{\alpha}_{\alpha h}T^{jh}_{j} - \frac{1}{2}T_{hj\beta}T^{hj\beta} + \left[T^{\alpha}_{\alpha h}\Omega^{jh} + T^{j}_{h\alpha}\Omega^{h\alpha}\right]_{,j}.$$

Подставив это выражение в правую часть (19), получим доказываемое равенство (16). Заметим, что при $n = 2$ и $F^2 \in E^3$ легко найти

$$\Omega_{ik,\,\beta}\Omega^{ik,\,\beta} = 4\left(\operatorname{grad}\sqrt{-K}\right)^2.$$

Поэтому условие Риччи из 16 следует.

Условие на метрику минимальной гиперповерхности в пространстве постоянной кривизны

Пусть теперь R^{n+1} — пространство постоянной кривизны K_0. В этом случае из (16) вытекает следующее неравенство, являющееся необходимым условием на метрику минимальной гиперповерхности:

$$\nabla_2 R + R_{hkij}R^{hkij} + 2R_{ij}R^{ij} + 2K_0(n-1)R \geqslant 0.$$

Действительно в этом случае

$$T_{hj\beta} = 0, \quad T^{h\nu ij} = K_0(g^{hi}g^{\nu j} - g^{hj}g^{\nu i}),$$
$$T^{ij} = -K_0(n-2)g^{ij}, \quad T = -(n-1)nK_0.$$

Следовательно,

$$R_{h\nu ij}T^{h\nu ij} = -2K_0 R,$$
$$R_{ij}T^{ij} = -K_0(n-2)R.$$

Поэтому уравнение (16) запишется в следующем виде:

$$\nabla_2 R = -R_{h\nu ij}R^{h\nu ij} - 2R_{ij}R^{ij} - 2K_0(n-1)R + 2\,\Omega_{ik,\,\beta}\Omega^{ik,\,\beta}.$$

Отсюда вытекает (27).

Рассмотрим четырехмерное компактное многообразие V^4, вложенное минимальным образом в пространство постоянной кривизны K_0. Как известно, для характеристики Эйлера—Пуанкаре $\chi(V^4)$ четырехмерного компактного ориентируемого многообразия имеет место соотношение

$$8\pi^2\chi(V^4) = \int_{V_4}(R_{ijke}R^{ijke} + R^2 - 4R_{ij}R^{ij})\,dV. \qquad (28)$$

Из (16) и (28) вытекает следующее неравенство для минимального многообразия V^4 с R^5

$$\int_{V^4}(6R^{ij}R_{ij} - R^2 + 6K_0R)\,dV + 8\pi^2\chi(V^4) \geqslant 0,$$

которое связывает метрику многообразия с его топологией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lawson H. B.* Some intrinsic characterizations of minimal surfaces. — «I. Analyse Math.», 1971, vol. 24, p. 151—161.
2. *Calabi E.* Quelgues applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima (together with Topics in complex manifolds by Rossi). — In: Le Presses de l'Vniv. de Montreal. 1968.
3. *Matsumoto Makato.* Intrinsic character of minimal hypersurfaces in flat spaces. — «I. Mat. Soc. Iapan», 1957, vol. 9, № 1, p. 146—157.
4. *Calabi E.* Minimal immersions of surfaces in euclidean spheres. — «I. Diff. Geom.», 1967, vol. 1, N 2, p. 111—125.
5. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М., Изд-во Моск. ун-та, 1960. 307 с.
6. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948. 316 с.

Поступила 26 ноября 1973 г.

УДК 513

Я. П. БЛАНК

О ПОВЕРХНОСТЯХ ИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА, НЕСУЩИХ БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО СЕТЕЙ ПЕРЕНОСА

1. Проблема С. Ли об отыскании поверхностей евклидова пространства, несущих две или большее число сетей переноса, естественным образом обобщается на эллиптическое, квазиэллиптическое и изотропное пространства, каждое из которых обладает двумя трехчленными группами клиффордовых переносов [1—4].

Изотропным называется аффинное пространство, в котором задан абсолют, состоящий из плоскости $x_4 = 0$ и пары комплексно-сопряженных прямых $x_1^2 + x_2^2 = 0,\ x_4 = 0$ [5].

Движениями изотропного пространства служат эквиаффинные преобразования:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi + \alpha, \\ y &= x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi + \beta, \\ z &= c_1 x_1 + c_2 y_1 + z_1 + \gamma. \end{aligned}$$

Эта группа G_6 содержит две трехчленные подгруппы клиффордовых переносов

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a, \\ y &= y_1 + b, \\ z &= z_1 + c + \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \quad (\varepsilon^2 = 1), \end{aligned}$$

которые и порождают поверхности переноса изотропного пространства:

$$\begin{aligned} x &= a_1(\alpha) + b_1(\beta), \\ y &= a_2(\alpha) + b_2(\beta), \\ z &= a_3(\alpha) + b_3(\beta) + \varepsilon \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \quad (\varepsilon^2 = 1). \end{aligned} \tag{1}$$

В настоящей работе определяются поверхности изотропного пространства, несущие бесконечное множество сетей переноса.

2. Пусть $z = z(x, y)$ — поверхность переноса изотропного пространства

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y); \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \psi(x, y), \tag{2}$$

дифференциальные уравнения обеих семейств переноса $\beta = \mathrm{const}$ и соответственно $\alpha = \mathrm{const}$.

Из (1) следует

$$\delta x = b_1'(\beta)\,\delta\beta,\ \ \delta y = b_2'(\beta)\,\delta\beta,\ \ \psi(x, y) = \frac{b_2'(\beta)}{b_1'(\beta)},$$

$$dx = a_1'(\alpha)\,d\alpha,\ \ dy = a_2'(\alpha)\,d\alpha,\ \ \varphi(x, y) = \frac{a_2'(\alpha)}{a_1'(\alpha)}.$$

Применим к функциям φ, ψ операторы δ, d:

$$0 = \delta\varphi = \varphi_x \delta x + \varphi_y \delta y,$$
$$0 = d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

отсюда следует

$$\varphi_x + \psi\varphi_y = 0, \quad (3$$
$$\psi_x + \varphi\psi_y = 0. \quad (3$$

Из третьего уравнения системы (1) вытекает

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx} = \frac{a_3'}{a_1'} + \varepsilon\left(b_2 - \frac{a_2'}{a_1'} b_1\right)$$

или

$$p + q\varphi = \frac{a_3'}{a_1'} + \varepsilon (b_2 - \varphi b_1).$$

Применим к этому уравнению оператор δ:

$$r\delta x + s\delta y + \varphi (s\delta x + t\delta y) = \varepsilon \left(b_2' - \varphi b_1'\right) \delta\beta$$

или

$$r + s(\varphi + \psi) + t\varphi\psi = \varepsilon (\psi - \varphi). \quad ($$

Отсюда следует теорема:

Чтобы поверхность $z = z(x, y)$ была поверхностью перенос изотропного пространства, необходимо и достаточно, чтобы су ществовали две функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, удовлетворяющие си теме (3), (4). Кривые переноса служат интегральными кривым дифференциальных уравнений (2).

Уравнения (3) выражают, что сеть, образованная этими кри выми — чебышевская, а уравнение (4) — что она клиффордов сопряженная. [3].

3. Тривиальным примером поверхности переноса изотропно пространства служит линейчатая поверхность с образующими - параллелями Клиффорда. При этом одно семейство сети перенос состоит из прямолинейных образующих, а второе — из семейств кривых, полученных клиффордовым переносом произвольной кри вой, лежащей на поверхности, вдоль прямолинейных образую щих. Следовательно, на такой поверхности сети переноса сущест вуют с произволом в одну функцию одного аргумента. Така поверхность допускает параметризацию

$$x = \alpha + b_1(\beta),$$
$$y = A\alpha + b_2(\beta),$$
$$z = B\alpha + b_3(\beta) + \varepsilon\alpha (b_2 - Ab_1)$$

где A, B — постоянные.

Исключив параметры α, β, находим уравнение поверхност в явном виде

$$z - Bx = F(y - Ax) + \varepsilon x (y - Ax).$$

Отсюда

$$p = B - Aq + \varepsilon(y - Ax),$$
$$r = -A(s + \varepsilon), \ s - \varepsilon = -At,$$

таким образом, поверхность удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$rt - s^2 + 1 = 0,$$

Здесь

$$\varphi(x, y) = A,$$

уравнения (3_1) и (4) выполнены тождественно относительно φ и уравнение (3_2) определяет ψ как произвольную функцию одного аргумента

$$\psi = \psi(y - Ax).$$

(Такой поверхностью, в частности, служит параболоид).

4. Поверхности, определяемые дифференциальным уравнением

$$rt - s^2 = \text{const},$$

исследовались многократно [7—10]. Бляшке показал, что они являются несобственными аффинными сферами и допускают параметризацию

$$x = \beta - \alpha,$$
$$y = a'(\alpha) - b'(\beta),$$
$$z = 2(a - b) + \beta b' - \alpha a' + \alpha b' - \beta a'$$

и, следовательно, являются поверхностями переноса в изотропном пространстве, причем кривыми переноса служат асимптотические линии.

Если асимптотические линии обеих семейств не состоят из прямых, то они образуют единственную сеть переноса.

Действительно, пусть

$$rt - s^2 + 1 = 0,$$
$$u = p + \varepsilon y, \ v = q - \varepsilon x,$$
$$u_1 = p - \varepsilon y, \ v_1 = q + \varepsilon x.$$

Так как

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{D(u_1, v_1)}{D(x, y)} = rt - s^2 + 1 = 0,$$

то

$$v = v(u), \ v_1 = v_1(u_1).$$

Уравнение (4) принимает вид

$$(u_x + \varphi u_y)\left(1 + \frac{dv}{du}\psi\right) = 0,$$

и соответственно

$$(u_{1x} + \psi u_{1y})\left(1 + \frac{dv_1}{du_1}\varphi\right) = 0.$$

Отсюда, либо

$$1 + \frac{dv}{du}\psi = 0$$

и, следовательно,

$$\psi = \psi(u),$$

либо

$$u_x + \varphi u_y = 0,$$

что в сочетании с (3) приводит к уравнению

$$\frac{D(u, \psi)}{D(x, y)} = 0,$$

т. е. снова

$$\psi = \psi(u).$$

Аналогично следует

$$\varphi = \varphi(u_1).$$

Но дифференциальное уравнение асимптотических линий

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0$$

в силу $rt - s^2 + 1 = 0$ принимает вид

$$(rdx + sdy)^2 - \varepsilon^2 dy^2 = 0,$$

или

$$(dp - \varepsilon dy)(dp + \varepsilon dy) = 0.$$

Следовательно, одно семейство асимптотических линий

$$u = \text{const},$$

второе — $u_1 = \text{const}$.

Но

$$\psi = \psi(u) = \frac{b_2'(\beta)}{b_1'(\beta)},$$

поэтому $\beta = \beta(u)$ и соответственно $\alpha = \alpha(u_1)$, оба семейства кр[ивых] переноса состоят из асимптотических линий, и сеть перено[са] единственна.

5. В дальнейшем будем считать, что $\Delta = rt - s^2 + 1 \neq 0$. Пр[и] этом $s + \varepsilon + t\psi \neq 0$, так как в противном случае из (4) следует, что $r + (s - \varepsilon)\psi = 0$ и $\Delta = 0$.

Разрешим уравнение (4) относительно φ

$$\varphi = -\frac{r + (s - \varepsilon)\psi}{s + \varepsilon + t\psi}. \quad (4$$

Подставив это выражение для φ в (3), получим

$$\psi_x = \lambda[r + (s - \varepsilon)\psi],$$
$$\psi_y = \lambda[s + \varepsilon + t\psi]. \quad (5$$

Так как $\delta\varphi = 0$, из (4) следует

$$(\delta r + \psi\delta s)(s + \varepsilon + t\psi) = (\delta s + \psi\delta t)[r + (s - \varepsilon)\psi] + \delta\psi \cdot \Delta. \quad (4'$$

Внеся сюда следующее выражение для $\delta\psi$:

$$\delta\psi = (\psi_x + \psi\psi_y)\,\delta x = \lambda(r + 2s\psi + t\psi^2)\,\delta x,$$

получаем уравнение, из которого определяется λ

$$\lambda(r + 2s\psi + t\psi^2) = A + B\psi + C\psi^2 + D\psi^3, \quad (6$$

$$
\begin{gathered}
A\cdot\Delta = (s+\varepsilon)\, r_x - r r_y, \\
B\cdot\Delta = t r_x + 2(s+\varepsilon)\, s_x - (s-\varepsilon)\, r_y - 2 r s_y, \\
C\cdot\Delta = (s+\varepsilon)\, t_x + 2 t s_x - r t_y + 2(s-\varepsilon)\, s_y, \\
D\cdot\Delta = t t_x - (s-\varepsilon)\, t_y.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Составим условие интегрируемости системы (5)

$$
\lambda_y\, [r + (s-\varepsilon)\,\psi] - \lambda_x\, [s + \varepsilon + t\psi] - \lambda^2\Delta = 0 \tag{8}
$$

и внесем значения λ_x и λ_y из (6) с учетом системы (5), получим уравнение четвертой степени относительно искомой функции ψ:

$$
\begin{gathered}
[A_y + B_y\psi + C_y\psi^2 + D_y\psi^3]\, [r + (s-\varepsilon)\,\psi] = \\
= [A_x + B_x\psi + C_x\psi^2 + D_x\psi^3]\, [s + \varepsilon + t\psi],
\end{gathered} \tag{9}
$$

Отсюда следует, что наибольшее конечное число сетей переноса на поверхности в I_3 равно четырем.

Если продифференцировать (9) по x и по y, заменив ψ_x и ψ_y по (5) и λ по (6), а из (9) и полученных двух уравнений исключить ψ, придем к системе из двух дифференциальных уравнений в частных производных пятого порядка на одну функцию r. Это хорошо согласуется с результатом Рейдемейстра и Шеффера, впервые обнаруживших, что поверхности переноса евклидова пространства определяются системой из двух дифференциальных уравнений пятого порядка [11].

6. Уравнение (9) значительно упрощается, если переменные x, y заменить переменными u, v по формулам

$$
u = p + \varepsilon y, \quad v = q - \varepsilon x. \tag{10}
$$

Отсюда следует

$$
\begin{gathered}
u_x = r, \quad u_y = s + \varepsilon, \\
v_x = s - \varepsilon, \quad v_y = t
\end{gathered} \tag{11}
$$

и

$$
\frac{D(u,\, v)}{D(x,\, y)} = rt - s^2 + 1 = \Delta \neq 0. \tag{12}
$$

Следовательно, u, v — переменные независимые и

$$
A = -r_v, \quad B = r_u - 2s_v, \quad C = 2s_u - t_v, \quad D = t_u. \tag{13}
$$

Действительно, по (7) и (11)

$$
A\cdot\Delta = \frac{D(r,\, u)}{D(x,\, y)} = \frac{D(r,\, u)}{D(u,\, v)}\cdot\frac{D(u,\, v)}{D(x,\, y)} = -r_v\cdot\Delta.
$$

Следовательно, $A = -r_v$. Аналогично получаются и выражения для B, C, D в уравнениях (13).

Теперь уравнение (9) принимает следующий вид:

$$
\begin{gathered}
r_{vv} + 2(r_{uv} - s_{vv})\,\psi + (4s_{uv} - r_{uu} - t_{vv})\,\psi^2 + \\
+ 2(t_{uv} - s_{uu})\,\psi^3 + t_{uu}\psi^4 = 0,
\end{gathered} \tag{9'}
$$

а уравнения (5), (6)

$$\psi_u = \lambda, \qquad (5$$

$$\psi_v = \lambda\psi, \qquad (5$$

$$\lambda(r + 2s\psi + t\psi^2) = t_u\psi^3 + (2s_u - t_v)\psi^2 + (r_u - 2s_v)\psi - r_v. \qquad (6$$

7. Пусть поверхность несет ∞^1 сетей переноса. Тогда в коэффициенты уравнения (9′) обращаются в нуль.

Из $r_{vv} = 0$ следует

$$r = U_1 v + U_2.$$

Из $t_{uu} = 0$ следует

$$t = V_1 u + V_2.$$

Из $r_{uv} = s_{vv}$ следует

$$s_{vv} = U_1'. \qquad (14)$$

Из $t_{uv} = s_{uu}$ следует

$$s_{uu} = V_1'.$$

Из $4s_{uv} - r_{uu} - t_{vv} = 0$ следует

$$4s_{uv} = U_1''v + U_2'' + V_1''u + V''. \qquad (15)$$

Продифференцировав (14) по v и (15) по u, находим

$$3V_1'' = U_1'''v + U_2''',$$

откуда

$$3V_1''' = U_1'''.$$

Аналогично находим

$$3U_1''' = V_1'''.$$

Следовательно,

$$U_1''' = V_1''' = 0$$

и

$$U_1 = bu^2 + b_1u + b_2, \quad V_1 = av^2 + a_1v + a_2,$$

$$U_2 = au^3 + (c_1 + c_2)u^2 + b_0u + \beta, \quad V_2 = bv^3 + (c_2 - c_1)v^2 + a_0v + \gamma$$

Итак,

$$r = v(bu^2 + b_1u + b_2) + au^3 + (c_2 + c_1)u^2 + b_0u + \beta,$$

$$s = uv(au + bv) + \frac{a_1}{2}u^2 + \frac{b_1}{2}v^2 + c_2uv + a_3u + b_3v + \alpha, \qquad (16)$$

$$t = u(av^2 + a_1v + a_2) + bv^3 + (c_2 - c_1)v^2 + a_0v + \gamma.$$

8. Уравнения (16) содержат 15 постоянных коэффициентов Они связаны зависимостями, которые получим, записав условия интегрируемости

$$r_y = s_x, \quad s_y = t_x,$$

$$
\begin{aligned}
r_u u_y + r_v v_y - s_u u_x - s_v v_x &= 0,\\
s_u u_y + s_v v_y - t_u u_x - t_v v_x &= 0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Внеся сюда значения производных u, v из (11), и r, s, t и их производных из (16), получаем два уравнения с постоянными коэффициентами третьей степени относительно независимых переменных u, v. Приравняв нулю все коэффициенты этих уравнений, находим искомые соотношения между постоянными:

$$
\begin{aligned}
&1)\ a_1c_2 = 2(ba_2 + aa_3);\\
&2)\ b_1c_2 = 2(ab_2 + bb_3);\\
&3)\ c_1c_2 = a(b_0 - b_3) + b(a_3 - a_0);\\
&4)\ b_1(b_0 - b_3) = 2(b\beta + b_2c_1);\\
&5)\ a_1(a_0 - a_3) = 2(a\gamma - a_2c_1);\\
&6)\ b_1(a_0 - a_3) = 2(a\beta - b_3c_1 - 2b\varepsilon);\\
&7)\ a_1(b_0 - b_3) = 2(b\gamma + a_3c_1 + 2a\varepsilon);\\
&8)\ a_1(b_0 + b_3) = 2[b\gamma + a_2b_1 + a_3c_1 + 2a(\alpha + 2\varepsilon)];\\
&9)\ b_1(a_0 + a_3) = 2[a\beta + a_1b_2 - b_3c_1 + 2b(\alpha - 2\varepsilon)];\\
&10)\ c_2\beta - 2b_1\varepsilon = b_2(a_0 - a_3) + b_3(b_0 - b_3);\\
&11)\ c_2\gamma + 2a_1\varepsilon = a_2(b_0 - b_3) + a_3(a_0 - b_3);\\
&12)\ c_2(\alpha + 3\varepsilon) + 2c_1(\alpha + \varepsilon) + a_2b_2 - a_3b_3 = a_1\beta - b_1\gamma;\\
&13)\ c_2(\alpha - 3\varepsilon) - 2c_1(\alpha - \varepsilon) + a_2b_2 - a_3b_3 = b_1\gamma - a_1\beta;\\
&14)\ b_2\gamma - a_3\beta = b_3(\alpha - \varepsilon) - b_0(\alpha + \varepsilon);\\
&15)\ a_2\beta - b_3\gamma = a_3(\alpha + \varepsilon) - a_0(\alpha - \varepsilon).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Эта система уравнений сохраняется, если поменять местами a_i и b_i, β и γ и заменить c_1, ε на $-c_1$, $-\varepsilon$.

9. Из уравнений (18) следует

$$a = b = a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0.$$

Действительно, умножив уравнение 2) на $b_0 - b_3$ и воспользовавшись уравнением 4), получаем

$$c_2(b\beta + b_2c_1) = (b_0 - b_3)(ab_2 + bb_3).$$

После замены c_1c_2 по 3) оно преобразуется в

$$b[b_3(b_0 - b_3) + b_2(a_0 - a_3) - \beta c_2] = 0,$$

откуда по 10) следует

$$bb_1 = 0, \tag{19}$$

и соответственно

$$aa_1 = 0. \tag{20}$$

Умножив уравнение 1) на $b_0 - b_3$ и воспользовавшись (7), (8) и (11), находим, что

$$ac_2 = ba_1.$$

Из (20) и (21) следует

$$ac_2 = ba_1 = 0$$

и соответственно

$$bc_2 = ab_1 = 0. \qquad (2$$

Пусть $a \neq 0$, тогда $a_1 = b_1 = c_2 = 0$. Из 7) и 8) следует

$$\alpha = -\varepsilon.$$

Из 6) и 9) —

$$b = 0.$$

Из 1) —

$$a_3 = 0,$$

что противоречит 8).

Итак,

$$a = 0 \qquad (2$$

и соответственно

$$b = 0. \qquad (2$$

Пусть $c_2 \neq 0$, тогда из 1), 2), 3) получаем

$$a_1 = b_1 = c_1 = 0,$$

а из 12), 13) — $c_2\varepsilon = 0$, что противоречит нашему допущени
Таким образом,

$$c_2 = 0. \qquad (2$$

Из 8), 7), 9) следует

$$a_2b_1 = a_1b_3,$$
$$b_2a_1 = b_1a_3.$$

Отсюда

$$a_1(a_3b_3 - a_2b_2) = 0,$$
$$b_1(a_3b_3 - a_2b_2) = 0.$$

Из 12) и 13) —

$$2\varepsilon c_1 = a_3b_3 - a_2b_2, \qquad (2$$
$$2\alpha c_1 = a_1\beta - b_1\gamma,$$

откуда

$$a_1c_1 = b_1c_1 = \alpha c_1 = 0.$$

Пусть $c_1 \neq 0$, тогда

$$a_1 = b_1 = \alpha = 0$$

и по 4), 5), 6), 7)

$$a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0,$$

что противоречит уравнению (25).

Итак,

$$c_1 = 0. \qquad (2$$

Пусть $a_1 \neq 0$. Из 5) и 7) следует

$$a_0 = a_3, \quad b_0 = b_3,$$

что противоречит 11). Следовательно,

$$a_1 = 0$$

и соответственно

$$b_1 = 0.$$

Таким образом,

$$a = b = a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0.$$

10. Система (16) принимает вид

$$\begin{aligned} r &= b_2 v + b_0 u + \beta, \\ s &= a_3 u + b_3 v + \alpha, \\ t &= a_2 u + a_0 v + \gamma, \end{aligned} \tag{16'}$$

и уравнения (18) сводятся к следующим:

$$\begin{gathered} a_2 b_2 = a_3 b_3, \\ b_2 (a_0 - a_3) + b_3 (b_0 - b_3) = 0, \\ a_3 (a_0 - a_3) + a_2 (b_0 - b_3) = 0, \\ b_2 \gamma - a_3 \beta = b_3 (\alpha - \varepsilon) - b_0 (\alpha + \varepsilon), \\ a_2 \beta - b_3 \gamma = a_3 (\alpha + \varepsilon) - a_0 (\alpha - \varepsilon). \end{gathered} \tag{18'}$$

Из (18') следует

$$a_0 a_3 - a_2 b_3 = a_3^2 - a_2 b_0 = 0, \tag{27}$$

и соответственно

$$b_0 b_3 - b_2 a_3 = b_3^2 - b_2 a_0 = 0. \tag{28}$$

Пусть $a_2 \neq 0$.
Из (16) —

$$\begin{aligned} a_2 r - a_3 s &= a_2 \beta - a_3 \alpha, \\ a_2 s - a_3 t &= a_2 \alpha - a_3 \gamma. \end{aligned} \tag{29}$$

Умножив первое из уравнений (29) на dx, второе — на dy и сложив, получим

$$a_2 dp - a_3 dq = a_2 (\beta dx + \alpha dy) - a_3 (\alpha dx + \gamma dy)$$

или

$$a_2 p - a_3 q = a_2 (\beta x + \alpha y) - a_3 (\alpha x + \gamma y) + C. \tag{30}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a_2 \beta - a_3 \alpha &= M, \\ a_2 \alpha - a_3 \gamma &= N. \end{aligned}$$

Уравнение (30) перепишется так:

$$a_2 \frac{\partial z}{\partial x} - a_3 \frac{\partial z}{\partial y} = Mx + Ny + C, \tag{31}$$

интегрируя его, находим

$$2z(Ma_2 - Na_3) = (Mx + Ny + C)^2 + F(a_2y + a_3x). \qquad (3$$

Для определения функции F используем третье уравнен системы (16). Для этого вычисляем p, q из (32) и подставля эти значения в (16), получаем для F следующее уравнение:

$$a_2^2F'' - a_2(a_3 + a_0)F' = 2(Mx + Ny + C)(a_0N + a_2M) + $$
$$+ 2(Ma_2 - Na_3)[\varepsilon(a_2y - a_0x + \gamma] - 2B^2. \qquad (3$$

Это уравнение, после замены M, N по (31) с использовани (27), (28) и последнего из уравнений (18), принимает такой ви

$$a_2F''(w) = (a_3 + a_0)[F'(w) + 2w + 2C\varepsilon] + 2a_2(\beta\gamma - \alpha^2), \qquad (3$$

где

$$w = a_3x + a_2y. \qquad (3$$

Здесь $a_3 + a_0 \neq 0$, так как в противном случае получаем п раболоид.

Из (34) следует

$$F(w) = C_0 - w^2 - 2w\left(C^\varepsilon + a_2\frac{\beta\gamma - \alpha^2 + 1}{a_0 + a_3}\right) + C_1e^{\frac{a_0 + a_3w}{a_2}}. \qquad (3$$

Внеся это значение в (32), находим уравнение искомых п верхностей переноса изотропного пространства, несущих с сетей переноса:

$$2z(\beta a_2^2 - 2\alpha a_2a_3 + \gamma a_3^2) = [(a_2\beta - a_3\alpha)x + (a_2\alpha - a_3\gamma)y + c]^2 -$$
$$- (a_3x + a_2y)^2 - 2(a_3x + a_2y)\left[C\varepsilon + \frac{a_2}{a_0 + a_3}(\beta\gamma - \alpha^2 + 1)\right] +$$
$$+ C_1e^{\frac{a_0 + a_3}{a_2}}(a_3x + a_2y) + C_0. \qquad (3$$

Коэффициент при z отличен от нуля. Действительно, пусть

$$\beta a_2^2 - 2\alpha a_2a_3 + \gamma a_3^2 = 0.$$

Тогда из последнего уравнения системы (18′) и первого ура нения системы (27) следует

$$\gamma a_3 = a_2(\alpha - \varepsilon), \quad \beta a_2 = a_3(\varkappa + \varepsilon),$$

а уравнения (23) принимают вид

$$a_2r - a_3(s + \varepsilon) = 0,$$

$$a_2(s - \varepsilon) - a_3t = 0,$$

откуда следует

$$\Delta = rt - s^2 + 1 = 0,$$

что противоречит нашему допущению $\Delta \neq 0$.

При выводе уравнения (37) мы считали, что a_2 не равно н лю. Если $a_2 = 0$, но $b_2 \neq 0$, мы придем к уравнению, аналогичном

(37), а именно, поменяются местами a_i и b_i, β и γ, а ε изменит знак.

Если $a_2 = b_2 = 0$, то по (27) и (28) $a_3 = b_3 = 0$ и система (18′) сводится к двум уравнениям

$$a_0(\alpha - \varepsilon) = 0, \quad b_0(\alpha + \varepsilon) = 0.$$

В случае $a_0 = b_0 = 0$ получаем параболоид. Не может быть одновременно $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Пусть $a_0 = 0$, $b_0 \neq 0$, тогда $\alpha + \varepsilon = 0$ и, интегрируя систему (16′), находим, что уравнение искомой поверхности

$$z = C_1 e^{b_0 x} + \frac{\gamma}{2} y^2 - \varepsilon xy + Cy - \frac{\beta}{b_0} x + C_0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бланк Я. П.* Клиффордово-сопряженные сети.— Докл. АН СССР, 1948, т. 59, № 7, с. 1931—1939.
2. *Бланк Я. П.* О поверхностях сдвига эллиптического пространства.—«Зап. н.-и. ин-та. мат. и мех. ХГУ и Харьк. мат. о-ва», 1959, т. 20, с. 61—76.
3. *Бланк Я. П., Моторный Л. Т.* К проблеме В. Бляшке о поверхностях квазипереноса.—«Докл. АН СССР», 1965, т. 160, № 6, с. 1235—1238.
4. *Бланк Я. П., Моторный Л. Т.* К проблеме В. Бляшке о поверхностях квазипереноса и их связи с кинематикой на плоскости.—«Вестн. ХГУ, сер. мех.-мат. Зап. мех.—мат. ф-та и Харьк. мат. о-ва», 1965, т. 31, с. 3—17.
5. *Strubecker K.* Casi limiti de geometrie non-euclidee.—In: Rend. del Seminario Matematico d'Universita e del Politecnica di Torino. 1961, t. 21, p. 141—212.
6. *Бланк Я. П., Загайный Н. А., Ищенко В. С.* Поверхности переноса в изотропном пространстве.—«Укр. геометр. сб.», вып. 14, Харьков, 1973, с. 11—21.
7. *Darboux G.* Theorie gènerale des surfaces, 3. Paris, 1894, p. 273—274.
8. *Goursat E.* Sur les lignes asymptotiques.—«Bull. Soc. math. de France», 1896, t. 24, p. 43—51.
9. *Scheffers G.* Eigenschaften der Integral flächen. — «Math. Zeitschr», 1919, Bd. 5, S. 112—117.
10. *Blaschke W.* Vorlesungen uber Differentialgeometrie. Bd. II. Berlin 1923, S. 216.
11. *Reidemeister K.* Die Differentialglei chung der Schiebflächen.—«Hamb. Abh.», 1922, Bd. 1, S. 127—138.
12. *Scheffers G.* Bemerkungen zur vorstehenden Abh. des Herrn K. Reidemeister.—«Hamb. Abh.», 1922, Bd. I, S. 138—139.

Поступила 8 февраля 1974 г.

УДК 513

А. А. БОРИСЕНКО

О КОМПАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В заметке [1] было показано, что компактная l-мерная поверхность в сферическом пространстве S^{l+p}, имеющая кривизну по двумерным площадкам $K \leqslant 1$, является большой сферой, если коразмерность p ее вложения в S^{l+p} невелика, и для p получены оценки: при l четном $p<\sqrt{l+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$, при l нечетн

$p<\sqrt{\frac{l+1}{2}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$. В настоящей заметке улучшается оцен p для всех размерностей l, кроме $l=4$ и $l=8$, а именно, д казывается

Теорема. *Пусть F — компактная l-мерная поверхность клас C^3 в сферическом пространстве S^{l+p} и ее кривизна по двумерны площадкам удовлетворяет неравенству $K\leqslant 1$. Если $p<\frac{l}{4}$, т поверхность F — большая сфера.*

Для сравнения заметим, что если кривизна поверхности по двумерным площадкам удовлетворяет условиям $\frac{1}{4}<K\leqslant$ то, как доказано в [1], при $p<\frac{l}{2}$ поверхность является больш сферой.

Пусть $A_{ij}(n, X)y^iy^j$ — вторая квадратичная форма поверхн сти F в точке X относительно нормали n, $r(n, X)$ — ранг эт формы; $r(X)=\max r(n, X)$ взятый по всем нормалям в точке X назовем *рангом точки* X, и пусть $r_0=\max r(X)$, взятый по вс точкам поверхности F.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме, к торую Ферус [2] доказал для случая, когда F — гиперповер ность.

Лемма. *Пусть F есть l-мерная компактная поверхность кла са C^3 в сферическом пространстве S^{l+p}. Если на поверхности максимум ранга r_0 положителен, то $r_0\geqslant\frac{l}{2}$.*

Пусть X_0 — точка на поверхности F, в которой $r(X_0)=$ и n_0 — та нормаль поверхности в этой точке, для которой $r(X$ $n_0)=r_0$. Тогда на поверхности F через точку X_0 проходит бол шая сфера S^{l+r_0}, вдоль которой нормаль n_0 стационарна; э сфера полностью лежит на поверхности F [1].

Из максимальности r_0 следует, что в окрестности сферы S^{l-} на поверхности F будет $r(X)=r_0$. Пусть S^{l+1} — большая сфер содержащая касательную сферу S^l в точке X_0 и большую окру ность S^1, проведенную в направлении нормального вектора n Обозначим через $S_\delta^{l-r_0}$ такую окрестность сферы S^{l-r_0} на повер ности F, что

1) расстояния точек $X\in S_\delta^{l-r_0}$ от сферы S^{l+1} меньше $\delta<\frac{\pi}{2}$

2) в точках $X\in S_\delta^{l-r_0}$ касательные сферы образуют со сфер S^{l+1} угол, меньший $\varphi_0<\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\overline{X}$ — точка на сфере S^{l+1}, ближайшая к точке $X\in S_\delta^{l-}$ Из условий 1) и 2) следует, что множество точек $\overline{X}$ образует регулярную гиперповерхность F_0. Сфера S^{l-r_0} полностью лежит на ней. Так как нормаль $\bar{n}$ в точке $\bar{X}$ гиперповерхности F_0 параллельна одной из нормалей n в точке X поверхности F, то из выбора сферы S^{l+1} следует, что на гиперповерхности F_0 вдоль сферы S^{l-r_0} нормаль стационарна и совпадает с вектором n_0. Поскольку вторая квадратичная форма гиперповерхности F_0 в точке $\bar{X}$ пропорциональна второй квадратичной форме поверхности F в точке X относительно нормали n, на гиперповерхности F_0 в точках сферы S^{l-r_0} будет $r(\bar{X}) = r_0$ [3]. Из максимальности r_0 следует, что найдется достаточно малое δ, при котором ранг второй квадратичной формы гиперповерхности F_0 в каждой точке равен r_0. По лемме Черна—Лашофа, через каждую точку $\bar{X}$ гиперповерхности F_0 проходит сфера $S^{l-r_0}(\bar{X})$, вдоль которой нормаль $\bar{n}(\bar{X})$ стационарна, и если при этом точка $\bar{X}$ лежит достаточно близко к точке X_0, то сфера $S^{l-r_0}(\bar{X})$ полностью лежит на гиперповерхности F_0 и нормаль $\bar{n}(\bar{X})$ не совпадает с n_0 [4, с. 291]. Поэтому сферы S^{l-r_0} и $S^{l-r_0}(\bar{X})$ не имеют общих точек. Но так как они являются большими сферами в большой сфере S^{l+1}, то $l - r_0 < \frac{l}{2}$ и, следовательно, $r_0 \geqslant \frac{l}{2}$.

Доказательство теоремы. Для поверхностей, удовлетворяющих условию теоремы, $r \leqslant 2p$ [1]. Так как $p < \frac{l}{4}$, то $r < \frac{l}{2}$, $r_0 < \frac{l}{2}$. Из леммы следует, что $r_0 = 0$ и поверхность является большой сферой S^l в сферическом пространстве S^{l+p}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисенко А. А.* О полных поверхностях в пространствах постоянной кривизны.—«Укр. геометр. сб.», вып. 15. Харьков, 1974, с. 8—15.
2. *Ferus D.* On the type number of hypersurfaces of constant curvature.—«Math. Annalen», B. 187, n. 4, 1970, p. 310—317.
3. *Борисенко А. А.* О строении l-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n-мерном евклидовом пространстве.—«Укр. геометр. сб.», вып. 13. Харьков, 1973, с. 18—27.
4. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М., «Мир», 1970. 407 с.

Поступила 21 января 1974 г.

УДК 513

А. А. БОРИСЕНКО

О ПРЯМЫХ НА ПОЛНОМ НЕКОМПАКТНОМ ДВУМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

Известно, что полное некомпактное двумерное конечносвязное риманово многообразие получается из замкнутого двумерного многообразия путем удаления конечного числа точек $a_1, \ldots, a_n$, которые называются бесконечно удаленными точками многообразия F [1, с. 175]. Полную геодезическую линию на полном многообразии F будем называть прямой, если она явл ется кратчайшей на каждом отрезке между двумя своими то ками [1, с. 224].

Прямые в полном римановом многообразии изучал С. Э. Ко Фоссен [1]. Он установил связь между наличием прямых многообразии, гомеоморфном плоскости, и его полной криви ной, а также между фактом существования прямых и топол гической структурой полного риманова многообразия. Бы доказано, что если на полном двумерном римановом многообраз есть по крайней мере два ухода на бесконечность, то на мног образии есть прямая [1, с. 225].

Полной кривизной ω риманова многообразия F будем наз вать интеграл от гауссовой кривизны по площади на многоо разии F. Будем полагать, что на рассматриваемых многообр зиях полная кривизна существует. Пусть χ — эйлерова харак ристика многообразия F.

Нами доказана

Теорема 1. *Пусть F — полное двумерное риманово многообр зие класса C^2 с одним уходом на бесконечность.*

I. *Если на многообразии F есть прямая, то полная кривиз многообразия F удовлетворяет неравенству*

$$\omega \leqslant 2\pi(\chi - 1).$$

II. *Если полная кривизна многообразия F удовлетворяет равенству*

$$\omega < 2\pi(\chi - 1),$$

то на многообразии F есть прямая.

Пусть Φ — замкнутое двумерное многообразие, выкалывани из которого точки a_0 получается многообразие F. Возьмем зам нутую жорданову область Δ на Φ, внутри которой лежит точк a_0. Пусть γ — граница области Δ. Образ области Δ на мног образии F называется трубкой, а образ кривой γ — границ трубки и его также будем обозначать γ. Цикл на многообразии гомотопный γ называется поясом. Пусть l — спрямляемый по на поверхности F, $s(l)$ — его длина. Положим $s_0(F) = \inf s($ где точная нижняя граница берется по всевозможным спрямл емым поясам $l \subset F$ [2, с. 237].

Рассмотрим два случая:

1) на F существует такой пояс l_0, что

$$s(l_0) = s_0(F);$$

2) такого пояса не существует.

Если на поверхности F выполняется случай 2), то на н нет прямой.

Пусть L_i — последовательность поясов таких, что $\lim s(L_i)$ $= s_0(F)$. Последовательность поясов L_i расходится на повер ности F. Их образы на замкнутом многообразии Φ сходятся бесконечно удаленной точке a_0. Если бы на многообразии F существовала прямая L, то она бы пересекала поясы L_i, по крайней мере, в двух точках X_i, Y_i, причем эти точки уходят на бесконечность по прямой L в разные стороны. То есть, $\lim \rho (X_i, Y_i) = \infty$, где ρ — метрика в многообразии F.

Но для достаточно большого i длина меньшей дуги пояса между точками X_i, Y_i

$$s(X_i, Y_i) < \frac{s_0(F)}{2} + \varepsilon,$$

где ε — фиксированное, сколь угодно малое число. Тогда

$$\lim \rho (X_i, Y_i) \leqslant \frac{s_0(F)}{2},$$

что противоречит тому, что L — прямая.

При выполнении условия 2) полная кривизна многообразия F по теореме Кон-Фоссена [1, с. 186] равна $\omega = 2\pi\chi$ и в этом случае теорема доказана.

При выполнении случая 1) будем различать две возможности:

а) $s_0(F) \neq 0$,

б) $s_0(F) = 0$.

Случай б) возможен лишь тогда, когда пояс принадлежит к нулевому гомотопическому классу фундаментальной группы поверхности F.

Но поверхность F гомеоморфна замкнутой поверхности Φ, из которой выколота одна точка. Если Φ отлична от сферы, то фундаментальная группа $\pi_1(\Phi)$ в ориентируемом случае порождена $2p$ образующими $a_1, b_1, \ldots, a_p b_p$, удовлетворяющими одному соотношению $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1$ в неориентированном случае порождена q образующими $c_1, \ldots, c_q$, удовлетворяющими соотношению $c_1 c_1 \ldots c_q c_q = 1$. При выкалывании одной точки из замкнутой поверхности Φ у нас получается многообразие, гомотопически эквивалентно букету окружностей. Поэтому фундаментальная группа поверхности порождена свободными образующими $a_1 b_1 \ldots a_p b_p$ в первом случае, $c_1, \ldots, c_q$ — во втором. Пояс γ принадлежит гомотопическому классу $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p \times b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ в ориентируемом случае, $c_1 c_1 \ldots c_q c_q$ — в неориентируемом случае, который отличен от нулевого, коль группа порождена свободными образующими. Отсюда следует, что случай б) возможен лишь, когда замкнутая поверхность Φ — сфера, а многообразие F тогда будет гомеоморфным плоскости. Эту ситуацию будем рассматривать отдельно.

Итак в случае а) на поверхности F будет существовать пояс минимальной длины l_0, который на F будет замкнутой геодезической. Пояс l_0 отделяет от многообразия F трубку T. Если на поверхности F есть прямая, то она полностью лежит на трубке T. Это непосредственно следует из минимальности пояса и условия неналегания кратчайших в римановом многообразии.

В дальнейшем нам понадобится несколько лемм, доказан[ных] С. Э. Кон-Фоссеном [1, с. 274—284].

Лемма A. *Пусть граница полной геодезической области [G,] гомеоморфной замкнутой полуплоскости, является прямой и им[еет] лишь конечное число угловых точек. Обозначим* $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ *со[от]ветствующие углы, измеренные в G. Тогда для полной криви[зны]* $\omega(G)$, *если она существует, справедливо неравенство*

$$\omega(G) \leqslant -\sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i)$$

Когда граничная прямая является полной геодезической, $\omega(G) \leqslant$ [0].

Лемма B. *Пусть полная геодезическая область G гомеомо[рф]на замкнутой полосе между двумя параллельными прямыми. Е[сли] граница G имеет лишь конечное число угловых точек* α_i *и G [об]ладает полной кривизной, то имеет место (A).*

Лемма C. *Пусть в некоторой полной выпуклой области [G] существуют две расходящиеся последовательности точек* X_i, [Y_i] *и замкнутая кривая K такого рода, что каждая кратчайш[ая]* K_i, *соединяющая* X_i *и* Y_i *пересекает K. Тогда в области G су[ще]ствует прямая, которая пересекает K.*

Пусть l — луч в геодезически выпуклой области G [на] поверхности F, выходящий из точки O. Будем называть л[уч] $l(P)$, выходящий из точки P, асимптотическим к лучу l, ес[ли] луч $l(P)$ является пределом кратчайших PX_n, где X_n — пос[ле]довательность точек на луче l, уходящая на бесконечность [...]. Ясно, что угол между кратчайшими PX_n и лучом $l(P)$ стр[е]мится к нулю.

Лемма 1. *Пусть* $l(P)$ — *асимптотический луч к лучу* l. *Т[ог]да угол между лучом* l *и кратчайшими* PX_n *стремится к нул[ю].*

На луче l возьмем две последовательности точек X_n', X_n'', уходящих по лучу l на бесконечность таких, что

$$\rho(OX_n'') - \rho(OX_n') > \rho(PX_n').$$

Рассмотрим треугольник $PX_n'X_n''$ с углами α_1, α_2, α_3 при верш[и]нах P, X_n', X_n''. Угол $\alpha_1 < \varepsilon$ и абсолютная кривизна этого тр[е]угольника $\Omega(PX_n'X_n'') < \varepsilon$ при достаточно большом n. Рассмо[т]рим соответствующий плоский треугольник $\overline{P}\overline{X}_n'\overline{X}_n''$ с углами, $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$, $\overline{\alpha}_3$. Из теоремы о сравнении углов [4, с. 143] следует, ч[то]

$$|\alpha_i - \overline{\alpha}_i| < \varepsilon, \quad \overline{\alpha}_i < 2\varepsilon.$$

Из (1) —

$$\overline{\alpha}_3 < \overline{\alpha}_1$$

Из (2), (3) —

$$\alpha_3 < 3\varepsilon.$$

А угол α_3 и является углом между лучом l и кратчайшей PX[$_n$].

Пусть $X(s)$ — точка на луче $l(P)$ на расстоянии s от точки $P = X(0)$. $X_1(s)$ — точка на луче l на расстоянии s от точки P.

Лемма 2. *Если луч $l(P)$ асимптотический лучу l, то*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\rho(X(s)\,X_1(s))}{s}=0.$$

Рассмотрим треугольник $PX(s)\,X_1(s)$ с углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Угол при вершине P $\alpha_1<\varepsilon$, так как кратчайшие $PX_1(s)$ сходятся к лучу $l(P)$, $\omega(PX(s)\,X_1(s))<\varepsilon$ при достаточно большом s.

В плоском равнобедренном треугольнике $\overline{P}\overline{X}(s)\overline{X}_1(s)$ с этими же длинами сторон

$$|\alpha_1-\overline{\alpha}_1|<\varepsilon,\quad \overline{\alpha}_1<2\varepsilon,$$

$$\frac{\rho(X_1(s)\,X(s))}{s}=2\sin\frac{\overline{\alpha}_1}{2}\leqslant 2\varepsilon.$$

Лемма 3. *Если на трубке T, ограниченной гладким геодезическим поясом l_0 есть прямая L и полная кривизна существует, то*

$$\omega\leqslant-2\pi. \tag{4}$$

Пусть O ближайшая точка прямой к поясу l_0, $\widetilde{O}$ — точка на поясе l_0, ближайшая к точке O. Точка O разобьет прямую L на два луча p_1 и q_1; $X_1(s)$, $Y_1(s)$ — точки на лучах p_1, q_1, $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{Y}_1$ — точки на l_0, ближайшие к точкам X_1, Y_1. Дугу пояса l_0, ограниченного точками $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{Y}_1$, обозначим $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{q}_1$. При уходе X_1 по лучу p_1 на бесконечность, точка $\widetilde{X}_1$ монотонно движется по поясу l_0, при этом дуги $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{q}_1$ не имеют общих внутренних точек и лежат по разные стороны от точки $\widetilde{O}$. Это следует из условия неналегания кратчайших.

Пусть X_0, Y_0 — граничные точки для дуг $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{q}_1$, отличные от точки $\widetilde{O}$. При стремлении X_1, Y_1 по лучам на бесконечность кратчайшие $X\widetilde{X}_1$, $Y_1\widetilde{Y}_1$ сходятся к лучам l_1, l_2, проходящим через точки X_0, Y_0 перпендикулярно к поясу l_0. Луч l_1 является асимптотическим к лучу p_1, луч l_2 — лучу q_1. Покажем, что лучи l_1, l_2 не совпадают.

Допустим противное, $l_1=l_2=l$, $X_0=Y_0$.

Пусть $X(s)$ — точка на луче l на расстоянии s от основания; $X_1(s)$, $Y_1(s)$ — точки на лучах p_1, q_1 на расстоянии s от точки X_0. По лемме 2

$$\rho(X(s)\,X_1(s))=o(s),\quad \rho(X(s)\,Y_1(s))=o(s). \tag{5}$$

Из неравенства треугольника

$$\rho(X_1(s)\,Y_1(s))\leqslant\rho(X(s)\,X_1(s))+\rho(X(s)\,Y_1(s)). \tag{6}$$

Из (5), (6) следует, что

$$\rho(X_1(s) Y_1(s)) = o(s). \quad (7)$$

Из четырехугольников $X_0X_1(s)O\tilde{O}$, $X_0Y_1(s)O\tilde{O}$ получаем

$$\rho(X_0X_1(s)) = s \leqslant \rho(OX_1(s)) + \rho(O\tilde{O}) + \rho(\tilde{O}X_0),$$

$$\rho(X_0Y_1(s)) = s \leqslant \rho(OY_1(s)) + \rho(O\tilde{O}) + \rho(\tilde{O}X_0). \quad (8)$$

Так как $\rho(O\tilde{O})$, $\rho(\tilde{O}X_0) < C$,

$$\rho(OX_1(s)) + \rho(OY_1(s)) = \rho(X_1(s) Y_1(s)), \quad (9)$$

то

$$2s \leqslant \rho(X_1(s) Y_1(s)) + 3C. \quad (10)$$

Мы пришли к противоречию с равенством (7). Итак луч l_1 н[е] совпадает с лучом l_2.

Рассмотрим на трубке T области G_1, G_2, G_3. Область гомео[-]морфна полосе между параллельными прямыми, она ограничен[а] лучами $l_1 l_2$ дугой пояса $l_0 \tilde{p}_1 \cup \tilde{q}_1$, соединяющей основания лу[-]чей и прямой L. Область G_2 гомеоморфна полуплоскости, он[а] ограничена геодезической ломаной, составленной из лучей l_1 l_2 и оставшейся дугой пояса l_0. В вершинах геодезическо[й] ломаной X_0, Y_0 углы — прямые. Область G_3 гомеоморфна полу[-]плоскости, она ограничена прямой L.

По лемме

$$A \quad \omega(G_3) \leqslant 0, \quad (11)$$

по лемме

$$B \quad \omega(G_1) \leqslant -\pi \quad (12)$$

Правда, в нашем случае можно без леммы B с помощью фор[-]мулы Гаусса-Бонне и леммы 1 показать, что

$$\omega(G_1) = -\pi. \quad (13)$$

Введем в области G_2 внутреннюю метрику, так как област[ь] G_2 выпукла, то любые две точки G_2 соединяются кратчайше[й] в этой метрике. Пусть $X(s)$, $Y(s)$ — точки на лучах l_1, l_2 н[а] расстоянии s от оснований лучей X_0, Y_0; $X_1(s)$, $Y_1(s)$ — точк[и] на лучах p_1, q_1 на расстоянии s соответственно от точек X_0, Y_0; $X(s)Y(s)$ — кратчайшая в области G_2, соединяющая точк[и] $X(s)$, $Y(s)$; $Z(s)$ — точка кратчайшей $X(s)Y(s)$, ближайшая [к] поясу l_0, $G_2(s)$ — компактная часть области G_2, ограниченна[я] кратчайшей $X(s)Y(s)$.

Рассмотрим четырехугольник $X(s)Y(s)Y_1(s)X_1(s)$ на трубк[е] T. Из неравенства треугольника и (3) следует, что

$$\rho(X(s), Y(s)) \geqslant \rho(X_1(s), Y_1(s)) \sim o(s) \sim o(s). \quad (14)$$

Из четырехугольника $X(s)Y(s)Y_0X_0$ получаем

$$\rho(X(s), Y(s)) \leqslant 2s + C. \quad (15)$$

Из (10), (14), (15) следует, что

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\rho(X(s), Y(s))}{2s} = 1. \quad (16)$$

Пусть $s \to \infty$. Тогда множество точек $Z(s)$ либо ограничено, либо уходит на бесконечность. В первом случае, как следует из леммы С, кратчайшие $X(s)Y(s)$ сходятся к прямой L_1. Тогда область $G_2 = G_1' \cup G_3'$, где G_1', G_3' — области, аналогичные областям G_1, G_3. Применив к ним леммы A и B, получим

$$\omega(G_2) \leqslant -\pi. \tag{17}$$

Пусть множество точек $Z(s)$ уходит на бесконечность. Покажем, что углы α_2, β_2 между кратчайшей $X(s)Y(s)$ и лучами l_1, l_2 со стороны области $G_2(s)$ стремятся к нулю.

Пусть $f(s)$ —расстояние между точками $X_2(s)$, $Y_2(s)$ в области $G_2(s)$. Доказательство будет аналогичным доказательству теоремы 2 в [1, с. 268—269].

Рассмотрим функцию

$$j(s) = f(s) - 2s + ks, \tag{18}$$

где k — положительная постоянная, которая ниже будет выбрана. Функция $j(s)$ непрерывна и, как следует из (16), неограниченно возрастает с ростом s. Поэтому найдется такое значение s_0, что $j(s) > j(s_0)$ для всех $s \geqslant s_0$. Итак

$$f(s_0 + t) \geqslant f(s_0) + (2-k)t, \qquad t \geqslant 0. \tag{19}$$

С другой стороны,

$$f(s_0 + t) < f(s_0) + t(\cos\alpha_2(s_0) + \cos\beta_2(s_0) + \eta). \tag{20}$$

Следовательно,

$$\cos\alpha_2(s_0) + \cos\beta_2(s_0) > 2 - k, \tag{21}$$

$$\cos\alpha_2(s_0) > 1 - k, \qquad \cos\beta_2(s_0) > 1 - k.$$

Положив $k = 2\sin^2\frac{\varepsilon}{4}$, получим нужный результат.

Области $G(s)$ покрывают область G_2.

$$\omega(G_2) = \lim_{s\to\infty} \omega(G(s)). \tag{22}$$

Применив формулу Гаусса-Бонне к $G_2(s)$, получим

$$\omega(G_2(s)) = -\pi + \alpha_2 + \beta_2. \tag{23}$$

Но α_2, $\beta_2 \to 0$ при $s \to \infty$.
Из (22), (23), (24) следует

$$\omega(G_2) = -\pi. \tag{24}$$

Так как

$$\omega(T) = \omega(G_1) + \omega(G_2) + \omega(G_3). \tag{25}$$

то из (12), (13), (17), (25) получаем

$$\omega(T) \leqslant -\pi.$$

Лемма 4. *Если на трубке T, ограниченной гладким геод[е]ческим поясом, полная кривизна существует и удовлетворяет равенству*

$$\omega(T) < -2\pi, \qquad (\ $$

то на трубке есть прямая.

На трубке T найдется луч l, перпендикулярный к геоде[зи]ческому поясу l_0. Точка $X(0) \in l_0$ — основание луча, $X(s)$ — т[оч]ка на луче l на расстоянии s от $X(0)$, $l(s)$ — окружности [ра]диуса s с центром в точке $X(0)$. При достаточно больши[х] $l(s)$ будет простой кривой и одновременно поясом на трубке. На окружности $l(s)$ найдется точка $Y(s)$, которая соединяет с $X(s)$ двумя кратчайшими $K_1(s)$, $K_2(s)$. Вместе кратчайш[ие] $K_1(s)$, $K_2(s)$ образуют пояс. Пусть $Y(0)$ — точка пояса l_0, бл[и]жайшая к $Y(s)$. Она может быть не одна, выбираем любу[ю]. Обозначим через $G_1(s)$ четырехугольник, ограниченный кратча[й]шими $X(0)X(s)$, $Y(0)Y(s)$, K_1, и дугой геодезического по[я]са l_0, через $G_2(s)$ — другой четырехугольник. Пусть $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ ближайшие точки кратчайших $K_1(s)$, $K_2(s)$ к геодезическо[му] поясу l_0. Покажем, что либо множество точек $Z_1(s)$, либо Z_2 является ограниченным.

Допустим противное. Тогда области $G_1(s) \cup G_2(s)$ покрыва[ют] трубку T.

Обозначим в области $G_i(s)$ $(i = 1, 2)$ углы при вершин[ах] $X(s)$, $Y(s)$, α_i, β_i; при вершинах X_0, Y_0 в области $G_i(s)$ углы прям[ые].

По формуле Гаусса — Бонне

$$\omega(G_1(s)) = -\pi + \alpha_1 + \beta_1, \quad \omega(G_2(s)) = -\pi + \alpha_2 + \beta_2, \qquad (\ $$

$$\omega(T) = \lim\,[\omega(G_1(s)) + \omega(G_2(s))]. \qquad (\ $$

Из (27), (28) непосредственно следует, что $\omega(T) \geqslant -2\pi$, это противоречит условию леммы.

Пусть для определенности множество точек $Z_1(s)$ ограниче[но]. Тогда по лемме C на трубке есть прямая.

Остается невыясненным случай, когда $\omega(T) = -2\pi$. В эт[ой] ситуации на трубке могут быть прямые, а может и не быть и[х]. На этот вопрос отвечает

Лемма 5. *Пусть на трубке T, ограниченной гладким геоде[зи]ческим поясом l_0, полная кривизна существует и удовлетворя[ет] условию*

$$\omega(T) = -2\pi.$$

Если отрицательная часть кривизны сосредоточена в ко[м]пактной области, то на трубке есть прямая.

Если гауссова кривизна трубки $K < 0$, то на трубке н[ет] прямой.

Допустим, что на трубке T нет прямой. Тогда области $G_i(s)$ из леммы 4 покрывают трубку и при достаточно большом $s = s_0$ область $G_1(s_0) \cup G_2(s_0)$ содержит отрицательную часть кривизны трубки T.

Тогда

$$\omega(G_1(s_0)) + \omega(G_2(s_0)) \leqslant \omega(T) = -2\pi. \tag{29}$$

Из (27) и (29) следует, что

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \leqslant 0.$$

Но по свойству неналегания кратчайших $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, и мы пришли к противоречию.

Допустим, что на трубке T есть прямая. Тогда на трубке T как в лемме 3 выделяются области G_1, G_2, G_3 и

$$\omega(T) = \omega(G_1) + \omega(G_2) + \omega(G_3) = -2\pi. \tag{30}$$

По доказанному в лемме 3

$$\omega(G_1) = -\pi, \ \omega(G_2) \leqslant -\pi, \ \omega(G_3) \leqslant 0. \tag{31}$$

Тогда из (30), (31) следует, что $\omega(G_3) = 0$.

Но так как гауссова кривизна отрицательна, то $\omega(G_3) < 0$ и мы пришли к противоречию.

Пусть F — полное риманово многообразие класса C^2 геоморфное плоскости. Тогда справедлива

Лемма 6. *Пусть F — полное двумерное риманово многообразие класса C^2 геоморфное плоскости. Если полная кривизна существует и удовлетворяет неравенству $\omega(G_3) < 0$, то на многообразии F есть прямая.*

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 4. Любую точку многообразия F можно взять за центр окружности $l(s)$.

Если полная кривизна поверхности F $\omega(F) = 0$ и отрицательная часть кривизны сосредоточена в компактной области, то на поверхности есть прямая.

Доказательство теоремы 1. Нам осталось доказать теорему лишь в случае 1), когда существует пояс l_0 такой, что $s(l_0) = s_0(F)$.

1. Когда поверхность F не гомеоморфна плоскости, то как мы доказали, $s(l_0) = s_0(F) \neq 0$, а l_0 делит поверхность на две области: компактную область F_1, гомеоморфную поверхности F и трубку T,

$$\omega(F) = \omega(F_1) + \omega(T). \tag{32}$$

По теореме Гаусса — Бонне

$$\omega(F_1) = 2\pi\chi. \tag{33}$$

Так как прямая полностью лежит на трубке T, то по лемме 3 $\omega(T) \leqslant -2\pi$ (33). Из (32), (33) следует, что

$$\omega(F) \leqslant 2\pi(\chi - 1).$$

Пусть F — поверхность, гомеоморфна плоскости. Тогда лемме A $\omega(F) \leqslant 0$. Так как $\chi(F) = 1$, то утверждение 1 доказано и в этом случае.

II. Из (32), (33) и предположения $\omega(F) < 2\pi(\chi - 1)$ следует, что $\omega(T) < -2\pi$. Тогда по лемме 4 на трубке есть прямая. Ясно, что L будет прямой и на многообразии F.

Когда поверхность F гомеоморфна плоскости, утверждение следует из леммы 6.

Из леммы 5 аналогичным образом следует

Теорема 2. *Пусть F — полное двумерное риманово многообразие класса C^2 с одним уходом на бесконечность. Полная кривизна многообразия F удовлетворяет условию $\omega(F) = 2\pi(\chi - 1)$.*

I. *Если отрицательная часть кривизны многообразия F сосредоточена в компактной области, то на многообразии F есть прямая.*

II. *Если гауссова кривизна многообразия F отрицательна, то на многообразии F нет прямой.*

Утверждения теорем 1 и 2 справедливы также для многообразий ограниченной кривизны. Для многообразий ограниченной кривизны доказательство проходит аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кон-Фоссен С. Э.* Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., Физматгиз, 1959. 303 с.
2. *Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е.* Введение в дифференциальную геометрию в целом, М., «Наука», 1973. 440 с.
3. *Bishop R. L., O'Naill B.* Manifolds of negative curvature. — «Trans. Amer. Math. soc.», vol. 145, 1969, November, p. 1—48.
4. *Александров А. Д., Залгаллер В. А.* Многообразия ограниченной кривизны. — «Труды Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова», т. 24, 1962, с. 252.

Поступила 21 января 1974 г.

УДК 513

Н. И. ГЛОВ

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА В E_4

Рассмотрим интегральные кривые системы двух дифференциальных уравнений Пфаффа в четырехмерном евклидовом пространстве E_4:

$$\sum_{i=1}^{4} P_i dx_i = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{4} Q_i dx_i = 0,$$

или

$$\boldsymbol{P} d\boldsymbol{r} = 0, \quad \boldsymbol{Q} d\boldsymbol{r} = 0.$$

Если левые части уравнений системы (1) является точными дифференциалами или допускают существование интегрирующего множителя μ, то система (1) приводится к виду

$$U = C_1 \quad V = C_2$$

(dU и dV совпадают с левыми частями (1) с точностью до μ) и интегральные кривые располагаются на ∞^2 поверхностей.

Для существования интегрирующего множителя должны быть выполнены условия*

$$P_i\left(\frac{\partial P_k}{\partial x_l} - \frac{\partial P_l}{\partial x_k}\right) + P_k\left(\frac{\partial P_l}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_l}\right) + P_l\left(\frac{\partial P_i}{\partial P_k} - \frac{\partial P_k}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$Q_i\left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_l} - \frac{\partial Q_l}{\partial x_k}\right) + Q_k\left(\frac{\partial Q_l}{\partial x_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial x_l}\right) + Q_l\left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial x_i}\right) = 0,$$

где $i, k, l = 1, 2, 3, 4$.

Интегральные кривые системы (1), проходящие через произвольную точку M пространства E_4, касаются в M 2-плоскости

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}) = 0,$$
$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}) = 0.$$

Назовем эту плоскость касательной 2-плоскостью системы интегральных кривых (1). 2-плоскость ортогональную касательной в точке M назовем нормальной плоскостью системы (1). Нормальная плоскость определена векторами $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$.

Предположим, что условия (2) выполнены. Будем искать геодезические линии, лежащие на поверхности

$$U = C_1, \; V = C_2.$$

Геодезические линии являются экстремалями функционала

$$\int_A^B \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_i')^2} + \lambda(s)\, u + \mu(s)\, v \right\} ds,$$

где A и B — фиксированные точки поверхности, $x_i' = \frac{dx_i}{ds}$.

Соответствующие эйлеровы уравнения

$$x_i'' = \lambda \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

где $i = 1, 2, 3, 4$.

Векторы $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ определяют нормальную плоскость поверхности. Вектор $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ назовем вектором главной нормали кривой в

* Д. М. Синцов. «Работы по неголономной геометрии». Киев, «Вища школа», 1972, с. 152.

E_4. Следовательно, главная нормаль геодезической линии д мерной поверхности в E_4 лежит в нормальной плоскости.

Выделим из системы (1) те интегральные кривые, у котор в каждой точке главная нормаль лежит в нормальной пл кости, т. е. те, для которых имеет место

$$x_i'' = \lambda P_i + \mu Q_i,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$.

Если перейти к произвольному параметру t и обозначить $\frac{dx_i}{dt}$ $= \dot{x}_i$, то последнее уравнение преобразуется

$$\frac{\ddot{x}_i}{\sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k^2} - \frac{\dot{x}_i \sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k \ddot{x}_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k^2\right)^2} = \lambda P_i + \mu Q_i,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$.

Умножив каждое уравнение этой системы на соответствующ $\dot{x}_i$ и взяв сумму по i от 1 до 4, в силу условий (1) получи тождество. Таким образом, одно уравнение последней систем является следствием остальных. Исключая из оставшихся тр уравнений λ и μ, мы придем к уравнению искомых кривы

$$\begin{vmatrix} \ddot{x}_l - \dot{x}_l \frac{\sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k \ddot{x}_k}{\sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k^2} & \ddot{x}_m - \dot{x}_m \frac{\sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k \ddot{x}_k}{\sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k^2} & \ddot{x}_n - \dot{x}_n \frac{\sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k \ddot{x}_k}{\sum\limits_{k=1}^{4} \dot{x}_k^2} \\ P_l & P_m & P_n \\ Q_l & Q_m & Q_n \end{vmatrix} = 0, \qquad (3$$

где $l, m, n = 1, 2, 3, 4, l, m, n$ — попарно не равны межд собой.

Интегральные кривые системы (1), определенные этим урав нением, будем называть геодезическими «прямейшими».

Разделив обе части уравнений (1) на ds, получим

$$\boldsymbol{Pr'} = 0, \quad \boldsymbol{Qr'} = 0. \qquad (1'$$

Выделим из множества интегральных кривых системы (1') кри вые, для которых обращается в нуль вариация функционал

$$\int\limits_A^B \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_i')^2} + \alpha(s) \sum_{i=1}^{4} P_i x_i' + \beta(s) \sum_{i=1}^{4} Q_i x_i' \right\} ds,$$

где A и B — фиксированные точки пространства.

Эйлеровы уравнения для данного функционала имеют вид

$$\alpha \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial P_i}{\partial x_k} x_i' + \beta \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial Q_i}{\partial x_k} x_i' - \frac{d}{ds}(x_k' + \alpha P_k + \beta Q_k) = 0,$$

где $k = 1, 2, 3, 4$.

Обозначив $\frac{\partial P_i}{\partial x_k} = P_{ik}$, $\frac{\partial Q_i}{\partial x_k} = Q_{ik}$, последние уравнения можно записать так:

$$\alpha \sum_{i=1}^{4} P_{ik} x_i' + \beta \sum_{i=1}^{4} Q_{ik} x_i' - x_k'' - \alpha' P_k - \alpha P_k' - \beta' Q_k - \beta Q_k' = 0,$$

где

$$P_k' = \sum_{i=1}^{4} P_{ki} x_i'.$$

Для произвольного параметра t аналогичное уравнение имеет вид

$$\alpha \sum_{i=1}^{4} (P_{ik} - P_{ki}) \dot{x}_i + \beta \sum_{i=1}^{4} (Q_{ik} - Q_{ki}) \dot{x}_i - \ddot{x}_k \left(\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+ \dot{x}_k \sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i \ddot{x}_i \left(\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2 \right)^{-\frac{3}{2}} - \dot{\alpha} P_k - \dot{\beta} Q_k = 0, \tag{4}$$

где $k = 1, 2, 3, 4$.

Между уравнениями системы (4) существует линейная зависимость, которая легко обнаруживается, если умножить каждое уравнение системы (4) на соответствующее $\dot{x}_k$ и сложить. Из трех уравнений этой системы исключим $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$, получим

$$\begin{vmatrix} \begin{array}{l} \alpha \sum\limits_{i=1}^{4} (P_{il} - P_{li}) \dot{x}_i + \beta \sum\limits_{i=1}^{4} (Q_{il} - Q_{li}) \dot{x}_i - \\ - \ddot{x}_l \left(\sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} + \dot{x}_l \sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_i \ddot{x}_i \left(\sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \end{array} & P_l & Q_l \\ \begin{array}{l} \alpha \sum\limits_{i=1}^{4} (P_{im} - P_{mi}) \dot{x}_i + \beta \sum\limits_{i=1}^{4} (Q_{im} - Q_{mi}) \dot{x}_i - \\ - \ddot{x}_m \left(\sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_1^2 \right)^{-\frac{1}{2}} + \dot{x}_m \sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_i \ddot{x}_i \left(\sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \end{array} & P_m & Q_m \\ \begin{array}{l} \alpha \sum\limits_{i=1}^{4} (P_{im} - P_{ni}) \dot{x}_i + \beta \sum\limits_{=1}^{4} (Q_{in} - Q_{ni}) \dot{x}_i - \\ - \ddot{x}_n \left(\sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} + \dot{x}_n \sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_i \ddot{x}_i \left(\sum\limits_{i=1}^{4} \dot{x}_1^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \end{array} & P_n & Q_n \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4} (P_{il}-P_{li})\dot{x}_i & \sum_{i=1}^{4} (P_{im}-P_{mi})\dot{x}_i & \sum_{i=1}^{4} (P_{in}-P_{ni})\dot{x}_i \\ P_l & P_m & P_n \\ Q_l & Q_m & Q_n \end{vmatrix} +$$

$$+\beta \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4} (Q_{il}-Q_{li})\dot{x}_i & \sum_{i=1}^{4} (Q_{im}-Q_{mi})\dot{x}_i & \sum_{i=1}^{4} (Q_{in}-Q_{ni})\dot{x}_i \\ P_l & P_m & P_n \\ Q_l & Q_m & Q_n \end{vmatrix} -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \ddot{x}_l - \dot{x}_l \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i \ddot{x}_i}{\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2} & P_l Q_l \\ \ddot{x}_m - \dot{x}_m \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i \ddot{x}_i}{\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2} & P_m Q_m \\ \ddot{x}_n - \dot{x}_n \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i \ddot{x}_i}{\sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i^2} & P_n Q_n \end{vmatrix} = 0.$$

где $l, m, n = 1, 2, 3, 4$ и попарно не равны между собой.

Система (5) выделяет совокупность кривых из системы интегральных кривых (1). Будем называть эти кривые геодезически «кратчайшими» линиями системы интегральных кривых (1).

Покажем, что уравнение (5) совпадает с уравнением (3) п выполнении условий интегрируемости, т. е. условий (2).

Рассмотрим первый определитель уравнения (5)

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4} (P_{il}-P_{li})\dot{x}_i & P_l Q_l \\ \sum_{i=1}^{4} (P_{im}-P_{mi})\dot{x}_i & P_m Q_m \\ \sum_{i=1}^{4} (P_{in}-P_{ni})\dot{x}_i & P_n Q_n \end{vmatrix} =$$

$$= Q_n \sum_{i=1}^{4} [P_m (P_{il}-P_{li}) + P_l (P_{mi}-P_{im})]\dot{x}_i +$$

$$+ Q_m \sum_{i=1}^{4} [P_n (P_{li} - P_{il}) + P_l (P_{in} - P_{ni})] \dot{x}_i +$$

$$+ Q_l \sum_{i=1}^{4} [P_n (P_{im} - P_{mi}) + P_m (P_{ni} - P_{in})] \dot{x}_i.$$

Это можно записать так:

$$Q_n \sum_{i=1}^{4} [P_m (P_{il} - P_{li}) + P_l (P_{mi} - P_{im}) + P_i (P_{lm} - P_{ml})] \dot{x}_i +$$

$$+ Q_m \sum_{i=1}^{4} [P_n (P_{li} - P_{il}) + P_l (P_{in} - P_{ni}) + P_i (P_{nl} - P_{ln})] \dot{x}_i +$$

$$+ Q_l \sum_{i=1}^{4} [P_n (P_{im} - P_{mi}) + P_m (P_{ni} - P_{in}) + P_i (P_{mn} - P_{nm})] \dot{x}_i -$$

$$- [Q_n (P_{lm} - P_{ml}) + Q_m (P_{nl} - P_{ln}) + Q_l (P_{mn} - P_{nm})] \sum_{i=1}^{4} P_i \dot{x}_i.$$

Последнее слагаемое обращается в нуль в силу условий (1′). Выражения в квадратных скобках у других слагаемых представляют собой левые части условий интегрируемости (2).

Аналогичные выражения получаются для второго определителя уравнения (5). Мы приходим к заключению, что две системы геодезических линий интегральных кривых (1) совпадают только при выполнении условий интегрируемости. В остальных случаях — это две различные системы кривых.

Выясним, от скольких параметров зависит совокупность геодезических «прямейших». Если принять x_1 за независимую переменную, то система (1) примет вид

$$P_1 + \sum_{i=2}^{4} P_i \dot{x}_i = 0,$$

$$Q_1 + \sum_{i=2}^{4} Q_i \dot{x}_i = 0,$$

где $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dx_1}$.

Разрешим эту систему относительно $\dot{x}_2$ и $\dot{x}_3$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \varphi (x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_4), \\ \dot{x}_3 &= \psi (x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_4). \end{aligned} \tag{6}$$

Из системы (6) следует

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \tilde{\varphi} (x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_4, \ddot{x}_4), \\ \ddot{x}_3 &= \tilde{\psi} (x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_4, \ddot{x}_4). \end{aligned} \tag{7}$$

В уравнение геодезических «прямейших» (3) подставим выражен для $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{x}_3$ из (6), (7),

$$\ddot{x}_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_4).$$

Геодезические «прямейшие» определяются тремя функциями:

$$x_2 = x_2(x_1),\ x_3 = x_3(x_1),\ x_4 = x_4(x_1).$$

Для нахождения их имеем систему (6) двух дифференциальны уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнен второго порядка — (8). Поэтому совокупность геодезических «пр мейших» зависит от четырех произвольных постоянных.

Выясним аналогичный вопрос для геодезических «кратчайших В уравнения геодезических «кратчайших» (5) входит пять функц

$$x_2 = x_2(x_1),\ x_3 = x_3(x_1),$$

$$x_4 = x_4(x_1),\ \alpha = \tilde{\alpha}(x_1),\ \beta = \tilde{\beta}(x_1),$$

которые связаны тремя дифференциальными уравнениями (второго порядка и двумя дифференциальными уравнениями (первого порядка. При решении этой системы дифференциальны уравнений возникает в общем случае шесть произвольных по тоянных, т. е. совокупность геодезических «кратчайших» соде жит ∞^6 кривых.

Поступила 6 февраля 1974

УДК 513

Л. Л. ГУЛИ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ИЗГИБАНИЯ ОБЩЕЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ГРАНИЦЕЙ

В работе [1] Е. П. Сенькин доказал теорему о том, что пр
изгибании общей выпуклой поверхности, не содержащей прям
линейных отрезков с лежащими на границе концами, на грани
поверхности найдется пара точек, расстояние между которым
при изгибании поверхности увеличивается, и пара точек, ра
стояние между которыми уменьшается.

В работе [2] подобное свойство установлено для бесконечн
малых изгибаний общих строго выпуклых поверхностей.

В настоящей работе рассматривается случай, когда границе
поверхности является простая замкнутая кривая L. Пусть A
B — пара точек на границе L, расстояние между которыми пр
изгибании увеличивается, а C, D — пара точек, расстояние межд
которыми при изгибании уменьшается; их существование уст
новлено в [1, 2]. Будет показано, что если границей поверхност
является простая замкнутая кривая, то такие две пары точе
A, B и C, D всегда могут быть найдены таким образом, что пар
A, B и C, D разделяются.

Последнее означает, что при обходе кривой L в одном из двух направлений, начиная, например, от точки A, встречаются последовательно точки C, B, D и снова A.

Теорема 1. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные общие выпуклые поверхности, границами которых являются простые замкнутые кривые L_1 и L_2. Поверхности не содержат прямолинейных отрезков, оба конца которых лежат на границе (отрезки, целиком состоящие из граничных точек, допускаются). Тогда, если F_1 не равна F_2, на границе L_1 найдутся пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1 такие, что*

$$r(A_1B_1) > r(A_2C_2),$$

$$r(C_1D_1) < r(C_2D_2),$$

и пары A_1, B_1 и C_1, D_1 разделяются.

Здесь A_2, B_2, C_2, D_2 — точки на границе L_2, соответствующие по изометрии точкам A_1, B_1, C_1, D_1, а r — расстояние в пространстве.

Теорема 2. *Пусть F — общая строго выпуклая поверхность, границей которой является простая замкнутая кривая L. При нетривиальном бесконечно малом изгибании поверхности F на границе L найдутся пары точек A, B и C, D, такие, что при $t=0$ $\dot{r}(A, B) > 0$, $\dot{r}(C, D) < 0$, и пары A, B и C, D разделяются.*

Здесь r — расстояние в пространстве, а точка обозначает дифференцирование по времени.

Докажем теорему 1.

F_1 и F_2 — изометричные общие выпуклые поверхности, не содержащие прямолинейных отрезков, оба конца которых лежат на границе. Простые замкнутые кривые L_1 и L_2 являются границами этих поверхностей. И пусть F_1 не равна F_2. Тогда по доказанному в [1] на L_1 существуют пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1 такие, что

$$\begin{aligned} &r(A_1B_1) > r(A_2B_2), \\ &r(C_1D_1) < r(C_2D_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Надо показать, что пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1, удовлетворяющие этим условиям, всегда могут быть указаны таким образом, что A_1, B_1 и C_1, D_1 разделяются.

Предположим противное. То есть, предположим, что всякие две пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1 на L_1, удовлетворяющие условиям (1), не разделяются.

Пусть O_1^0 — некоторая фиксированная точка на L_1, O_2^0 — соответствующая ей по изометрии точка на L_2.

Покажем, что на L_1 нет пары точек X_1' и X_1'' таких, что $r(O_1^0X_1') > r(O_2^0X_2')$, и одновременно $r(O_1^0X_1'') < r(O_2^0X_2'')$.

В самом деле, если такие две точки X_1' и X_1'' существуют, то по непрерывности функции r, для всех точек O_1 из некоторой окрестности O_1^0 будет выполняться

$$r(O_1X_1') > r(O_2X_2'), \ r(O_1X_1'') < r(O_2X_2''),$$

причем в окрестности O_1^0 есть такие значения O_1, обозначим O_1' и O_1'', что

$$r(O_1'X_1') > r(O_2'X_2'),\ r(O_1''X_1'') < r(O_2''X_2''),$$

и пары O_1', X_1' и O_1'', X_1'' разделяются, что противоречит сдела ному предположению.

Итак, каждая фиксированная точка $O_1^0 \in L_1$ обладает тем свойс вом, что для всех точек $X_1 \in L_1$ выполняется

$$r(O_1^0X_1) \geqslant r(O_2^0X_2), \quad (2)$$

или

$$r(O_1^0X_1) \leqslant r(O_2^0X_2). \quad (3)$$

Пусть теперь O_1 пробегает все точки кривой L_1. Так ка поверхность F_1 не равна F_2, то, по доказанному в [1], найдутс на L_1 такие пары точек O_1', X_1' и O_1'', X_1'', что

$$r(O_1'X_1') > r(O_2'X_2'), \quad (4)$$

$$r(O_1''X_1'') < r(O_2''X_2''). \quad (5)$$

Рассмотрим множество M' точек $O_1' \in L_1$, для которых

$$r(O_1X_1) \geqslant r(O_2X_2), \quad (6)$$

где X_1 пробегает все точки кривой L_1, причем для некоторог значения X_1, равного X_1', имеет место знак строгого неравенств

$$r(O_1'X_1') > r(O_2'X_2'). \quad (7)$$

Пусть M'' — множество точек $O_1'' \in L_1$, для которых

$$r(O_1''X_1) \leqslant r(O_2''X_2), \quad (8)$$

причем для некоторого значения X_1, равного X_1'', выполняетс строгое неравенство

$$r(O_1''X_1) < r(O_2''X_2). \quad (9)$$

Было показано, что для каждой фиксированной точки $O_1^0 \in L$ и переменной X_1 выполняется (2) или (3). Тогда для точек O множества $L_1 \setminus (M' \cup M'')$, если оно не пусто, имеет место

$$r(O_1X_1) = r(O_2X_2).$$

Так как на L_1 есть точки O_1'', X_1' и O_1'', X_1, для которых вы полняются (4) и (5), то множества M' и M'' не пусты. А в силу условий (7) и (9), которым удовлетворяют точки множеств M' и M'' соответственно, и непрерывности функции r эти множеств открыты. Но тогда замкнутое множество

$$L_1 \setminus (M' \cup M'')$$

не пусто, а для его точек O_1 выполняется

$$r(O_1X_1) = r(O_2X_2).$$

Таким образом, если предположить, что всякие пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1 на L_1, для которых

$$r(A_1B_1) > r(A_2B_2), \text{ а } r(C_1D_1) < r(C_2D_2)$$

не разделяются, то оказывается, что существует точка O_1 на L_1, такая, что расстояния от этой точки до всех точек $X_1 \in L_1$ равны расстояниям между точками O_2 и X_2, соответствующими им по изометрии на кривой L_2. Но, как показано в [3], в этом случае поверхность F_1 равна поверхности F_2, что противоречит условию теоремы 1.

Теорема 2 доказывается аналогично. В этом случае, как доказано в [2] при нетривиальном бесконечно малом изгибании строго выпуклой поверхности на границе найдется пара точек A, B, для которых

$$\ddot{r}(A, B) > 0, \tag{10}$$

и пара точек C, D, для которых $\ddot{r}(C, D) < 0$ при $t = 0$.

Здесь r — расстояние в пространстве, а точка обозначает дифференцирование по времени.

Пусть L — граница поверхности — есть простая замкнутая кривая. Для доказательства теоремы 2 снова предполагаем, что всякие пары точек A, B и C, D, для которых выполнено (10), не разделяются.

Тогда, заменив в рассуждениях теоремы 1 разность $r(O_1X_1) - r(O_2X_2)$ функцией $\ddot{r}(O, X)$, приходим к заключению о существовании такой точки $O \in L$, что $\ddot{r}(O, X) = 0$ при $t = 0$ для всех точек $X \in L$. Но тогда поверхность F — жесткая, как показано в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сенькин Е. П.* Об изгибании общих выпуклых поверхностей с границей. — «Вестн. Ленингр. ун-та», 1960, № 19, с. 88—94.
2. *Сенькин Е. П.* О свойстве бесконечно малого изгибания общей выпуклой поверхности с границей. — «Укр. геометр. сб», Вып. 2. Харьков, 1966, с. 86—87.
3. *Сенькин Е. П.* Об изгибании одного класса общих выпуклых поверхностей с границей. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1961, № 19, с. 77—82.
4. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969, 759 с.

Поступила 16 февраля 1974 г.

УДК 513. 531

В. И. ДЕНИСОВ

УСТРАНИМЫЕ РАЗРЫВЫ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Известно, что среди решений уравнений тяготения Эйнштейна есть решения с разрывными первыми производными метрического тензора g_{ik}. Наличие таких решений во многом определяется выбором системы координат. Действительно, предположим, ч функции $f^i(x^1, \ldots, x^4)$, определяющие преобразование координ $x^i \to \tilde{x}^i$, непрерывны вместе с первыми производными, а втор производные этих функций по крайней мере кусочно-непрерывн Тогда из закона преобразования

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial \tilde{g}_{lm}}{\partial \tilde{x}^n} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j} + \tilde{g}_{lm} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^l}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^m}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \right) \qquad (0.$$

следует, что непрерывность производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ определяется н прерывностью $\frac{\partial \tilde{g}_{lm}}{\partial \tilde{x}^n}$ и непрерывностью вторых производных $\frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial x^i \partial}$ функций преобразования координат $x^i \to \tilde{x}^i$. Другими словами разрыв первых производных метрического тензора может п явиться за счет преобразования координат с разрывными вторым производными.

Введем понятие устранимого разрыва. Предположим, чт в системе координат x^i первые производные $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ на гиперповер ности S_0 имеют разрыв такой, что существует система коорд нат $\tilde{x}^i$, в которой первые производные $\frac{\partial \tilde{g}_{lm}}{\partial \tilde{x}^n}$ непрерывны на S Такой разрыв первых производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ будем называть устрани мым. Из (0.1) следует, что преобразования координат, устраня ющие разрыв, необходимо имеют разрывные вторые производны функций f^i. Простой пример устранимого разрыва рассмотре в работах [1, 2].

Данная работа состоит из двух частей. В первой части дан классификация разрывов производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ и установлен характе устранимых разрывов. Показано, что устранимый разрыв явля ется продольным, определены инварианты разрыва относительн непрерывных преобразований координат с непрерывными первым производными. Во второй части работы построены специальн преобразования координат, устраняющие продольный разры Показано, что эти преобразования близки к тождественном в норме C^1 и локализованы в окрестности гиперповерхности ра рыва.

1. Устранимые разрывы первых производных

Пусть g_{ik} — метрический тензор пространства-времени, который является решением уравнений тяготения Эйнштейна. Пусть S_0 — изолированная гиперповерхность разрыва первых производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$, в окрестности которой g_{ik} непрерывен.

Известно, что разрыв первых производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ на S_0 определяется симметричным тензором второго ранга h_{ik}, заданным на S_0, следующим образом:

$$\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right] = h_{ik} n_l, \tag{1.1}$$

где $\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right]$ — разрыв первых производных на S_0, n_l — четырехнормаль к S_0.

Тензор h_{ik} можно представить в виде симметричной билинейной комбинации четырех линейно-независимых векторов, определенных на S_0. Именно

$$h_{ik} = (n_i a_k + n_k a_i) + B^{\alpha\beta} \tau_{(\alpha)i} \tau_{(\beta)k}, \tag{1.2}$$

где a_i, $\tau_{(\alpha)i}$ — векторные поля на S_0, $B^{\alpha\beta} = B^{\beta\alpha}$ — скаляры, заданные на S_0.

Выбор векторных полей $\tau^i_{(\alpha)}$ определяется характером гиперповерхности S_0. Если S_0 неизотропна, то $\tau^i_{(\alpha)}$ — векторы, ортогональные n_i. Выбор $\tau^i_{(\alpha)}$ в случае изотропной гиперповерхности описан в [3].

Первый член в (1.2) назовем продольной частью разрыва h_{ik}, второй член — поперечной частью разрыва.

Определим характер устранимого разрыва. Рассмотрим непрерывное с непрерывными первыми производными преобразование координат $\tilde{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^4)$, которое имеет разрывы вторых производных на S_0. Из представления Адамара [4] имеем

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{x}^l}{\partial x^i \partial x^j}\right] = a^l n_i n_j, \tag{1.3}$$

где a^l — векторное поле на S_0 в системе координат x^l. Из закона преобразования (0.1) легко получить связь между $\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right]$ и $\left[\frac{\partial \tilde{g}_{lm}}{\partial \tilde{x}^n}\right]$ в виде

$$\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right] = \left[\frac{\partial \tilde{g}_{lm}}{\partial \tilde{x}^n}\right] \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j} + \tilde{g}_{lm} \left\{\left[\frac{\partial^2 \tilde{x}^l}{\partial x^i \partial x^j}\right] \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} + \left[\frac{\partial^2 \tilde{x}^m}{\partial x^k \partial x^j}\right] \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i}\right\}. \tag{1.4}$$

Представляя (1. 3) в (1. 4), после простых преобразований получ

$$\tilde{h}_{lm} = (h_{ik} - a_i n_k - a_k n_i) \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^m}, \quad (1.$$

где a_i — векторное поле на S_0 в системе координат x^i. Из (1. следует, что $\tilde{h}_{lm} = 0$, если

$$h_{ik} = n_i a_k + n_k a_i. \quad (1.$$

По определению, разрыв вида (1. 6) является продольным. По тому из (1. 5) следует, что продольный разрыв первых произво ных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ устраним.

В работе [3] показано, что в области с кусочно-непрерывны тензором энергии-импульса материи разрыв первых производны g_{ik} может быть только продольным, если S неизотропна. Тогд из условия устранимости разрыва (1. 6) следует, что в этом слу чае существует система координат, в которой первые производны $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ непрерывны в окрестности S_0.

В случае изотропной гиперповерхности разрыва разрыв прои водных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ наряду с продольной частью имеет и поперечную [3] Поэтому разрыв первых производных на изотропной гиперповерх ности в общем случае неустраним. Устранить можно лишь попе речную часть разрыва.

Итак, мы показали, что с помощью преобразований коорди нат с кусочно-непрерывными вторыми производными можно уст ранить продольную часть разрыва первых производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$.

Используя (1. 5) нетрудно показать, что

$$\tilde{h}_{lm} \tilde{\tau}^l_{(\alpha)} \tilde{\tau}^m_{(\beta)} = h_{ik} \tau^i_{(\alpha)} \tau^k_{(\beta)},$$

откуда следует, что свертки $h_{ik}\tau^i_{(\alpha)}\tau^k_{(\beta)}$ инвариантны относительно преобразований с кусочно-непрерывными вторыми производными. Другими словами, поперечная часть разрыва инвариантна относи тельно указанных преобразований.

Аналогичным образом может быть установлен характер уст ранимого разрыва вторых производных метрического тензора g_{ik} Можно показать, что продольная часть разрыва вторых произ водных тензора g_{ik} устраняется преобразованием координат с кусочно-непрерывными третьими производными функций преобра зования.

2. Специальные преобразования координат.

Класс преобразований, устраняющий продольную часть разрыва первых производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$, достаточно широк, поэтому мы опишем только два вида таких преобразований.

Простейшим по геометрическим свойствам преобразованием указанного класса является преобразование к полугеодезическим координатам, построенным на базе гиперповерхности разрыва S_0. В работе [3] доказано, что в полугеодезической системе координат, построенной на базе S_0, продольная часть разрыва производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ тривиальна, т. е. равна нулю.

Опишем преобразование с разрывными вторыми производными которое назовем преобразованием деформации координат. В связи с этим предположим, что существует такая окрестность гиперповерхности разрыва в которой:

1. Метрический тензор g_{ik} непрерывен.
2. Гиперповерхность S_0 включается в семейство гиперповерхностей $S(x^1, \ldots, x^4) = c$, и S_0 соответствует значение параметра $c=0$.
3. Производные $\frac{\partial S}{\partial x^i}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j}$ семейства непрерывны, причем $\frac{\partial S}{\partial x^i}$ ограничены в совокупности.

Рассмотрим в указанной окрестности гиперповерхности преобразование координат

$$\tilde{x}^i = \begin{cases} x^i + \varepsilon^2 b^i \frac{S}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|S|}{\varepsilon}\right)^3, & \left|\frac{S}{\varepsilon}\right| < 1 \\ x^i, & \left|\frac{S}{\varepsilon}\right| \geqslant 1, \end{cases}$$

где ε — достаточно малая положительно постоянная, b^i — векторное поле класса c^2, определенное в окрестности S_0. Не трудно убедиться, что преобразование (2. 1) обладает следующими свойствами:

1) непрерывно и имеет непрерывные первые производные;
2) локально однозначно, т. е. его якобиан отличен от нуля;
3) близко к тождественному в норме c^1, т. е.

$$|\tilde{x}^i - x^i| < \varepsilon^2 M,$$
$$\left|\frac{\partial(\tilde{x}^i - x^i)}{\partial x^j}\right| < \varepsilon M$$

при $\left|\frac{S}{\varepsilon}\right| < 1$ и совпадает с тождественным при $\left|\frac{S}{\varepsilon}\right| \geqslant 1$;

4) имеет непрерывные вторые производные вне S_0, на S_0 вторые производные имеют разрыв

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k}\right] = -12 b^i \frac{\partial S}{\partial x^j} \frac{\partial S}{\partial x^k}.$$

Из четвертого свойства и условия (1.6) устранимости разры следует, что преобразование (2.1) устраняет продольную час разрыва при соответствующем выборе векторного поля b^i. Пр образование (2.1) локализовано, т. е. отлично от тождественно в области $\left|\frac{S}{\varepsilon}\right| < 1$. Следовательно, чтобы устранить продольну часть разрыва производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ достаточно изменить систему ко ординат лишь в окрестности $\left|\frac{S}{\varepsilon}\right| < 1$ гиперповерхности S_0. Зам тим, что в области $\left|\frac{S}{\varepsilon}\right| < 1$ можно определить преобразован координат с разрывными вторыми производными на S_0 тако что на гиперповерхностях $\left|\frac{S}{\varepsilon}\right| = 1$ оно будет совпадать с тож дественным с точностью до частных производных $n+1$ порядк

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosen N.* — Ann. of Phys., USA, 1971, vol, 63, № 1, p. 123—133.
2. *Robson E. H.* — Ann. Inst. Henri Poincarè, sec. A, 1972, VXVI, № p. 41—50.
3. *Денисов В. И.* — ЖЭТФ, 1972, т. 62, вып. 6, с. 1990—1997.
4. *Hadamard J.* Lecons sur la propagation des ondes, Paris, 1903.

Поступила 10 января 1974

УДК 513

В. Ф. ИГНАТЕНК
А. С. ЛЕЙБИ

К СЛУЧАЮ ВЫРОЖДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИАМЕТРАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ в E^m.

1°. Рассмотрим в m-мерном евклидовом пространстве E^m ал гебраическую $(m-1)$-мерную поверхность F_n степени n. В пр моугольных декартовых координатах ее можно задавать уравн нием

$$\varphi_n(x)+\varphi_{n-1}(x)+\theta(x)=0, \qquad (1)$$

где φ_n, φ_{n-1} — формы степени n и $n-1$, θ — многочлен степен $\leqslant n-2$ относительно координат $x_1, \ldots, x_m$. Диаметральна плоскость этой поверхности, сопряженная с направлением век тора u, определяется уравнением

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\right)_{x=u}x_i+\varphi_{n-1}(u)=0. \qquad (2)$$

В заметке [1] рассмотрен случай вырождения уравнения (2 за счет того, что обе старшие формы φ_n и φ_{n-1} имеют общи множитель $\chi(x)$ — форму степени $\rho\geqslant 1$:

$$\varphi_n=\chi^{\sigma}\psi,\ \ \varphi_{n-1}=\chi^{\tau}\omega \qquad (3)$$

формы ψ и ω степени $n-\rho\sigma$ и $n-\rho\tau-1$ не делятся на χ) для выбранного направления u оказывается $\chi(u)=0$. Именно, если $\sigma\geqslant 1$, $\tau\geqslant 1$ и $\mu=\min(\sigma-1, \tau)$, уравнение (2) имеет вид

$$\chi^{\mu}(u)\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\sigma\chi^{\sigma-\mu-1}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\psi+\chi^{\sigma-\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)_{x=u}x_i+\chi^{\tau-\mu}(u)\,\omega(u)\right\}=0. \qquad (4)$$

В случае $\chi(u)\neq 0$ это уравнение определяет диаметральную плоскость, сопряженную с направлением $\boldsymbol{u}$. Если же $\chi(u)=0$, уравнение оказывается вырожденным. Если при этом в уравнении (4) отбросить множитель χ^{μ}, оно может определять некоторую плоскость α_u, которая уже не будет диаметральной для F_n [2]; эта плоскость рассмотрена в [1, п. 3°].

В настоящей заметке выясняется структура множителя $\chi(x)$ в случае, когда плоскость α_u является плоскостью симметрии поверхности F_n.

2°. Пусть η — плоскость симметрии поверхности F_n. Будем считать, что η проходит через начало координат, и поэтому в ее уравнении $\eta(x)=0$ функция $\eta(x)$ линейна и однородна относительно $x_1, \ldots, x_m$.

В уравнении F_n, которое запишем так:

$$\chi^{\sigma}\psi+\chi^{\tau}\omega+\theta=0, \qquad (5)$$

формы ψ, ω и многочлен θ инвариантны относительно отражений в плоскости η; форма χ может быть и не инвариантной, если σ и τ одной четности, причем нечетными они могут быть только когда $\theta=0$ или когда θ имеет χ множителем в нечетной степени. Например, в E^3 уравнение

$$x_1^3\left(x_1^2x_2^2+x_2^4+x_2x_3^3\right)+x_1^5x_2+x_1x_3=0 \qquad (6)$$

задает поверхность F_7, имеющую одну плоскость симметрии $x_1=0$; множитель $\chi=x_1$ изменяет знак при отражениях в этой плоскости.

3°. Отбросив в уравнении (4) множитель $\chi^{\mu}(u)$, запишем уравнение плоскости α_u:

$$\sum_{i=1}^{m}A_i(u)\,x_i+C(u)=0; \qquad (7)$$

его левая часть совпадает с выражением, стоящим в (4) в фигурных скобках.

Пусть для вектора $\boldsymbol{u}$ плоскость α_u совпадает с плоскостью симметрии η. Так как она проходит через начало координат (п. 2°), то $C(u)=0$. Поскольку нас интересует случай вырождения уравнения (4), т. е. случай $\chi(u)=0$, равенство $C(u)=0$ возможно либо при $\mu=\sigma-1$, и тогда $\tau\geqslant\sigma$, либо если $\omega=0$, т. е. если отсутствует форма φ_{n-1} в уравнении (1), а значит и в (2). Согласно [1, п. 3°], при $\chi(u)=0$ плоскость α_u сопряжена с направлением $\boldsymbol{u}$, асимптотическим для неприводимого конуса

$$\xi(x)=0, \qquad (8)$$

который является компонентой конуса $\chi(x)=0$; степень форм[ы]
равна s, $1 \leqslant s \leqslant \rho$ (ρ — степень χ). При этом плоскость α_u ли[бо]
касается конуса (8), либо параллельна некоторой его касате[ль]ной плоскости. Но вторая возможность отпадает, так как α_u [—]
проходит через начало координат — вершину конуса. Следо[ва]тельно, плоскость η касается конуса (8); докажем, что кон[ус]
(8) вырождается в плоскость η.

В самом деле, если $s>1$, то из неприводимости конуса [(8)]
следует, что он неплоский. Но тогда плоскость η, будучи пло[с]костью симметрии F_n, касается не только конуса (8), но и е[го]
отражения в η, откуда следует, что вектор $\boldsymbol{u}$ имеет асимптот[и]ческое направление поверхности F_n, кратность которого не мен[ее]
2σ, а в таком случае, согласно [1, п. 2°], все $A_i(u)=0$, и пло[с]кость $\eta=\alpha_u$ не может быть определена уравнением (7), что пр[о]тиворечит условию. Следовательно, $s=1$ и уравнение (8) лине[й]но — это плоскость η, и она входит компонентой в конус $\chi(x)$ [=]
$=0$, т. е.

$$\chi(x)=\zeta(x)\,\eta(x),$$

где ζ — некоторая форма от $x_1,\ldots,x_m$.

4°. Зададим в пространстве E^m некоторую конечную групп[у]
G^k отражений в $(m-1)$-плоскостях η_j, $j=1,\ldots,k$; уравнени[я]
этих плоскостей запишем в виде $\eta_j(x)=0$. Как известно, вс[е]
эти плоскости имеют общую точку; в нее поместим начало ко[]ординат, и тогда все линейные функции $\eta_j(x)$ будут однородны[].

Найдем орбиту плоскости η_1, т. е. все плоскости, в которы[е]
переходит η_1 при всевозможных преобразованиях группы G^k; вс[е]
плоскости орбиты, очевидно, будут также плоскостями симметри[и]
группы. В орбиту плоскости η_1 могут войти все плоскости сим[]метрии группы. Если эта орбита не исчерпывает всех плоскостей[,]
возьмем плоскость, не входящую в найденную орбиту, и найдем
вторую орбиту, порожденную этой плоскостью — и т. д., пок[а]
не исчерпаем всех плоскостей симметрии группы. Очевидно, числ[о]
орбит не превосходит числа k плоскостей симметрии группы.

Перенумеруем заново все плоскости симметрии группы, снаб[]див их двумя индексами: первый — номер орбиты, второй — но[]мер плоскости в орбите;

$$\eta_{11},\ldots,\eta_{1r_1};\ \eta_{21},\ldots,\eta_{2r_2};\ldots$$

Например, все плоскости симметрии правильного m-симплекс[а]
в E^m составляет одну единственную орбиту, $r_1=k=\frac{m(m+1)}{2}$[;]
тем же свойством обладают плоскости симметрии правильных
24- и 600-гранника в E^4 (группы G^{24} и G^{60}). Плоскости симмет[]рии m-куба ($k=m^2$) распадаются на две орбиты ($k=r_1+r_2$):
одну составляют плоскости, параллельные $(m-1)$-граням куба,
$r_1=m$, другую — диагональные плоскости, проходящие через
противоположные $(m-2)$-грани куба, $r_2=m^2-m$. Плоскости

симметрии многогранника типа пирамиды или бипирамиды [3] также распадаются в E^m на несколько орбит.

5°. Рассмотрим поверхность F_n, инвариантную относительно группы G^k симметрий пространства E^m. Пусть плоскость симметрии η_{11} есть плоскость типа α_u. В силу симметрии, все плоскости первой орбиты $\eta_{11}, \ldots, \eta_{1r_1}$ также будут плоскостями типа α_u, вообще, каждая для своего вектора $\boldsymbol{u}$, причем для каждого такого вектора $\chi(u) = 0$. Согласно формулам (3) и п. 3° форма φ_n будет иметь множителем каждую линейную функцию $\eta_{1i}(x)$ $(i = 1, \ldots, r_1)$ в степени σ_1; в форму φ_{n-1} эти множители будут входить в степени τ_1, а перед фигурными скобками в уравнении (1) — в степени μ_1. Если плоскости второй орбиты $\eta_{21}, \ldots, \eta_{2r_2}$ также являются плоскостями типа α_u, то и они вносят свои множители $\eta_{2i}(x)$ $(i = 1, \ldots, r_2)$ в формы φ_n и φ_{n-1} в степенях σ_2 и τ_2 — и т. д. для следующих орбит. Таким образом доказана

Теорема. *Если $(m-1)$-поверхность F_n порядка n инвариантна относительно группы симметрий G^k пространства E^m и множество плоскостей симметрии группы содержит h орбит, составленных из плоскостей, которые определяются уравнениями (7) при условии вырождения уравнений (4), то формы φ_n и φ_{n-1} уравнения (1) поверхности F_n содержат множитель вида*

$$\chi_1^{p_1} \ldots \chi_h^{p_h} = (\eta_{11} \ldots \eta_{1r_1})^{p_1} \ldots (\eta_{h1} \ldots \eta_{hr_h})^{p_h},$$

где $p_j = \sigma_j$ для φ_n и $p_j = \tau_j$ для φ_{n-1}. При этом если $\varphi_{n-1} \neq 0$, то $\sigma_j < \tau_j$ и четность σ_j и τ_j одинакова; если они нечетны, то либо $\theta = 0$, либо θ делится на произведение $\chi_j = \eta_{j1} \ldots \eta_{jr_j}$ в нечетной степени.

6°. Примеры. В случае поверхности (6) $\sigma = 3$, $\tau = 5$, $h = 1$, плоскость $x_1 = 0$ есть плоскость α_u, сопряженная любому лежащему в ней вектору $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$, у которого $u_2 \neq 0$.

Поверхность F_{28}, заданная в E^3 уравнением

$$\prod_{\substack{i, j=1 \\ i<j}}^{3} (x_i^2 - x_j^2)^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^8 + \prod_{\substack{i, j=1 \\ i<j}}^{3} (x_i^2 - x_j^2)^4 x_1 x_2 x_3 +$$

$$+ a(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) + c = 0,$$

инвариантна относительно группы симметрий правильного симплекса с плоскостями симметрии $x_i \pm x_j = 0$. Каждая из этих плоскостей является плоскостью α_u, сопряженной всякому лежащему в ней вектору, направление которого не является кратным асимптотическим для конуса $\Pi(x_i^2 - x_j^2) = 0$ (т. е. не совпадает с линиями пересечения плоскостей симметрии) и не принадлежит изотропному конусу $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Здесь $h = 1$, $\chi = \Pi(x_i^2 - x_j^2)$, $\sigma = 2$, $\tau = 4$.

Поверхность F_{35}, заданная в E^4 уравнением

$$x_1^3 x_2^3 x_3^3 \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} (x_i^2 - x_j^2)^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{7} +$$

$$+ a x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4 \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} (x_i^2 - x_j^2)^4 + b x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

инвариантна относительно группы симметрий четырехмерной пирамиды, в основании которой лежит трехмерный куб (G^9). Здесь $h = 2$, $\chi_1 = x_1 x_2 x_3$, $\chi_2 = \prod (x_i^2 - x_j^2)$; одна орбита состоит из трех плоскостей $x_i = 0$, $\sigma_1 = \tau_1 = 3$, вторая орбита — из шести плоскостей $x_i \pm x_j = 0$, $\sigma_2 = 2$, $\tau_2 = 4$. Каждая из них принадлежит типу α_u и сопряжена со всяким лежащим в ней вектором, если его направление не будет кратным асимптотическим для конуса $\chi_1 \chi_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0$. То же будет верно и при $a = 0$, т. е. когда $\varphi_{34}(x) = 0$. Множители χ_1 и χ_2 не инвариантны относительно преобразований группы G^9, но множители χ_2^2 и χ_2^4, входящие в φ_{35} и φ_{34}, инвариантны. Множитель же χ_1 входит в формы φ_{35} и φ_{34} в кубе, поэтому он входит множителем и в θ, чтобы не нарушать инвариантности поверхности F_{35}.

Если в форме φ_{34} при $a \neq 0$ вместо $x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4$ взять $x_1 x_2 x_3 \ldots$ (степень 34 сохранится), то плоскости первой орбиты $x_i = 0$ уже нельзя будет задавать уравнением (7), они не будут плоскостями типа α_u, и тогда $h = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* О диаметральных плоскостях алгебраической поверхности в пространстве E^m. — «Укр. геометр. сб.» Вып. [illegible] Харьков, 1974, с. 20—26.
2. *Rosina B. A.* Nuovi resultati nella teoria diametrale delle superficie algebriche. — «Ann. univ. Ferrara», sez. VII (N. S.), 1955—1956, p. 103—116 (195[illegible]).
3. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Алгебраические поверхности с симметриями пирамид и бипирамид в E^4. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 12. Харьков, 197[illegible], с. 60—65.

Поступила 20 января 1974 г.

УДК 513

Г. В. КИОТИН

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В классических n-мерных неевклидовых геометриях по кон цепции Кэли-Клейна проективное измерение расстояний межд точками и углов в пучках m-плоскостей вводится с помощью па инвариантных элементов (точек и m-плоскостей), которы индуцируются на прямой и в пучке m-плоскостей квадратичны абсолютом ранга $r = n + 1$. Полугиперболические и полуэллиптические пространства [1, 2] можно рассматривать как n-мерные проективные пространства метризованные с помощью квадратичного абсолюта ранга $r < n$, в $(n-r)$-мерной вершинной, плоскости которого задан дополнительный квадратичный абсолют.

Пары инвариантных элементов на прямой и в пучке m-плоскостей могут индуцироваться абсолютами и другого характера. В работах [3, 4] вводится эллиптическое измерение расстояний и углов в пучках плоскостей с помощью абсолютов, состоящих из троек особо расположенных действительных плоскостей всех размерностей в пространствах P_2 и P_5. В [5] рассматриваются бифлаговые пространства F_n^2, абсолюты (F_n^2) которых состоят из пар действительных k-плоскостей P_k^l, расположенных так, что при любом $k \leqslant n$ плоскости всех размерностей от 0 до $k-1$ принадлежат одной k-плоскости абсолюта, а другая k-плоскость абсолюта проходит через одну из данных $(k-1)$-плоскостей. Группы движений пространств F_n^2, которыми названы их проективные автоморфизмы, зависят от $\frac{1}{2} n (n+1)$ параметров и относительно их инвариантно гиперболическое измерение расстояний и углов в пучках плоскостей всех размерностей; матрицы движений пространств F_n^2 имеют треугольный вид, и поэтому являются разрешимыми группами Ли.

Пары плоскостей всех размерностей от $m_1 - 1$ до $m_2 + 1$ абсолюта (F_n^2) будем обозначать $({}_gF^2_{m_1-m_2-1})$. Они все содержат общую m_2-плоскость. Абсолют $({}_gF^2_{m_1-m_2-1})$ двойственен абсолюту $(F^2_{m_1-m_2-1})$ в P_{m_1}, и поэтому зависит от

$$(m_1 - m_2)(m_2 + 1) + \frac{1}{2}(m_1 - m_2 - 1)(m_1 - m_2 + 2) =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 - m_2)(m_1 + m_2 + 3) - 1$$

параметров.

В данной статье строятся n-пространства ${}^{lq}S_n^{m_r}$ и ${}^{lq}F_n^{m_r}$, абсолюты которых состоят из абсолютов $({}_gF_m^2)$ и квадратичных конусов различных размерностей индексов и рангов, соединенных между собой особым образом. Группы движений пространств ${}^{lq}S_n^{m_r}$ и ${}^{lq}F_n^{m_r}$ зависят от $\frac{1}{2} n (n+1)$ параметров и являются неполупростыми, в частности, разрешимыми группами Ли.

1. Абсолюты и подобия пространств ${}^{lq}F_n^{m_r}$ и ${}^{lq}S_n^{m_r}$. В проективном n-пространстве P_n возьмем абсолют $({}^{lq}F_n^{m_r})$, состоящий из абсолюта $({}_gF^2_{n-m_1-1})^*$, в m_1-мерной плоскости которого задан

---

* При $m_1 = n-1$, $n-2$ абсолют $({}_gF^2_{n-m_1-1})$ состоит соответственно из одной и двух гиперплоскостей.

$(m_1 - 1)$-мерный квадратичный конус индекса l_1, в m_2-мер[ной] вершинной плоскости которого задан абсолют $({}_gF^2_{m_2-m_3-1})$ и $(m_2 - 1)$-мерный квадратичный конус индекса l_2 с m_3-мерной ве[р]шинной плоскостью и т. д., в m_r-мерной плоскости абсолю[та] $({}_gF_{m_{r-1}-m_r-1})$ задана $(m_r - 1)$-мерная квадрика индекса или в m_r-мерной вершинной плоскости $(m_{r-1} - 1)$-мерного квадр[а]тичного конуса индекса l_q задан абсолют $(F^2_{m_r})$.

Абсолюты, двойственные абсолютам $({}^{l_q}F^{m_r}_n)$ и отличные от ни[х], будем обозначать $({}^{l_q}S^{m_r}_n)$, а проективные n-пространства P_n с абсо[лю]лютами $({}^{l_q}F^{m_r}_n)$ и $({}^{l_q}S^{m_r}_n)$ будем называть обобщенными простра[н]ствами полугиперболического типа и обозначать ${}^{l_q}F^{m_r}_n$ и ${}^{l_q}S^{m_r}_n$.

При $q = r - 1$ пространства ${}^{l_q}S^{m_r}_n$ совпадают с полугиперб[о]лическими и полуэллиптическими пространствами, в частност[и] с евклидовыми и классическими неевклидовыми пространствам[и], а пространство ${}^{l_q}F^{m_r}_n$ при $r = 1$, $m_1 = -1$ совпадает с простра[н]ством F^2_n.

Группу G проективных автоморфизмов пространств ${}^{l_q}F^{m_r}_n$ [и] ${}^{l_q}S^{m_r}_n$ будем называть группой подобий этих пространств, отн[о]сительно группы G в пространствах ${}^{l_q}F^{m_r}_n$ и ${}^{l_q}S^{m_r}_n$ инвариант[но] гиперболическое или эллиптическое измерение в пучках m_q-пло[с]костей всех размерностей

$$m \neq n - m_l - 1, \ l = 1, 2, \ldots, q.$$

Число параметров, от которых зависит абсолют пространст[ва] ${}^{l_q}F^{m_r}_n$, равно

$$\sum_{1}^{q-1} \frac{1}{2}(n - m_l)(n + m_l + 3) - 1 + \frac{1}{2} m_q (m_q + 3) =$$

$$= \frac{1}{2} n (n + 3) - q,$$

а число параметров, от которых зависит группа G, равно

$$\frac{1}{2} n (n + 1) + q.$$

Группа G выделяется из группы всех коллинеаций простра[н]ства P_n с помощью алгебраических условий, и поэтому являет[ся] группой Ли. Пространства ${}^{l_q}S^{m_r}_n$ и ${}^{l_q}F^{m_r}_n$ получаются из прое[к]тивного n-пространства после удаления абсолютов, и поэтом[у] являются топологическими пространствами. Пространство ${}^{l_q}S^{m_r}_n$ односвязно, если индекс его абсолютного гиперконуса рав[ен] нулю или ранг его равен 1, во всех других случаях простра[н]ства ${}^{l_q}S^{m_r}_n$ и ${}^{l_q}F^{m_r}_n$ состоят из двух связных компонент.

Зададим подобия группы G аналитически.

Абсолютные гиперплоскости P^1_{n-1}, P^2_{n-1} пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ зададим уравнениями

$$x_n = 0, \quad x_{n-1} = 0,$$

абсолютные $(n-2)$-плоскости P^1_{n-2}, P^2_{n-2} — уравнениями

$$x_n = x_{n-1} = 0, \; x_{n-1} = x_{n-2} = 0,$$

абсолютные $(n-3)$-плоскости P^1_{n-3} и P^2_{n-3} зададим уравнениями

$$x_n = x_{n-1} = x_{n-2} = 0, \quad x_{n-1} = x_{n-3} = x_{n_3} = 0,$$

где $n_3 = n, \; n-2$, т. е. в зависимости от значения n_3 получим два проективно неэквивалентных абсолюта, и т. д.; (m_1+1)-плоскость $P^2_{m_1+1}$ — уравнениями $x_i = 0$ при $i = m_1+2, \; m_1+3, \ldots, n$; (m_1+1)-плоскость $P^1_{m_1+1}$ — уравнениями $x_i = 0$ при $i = m_1+1$, $m_1+2, \ldots, \; j-1, \; j+1, \; j+2, \ldots, \; n$, где j в зависимости от абсолюта может принимать значения $m_1+2, \; m_1+3, \ldots, n-2, \; n$. Абсолютные конусы пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ будем задавать уравнениями ${}^{l}_{\varepsilon}x_i^2 = 0, \; x_l = 0$, где

$$i = m_j, \; m_j - 1, \ldots, m_{j+1}+1, \; l = n, \; n-1, \ldots, m_{j+1},$$

тогда матрицы группы G подобий пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ будут иметь треугольный вид с квадратными матрицами по главной диагонали порядков $m_r, \; m_r - m_{r-1}, \ldots, \; n - m_1$, которые или являются матрицами движений бифлаговых пространств гиперболического типа, или отличаются от ортогональных матриц лишь некоторым числовым множителем, а прямоугольные матрицы выше главной диагонали имеют произвольные элементы, а ниже главной диагонали состоят из нулей.

В пространствах ${}^{l_q}S_n^{m_r}$ абсолютный гиперконус зададим уравнением

$$\overset{l}{\varepsilon} x_i^2 = 0, \quad i = 0, \; 1, \ldots, m_1,$$

а абсолютные конусы других размерностей уравнениями

$$\overset{l}{\varepsilon} x_i^2 = 0, \; x_l = 0, \; l = 0, \; 1, \ldots, \; n - m_j - 1, \; i = \\ = n - m_j, \ldots, \; n - m_{j+1} - 1.$$

Тогда матрицы их подобий будут получаться из матриц подобий соответствующих пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ с помощью транспонирования.

2. Движения пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ и ${}^{l_q}S_n^{m_r}$. Можно доказать, что группа G содержит коллинеацию, преобразующую две данные $(n - m_k - 1)$-плоскости пучка в другие две данные $(n - m_k - 1)$-плоскости пучка при всех $k = 1, \; 2, \ldots \; r$. Это значит, что две $(n - m_k - 1)$-плоскости пучка не имеют инварианта относительно группы G.

Выделим из группы G подобий пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ подгру[ппу]
G_1, для подобий которой все числовые множители ортогональн[ых]
матриц и модули определителей последних диагональных мат[риц]
второго порядка в матрицах движений пространств F_m^2, вхо[дя]щих в матрицы подобий группы G, равны единице. Покаж[ем],
что относительно группы G_1 в пространстве ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ две $(n - m_k - 1)$-плоскости пучка имеют инвариант.

С помощью движения группы G_1 произвольную $(n - m_k)$-пл[ос]кость можно преобразовать в $(n - m_k)$-плоскость q_{n-m_k}:

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{m_k-1} = 0, \quad x_{m_k} \neq 0,$$

если в абсолютной m_k-плоскости задан конус, и в $(n - m_k)$-плоскость $\bar{q}_{n-m_k}$:

$$x_0 = x_1 = x_{m_k-2} = 0, \quad x_{m_k-1} = x_{m_k},$$

если в абсолютной m_k-плоскости задан абсолют $({}_gF_{\underline{m}_k - m_{k+1}}$ ...
Группа G_1 индуцирует в $(n - m_k)$-плоскостях q_{n-m_k} и $\bar{q}_{n-m_k}$ от[но]сительно независимых переменных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{m_k+1}, x_{m_k}$ пр[е]образование вида:

$$\rho\bar{x}_{m_k} = x_{m_k} + a^j x_j, \ \rho\bar{x}_i = b_i^j x_j, \ i, \ j = n, \ n-1, \ldots, \ m_k + 1,$$

где матрица (b_i^j) получается из матрицы движений группы [G]
после вычеркивания первых m_k строк и столбцов. Тангенциал[ь]ные координаты гиперплоскостей в $(n - m_k)$-плоскостях q_{n-m_k}
и $\bar{q}_{n-m_k}$ преобразуются по формулам

$$\rho\bar{u}_{m_k+1} = u_{m_k+1}, \ \rho\bar{u}_i = c_i^j u_j,$$

где (c_i^j) — матрица, составленная из алгебраических дополнен[ий]
матрицы (b_i^j) Для плоскости q_{n-m_k} минор $(m_{k-1} - m_k)$-поряд[ка]
в левом верхнем углу матрицы (c_i^j) является ортогональной ма[т]рицей, а для плоскости $\bar{q}_{n-m_k}$ модуль определителя минора вт[о]рого порядка, стоящего в левом верхнем углу матрицы (c_i^j), рав[ен]
единице. Поэтому инвариантом двух $(n - m_k - 1)$-плоскостей q^1 [и]
q^2 в $(n - m_k)$-пространстве q_{n-m_k} будет число

$$\varphi = \sqrt{\varepsilon^l (u_l - v_l)^2}, \ l = m_k + 1, \ m_k + 2, \ldots, \ m_{k-1},$$

а в $(n - m_k)$-пространстве $\bar{q}_{n-m_k}$ число

$$\varphi_1 = \sqrt{(u_{m_k+1} - v_{m_k+1})(u_{m_k+2} - v_{m_k+2})},$$

где u_l, v_l — тангенциальные координаты $(n - m_k - 1)$-плоскост[ей]
q^1 и q^2, нормированные условием $v_{m_k} = u_{m_k} = 1$.

Отсюда следует, что в пучках $(n-m_k-1)$-плоскостей пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ относительно группы G_1 инвариантно параболическое измерение углов.

Группа G_1 зависит от $\frac{1}{2}n(n+1)$ параметров, т. е. от того же числа, что и группа движений евклидова n-пространства, она транзитивна на пространстве ${}^{l_q}F_n^{m_r}$, поэтому пространство ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ однородно, а группа G подобий является его фундаментальной группой.

Подгруппа $\overline{G}_1$ группы G_1, для движений которой все ортогональные матрицы единичны, является разрешимым нормальным делителем группы G_1, факторгруппа $G_1/\overline{G}$ изоморфна прямому произведению q групп ортогональных матриц, входящих в матрицы движений группы G_1, и поэтому полупроста, если не все абсолютные конусы пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ распадаются. Отсюда следует, что в этом случае G_1 — неполупростая группа Ли, а $\overline{G}_1$ является ее радикалом [6]. Если все абсолютные конусы пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ распадаются, то группа G_1 является подгруппой подобий флагового n-пространства, и поэтому разрешима.

Группы движений пространств ${}^{l_q}S_n^{m_r}$ изоморфны группам движений пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$, и поэтому также являются неполупростыми группами Ли, если не все их абсолютные конусы распадаются, и разрешимыми группами Ли — в противном случае.

3. Инволюционные движения пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ и ${}^{l_q}S_n^{m_r}$. Известно, что всякое движение евклидовых и классических неевклидовых пространств можно представить в виде произведения инволюционных движений. Мы покажем, что для пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ и ${}^{l_q}S_n^{m_r}$, не являющихся полуэллиптическими и полугиперболическими, это свойство не выполняется.

Группы движений пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ и ${}^{l_q}S_n^{m_r}$ являются подгруппами коллинеаций пространства P_n, поэтому инволюционными движениями этих пространств являются отражения от пар.

Будем говорить, что отражение пространства P_n от m пары (q_m, q_{n-m-1}) является отражением от m-плоскости q_m пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$, ${}^{l_q}S_n^{m_r}$, если оно является движением этих пространств и q_m не принадлежит абсолюту.

Имеет место

Теорема 1. *Если абсолют пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ и ${}^{l_q}S_n^{m_r}$ содержит две m-плоскости и две $(m-1)$-плоскости или две $(m+1)$-плоскости, то в этих пространствах не существует отражений от произвольно взятых $(n-m-1)$-плоскостей.*

Доказательство. При движении D указанных выше пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ и ${}^{l_q}S_n^{m_r}$ каждая абсолютная m-плоскость $\overset{1}{p}_m$,

p_m^2 инвариантна, поэтому если D есть отражение этих пространств от $(n-m-1)$-плоскости q_{n-m-1}, то плоскость q_{n-m-1} должна пересекать по крайней мере одну из m-плоскостей p_m^1 и p_m^2.

Из теоремы 1 следует, что пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ при $m_1 \neq n-1$, $n-2$ не являются симметрическими пространствами [7].

Теорема 2. *Всякое инволюционное движение пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ и ${}^{l_q}S_n^{m_r}$ можно привести с помощью движений этих пространств к диагональному виду с диагональными элементами ± 1.*

Доказательство проведем методом полной математической индукции по числу n.

При $n=2$ пространствами ${}^{l_q}F_2^{m_r}$ и ${}^{l_q}S_2^{m_r}$ являются евклидова, псевдоевклидова, копсевдоевклидова флаговая, бифлаговая, коевклидова и классические неевклидовы плоскости.

Докажем справедливость теоремы 2 для бифлаговой плоскости F_2^2.

Движения бифлаговой плоскости F_2^2 имеют вид:

$$\rho\bar{x}_0 = \alpha_0 x_0 + \beta x_1,\ \rho\bar{x}_i = \alpha_i x_i,\quad i = 1,\ 2. \tag{1}$$

Из инволюционности движения (1) следует, что $\alpha_j = \pm 1$ и при $\beta \neq 0$ $\alpha_0 + \alpha_1 = 0$, $j = 0,\ 1,\ 2$. Будем считать $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, тогда при $\alpha_2 = 1$ в движении (1) будет инвариантна каждая точка прямой $p_1^1 : x_1 = 0$ и точка $M(-\beta : 2 : 0)$ прямой $x_2 = 0$. С помощью движения плоскости F_2^2

$$\rho\bar{x}_0 = 2x_0 + \beta x_1,\quad \rho\bar{x}_i = x_i,\quad i = 1,\ 2. \tag{2}$$

точка M преобразуется в точку $A_1(0:1:0)$, а отражение от 0-пары $(M,\ p_1^1)$ преобразуется в отражение от 0-пары $(A_2,\ p_1^1)$, которое имеет диагональный вид.

При $\alpha_2 = -1$ в движении (1) инвариантна каждая точка прямой $q_1 \equiv A_2M$, $A_2(0:0:1)$. Движение (2) преобразует прямую q_1 в прямую $\bar{q}_1 \equiv A_1A_2$, а отражение от 0-пары $(p_0^1,\ q_1)$ в отражение от 0-пары $(p_0^1,\ \bar{q}_1)$, которое имеет диагональный вид. Таким образом, теорема 2 при $n=2$ справедлива.

Пусть теорема 2 справедлива для пространств размерности меньше n. Абсолют $({}^{l_q}F_n^{m_r})$ при $m_1 \neq n-2$ состоит из абсолюта $({}^{l_q}F_{n-1}^{m_r})$ в гиперплоскости $p_{n-1}^1 : x_n = 0$ и гиперплоскости $p_{n-1}^2 : x_{n-1} = 0$, проходящей через плоскость абсолюта $({}^{l_q}F_{n-1}^{m_r})$, а при $m_1 = n-2$ из абсолюта $({}^{l_q}S_{n-1}^{m})$ в гиперплоскости p_{n-1}^1.

Отражение I от m-пары пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ индуцирует в пространствах ${}^{l_q}F_{n-1}^{m_r}$, ${}^{l_q}S_{n-1}^{m_r}$ отражение I_1 от m-пары, где $m_1 = m,\ m-1$, которое в частном случае является тождественным преобразованием. При I_1, не являющемся тождественным преобразованием, рассмотрим такое движение D пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$

которое индуцирует в пространствах ${}^{l_q}F_{n-1}^{m_r}$, ${}^{l_q}S_{n-1}^{m_r}$ движение D_1, приводящее к диагональному виду отражение I_1. Отражение I с помощью движения D приводится к виду

$$\rho\bar{x}_n = x_n, \ \rho\bar{x}_i = \varepsilon_i x_i + a_i x_n, \ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Из инволюционности преобразования (3) следует, что при $\varepsilon_i = 1$ $a_i = 1$, поэтому движение пространства ${}^{l_q}F_n^{m_r}$

$$\rho\bar{x}_i = 2\varepsilon_i x_i + a_i x_n, \ \rho\bar{x}_n = x_n, \ i = 0, 1, \ldots, n-1$$

преобразует отражение (3) в отражение

$$\rho\bar{x}_j = \varepsilon_j x_j, \ j = 0, 1, \ldots, n-1, \ \varepsilon_j = \pm 1.$$

Тем самым теорема 2 для пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$ доказана, а для пространств ${}^{l_q}S_n^{m_r}$ следует из принципа двойственности.

Из теоремы 2 следует, что всякое инволюционное преобразование пространств ${}^{l_q}F_n^{m_r}$, ${}^{l_q}S_n^{m_r}$ можно представить в виде $D^{-1}ID$, где I — инволюционное преобразование диагонального вида, а D — некоторое движение. Поэтому для матриц движений, состоящих из произведения инволюционных движений, диагональные элементы в их матрицах движений бифлаговых пространств равны ± 1. Движения обобщенных пространств полугиперболического типа зависят от того же числа параметров, что и группы движений классических неевклидовых пространств. Но если они не являются полугиперболическими и полуэллиптическими пространствами, то в них не для всех k существуют отражения от произвольно взятых k-плоскостей и не всякое движение можно представить в виде произведения инволюционных движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М., Наука, 1969. 547 с.
2. *Яглом И. М., Розенфельд Б. А., Ясинская Е. И.* Проективные метрики. — УМН, 19, вып. 5 (119), 1964, с. 51—113.
3. *Киотина Г. В.* Проективные мероопределения, инвариантные относительно квазигрупп и групп коллинеацией трехвершинника в P_2. — «Учен. зап. Яросл. пединститута». Вып. 92. Ярославль, 1971, с. 68—73.
4. *Киотина Г. В.* Квазигруппы и группы движений некоторых линейных систем коллинеаций в P_5. — «Учен. зап. Пензенск. пединститута», т. 124, Пенза, 1971, с. 73—82.
5. *Киотина Г. В.* Бифлаговые пространства. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 16. Харьков, 1973, с. 14—21.
6. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954. 515 с.
7. *Картан Э.* Теория конечных непрерывных групп Ли и топология. В кн.: Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. Пер. Б. А. Розенфельд. М., ИЛ, 1949, с. 240—292.

Поступила 26 июня 1973 г.

УДК 513.73(075.8)

Н. И. КОВАНЦОВ, А. Н. БОРОВЕЦ

СТРОЕНИЕ БИАКСИАЛЬНО-ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Биаксиальным называют проективное пространство P_3, подгруппа коллинеаций которого сохраняет некоторую линейную конгруэнцию — абсолют.

Комплексы прямых в трехмерном биаксиальном пространстве исследовались в [1, 2] Н. И. Кованцовым и в [3, 4] Г. Станиловым. Рассмотрения в основном ограничивались первой дифференциальной окрестностью, а там где привлекалась вторая дифференциальная окрестность, предметом внимания оказывались общие проективные свойства комплексов, не имеющие специфического биаксиального характера. Биаксиальный характер будут носить такие образы, у которых те или иные проективные элементы имеют биаксиальные характеристики. Биаксиальные свойства геометрических образов получаем, присоединяя к общим проективным то, что определяется абсолютом биаксиального пространства.

Вторая дифференциальная окрестность луча комплекса в проективном пространстве выделяет четверку инфлекционных центров [1]. Первая дифференциальная окрестность луча комплекса в биаксиальном пространстве выделяет центры луча [2, 3]. Биаксиально-инвариантным будет класс комплексов, у которых центры совпадают с какой-либо парой инфлекционных центров. Назовем такие комплексы биаксиально-центральными.

В настоящей работе изучаются свойства этого класса комплексов и находится его безынтегральное представление, т. е. дается геометрическая интерпретация решения системы дифференциальных уравнений, определяющих биаксиально-центральные комплексы.

1. Дифференциальные уравнения биаксиально-центральных комплексов

Ограничимся случаем биаксиального пространства гиперболического типа. Подвижной репер пространства выберем таким образом, чтобы базисные прямые пространства l_1 и l_2 определялись равенствами

$$l_1 = (A_1 + A_3,\ A_2 + A_4),$$
$$l_2 = (A_1 - A_3,\ A_2 - A_4).$$

Уравнения инфинитезимального смещения репера имеют вид

$$dA_i = \omega_i^j A_j \ (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

где формы ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры биаксиального пространства [1]:

$$D\omega_i^j=\left[\omega_i^k\omega_k^j\right],$$

$$\omega_4^1-\omega_2^3=0,\quad \omega_4^4-\omega_2^2=0,$$

$$\omega_3^2-\omega_1^4=0,\quad \omega_3^3-\omega_1^1=0,$$

$$\omega_4^3-\omega_2^1=0,\quad \omega_4^2-\omega_2^4=0,$$

$$\omega_3^4-\omega_1^2=0,\quad \omega_3^1-\omega_1^3=0.$$

К этим уравнениям присоединим уравнение

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0,$$

которое получим, продифференцировав равенство

$$(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)=1.$$

Совместим ребро A_1A_2 подвижного репера с лучом комплекса. Тогда между главными формами будет существовать зависимость

$$\omega_1^3=a\omega_2^3+b\omega_1^4+k\omega_2^4, \tag{1.1}$$

дифференцируя которую и раскрывая по лемме Картана, получим

$$\begin{gathered}-da-(ab+k+1)\,\omega_1^2-a^2\omega_2^1+a(\omega_1^1-\omega_2^2)=p\omega_2^3+\alpha\omega_1^4+\beta\omega_2^4,\\ -db-(ab+k+1)\,\omega_2^1+b^2\omega_1^2-b(\omega_1^1-\omega_2^2)=\alpha\omega_2^3+q\omega_1^4+\gamma\omega_2^4,\\ -dk+(1-k)\left(a\omega_2^1-b\omega_1^2\right)=\beta\omega_2^3+\gamma\omega_1^4+r\omega_2^4.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Первая дифференциальная окрестность выделяет центры луча $M=A_1+tA_2$, определяемые уравнением

$$bt^2-(k+1)\,t-a=0, \tag{1.3}$$

а вторая — четыре инфлекционных центра, определяемых уравнением

$$\begin{gathered}qt^4-2\,(\alpha b-aq+\gamma)\,t^3+(pb^2+qa^2+r-2\alpha ab+\\ +2\beta b+2\alpha k-4\alpha\gamma)\,t^2-2\,(pbk-ab\beta-ak\alpha+\\ +k\beta+a^2\gamma-ar)\,t+pk^2-2ka\beta+ra^2=0.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Комплексы, у которых каждый луч содержит двойной центр, рассмотрены в [2]. Отметим, в частности, что у них двойной центр оказывается всегда и двойным инфлекционным центром.

Рассмотрим комплексы, у которых центры луча совпадают с какой-либо парой инфлекционных центров. Ограничиваясь рассмотрением в действительной области, предположим, что центры луча, и, следовательно, и та пара инфлекционных центров, с которыми совпадают центры, являются действительными. Тогда с этой парой можно совместить вершины A_1, A_2 репера. Из уравнений (1.3) при этом получаем

$$a=b=0,$$

а из (1.4)

$$q = pk^2 = 0.$$

Случай $k = 0$, соответствующий специальному комплексу, исклю
чен при нахождении уравнения инфлекционных центров. Таки
образом, класс биаксиально-центральных комплексов характер
зуется следующими соотношениями между параметрами:

$$a = b = p = q = 0.$$

Равенства (1.1), (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= k\omega_2^4, \\ (1+k)\,\omega_1^2 &= \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ -(1+k)\,\omega_2^1 &= \alpha\omega_2^3 + \gamma\omega_2^4, \\ -dk &= \beta\omega_2^3 + \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Продолжая последовательно систему (1.5) два раза, приведем е
в инволюцию, что позволяет сформулировать следующий результа

Теорема 1. *Класс биаксиально-центральных комплексов сущ
ствует с произволом четыре функции одного аргумента.*

2. Геометрическая характеристика биаксиально-центральных комплексов

Отметим некоторые линейчатые образы, связанные с биакси
ально-центральными комплексами и их свойствами.

1. При той канонизации сопровождающего репера комплекс
когда вершины A_1, A_2 совмещены с центрами луча, все конгру
энции $\omega_2^4 = 0$ комплекса в биаксиальном пространстве являютс
голономными. В частности, это справедливо и для биаксиальн
центральных комплексов.

2. Каждой точке M луча комплекса в плоскости, соотве
ствующей ей в нормальной корреляции, соответствует единстве
ная прямая абсолютной конгруэнции, которая проходит чер
эту точку. Назовем лучи абсолютной конгруэнции, проходящи
через центры луча комплекса, центральными. При указанно
выше выборе репера комплекса, когда его вершины A_1, A_2 со
мещены с центрами луча, центральные прямые абсолютной конгру
энции совпадают с A_1A_3, A_2A_4. Если луч A_1A_2 описывает ко
груэнцию $\omega_2^4 = 0$ произвольного комплекса, то в общем случа
центральные лучи описывают всю абсолютную конгруэнци
(или некоторую двумерную область ее).

Для биаксиально-центральных же комплексов имеет мест

Теорема 2. *Если луч A_1A_2 биаксиально-центрального комплек
описывает конгруэнцию $\omega_2^4 = 0$, то центральные лучи абсолютно
конгруэнции описывают линейчатые поверхности.*

3. **Теорема 3.** *Конгруэнции* $\omega_2^4=0$ *биаксиально-центрального комплекса линейны.*

Доказательство. В силу теоремы 2, у биаксиально-центрального комплекса ребро сопровождающего репера A_1A_3 (A_2A_4) описывает линейчатую поверхность, принадлежащую абсолютной конгруэнции, если A_1A_2 описывает конгруэнцию $\omega_2^4=0$. Точка A_1 описывает в общем случае некоторую кривую, касательная к которой определяется плюккеровыми координатами

$$m=(A_1,\ dA_1)=\omega_1^4(A_1,\ \xi A_2+A_4),$$

где

$$\xi=\frac{\alpha}{1+k}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} dm &= (dA_1,\ \xi A_2+A_4)+(A_1,\ d\xi A_2+\xi dA_2+dA_4)= \\ &= \left(\omega_1^1A_1, -\xi A_2+A_4\right)+\left(A_1, -\xi\omega_1^1A_2+\xi\omega_2^3A_3+\right. \\ &\qquad \left.+\,\omega_2^1A_3-\omega_1^1A_4\right)\equiv 0 \pmod m \end{aligned}$$

(учли, что $d\xi\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ \omega_2^4\right)$), т. е. точка A_1 описывает неподвижную прямую, которая пересекает луч A_2A_4 в точке $M=\xi A_2+A_4$. Аналогично точка A_2 описывает прямую $n=(A_2,\ \xi A_1-A_3)$ ($dn\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ \omega_2^4\right)$), которая пересекает луч A_1A_3 в точке $N=\xi A_1-A_3$.

Таким образом, в конгруэнции $\omega_2^4=0$ определяются две неподвижные прямые

$$\begin{aligned} m&=(A_1,\ \xi A_2+A_4),\\ n&=(A_2,\ \xi A_1-A_3), \end{aligned} \tag{2.1}$$

которые пересекают луч A_1A_2 конгруэнции, т. е. прямые m, n — директрисы конгруэнции $\omega_2^4=0$. Теорема доказана.

Биаксиально-центральный комплекс расслаивается в однопараметрическое семейство линейных конгруэнций.

4. **Теорема 4.** *Директрисы линейной конгруэнции* $\omega_2^4=0$ *биаксиально-центрального комплекса принадлежат к одной серии прямолинейных образующих квадрики, описываемой центральными прямыми абсолютной конгруэнции.*

Доказательство. Покажем, что луч A_1A_3 описывает квадрику при условии, что A_1A_2 описывает конгруэнции $\omega_2^4=0$, и найдем точечное уравнение ее в подвижном репере. Условие того, что луч A_1A_3 принадлежит квадрике, можно записать в виде

$$\sum a(A_1A_1)=0,\ \sum a(A_1A_3)=0,\ \sum a(A_3A_3)=0. \tag{2.2}$$

Здесь символом $\sum a(A_iA_j)$ обозначена билинейная форма $a_{kl}x_i^k x_j^l$, записанная для координат точек A_i, A_j в некотором неподвижном репере, к которому отнесено пространство P_3). Диффе[ренц]ируя (2.2) внешним образом и учитывая равенства $\omega_2^4=0$, ω[…] $=0$ $d\xi=0$ и (2.2), получим

$$\sum a(A_1A_4) = -\xi\sum a(A_1A_2),\ \sum a(A_2A_3) = \xi\sum a(A_1A_2),$$
$$\sum a(A_3A_4) = -\sum a(A_1A_2). \qquad (2\ldots$$

Дифференцируя (2.3), а также учитывая (2.2), (2.3), нахо[дим]

$$\sum a(A_2A_4) = 0,\ \sum a(A_2A_2) = 0,\ \sum a(A_4A_4) = 0 \qquad (2\ldots$$

при условии $\xi^2 \neq 1$.

Дифференцирование (2.4) приводит к тождеству. Следователь[но] луч A_1A_3 описывает квадрику, уравнение которой в подвиж[ном] репере имеет вид

$$x^1x^2 - x^3x^4 + \xi(x^2x^3 - x^1x^4) = 0. \qquad (2\ldots$$

Как видно из (2.4), ребро A_2A_4 принадлежит этой квадри[ке]. Легко показать, что прямые $A_2'A_4'$, $A_2''A_4''$, где

$$(A_2'A_4') = (A_2A_4) + d(A_2A_4),$$
$$(A_2''A_4'') = (A_2A_4) + d(A_2A_4) + \frac{1}{2}d^2(A_2A_4)$$

также принадлежат квадрике (2.5). Обозначим эту квадри[ку] через Q. Таким образом, лучи A_1A_3, A_2A_4 — прямолиней[ные] образующие одной серии квадрики (2.5). Прямые m, n (см. 2.[…]) принадлежат этой квадрике и пересекают ребра A_1A_3, A_2A_4, т. е. они принадлежат к другой серии прямолинейных образу[ю]щих квадрики (2.5).

Легко показать, что базисные прямые l_1, l_2 принадлеж[ат] квадрике (2.5), если $\xi^2 \neq 1$, причем к той же серии прямолине[й]ных образующих, что и директрисы (2.1) линейной конгруэнци[и] $\omega_2^4=0$ биаксиально-центрального комплекса.

5. В общем случае конгруэнции $\omega_2^3=0$ и $\omega_1^4=0$ комплек[са] в биаксиальном пространстве являются неголономными (предпо[]лагается, что сопровождающий репер построен на центрах, т. е. две его вершины совмещены с центрами лучей комплекса). Име[ет] место следующая

Теорема 5. *Для того чтобы комплекс был биаксиально-цент[]ральным, необходимо и достаточно, чтобы в сопровождающем те[]траэдре, построенном на центрах, конгруэнции $\omega_2^3=0$ или $\omega_1^4=0$ были голономными.*

Действительно, мы имеем

$$D\omega_2^3 = -2\left[\omega_1^1\omega_2^3\right] - (1-k)\left[\omega_2^1\omega_2^4\right],$$
$$D\omega_1^4 = 2\left[\omega_1^1\omega_1^4\right] - (1-k)\left[\omega_1^2\omega_2^4\right].$$

...сюда значения форм ω_1^2, ω_2^1 из (1.2) при $a = b = 0$, получим

$$D\omega_2^3 = -2\left[\omega_1^1\omega_2^3\right] - \frac{1-k}{1+k}\left[\alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4,\ \omega_2^4\right],$$

$$D\omega_1^4 = 2\left[\omega_1^1\omega_1^4\right] + \frac{1-k}{1+k}\left[p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4,\ \omega_2^4\right].$$

...юда видно что лишь в случае биаксиально-центральных ...мплексов ($p = q = 0$) мы имеем

$$D\omega_2^3 \equiv 0 \pmod{\omega_2^3},$$

$$D\omega_1^4 \equiv 0 \pmod{\omega_1^4}.$$

...рема доказана.

...еорема 6. *Каждая из конгруэнций $\omega_2^3 = 0$ и $\omega_1^4 = 0$ биакси...ьно-центрального комплекса представляет собой двупараметри...кую совокупность прямых, пересекающих некоторую кривую. ...точками этой кривой совпадают фокусы конгруэнций.*

...ействительно, возьмем конгруэнцию

$$\omega_2^3 = 0.$$

...ли $M = tA_1 + A_2$ — ее фокус, то имеют место равенства

$$\omega_2^3 + t\omega_1^3 = 0,$$

$$\omega_2^4 + t\omega_1^4 = 0,$$

...ли

$$kt\omega_2^4 = 0,$$

$$\omega_2^4 + t\omega_1^4 = 0.$$

...ключая отсюда базисные формы, получим квадратное уравне...ие, определяющее фокусы. Замечаем, что фокусом является ...чка A_2, дважды взятая. Поскольку сейчас

$$dA_2 = -\omega_1^1 A_2 + \left(-\frac{\gamma}{1+k}A_1 + A_4\right)\omega_2^4,$$

...и следовательно, двойной фокус описывает кривую.

Аналогично можно показать, что конгруэнция $\omega_1^4 = 0$ имеет ...войной фокус в точке A_1, и ее единственная фокальная поверх...ность вырождается в кривую, так как дифференциал

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \left(\frac{\beta}{1+k}A_2 + kA_3\right)\omega_2^4$$

...ависит существенно от одной формы.

6. У биаксиально-центрального комплекса, как видно из ...равенств

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^4(\xi A_2 + A_4) + \omega_2^4(\eta A_2 + kA_3),$$

$$dA_2 = -\omega_1^1 A_2 + \omega_2^3(A_3 - \xi A_1) + \omega_2^4(A_4 - \zeta A_1),$$

где

$$\eta = \frac{\beta}{1+k}; \quad \zeta = \frac{\gamma}{1+k};$$

точки A_1, A_2, являющиеся центрами лучей комплекса и инфл
ционными центрами одновременно, описывают поверхности. В мо
графии [1] показано, что если инфлекционный центр описыв
некоторую поверхность, то конус лучей комплекса в каж
точке такой поверхности вырождается в плоский пучок. У
сейчас центры A_1 и A_2 принадлежат директрисам линейной к
груэнции $\omega_2^4 = 0$, а эти директрисы описывают две линейча
поверхности (см. ниже). Пучок с центром в точке A_1 располож
в плоскости, соединяющей точку A_1 с директрисой n; пуч
с центром A_2 расположен в плоскости, соединяющей эту точ
с директрисой m.

Таким образом, биаксиально-центральный комплекс предст
ляет собой двупараметрическую совокупность плоских пучк
вершины которых описывают некоторую квадрику.

7. Как отмечалось в пункте 4, базисные прямые принадле
к той же серии прямолинейных образующих квадрики, что
директрисы линейной конгруэнции $\omega_2^4 = 0$, если $\xi^2 \neq 1$. Кр
того, так как

$$dm = m + \omega_2^4 \left[\left(k - \frac{x}{1+k} + \frac{2\beta\gamma - \alpha^2 k}{(1+k)^2} \right) \left(A_1 A_2 \right) - \frac{\gamma}{1+k} (A_1 A_3) - \right.$$

$$\left. - \xi k (A_2 A_3) + \frac{\beta}{1+k} (A_2 A_4) + k (A_3 A_4) \right]$$

и

$$dn = - \xi k n + \omega_2^4 \left[\left(\frac{x + 1 - k^2}{1+k} - \frac{2\beta\gamma + \alpha^2}{(1+k)^2} \right) (A_1 A_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{1+k} (A_1 A_3) - \xi (A_1 A_4) - \frac{\beta}{1+k} (A_2 A_4) - (A_3 A_4) \right]$$

выражаются через одну существенную базисную форму ω_2^4,
директрисы m, n линейных конгруэнций $\omega_2^4 = 0$ в комплек
описывают некоторые линейчатые поверхности M и N.

Как следует из теоремы 6, голономные конгруэнции ω_1^4
и $\omega_2^3 = 0$ биаксиально-центрального комплекса параболическ
и их фокальные поверхности вырождаются в кривые. Поскольк
в комплексе точка A_1 описывает линейчатую поверхность M,
которой располагается одно семейство директрис линейных ко
груэнций $\omega_2^4 = 0$ комплекса, а точка A_2 — поверхность N,
которой лежат директрисы второго семейства этих конгруэнци
то, следовательно, единственная фокальная поверхность конгр
энции $\omega_1^4 = 0$ вырождается в некоторую кривую, лежащую
поверхности M. Аналогично, кривая — вырожденная фокальн

поверхность конгруэнции $\omega_2^3 = 0$ — лежит на поверхности N. Отсюда следует

Теорема 7. *Биаксиальный комплекс распадается двумя способами в однопараметрическое семейство параболических конгруэнций, каждая из которых представляет двупараметрическую совокупность прямых, пересекающих некоторую кривую.*

3. Безынтегральное представление биаксиально-центральных комплексов

Данная в п. 2 геометрическая характеристика биаксиально-центральных комплексов дает основание высказать следующее предположение об их строении, которое сформулируем так:

Теорема 8. *Чтобы построить биаксиально-центральный комплекс, возьмем произвольную линейчатую поверхность M (три функции одного аргумента). Каждая образующая m этой поверхности с прямыми l_1 и l_2 образует некоторую демиквадрику Q. На каждой такой демиквадрике возьмем некоторую образующую n (еще одна функция одного аргумента). Если прямая m описывает поверхность M, то прямая n описывает поверхность N. Принимая прямые m и n за директрисы линейной конгруэнции, получим искомый комплекс как однопараметрическую совокупность таких конгруэнций.*

Доказательство. Примем базисные прямые l_1 и l_2 соответственно за прямые $(A_1 + A_3,\ A_2 + A_4)$ и $(A_1 - A_3,\ A_2 - A_4)$. Это приводит к равенствам

$$\begin{gathered}
\omega_2^3 - \omega_1^4 = 0,\ \omega_4^4 - \omega_2^2 = 0,\\
\omega_1^4 - \omega_3^2 = 0,\ \omega_3^3 - \omega_1^1 = 0,\\
\omega_4^3 - \omega_2^1 = 0,\ \omega_2^4 - \omega_4^2 = 0,\\
\omega_3^4 - \omega_1^2 = 0,\ \omega_1^3 - \omega_3^1 = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

На прямую m поверхности M поместим точки A_1 и $M^* = A_2 + \xi A_4$, где ξ — некоторый коэффициент. Если на прямую n поместить вершину A_2, то на этой прямой, как легко видеть, должна находиться точка $N^* = \xi A_1 - A_3$ (это следует из факта принадлежности прямых l_1, l_2 m, n одной квадрике). Поскольку прямая m описывает поверхность, то dm должен выражаться через одну форму. Мы имеем

$$\begin{gathered}
dm = d(A_1,\ \xi A_2 + A_4) = (d\xi - \xi^2\omega_2^4 + \omega_2^4)(A_1A_2) + \\
+ (\xi\omega_2^3 + \omega_2^1)(A_1A_3) - \xi\omega_1^3(A_2A_3) + (\omega_1^2 - \\
- \xi\omega_1^4)(A_2A_4) + \omega_1^3(A_3A_4) + \xi\omega_2^4 m
\end{gathered}$$

Здесь учтено $(A_1A_4) = m - \xi(A_1A_2))$.

Принимая за базисную форму ω_1^3, заключаем, что

$$
\begin{gathered}
[d\xi + (1 - \xi^2)\,\omega_2^4,\ \ \omega_1^3] = 0,\\
[\xi\omega_2^3 + \omega_2^1,\ \omega_1^3] = 0,\\
[-\xi\omega_1^4 + \omega_1^2,\ \omega_1^3] = 0.
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Аналогично прямая n также описывает поверхность с
же самой базисной формой ω_1^3, поскольку лучи поверхностей
и N соответствуют друг другу. Тогда

$$
\begin{gathered}
[-d\xi + (1 - \xi^2)\,\omega_1^3,\ \omega_1^3] = 0,\\
[-\xi\omega_1^4 + \omega_1^2,\ \omega_1^3] = 0,\\
[\xi\omega_2^3 + \omega_2^1,\ \ \omega_1^3] = 0,\\
[\omega_2^4,\ \omega_1^3] = 0.
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Рассматриваемый комплекс представляет собой однопараметри
ческую совокупность конгруэнций, директрисами которых
ляются прямые m и n.

Вершины A_1 и A_2 помещены на луче этого комплекса. При
нимая за базисные формы его формы ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4, мы можем
писать

$$
\omega_1^3 = a\omega_1^4 + b\omega_3^2 + k\omega_2^4. \tag{3.4}
$$

Но из последнего равенства (3.3) следует, что форма ω_1^3 пропор
циональна форме ω_2^4. Следовательно,

$$
a = b = 0.
$$

Равенство (3.4) принимает вид

$$
\omega_1^3 = k\omega_2^4.
$$

Продолжая его, получим

$$
\begin{gathered}
\omega_1^2 = \frac{1}{1+k}\,(p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4),\\
\omega_2^1 = -\frac{1}{1+k}\,(\alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 + \gamma\omega_2^4),\\
-dk = \beta\omega_2^3 + \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4.
\end{gathered}
$$

Учитывая равенства (3.2), (3.3), находим, что

$$
\xi = \frac{\alpha}{1+k}\,;\ \ p = q = 0.
$$

Мы получили биаксиально-центральный комплекс. Сформулиро
ванное в теореме безынтегральное представление справедливо.

Заметим, что при построении биаксиально-центральных комп
лексов мы исключили их частный класс, характеризующийся
условием $\xi^2 = 1$, так как в этом случае, как следует из теоремы
4, квадрика Q вырождается.

4. Частный класс биаксиально-центральных комплексов $\xi^2 = 1$

Уравнения (1.5) в случае $\xi^2 = 1$ (берем $\alpha = 1 + k$, т. е. $\xi = 1$) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= k\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= \omega_1^4 + \frac{\beta}{1+k}\omega_2^4, \\ \omega_2^1 &= -\omega_2^3 - \frac{\gamma}{1+k}\omega_2^4, \\ -dk &= \beta\omega_2^3 + \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Произвол существования решения системы (4.1) — три функции одного аргумента.

Директрисы линейной конгруэнции $\omega_2^4=0$ теперь — две прямые

$$\begin{aligned} m &= (A_1,\ A_2 + A_4), \\ n &= (A_2,\ A_1 - A_3), \end{aligned} \tag{4.2}$$

каждая из которых пересекает соответствующую базисную прямую.

Легко проверить, что плоскости

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (A_1,\ A_3,\ A_2 + A_4), \\ \pi_2 &= (A_2,\ A_4,\ A_1 - A_3) \end{aligned}$$

в конгруэнции $\omega_2^4 = 0$ неподвижны.

Действительно,

$$d\pi_1 = \omega_1^1(A_1,\ A_3,\ A_2 + A_4) + \frac{\beta}{1+k}\omega_2^4(A_4,\ A_2,\ A_1 - A_3) \equiv$$
$$\equiv \omega_1^1(A_1,\ A_3,\ A_2 + A_4) \pmod{\omega_2^4},$$
$$d\pi_2 = -\omega_1^1(A_2,\ A_4,\ A_1 - A_3) - \frac{\gamma}{1+k}\omega_2^4(A_3,\ A_1,\ A_2 - A_4) \equiv$$
$$\equiv -\omega_1^1(A_2,\ A_4,\ A_1 - A_3) \pmod{\omega_2^4}.$$

В комплексе (4.1) точка A_1 (или, что то же самое, прямая m) описывает некоторую линейчатую поверхность M, которой принадлежит базисная прямая l_1. Аналогично точка A_2 (или прямая n) описывает поверхность N, которой принадлежит прямая l_2. Образующие m, n этих поверхностей соответствуют друг другу. Действительно, дифференциалы их

$$dm = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_2^4)m + \omega_2^4\Big(-\frac{\gamma}{1+k}(A_1A_3) - k(A_2A_3) +$$
$$+ k(A_3A_4) + \frac{\beta}{1+k}(A_2A_4)\Big)$$

$$dn = (-\omega_1^1 - \omega_2^2 + k\omega_2^4)n + \omega_2^4\Big(\frac{\gamma}{1+k}(A_1A_3) - (A_1A_4) +$$
$$+ (A_3A_4) - \frac{\beta}{1+\kappa}\Big(A_2A_4\Big)\Big)$$

выражаются через одну и ту же базисную форму ω_2^4.

В биаксиальном пространстве прямая l_1 определяет некотор специальный комплекс C_1 с осью l_1, а l_2 — специальный лин ный комплекс C_2. Их пересечение — абсолют пространства. К следует из (4.2), поверхность M принадлежит комплексу поверхность N — комплексу C_2.

Теперь мы можем дать безынтегральное представление р сматриваемого класса комплексов.

Возьмем произвольную поверхность M, принадлежащую ко плексу C_1 (две функции одного аргумента). На этой поверхно возьмем произвольную образующую m, пересекающую базисн прямую l_1 в некоторой точке L_1. Прямые m, l_1 определя некоторую плоскость π_1, которая пересекается с прямой l какой-то точке L_2. Точкой L_1 и прямой l_2 определяется плоско π_2. Прямая L_1L_2 — линия их пересечения. В плоскости π_2 чер точку L_2 проведем произвольную прямую $n \equiv L_2N^*$ (еще фу ция одного аргумента). Принимая прямые m, n за директри линейных конгруэнций, получим искомый комплекс как од параметрическую совокупность линейных конгруэнций, дир трисы которых пересекают базисные прямые. Заметим, что ес прямая m описывает поверхность, принадлежащую комплексу то прямая n — поверхность, принадлежащую комплексу C_2.

Покажем, что действительно в результате указанных постр ений получим искомый комплекс.

Пусть базисные прямые определяются равенствами

$$l_1 = (A_1 + A_3,\ A_2 + A_4),$$
$$l_2 = (A_1 - A_3,\ A_2 - A_4).$$

Тогда имеют место равенства (3.1). На прямую m помест точку A_1. Поскольку точки L_1, L_2 лежат на прямых l_1, l_2,

$$L_1 = t_1 (A_1 + A_3) + A_2 + A_4,$$
$$L_2 = (A_1 - A_3) + t_2 (A_2 - A_4).$$

Условие, что L_2 лежит в плоскости π_1, приводит к равенс

$$t_2 = 0.$$

Точку A_2 поместим на прямую n. Тогда плюккеровы коорд наты прямых m, n определяются равенствами

$$m = (A_1,\ tA_3 + A_2 + A_4),$$
$$(t_1 = t).$$
$$n = (A_2,\ A_1 - A_3).$$

Так как m, n описывают поверхности, то дифференциалы d dn должны выражаться через одну форму. Определим их:

$$dm = (\omega_2^4 + t\omega_1^2)\, m + (dt + 2t\omega_1^1 - t^2\omega_1^2 + t\omega_1^3 -$$
$$- t\omega_2^4 + \omega_2^1 + \omega_2^3)\,(A_1A_3) + t\,(\omega_1^4 - \omega_1^2)\,(A_1A_4) + (t\omega_1^2 -$$

$$-\omega_1^3)(A_2A_3)+(\omega_1^2-\omega_1^4)(A_2A_4)+(\omega_1^3-t\omega_1^4)(A_3A_4), \qquad (4.3)$$

$$dn=-\omega_1^3 n-(\omega_2^1+\omega_2^3)(A_1A_3)-\omega_2^4(A_1A_4)-$$

$$-(\omega_1^4-\omega_1^2)(A_2A_4)+\omega_2^4(A_3A_4)$$

десь уже учтено, что $(A_1A_2)=m-(A_1A_4)-t(A_1A_3)$ и $A_1A_2=$ $=-n-(A_2A_3)$).

За базисную форму поверхностей можно принять одну и ту же форму, так как их образующие соответствуют друг другу. Как видно из (4.3), за таковую можно принять ω_1^3. Тогда из второго равенства (4.3) следует, что

$$[\omega_2^4,\ \omega_1^3]=0,$$

$$[\omega_1^4-\omega_1^2,\ \omega_1^3]=0, \qquad (4.4)$$

$$[\omega_2^1+\omega_2^3,\ \omega_1^3]=0.$$

А из первого с учетом (4.4) получим

$$[dt+2t\omega_1^1-t^2\omega_1^2+t\omega_1^3-t\omega_2^4+\omega_2^1+\omega_2^3,\ \omega_1^3]=0,$$

$$[t\omega_1^2-\omega_1^3,\ \omega_1^3]=0, \qquad (4.5)$$

$$[\omega_1^3-t\omega_1^4,\ \omega_1^3]=0.$$

Поскольку

$$\omega_1^3=k\omega_2^4, \qquad (4.6)$$

то

$$d(A_1A_2)=\omega_2^3(A_1A_3)+\omega_2^4(A_1A_4)-k\omega_2^4(A_2A_3)-\omega_1^4(A_2A_4).$$

Следовательно, луч A_1A_2 описывает комплекс прямых. Продолжая (4.6), получим

$$\omega_1^2=\frac{1}{1+k}(p\omega_2^3+\alpha\omega_1^4+\beta\omega_2^4),$$

$$\omega_2^1=-\frac{1}{1+k}(\alpha\omega_2^3+q\omega_1^4+\gamma\omega_2^4),$$

$$-dk=\beta\omega_2^3+\gamma\omega_1^4+r\omega_2^4.$$

Учитывая (4.4), будем иметь

$$1-\frac{\alpha}{1+k}=0,\ p=q=0.$$

Из равенств (4.5) следует, что $t=0$. В результате получаем систему дифференциальных уравнений (4.1), определяющих искомый комплекс. Итак справедлива

Теорема 9. *Чтобы построить комплекс, для которого $\alpha=1+k$, следует взять произвольную линейчатую поверхность, образующие которой пересекают базисную прямую l_1. В плоскости, определяемой базисной прямой l_2 и прямой L_1L_2 (L_1 — точка пересечения прямой m с l_1, L_2 — точка пересечения прямой l_2 с плоскостью,*

6 1-1761

проходящей через m и l_1), следует провести через точку L_2 произвольную прямую n. Беря прямые m и n за директрисы линейной конгруэнции, получим рассматриваемый комплекс как однопараметрическую совокупность таких конгруэнций.

Комплекс $\alpha = -(1+k)$ мы получим, поменяв местами прямые l_1 и l_2, т. е. положив

$$L_2 = t_1 (A_1 - A_3) + (A_2 - A_4),$$
$$L_2 = (A_1 + A_3) + t_2 (A_2 + A_4).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. Изд-во Киевск. ун-та, Киев, 1963. 29[illegible]
2. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов в биаксиальном пространстве. — «Изв. вузов. Математика», 1964, № 1 (38), с. 55—68.
3. *Станилов Г.* Канонический тетраэдр комплекса прямых в биаксиальной геометрии.— «Докл. Болгарской АН», 1963, т. 16, вып. 5, с. 473—476.
4. *Станилов Г.* Комплекси от прави в двуосната геометрия. — «Изв. на Мат. инст.», 1965, 18, № 8, с. 23—62.
5. *Боровец А. Н., Ильяшенко В. Я., Солейман М. А.* Безынтегральное представление некоторых классов комплексов в неевклидовых пространствах. — В кн.: Тезисы III респ. конф. математиков Белоруссии. Минск, 1971, с[illegible]

УДК 513

Поступила 10 мая 197[illegible]

УДК 513

Н. И. КОВАНЦОВ

ПОВЕРХНОСТИ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ К КОНГРУЭНЦИЯМ ЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСА

Линейный комплекс прямых в трехмерном евклидовом пространстве E_3 определяется следующей вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_3^2, \\ dk &= -2k\beta\omega_3^1, \\ \omega^3 &= k\beta\omega_3^2 - \beta\omega^1, \\ d\beta &= -(1+\beta^2)\,\omega_3^1 \end{aligned} \tag{1}$$

при деривационных уравнениях

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i e_i, \ \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \\ de_i &= \omega_i^j e_j, \ i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{2}$$

и уравнениях структуры

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^k \omega_k^i], \\ D\omega_i^j &= [\omega_i^k \omega_k^j]. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку

$$D\omega_3^1 = 0,\ D(\sqrt{k}\,\omega_3^2) = 0,\ D\left(-\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\,\omega^3\right) = 0,$$

можно считать

$$\omega_3^1 = du,\ \sqrt{k}\omega_3^2 = d\theta,\ -\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\,\omega^3 = d\sigma. \tag{4}$$

Положение луча определяется тремя параметрами u, θ, σ.

Выписывая уравнения (2), мы предполагаем, что в E_3 фиксирована некоторая неподвижная прямоугольная декартова система координат $T_0(0,\ i,\ j,\ k)$. Точка A_j имеет в T_0 координаты x^i, векторы e_i — координаты α_i^j. Репер $T(A, e_i)$ — ортонормированный, поэтому девять координат α_i^j могут быть выражены через три угла Эйлера φ^i. Равенства (2) в координатах записываются так:

$$dx^k = \omega^i\alpha_i^k,$$

$$d\alpha_i^k = \omega_i^j\alpha_j^k, \tag{5}$$

откуда

$$\omega^i = \alpha'^i_k dx^k,$$

$$\omega_i^j = \alpha'^j_k d\alpha_i^k, \tag{6}$$

(α'^i_k) — матрица, обратная ортогональной матрице (α_i^k).

В уравнениях (1) независимыми переменными являются u, θ, искомыми функциями — x^i, φ^i, k, β. Базисными формами в комплексе являются формы ω^3, ω_3^1, ω_3^2, или, что то же, ω^1, ω_3^1, ω_3^2. Задав линейное уравнение между базисными формами и потребовав его полной интегрируемости, расслоим комплекс в однопараметрическое семейство конгруэнций. Придадим этому уравнению вид

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + b\omega_3^2. \tag{7}$$

Его следует присоединить к уравнениям (1) и (4), получим систему, в которой независимыми переменными являются u, θ, а искомыми функциями — x^i, φ^i, σ, k, β, a, b. Записывая уравнение конгруэнций комплекса в виде (7), считаем формы ω_3^1, ω_3^2 линейно независимыми. Это уже было обеспечено тем, что переменные u и θ приняты за независимые. Тем самым из рассмотрения оказываются исключенными конгруэнции, у которых ω_3^1, ω_3^2 линейно зависимы, т. е. конгруэнции, каждая из которых представляет собой однопараметрическое семейство цилиндров. Конгруэнции такого вида рассмотрим позднее.

Напомним, что у нас вектор e_3 параллелен лучу комплекса, вершина A совпадает с центром этого луча, вектор e_1 параллелен главной нормали комплекса, вектор e_2 — бинормали его.

Рассматривая вместе уравнение (7) и первое уравнение (…) заключаем, что конгруэнции (7) являются нормальными тогда и только тогда, когда [2]

$$b = k.$$

Если

$$M = A + te_3$$

— точка на луче конгруэнции, то она будет описывать поверхность, ортогональную к лучам конгруэнции при

$$\omega^3 + dt = 0. \tag{10}$$

Если рассматривать вместе уравнения (1), (4), (7) при условии (8) и (10), то в них независимыми переменными будут u, …, искомыми функциями — x^i, φ^i, σ, k, β, a, b, t. Легко понять, что уравнение (10) вполне интегрируемо в силу (7) и (8). Условие полной интегрируемости (7) сводится к тождеству

$$[da - \omega^3, \ \omega_3^1] = 0$$

или

$$[d(a + t), \ \omega_3^1] = 0.$$

Отсюда

$$a + t = \psi(u), \tag{11}$$

где $\psi(u)$ — произвольная функция.

Из (1) находим

$$\beta = -\operatorname{tg}(u + c^*), \ c^* = \text{const}.$$

Полагая $u + c^* = u'$ и отбрасывая штрих, будем иметь

$$\beta = -\operatorname{tg} u. \tag{12}$$

В таком случае

$$k = \frac{c}{\cos^2 u}, \ c = \text{const}. \tag{13}$$

Так как при $\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2$

$$dt = -\omega^3 = -k\beta\omega_3^2 + \beta\omega^1 = a\beta\omega_3^1 = (t - \psi)\operatorname{tg} u \, du,$$

то

$$t = \frac{1}{\cos u}\left(-\int\psi \sin u \, du + c_1\right), \ c_1 = \text{const}. \tag{14}$$

В работе [3] было показано, что прямая

$$r = A + \beta e_2 + \lambda \frac{-e_1 + \beta e_3}{\sqrt{1 + \beta^2}} \tag{15}$$

постоянна в комплексе (1). Совместим с нею ось Oz системы T. Рассмотрим круговые цилиндры, оси которых совпадают с этой осью, их радиусы есть $\beta = -\operatorname{tg} u$ (u — тупой угол). На каждом цилиндре проведем винтовые под углом u к k:

$$k = \frac{-e_1 + \beta e_3}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \cos u \, e_1 + \sin u e_3. \tag{16}$$

...рмали к винтовым, касательные к цилиндру, являются лучами ...нейного комплекса, вектор e_1 касается винтовых. Для каждой ...плоскостей, проходящих через ось цилиндров, $\omega_3^2 = 0$, т. е. $\theta =$ const. Возьмем плоскость O_{yz}. Для нее

$$dA = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 = \frac{c\,du}{\cos^2 u} j + \frac{\psi - t}{\cos u} du\, k$$

...и, что в фиксированной плоскости $e_2 = -j$). Полагая коор...наты текущей точки в плоскости O_{yz} равными y, z, будем ...еть из последнего равенства

$$dy = -c\frac{du}{\cos^2 u}, \quad dz = \frac{\psi - t}{\cos u} du.$$

...юда

$$y = -\operatorname{ctg} u + c_2, \; z = F(u) + c_3, \; c_2, \; c_3 = \text{const}, \tag{17}$$

$$F(u) = \int \frac{\psi - t}{\cos u} du. \tag{18}$$

...к показывают уравнение (15), расстояние от центра луча A ...оси цилиндров равняется $\beta = -\operatorname{tg} u$. В данном случае это ...стояние равно ординате y. Следовательно, мы должны поло...жить

$$c = 1, \; c_2 = 0. \tag{19}$$

Уравнения поверхностей, ортогональных к лучам конгруэн...ии (7), имеют вид

$$\begin{aligned} x &= -\operatorname{tg} u \cos\theta + t \cos u \sin\theta, \\ y &= -\operatorname{tg} u \sin\theta - t \cos u \cos\theta, \\ z &= -\theta + F(u) + c_3 + t \sin u, \end{aligned} \tag{20}$$

...е t определяется равенством (14). Здесь θ — угол между плос...костью OzA и плоскостью Ozx. Необходимо убедиться в том, что ...от угол есть как раз тот параметр θ, который был определен ...равенствами (4). С этой целью введем в рассмотрение векторы

$$e = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j,$$

$$e' = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j,$$

...уда $e'' = -e$ (21)

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos u\, k + \sin u\, e', \\ e_2 &= -e, \\ e_3 &= \sin u\, k - \cos u\, e'. \end{aligned} \tag{22}$$

Тройки e, e', k и e_1, e_2, e_3 — левые, при этом

$$[ee'] = k, \; [e'k] = e, \; [ke] = e'$$

$$[e_1 e_2] = e_3, \; [e_2 e_3] = e_1 \; [e_3 e_1] = e_2.$$

Из (22) имеем

$$de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 = \omega_3^1 (\cos u\boldsymbol{k} + \sin u\boldsymbol{e}') - \omega_3^2 \boldsymbol{e} =$$
$$= (\cos u\boldsymbol{k} + \sin u\boldsymbol{e}')\, du + \cos u\boldsymbol{e}\, d\theta.$$

Отсюда

$$\omega_3^1 = du, \ \ \omega_3^2 = -\cos u\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{k}} d\theta,$$

а это и доказывает утверждение.

Векторное уравнение поверхности (20) есть

$$\boldsymbol{r} = -\operatorname{tg} u\boldsymbol{e} - t\cos u\boldsymbol{e}' + (-\theta + F(u) + c_3 + t\sin u)\boldsymbol{k}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}_u = -\frac{1}{\cos^2 u}\boldsymbol{e} - \left(\frac{dt}{du}\cos u - t\sin u\right)\boldsymbol{e}' +$$
$$+ \left(\frac{dF}{du} + \frac{dt}{du}\sin u + t\cos u\right)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_\theta = -\operatorname{tg} u\boldsymbol{e}' + t\cos u\boldsymbol{e} - \boldsymbol{k}.$$

Вектор нормали к поверхности

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_\theta] = \left[\frac{\operatorname{tg} u}{\cos^2 u} + t\cos u\left(\frac{dt}{du}\cos u - t\sin u\right)\right]\boldsymbol{k} +$$
$$+ \left[\frac{dt}{du}\cos u - t\sin u + \operatorname{tg} u\left(\frac{dF}{du} + \frac{dt}{du}\sin u + t\cos u\right)\right]\boldsymbol{e} +$$
$$+ \left[t\cos u\left(\frac{dF}{du} + \frac{dt}{du}\sin u + t\cos u\right) - \frac{1}{\cos^2 u}\right]\boldsymbol{e}'.$$

Поскольку

$$\frac{dt}{du} = (t - \psi)\operatorname{tg} u, \quad \frac{dF}{du} = -(t - \psi)\frac{1}{\cos u},$$

то

$$\boldsymbol{N} = \left(-t\psi\cos u + \frac{1}{\cos^3 u}\right)\boldsymbol{e}_3,$$

т. е. поверхность (20) действительно ортогональна к лучам ком-
плекса.

Поверхности (20) есть геликоидальные поверхности, рассмо-
ренные Бианки [4]. Действительно, уравнения геликоидальн
поверхностей имеют вид

$$x = \rho\cos\theta, \ \ y = \rho\sin\theta, \ \ z = \varphi(\rho) + m\theta, \ \ m = \text{const}. \qquad (2$$

$\varphi(\rho)$ — произвольная функция, определяющая в каждой плоскос
$\theta = \text{const}$, проходящей через ось Oz, кривую, называемую пр
филем-меридианом. Линии $\rho = \text{const}$ есть винтовые линии. Так
профили-меридианы можнс найти и для поверхностей (20). Де
ствительно, положим

$$-\operatorname{tg} u\cos\theta + t\cos u\sin\theta = -\operatorname{tg} u_1\cos\theta_1,$$
$$-\operatorname{tg} u\sin\theta - t\cos u\cos\theta = -\operatorname{tg} u_1\sin\theta_1.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}^2 u_1 = \operatorname{tg}^2 u + t^2 \cos^2 u,$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \tilde{u}}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \tilde{u}} = \operatorname{tg} (\theta - \tilde{u}), \tag{24}$$

где

$$\operatorname{tg} \tilde{u} = - t \frac{\cos u}{\operatorname{tg} u}. \tag{25}$$

Из (24) находим

$$u = u(u_1), \quad \theta = \theta_1 + \tilde{u}.$$

Уравнения (20) принимают вид

$$\begin{aligned} x &= -\operatorname{tg} u_1 \cos \theta_1, \\ y &= -\operatorname{tg} u_1 \sin \theta_1, \\ z &= -\theta_1 + F_1(u_1), \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$F_1(u_1) = -\tilde{u}(u(u_1)) + F(u(u_1)) + t(u(u_1)) \sin u(u_1).$$

Они совпадут с уравнениями (23), если положить

$$-\operatorname{tg} u_1 = \rho, \ m = -1, \ \theta_1 = \theta, \ F_1(\operatorname{arctg}(-\rho)) = \varphi(\rho).$$

Винтовые (26) ($u_1 = \text{const}$) лежат на цилиндре радиуса $-\operatorname{tg} u_1$.

В зависимости от выбора функции ψ будем иметь ту или иную поверхность (20). Рассмотрим некоторые частные случаи.

$$1. \quad \psi = \frac{1 + Kk^2}{Kt}, \ K = \text{const}, \tag{27}$$

где $k = \frac{1}{\cos^2 u}$, а t определяется равенством (14). В этом случае поверхности (20) есть поверхности постоянной кривизны K. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{3u} &= \cos u \boldsymbol{k} + \sin u \boldsymbol{e}', \\ \boldsymbol{e}_{3\theta} &= \cos u \boldsymbol{e}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$[\boldsymbol{e}_{3u} \boldsymbol{e}_{3\theta}] = \cos^2 u \boldsymbol{e}' - \cos u \sin u \boldsymbol{k} = -\cos u \boldsymbol{e}_3$$

и

$$\frac{[\boldsymbol{e}_{3u} \boldsymbol{e}_{3\theta}]}{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_\theta]} = \frac{1}{t\psi - \frac{1}{\cos^4 u}} = K.$$

Профиль-меридиан поверхности мы получим, если положим в (26) $\theta_1 = 0$:

$$x = -\operatorname{tg} u_1, \ z = F_1(u_1).$$

Найдем длину λ отрезка касательной от точки кривой до ее пересечения с осью oz.
Учитывая, что

$$\frac{dt}{du} = \operatorname{tg} u\,(t-\psi),\ \frac{dF}{du} = \frac{1}{\cos u}\,(\psi - t),$$

(см. (14) и (18)), получаем

$$F_1^* = \frac{dF_1}{du}\frac{du}{du_1} = \frac{t\cos^3 u\left(\psi t - \dfrac{1}{\cos^4 u}\right)}{\operatorname{tg}^2 u_1} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{tg} u_1}{-\cos^2 u_1 \sin u \cos u\left(\psi t - \dfrac{1}{\cos^4 u}\right)} = -\frac{t\,\dfrac{\cos^2 u}{\sin u}}{\operatorname{tg} u_1 \cos^2 u_1},$$

$$\lambda^2 = \operatorname{tg}^2 u + t^2\frac{\cos^4 u}{\sin^2 u}.$$

Ни при каком значении K величина λ — не есть постоянная. Профиль-меридиан не есть трактрисса, а это означает, что ни одна из рассматриваемых нами поверхностей постоянной кривизны не есть геликоидальная поверхность Дини.

2.
$$\psi = -t. \tag{28}$$

В этом случае поверхности (20) — минимальные. Действительно, из уравнений (1), (7), (10) при условии (8) имеем

$$\bar\omega^1 \equiv \omega^1 + t\omega_3^1 = \psi\omega_3^1 + k\omega_3^2,$$
$$\bar\omega^2 \equiv \omega^2 + t\omega_3^2 = k\omega_3^1 + t\omega_3^2,$$

$\bar\omega^1$, $\bar\omega^2$ — базисные формы поверхности (20), т. е. поверхности, описанной точкой $M = A + te_3$ и ортогональной лучам комплекса. Из последних равенств находим

$$\omega_1^3 + \frac{-t\bar\omega^1 + k\bar\omega^2}{t\psi - k^2},\ \omega_2^3 = \frac{k\bar\omega^1 - \psi\bar\omega^2}{t\psi - k^2}$$

Средняя кривизна поверхности

$$H = \frac{1}{2}\frac{t+\psi}{t\psi - k^2}.$$

Для минимальных поверхностей $t + \psi = 0$. Утверждение доказано.

В рассматриваемом случае имеем

$$\frac{dt}{du} = 2t\operatorname{tg} u,\ \frac{dF}{du} = -\frac{2t}{\cos u},$$

откуда

$$t = \frac{c_1}{\cos^2 u},\ c_1 = \mathrm{const},$$
$$F = -c_1\frac{\sin u}{\cos^2 u} - c_1 \ln\left|\frac{1+\sin u}{\cos u}\right|.$$

Уравнения поверхностей таковы:

$$x = -\operatorname{tg} u \cos\theta + \frac{c_1}{\cos u}\sin\theta,$$

$$y = -\operatorname{tg} u \sin\theta - \frac{c_1}{\cos u}\cos\theta,$$

$$z = -\theta + c_3 - c_1 \ln\left|\frac{1+\sin u}{\cos u}\right|.$$

При $c_1 = 0$ эти поверхности становятся прямыми геликоидами. Полная кривизна поверхности (20) определяется равенством

$$K = \frac{1}{t\psi - k^2}, \quad t\psi - k^2 \neq 0. \tag{29}$$

3.
$$\psi = t. \tag{30}$$

В этом случае

$$t = c_1 = \text{const}, \quad F(u) = 0.$$

Кривая (17) — прямая, параллельная оси oy. Поверхности (20) имеют уравнения

$$\begin{aligned} x &= -\operatorname{tg} u \cos\theta + c_1 \cos u \sin\theta, \\ y &= -\operatorname{tg} u \sin\theta - c_1 \cos u \cos\theta, \\ z &= -\theta + c_3 + c_1 \sin u. \end{aligned} \tag{31}$$

При $\theta = \text{const}$ и $c_1 = 0$ точка поверхности описывает прямую, пересекающую ось oz и перпендикулярную к ней. Например, при $\theta = 0$ имеем

$$x = -\operatorname{tg} u, \ y = 0, \ z = c_3.$$

При откладывании от точек этой прямой в направлении вектором e_3 отрезков постоянной длины c_1 образуется линия

$$x = -\operatorname{tg} u, \ y = -c_1 \cos u, \ z = c_3 + c_1 \sin u,$$

которая является линией пересечения кругового цилиндра с гиперболическим параболоидом

$$y^2 + (z - c_3)^2 = c_1^2, \ z - c_3 = xy.$$

Поверхности (31) образованы винтовым движением этой кривой вокруг оси oz.

4.
$$\psi = \frac{1}{t\cos^4 u}. \tag{32}$$

В этом случае кривизна поверхности, как показывает равенство (29)

$$K = \frac{t\psi - \dfrac{1}{\cos^4 u}}{\left(t\psi - \dfrac{1}{\cos^4 u}\right)^2} = \frac{0}{0}.$$

Теперь

$$\frac{dt}{du} = \left(t - \frac{1}{t\cos^4 u}\right)\operatorname{tg} u,$$

откуда

$$t = \frac{1}{\cos u}\sqrt{c_1 - \frac{1}{\cos^2 u}}, \quad c_1 = \mathrm{const},$$

$$\psi = \frac{1}{\cos^3 u\sqrt{c_1 - \frac{1}{\cos^2 u}}}, \quad c_1 > \frac{1}{\cos^2 u}.$$

Положим

$$\sqrt{c_1 - \frac{1}{\cos^2 u}} = \alpha, \ \operatorname{tg} u = \beta, \ c_1 - 1 = \rho^2 \ (\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2).$$

Пусть

$$\alpha = \rho\cos\varphi, \ \beta = \rho\sin\varphi,$$

тогда

$$F(u) = -\operatorname{tg} u\sqrt{c_1 - \frac{1}{\cos^2 u}} + \varphi.$$

Уравнения (20) принимают вид

$$x = \rho\sin(\theta - \varphi),$$
$$y = -\rho\cos(\theta - \varphi),$$
$$z = -(\theta - \varphi) + c_3. \qquad (33)$$

Это — винтовые линии. В такие линии вырождаются поверхности (20). Если провести все нормали к ним при фиксированном ρ, то последние составят линейный комплекс.

5.
$$F(u) = A\operatorname{tg} u, \ A = \mathrm{const}. \qquad (34)$$

Линия (17) в этом случае — прямая. Имеем

$$t = -\frac{A}{\cos u} + c_1, \ c_1 = \mathrm{const}.$$

Уравнения (20) принимают вид

$$x = -\operatorname{tg} u\cos\theta + \left(-\frac{A}{\cos u} + c_1\right)\cos u\sin\theta,$$

$$y = -\operatorname{tg} u\sin\theta - \left(-\frac{A}{\cos u} + c_1\right)\cos u\cos\theta,$$

$$z = -\theta + c_3 + c_1\sin u.$$

При $A = c_1 = 0$ имеем прямой геликоид, при $c_1 = 0$ — поверхность Каталана. Чтобы получить такую поверхность, следует через точки винтовой линии

$$x = -A\sin\theta,$$
$$y = A\cos\theta,$$
$$z = -\theta$$

провести прямые, касательные к цилиндру, на котором она расположена, и перпендикулярные к его образующим.

Мы рассматривали случай $[\omega_3^2\omega_3^1] \neq 0$, следовательно, кривизна поверхностей, ортогональных к конгруэнциям комплекса, была отличной от нуля. Рассмотрим теперь случай $[\omega_3^2\omega_3^1] = 0$. К уравнениям комплекса (1) следует теперь присоединить уравнения

$$\omega_3^1 = a\omega_3^2,$$
$$\omega^3 + dt = 0.$$

Условие интегрируемости последнего уравнения приводит к равенству $a = 0$, следовательно,

$$\omega_3^1 = 0, \ \ \omega^3 + dt = 0. \tag{35}$$

Теперь для конгруэнции комплекса имеем $\omega^2 = 0$. Поскольку

$$\overline{\omega^1} = \omega^1 + t\omega_3^1 = \omega^1,$$
$$\overline{\omega^2} = \omega^2 + t\omega_3^2 = t\omega_3^2,$$

то

$$\omega_1^3 = 0, \ \ \omega_2^3 = -\frac{1}{t}\overline{\omega^2}.$$

Отсюда видно, что действительно $K = 0$. Сейчас, как и раньше,

$$dt = -\omega^3 = -\sin u\, d\sigma$$

(см. (4)), поэтому

$$t = -\sin u\sigma$$

(постоянное интегрирования отбросили).

Уравнения поверхностей (20) (сейчас — торсов) имеют вид

$$\begin{aligned} x &= -\operatorname{tg} u \cos\theta + \cos u \sin u \sin\theta\sigma \\ y &= -\operatorname{tg} u \sin\theta - \cos u \sin u \cos\theta\sigma \\ z &= -\theta + \sigma - \sin^2 u\sigma, \ \ u = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{36}$$

Их векторное уравнение

$$\boldsymbol{r} = -\operatorname{tg} u\boldsymbol{e} + \sigma\cos u \sin u\boldsymbol{e}' + (-\theta + \sigma\cos^2 u)\boldsymbol{k}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}_\theta = -\operatorname{tg} u\boldsymbol{e}' - \sigma\cos u\sin u\boldsymbol{e} - \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_\sigma = \cos u \sin u\boldsymbol{e}' + \cos^2 u\boldsymbol{k} = \cos u\boldsymbol{e}_1.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r}_\theta\boldsymbol{r}_\sigma] = -\sigma\cos^2 u \sin u\boldsymbol{e}_3.$$

В то же время

$$\boldsymbol{e}_{3\theta} = \cos u\boldsymbol{e}, \ \ \boldsymbol{e}_{3\sigma} = 0,$$

следовательно,

$$[e_{3\theta} e_3] = 0,$$

а это и доказывает, что $K = 0$.

Легко понять, что поверхности (36) образованы касательными к винтовым линиям, расположенным на круговом цилиндре радиуса $-\operatorname{tg} u$ и наклоненным к его оси под углом u.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 292 с.
2. *Фиников С. Р.* Теория конгруэнций. М.—Л., Гостехиздат, 1950. 528 с.
3. *Кованцов Н. И., Носаль Т. В.* Расслоение линейного комплекса в конгруэнции, нормальные к поверхностям постоянной кривизны. — «Укр. геометр. сб.», вып. 16. Харьков, 1974, с. 31—35.
4. *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale. Bologna, vol. 1, 1927. P. 1—

Поступила 21 января 1974

УДК 513

Т. А. КУЗНЕЦОВА

БИОКТАВНЫЕ ГЕОМЕТРИИ И ИХ АНАЛОГИ

1. Алгебры

Алгеброй биоктав $\mathbf{R}(i, j, l, I)$ называется тензорное произведение алгебры октав $\mathbf{R}(i, j, l)$ и поля комплексных чисел $\mathbf{R}(I)$ [1, с. 683]. Алгебра $\mathbf{R}(i, j, l, I)$ принадлежит к более общему классу алгебр $\mathbf{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$, являющихся тензорными произведениями алгебр $\mathbf{R}(i, \theta, \omega)$ и $\mathbf{R}(\Theta)$. Здесь $\mathbf{R}(i, \theta, \omega)$ — алгебра октав при $\theta = j$, $\omega = l$, $j^2 = l^2 = -1$; алгебра антиоктав при $\theta = j$, $\omega = e$, $j^2 = -1$, $e^2 = 1$; алгебра полуоктав при $\theta = j$, $\omega = \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$ [2]. Символ $\mathbf{R}(\Theta)$ означает поле комплексных чисел, если $\Theta = I$, $I^2 = -1$, алгебру двойных чисел, если $\Theta = E$, $E^2 = 1$, алгебру дуальных чисел, если $\Theta = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}^2 = 0$ [1, с. 441]. Будем называть алгебры $\mathbf{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$ так же, как алгебры $\mathbf{R}(i, \theta, \omega)$, с приставками би — при $\Theta = I$, ди — при $\Theta = E$ и дуо — при $\Theta = \mathcal{E}$ (например, $\mathbf{R}(i, j, l, \mathcal{E})$, $\mathbf{R}(i, j, e, E)$, $\mathbf{R}(i, e, \varepsilon, I)$ — алгебры дуоктав, диантиоктав, биполуантиоктав).

Алгебра $\mathbf{R}(i, j, l, I) = \mathbf{R}(i, j, e, I)$ — простая альтернативная [1, с. 679]; алгебры $\mathbf{R}(i, j, l, E)$ и $\mathbf{R}(i, j, e, E)$ — полупростые альтернативные.

Если в обозначениях алгебры имеется один символ ε или $\mathcal{E}$, то она квазипростая альтернативная [2]. Алгебру, в обозначениях которой имеются оба символа ε и $\mathcal{E}$, мы будем называть биквазипростой альтернативной [3].

Элементы алгебр $\mathbf{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$ можно записать в виде

$$\alpha = A + B\Theta, \tag{1}$$

где A и B — элементы алгебр $\mathbf{R}(i, \theta, \omega)$, а каждый элемент i, θ, ω перестановочен с элементом Θ.

В алгебрах $R(i, \theta, \omega, \Theta)$ определен инволюционный антиавтоморфизм (инволюция) $\alpha \to \bar{\alpha} = \bar{A} + \bar{B}\Theta$, где $A \to \bar{A}$ — переход в алгебре $R(i, \theta, \omega)$ к сопряженному элементу.

Инволюция $\alpha \to \bar{\alpha}$ обладает свойствами $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$, $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$. Произведение $\alpha\bar{\alpha} \in R(\Theta)$. Будем называть модулем элемента α алгебры $R(i, \theta, \omega, \Theta)$ число $|\alpha|$, квадрат которого равен $\alpha\bar{\alpha}$. В алгебрах $R(i, \theta, \omega, \Theta)$ имеются элементы α и β, отличные от нуля, но удовлетворяющие условию $\alpha\beta = 0$. Эти элементы не обладают обратными элементами и являются делителями нуля. Если элемент α алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$ имеет обратный элемент α^{-1}, то $\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}}$.

Всякий инволюционный автоморфизм алгебр $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$ может быть приведен к одному из следующих видов: $\alpha \to \tilde{\alpha} = A - B\Theta$, $\alpha \to \hat{\alpha} = \hat{A} + \hat{B}\Theta$ $\alpha \to \check{\alpha} = \check{A} + \check{B}\Theta$, $\alpha \to \overset{\text{м}}{\alpha} = \overset{\text{м}}{A} + \overset{\text{м}}{B}\Theta$. Здесь $A \to \hat{A}$ — автоморфизм алгебр $R(i, \theta, \omega)$, при котором, если представить элемент алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega)$ в виде $A = a + b\omega$, где a и b — элементы алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta)$ [1, с. 443], $\hat{A} = a - b\omega$; $A \to \check{A}$ — автоморфизм алгебр $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega)$, при котором, если представить элемент этой алгебры в виде $A = a + b\theta$, где a и b — элементы алгебры $\boldsymbol{R}(i, \omega)$, $\check{A} = a - b\theta$; а $A \to \overset{\text{м}}{A}$ — автоморфизм алгебры $R(i, e, \varepsilon)$, при котором, если элемент алгебры $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon)$ представить в виде $A = a + bi$, где a и b — элементы алгебры $\boldsymbol{R}(e, \varepsilon)$, $\hat{\hat{A}} = a - bi$.

Простые и полупростые альтернативные алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$ геометрически можно представить в виде восьмимерного комплексного или двойного евклидова или псевдоевклидова пространства $R_8(i)$, $R_8(e)$ или ${}^4R_8(e)$, если считать за расстояние между элементами α и β алгебр $R(i, \theta, \omega, \Theta)$ модуль $|\beta - \alpha|$ их разности.

Скалярное произведение элементов α и β алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$, рассматриваемых как векторы евклидова пространства $R_8(\Theta)$ или псевдоевклидова пространства ${}^4R_8(e)$, имеет вид

$$(\alpha, \beta)_1 = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha). \tag{2}$$

Квазипростые и биквазипростые альтернативные алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$ геометрически можно представить в виде восьмимерных полуевклидовых пространств $R_8^4(\Theta)$, $R_8(\epsilon)$, ${}^4R_8(\epsilon)$, если считать за расстояние между элементами α и β этих алгебр модуль $|\beta - \alpha|$ их разности. Это расстояние равно нулю, если $\beta - \alpha = \varepsilon(B - A)$ или $\beta - \alpha = \epsilon(B - A)$. В таком случае за расстояние между этими элементами примем $(B - A)$.

Скалярное произведение элементов α и β алгебры $\boldsymbol{R}(i, l, \Theta)$, рассматриваемых как векторы соответствующего полуевклидова пространства имеет вид (2). Если элементы α и β имеют вид $\alpha = \varepsilon A$, $\beta = \varepsilon B$ или $\alpha = \epsilon A$, $\beta = \epsilon B$, то выражение (2) обращается в нуль и за скалярное произведение этих элементов примем

$$(\alpha, \beta)_2 = \frac{1}{2} (\overline{A}B + \overline{B}A). \tag{3}$$

Так как группа автоморфизмов алгебры $\boldsymbol{R}(i, j, l)$ октав является компактной простой группой Ли G_2, то группа непрерывных автоморфизмов алгебры $\boldsymbol{R}(i, j, l, I)$ локально изоморфна комплексной простой группе Ли $G_2(i)$, получаемой комплексификацией компактной группы G_2; полная группа непрерывных автоморфизмов алгебры $\boldsymbol{R}(i, j, l, I)$ состоит из преобразований группы $G_2(i)$ и из их произведений на преобразование $\alpha \to \overline{\alpha}$.

Так как группа автоморфизмов алгебры $\boldsymbol{R}(i, j, e)$ антиоктав является некомпактной простой группой Ли класса G_2, которую мы обозначаем ${}^1G_2$, то связные группы непрерывных автоморфизмов алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, l, E)$ и $\boldsymbol{R}(i, j, e, E)$ локально изоморфны, соответственно, группам Ли $G_2(e)$ и ${}^1G_2(e)$, получаемых из групп G_2 и ${}^1G_2$ переходом от вещественных координат к двойным или, что то же, прямым произведениям $G_2 \times G_2$ и ${}^1G_2 \times {}^1G_2$. Полные группы непрерывных автоморфизмов этих алгебр состоят из этих автоморфизмов и их произведений на преобразование $\alpha \to \overline{\alpha}$, изображаемому в прямых произведениях $G_2 \times G_2$ и ${}^1G_2 \times {}^1G_2$ переменами порядка прямых сомножителей.

Как показал Персиц [2], группой метрических автоморфизмов алгебры $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon)$ полуоктав, т. е. автоморфизмов, сохраняющих инвариантную метрику полуевклидова пространства R_8^4 в этой алгебре, является квазипростая группа Ли G_2^0, получаемая предельным переходом из простой группы Ли G_2, а группой метрических автоморфизмов алгебры $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon)$ полуантиоктав, т. е. автоморфизмов, сохраняющих инвариантную метрику полуевклидова пространства ${}^{22}R_8^4$ в этой алгебре, является квазипростая группа Ли ${}^1G_2^0$, получаемая предельным переходом из простой некомпактной группы Ли ${}^1G_2$. Полные группы автоморфизмов этих алгебр состоят из преобразований, каждое из которых можно представить в виде произведения автоморфизма простой алгебры $\boldsymbol{R}(i, j, e)$ на автоморфизм вида

$$f_t(A + B\varepsilon) = A + tB\varepsilon, \tag{4}$$

где t — вещественное число. Поэтому группы непрерывных метрических автоморфизмов алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon, I)$, $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon, E)$, $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon, I)$ и $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon, E)$, т. е. автоморфизмов, сохраняющих инвариантную метрику полуевклидовых пространств $R_8^4(i)$, $R_8^4(e)$,

$R(i)$ и $^{22}R_8^4(e)$ в этих алгебрах, локально изоморфны квазипростым группам Ли $G_2^0(i)$, $G_2^0(e)$, $G_2^0(i)$ и $^1G_2^0(e)$, получаемым из вещественных квазипростых групп Ли G_2^0 и $^1G_2^0$ переходом к комплексным и двойным координатам. Полные группы непрерывных автоморфизмов алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon, I)$, $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon, E)$, $\boldsymbol{R}(i, e, \nu, I)$ и $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon, E)$ состоят из преобразований групп $G_2^0(i)$, $G_2^0(e)$, $G_2^0(i)$, $^1G_2^0(e)$, соответственно, и из их произведений на преобразование вида (4), где t — комплексное или двойное число.

Аналогично показывается, что группы непрерывных метрических автоморфизмов алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, l, \epsilon)$ и $\boldsymbol{R}(i, j, e, \epsilon)$, т. е. автоморфизмов, сохраняющих метрику соответствующего дуального евклидова пространства $R_8(\epsilon)$ и псевдоевклидова пространства $^4R_8(\epsilon)$, локально изоморфны дуальным группам Ли $G_2(\epsilon)$ и $^1G_2(\epsilon)$, получаемым из вещественных простых групп Ли G_2 и $^1G_2$ переходом к дуальным координатам. Полные группы непрерывных автоморфизмов алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, l, \epsilon)$ и $\boldsymbol{R}(i, j, e, \epsilon)$ состоят из преобразований групп $G_2(\epsilon)$ и $^1G_2(\epsilon)$ и из их произведений на преобразование вида

$$f_t(\alpha) = f_t(A + B\epsilon) = A + tB\epsilon. \tag{5}$$

Рассмотрим группы автоморфизмов биквазипростых алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon, \epsilon)$ и $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon, \epsilon)$. Группы непрерывных метрических автоморфизмов этих алгебр, т. е. автоморфизмов, сохраняющих метрику соответствующего дуального полуевклидова пространства $R_8^4(\epsilon)$ и $^{22}R_8^4(\epsilon)$, могут быть получены предельным переходом из групп непрерывных метрических автоморфизмов алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, l, \epsilon)$ и $\boldsymbol{R}(i, j, e, \epsilon)$ при инволютивном автоморфизме $\alpha \to \hat{\alpha}$ и $\alpha \to \check{\alpha}$ этих алгебр, или из групп непрерывных метрических автоморфизмов алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon, I)$, $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon, E)$, $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon, I)$ и $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon, E)$ при инволютивном автоморфизме $\alpha \to \tilde{\alpha}$ этих алгебр, а потому являются локально изоморфными дуальным квазипростым группам Ли $G_2^0(\epsilon)$ и $^1G_2^0(\epsilon)$. Полные группы автоморфизмов алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, \varepsilon, \epsilon)$ и $\boldsymbol{R}(i, e, \varepsilon, \epsilon)$ имеют более сложный вид.

2. Проективные плоскости

По аналогии с проективными плоскостями $P_2(i, \theta, \omega)$ [2] будем называть проективными плоскостями $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ множества точек и прямых, находящихся во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с множествами матриц третьего порядка $X = (x^{ij})$, $(i, j = 0, 1, 2)$ с элементами из алгебр $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$, причем эти матрицы удовлетворяют условию эрмитовой симметрии

$$x^{ij} = \bar{x}^{ji},$$

условию

$$x^{ij}x^{lk} = x^{ik}x^{jl}$$

и определены с точностью до множителя из алгебры $\boldsymbol{R}(\Theta)$, не являющегося нулем или делителем нуля.

На линейном пространстве этих матриц определим операцию умножения

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX).$$

Эта операция умножения на рассматриваемом множестве матриц определяет структуру, соответственно, йордановой алгебры $J_3(i, \theta, \omega, \Theta)$ [4].

В этих обозначениях условие принадлежности точки X прямой U будет иметь вид

$$X \circ U = 0.$$

На проективных плоскостях $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ можно определить проективные преобразования: коллинеации — взаимно однозначные отображения, переводящие прямые в прямые, и корреляции — взаимно однозначные отображения, переводящие точки в прямые с сохранением инцидентности.

Так же как в случае плоскостей $P_2(i, \theta, \omega)$, проективные преобразования плоскостей $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ имеют вид

$$'X = Af(X)A^{-1},$$

где $f(X)$ — непрерывный автоморфизм алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$. Проективные преобразования, в которых $f(X)$ — метрический автоморфизм алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$, будем называть проективными движениями. Проективные движения плоскостей $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ образуют группы, являющиеся простыми, квазипростыми или биквазипростыми группами Ли класса $E_6(i)$.

В надлежащем базисе проективную прямую $P_1(i, \theta, \omega, \Theta)$ можно определить матрицей $U = \operatorname{diag}\{1, 0, 0\}$. Точки этой прямой будут определяться матрицами вида

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{11} & x^{12} \\ 0 & x^{21} & x^{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x\bar{x} & x \\ 0 & \bar{x} & 1 \end{pmatrix}$$

т. е. точки проективных прямых, для которых x^{22} не является нулем или делителем нуля, можно характеризовать одним элементом x соответствующей алгебры. Тогда все точки прямой $P_1(i, \theta, \omega, \Theta)$, за исключением точек, для которых x^{22} является нулем или делителем нуля, находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами алгебры $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$. Прямую $P_1(i, \theta, \omega, \Theta)$ можно рассматривать как расширенную алгебру $\boldsymbol{R}(i, \theta, \omega, \Theta)$, причем точки прямой для которых x^{22} — делитель нуля, являются идеальными точками расширенной алгебры.

При коллинеациях прямых $P_1(i, \theta, \omega, \Theta)$ в соответствующих евклидовых, псевдоевклидовых и полуевклидовых пространствах происходят конформные преобразования. Точки проективных прямых, для которых $|x^{22}| = 0$, дополняют эти пространства до конформных, псевдоконформных и квазиконформных пространств. Группы проективных преобразований прямых $P_1(i, \theta, \omega, \Theta)$ оказываются изоморфными группам движений девятимерных неевклидовых пространств ${}^1S_9(\Theta)$, ${}^5S_9(\Theta)$, ${}^{22}S_9^5(\Theta)$, ${}^{10}S_9^5(\Theta)$.

Всякая четверка точек проективных прямых $P_1(i, \theta, \omega, \Theta)$ обладает четырьмя вещественными проективными инвариантами, равными конформным инвариантам соответствующих четверок точек конформных пространств, которые определяются с помощью двойного отношения четырех точек проективной прямой $P_1(i, \theta, \omega, \Theta)$ следующим образом:

$$w = \overline{x, y; u, v} = [(u-x)^{-1}(u-y)]\,[(v-y)^{-1}(v-x)],$$
$$w \in R(i, \theta, \omega, \Theta).$$

Проективными преобразованиями w можно преобразовать к виду

$$w = a + bi + c\Theta + di\Theta.$$

Если $x = x_0 + \varepsilon x_1$, $y = y_0 + \varepsilon y_1$, $u = u_0 + \varepsilon u_1$, $v = v_0 + \varepsilon v_1$ и $x_0 = y_0$, $u_0 = v_0$, то $w = 1$ и мы введем в рассмотрение

$$w_1 = \overline{x_1, y_1; u_1, v_1}.$$

Если же и $w_1 = 1$, что возможно в биквазипростых алгебрах при условии, что

$$x_1 = x_0^1 + \epsilon x_1^1,\ y_1 = y_0^1 + \epsilon y_1^1,\ u_1 = u_0^1 + \epsilon u_1^1,$$
$$v_1 = v_0^1 + \epsilon v_1^1 \text{ и } y_0^1 = x_0^1,\ u_0^1 = v_0^1,$$

то определим для точек соответствующей проективной прямой двойное отношение

$$w_2 = \overline{x_1^1, y_1^1; u_1^1; v_1^1}$$

Всякие две точки и две прямые проективных плоскостей $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ обладают двумя вещественными проективными инвариантами, которые можно определить с помощью двойного отношения точек X, Y и прямых U, V следующим образом:

$$W = \frac{(U, Y)\,(V, X)}{(U, X)\,(V, Y)},$$

где $(X, Y) = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}(X \circ Y)$ — след произведения $X \circ Y$, $W \in R(\Theta)$.

В том случае, когда

$$X = X_0 + \varepsilon X_1,\quad Y = Y_0 + \varepsilon Y_1,\quad U = U_0 + \varepsilon U_1,\quad V = V_0 + \varepsilon V_1$$
$$\text{и } X_0 = Y_0,\quad U_0 = V_0,\quad W = 1$$

и для соответствующих точек и прямых проективных плоскостей $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ можно определить проективные инварианты с помощью двойного отношения

$$W_1 = \frac{(U_1, Y_1)(V_1, X_1)}{(U_1, X_1)(V_1, Y_1)}.$$

Если же и $W_1 = 1$, что возможно в проективных плоскостях над биквазипростыми алгебрами, если и

$$X_1 = X_0^1 + \epsilon X_1^1, \quad Y_1 = Y_0^1 + \epsilon Y_1^1, \quad U_1 = U_0^1 + \epsilon U_1^1,$$

$$V_1 = V_0^1 + \epsilon V_1^1 \text{ и } X_0^1 = Y_0^1, \quad U_0^1 = V_0^1,$$

то для соответствующих точек и прямых проективных плоскостей $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ определим проективные инварианты с помощью двойного отношения

$$W_2 = \frac{(U_1^1, Y_1^1)(V_1^1, X_1^1)}{(U_1^1, X_1^1)(V_1^1, Y_1^1)}.$$

Определим связь двойного отношения двух точек X, Y и двух прямых U, V проективных плоскостей $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ и двойного отношения двух точек X, Y и точек пересечения прямых U, V с прямой, соединяющей точки X и Y. Без ограничения общности можно предположить, что точки X и Y лежат на прямой $E_1 = \mathrm{diag}\{1, 0, 0,\}$. Тогда нетрудно проверить, что точки пересечения прямых U и V с прямой E_1 будут определяться элементами $-\bar{u}$ и $-\bar{v}$ соответствующих алгебр.

Определим двойное отношение

$$w = \overline{x, y; -\bar{u}, -\bar{v}} = [(\bar{u} + x)^{-1}(\bar{u} + y)][(\bar{v} + y)^{-1}(\bar{v} + x)].$$

При этом двойное отношение W может быть представлено в виде

$$W = \frac{|\bar{u} + y|^2 \, |\bar{v} + x|^2}{|\bar{u} + x|^2 \, |\bar{v} + y|^2}.$$

Очевидно, что двойные отношения W и w связаны соотношением

$$W = |w|^2.$$

3. Эрмитовы и биэрмитовы плоскости

Проективные плоскости $P_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, в которых заданы эрмитовы квадрики с полярными преобразованиями $'U = X$, $'U = EXE$, $'U = \tilde{X}$ $'U = E\tilde{X}E$ будем называть эрмитовыми плоскостями и обозначать соответственно $\bar{S}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, ${}^1\bar{S}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, $\tilde{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, а эрмитовы квадрики будем называть абсолютами эрмитовых плоскостей. Коллинеации этих плоскостей, перестановочные с полярными преобразованиями относительно абсолютов назовем эрмитовыми подобиями.

Каждой паре точек X и Y плоскостей $\overline{S}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ и ${}^1\overline{S}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ можно поставить в соответствие двойное отношение W этих двух точек и двух прямых соответствующих им в полярном преобразовании. В данном случае $W \in \boldsymbol{R}(\Theta)$ и можно определить такой элемент $\Omega = \omega_0 + \Theta\omega_1$, что

$$W = \cos^2 \Omega.$$

Будем называть ω_0 и ω_1 расстояниями между данными точками. В том случае, когда $W = 1$, $\Omega = 0$, и для точек X и Y определим расстояние следующим образом:

$$W_1 = \cos^2 \Omega_1,$$

а в случае $\overline{S}_2(i, \theta, \varepsilon, \mathcal{E})$, когда $W = W_1 = 1$, $\Omega = \Omega_1 = 0$, за расстояние между точками этих плоскостей принимаем Ω_2,

$$W_2 = \cos^2 \Omega_2.$$

Подобия эрмитовых плоскостей определяются автоморфизмами йордановых алгебр, над которыми они построены. Подобие, сохраняющее метрику соответствующей эрмитовой плоскости, будем называть движением этой плоскости. Движения эрмитовых плоскостей определяются метрическими автоморфизмами алгебр, над которыми они построены.

Движения плоскостей $\overline{S}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ и ${}^1\overline{S}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ образуют группы Ли, получаемые из групп движений плоскостей $\overline{S}_2(i, \theta, \omega)$ и ${}^1\overline{S}_2(i, \theta, \omega)$ [2], переходом от вещественных координат к координатам из алгебры $\boldsymbol{R}(\Theta)$, а потому являются простыми, квазипростыми или биквазипростыми группами Ли класса $F_4(\Theta)$.

Аналогично определяется метрика эрмитовых плоскостей $\tilde{\overline{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ и ${}^1\tilde{\overline{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$.

Движения эрмитовых плоскостей $\tilde{\overline{S}}_2(i, j, \omega, \Theta)$, $(\omega = l, e, \Theta = I, E)$ образуют группы, являющиеся компактными и некомпактными простыми группами Ли класса E_6. Плоскости $\tilde{\overline{S}}_2(i, j, \omega, \mathcal{E})$, $(\omega = l, e)$ и $\tilde{\overline{S}}_2(i, \theta, \varepsilon, \Theta)$, $(\theta = j, e;\ \Theta = I, E)$ могут быть получены однократным, а плоскости $\tilde{\overline{S}}_2(i, j, \varepsilon, \mathcal{E})$, $\tilde{\overline{S}}_2(i, e, \varepsilon, \mathcal{E})$ — двукратным предельным переходом из перечисленных выше плоскостей, а потому группы движений плоскостей $\tilde{\overline{S}}_2(i, j, \omega, \mathcal{E})$, $\tilde{\overline{S}}_2(i, \theta, \varepsilon, \Theta)$ являются квазипростыми, а группы движений плоскостей $\tilde{\overline{S}}_2(i, \theta, \varepsilon, \mathcal{E})$ — биквазипростыми группами Ли того же класса E_6.

Приведем таблицы инволюционных движений и образов симметрии плоскостей, фундаментальными группами которых являются квазипростые группы Ли класса E_6 (см. табл. 1—5).

Таблица 1

$\tilde{\overline{S}}_2(i,\ j,\ \varepsilon,\ I)$

$'X = EXE$	Точка + поляра	$S_9^3 \times S_1 = S_9^5 \times S_1$
$'X = \tilde{X}$	Нормальная полуоктавная 2-цепь	$\overline{S}_2(i,\ j,\ \varepsilon)$
$'X = \hat{X}$	Нормальная бикватернионная 2-цепь	$\tilde{\overline{S}}_2(i,\ j,\ I) \times S_2$
$'X = \check{X}$	Нормальная биполукватернионная 2-цепь	$\tilde{\overline{S}}_2(i,\ \varepsilon,\ I) \times R_2$
$'X = \hat{\tilde{X}}$	Нормальная антиоктавная 2-цепь	$\hat{\overline{S}}_2(i,\ j,\ e) = \overline{S}_3(i,\ j)$
$'X = \check{\tilde{X}}$	Нормальная полуантиоктавная 2-цепь	$\hat{\hat{\overline{S}}}_2(i,\ e,\ \varepsilon) = \overline{S}_3(i,\ \varepsilon)$
$'X = E\tilde{X}E$	Псевдонормальная полуоктавная 2-цепь	${}^1\overline{S}_2(i,\ j,\ \varepsilon)$

Таблица 2

$\tilde{\overline{S}}_2(i,\ e,\ \varepsilon,\ I)$

$'X = EXE$	Точка + поляра	${}^{22}S_9^5 \times {}^1S_1 = {}^{42}S_9^3 \times {}^1S_1$
$'X = \tilde{X}$	Нормальная полуантиоктавная 2-цепь	$\overline{S}_2(i,\ e,\ \varepsilon)$
$'X = \hat{X}$	Нормальная биантикватернионная 2-цепь	$\tilde{\overline{S}}_2(i,\ e,\ I) \times {}^1S_2$
$'X = \check{X}$	Нормальная биполукватернионная 2-цепь	$\tilde{\overline{S}}_2(i,\ \varepsilon,\ I) \times R_2$
$'X = \hat{\hat{X}}$	Нормальная биполуантикватернионная 2-цепь	$\tilde{\overline{S}}_2(e,\ \varepsilon,\ I) \times {}^1R_2$
$'X = \hat{\tilde{X}}$ $'X = \check{\tilde{X}}$ $'X = \hat{\hat{\tilde{X}}}$	Нормальная полуантиоктавная 2-цепь	$\hat{\overline{S}}_2(i,\ e,\ \varepsilon) = R_3(i,\ e)$ $\check{\overline{S}}_2(i,\ e,\ \varepsilon) = \overline{S}_3(e,\ \varepsilon)$ $\hat{\hat{\overline{S}}}_2(i,\ e,\ \varepsilon) = \overline{S}_3(i,\ \varepsilon)$

Таблица 3

$\tilde{\bar{S}}_2(i,\ j,\ l,\ \epsilon)$

$'X = EXE$	Точка + поляра	$R_9 \times R_1$
$'X = \tilde{X}$	Нормальная октавная 2-цепь	$\bar{S}_2(i,\ j,\ l)$
$'X = \hat{X}$	Нормальная дуокватернионная 2-цепь	$\tilde{\bar{S}}_2(i,\ j,\ \epsilon) \times S_2$
$'X = E\tilde{X}E$	Нормальная октавная 2-цепь	${}^1\bar{S}_2(i,\ j,\ l)$
$'X = \hat{\tilde{X}}$	Нормальная антиоктавная 2-цепь	$\hat{\bar{S}}_2(i,\ j,\ e) = \bar{S}_3(i,\ j)$

Таблица 4

${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i,\ j,\ l,\ \epsilon)$

$'X = EXE$	Точка + поляра	$R_9 \times R_1$
$'X = EXE$	Точка + поляра	${}^1R_9 \times R_1$
$'X = \tilde{X}$	Нормальная октавная 2-цепь	${}^1\bar{S}_2(i,\ j,\ l)$
$'X = E\hat{X}E$	Нормальная дуокватернионная 2-цепь	$\tilde{\bar{S}}_2(i,\ j,\ \epsilon) \times {}'S_2$
$'X = \hat{X}$	Псевдонормальная дуокватернионная 2-цепь	${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i,\ j,\ \epsilon) \times S_2$
$'X = \hat{\tilde{X}}$	Нормальная антиоктавная 2-цепь	${}^1\hat{\bar{S}}_2(i,\ j,\ e) = {}^2\bar{S}_3(i,\ j)$

Будем называть проективные плоскости $P_2(i,\ \theta,\ \omega,\ \Theta)$, в которых заданы биэрмитовы квадрики с полярными преобразованиями

$$'U = \hat{X},\ 'U = \hat{\tilde{X}},\ 'U = E\hat{X}E,\ \ 'U = E\hat{\tilde{X}}E,\ \ 'U = \check{X},\ \ 'U = \check{\tilde{X}}$$

биэрмитовыми плоскостями и обозначать соответственно

$$\hat{\bar{S}}_2(i,\ \theta,\ \omega,\ \Theta),\ \hat{\tilde{\bar{S}}}_2(i,\ \theta,\ \omega,\ \Theta),\ \ {}^1\hat{\bar{S}}_2(i,\ \theta,\ \omega,\ \Theta),$$

$$\check{\bar{S}}_2(i,\ \theta,\ \omega,\ \Theta) \text{ и } \check{\tilde{\bar{S}}}_2(i,\ \theta,\ \omega,\ \Theta).$$

Таблица

$\tilde{\bar{S}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$

$'X = EXE$	Точа + поляра	${}^4R_9 \times R_1$
$'X = \tilde{X}$	Нормальная антиоктавная 2-цепь	$\bar{S}_2(i, j, e)$
$'X = \hat{X}$	Нормальная дуокватернионная 2-цепь	$\tilde{\bar{S}}_2(i, j, \mathcal{E}) \times S_2$
$'X = \check{X}$	Нормальная дуоантикватернионная 2-цепь	$\tilde{\bar{S}}_2(i, e, \mathcal{E}) \times {}^1S_2$
$'X = \hat{\tilde{X}}$	Нормальная антиоктавная 2-цепь	$\hat{\bar{S}}_2(i, j, e) = \bar{S}_3(i, j)$
$'X = \check{\tilde{X}}$	Нормальная антиоктавная 2-цепь	$\check{\bar{S}}_2(i, j, e) = \bar{S}_3(i, e)$
$'X = \hat{\tilde{EXE}}$	Псевдонормальная антиоктавная 2-цепь	${}^1\hat{\bar{S}}_2(i, j, e) = {}^2\bar{S}_3(i, j)$

Биэрмитовы квадрики будем называть абсолютами биэрмитовых плоскостей, а коллинеации, перестановочные с полярными преобразованиями относительно абсолютов — биэрмитовыми подобиями. Метрики биэрмитовых плоскостей определяются так же, как и метрики эрмитовых плоскостей.

Биэрмитовы плоскости $\hat{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, $\check{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, $(\theta = j$; $\omega = l, e$; $\Theta = I, E)$ получаются из плоскостей $\hat{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega)$ и $\check{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega)$ [5] переходом от вещественных координат к координатам из алгебры $\boldsymbol{R}(\Theta)$, а биэрмитовы плоскости $\hat{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \mathcal{E})$, $\check{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \mathcal{E})$, $\hat{\bar{S}}_2(i, \theta, \varepsilon, \Theta)$, $\check{\bar{S}}_2(i, \theta, \varepsilon, \Theta)$ и $\hat{\bar{S}}_2(i, \theta, \varepsilon, \mathcal{E})$, $\check{\bar{S}}_2(i, \theta, \varepsilon, \mathcal{E})$ получаются из биэрмитовых плоскостей $\hat{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, $\check{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$, $(\theta = j$; $\omega = l, e$; $\Theta = I, E)$ соответственно однократным или двукратным предельным переходом. Поэтому группы биэрмитовых движений плоскостей $\hat{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ и $\check{\bar{S}}_2(i, \theta, \omega, \Theta)$ образуют группы Ли, являющиеся простыми, квазипростыми или биквазипростыми группами Ли класса $G_4(\Theta)$.

Биэрмитовы плоскости $\hat{\tilde{\bar{S}}}_2(i, j, l, \mathcal{E})$, $\hat{\tilde{\bar{S}}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$, ${}^1\hat{\tilde{\bar{S}}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$ и $\check{\tilde{\bar{S}}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$ могут быть получены из биэрмитовых плос-

...стей $\hat{\tilde{\bar{S}}}_2(i, j, l, I) = \tilde{\bar{S}}_2(i, j, e, I)$, $\hat{\tilde{\bar{S}}}_2(i, j, e, E) = \tilde{\bar{S}}_2(i, j, e, E) =$

$= S_2(i, j, e, E)$, ${}^1\hat{\tilde{\bar{S}}}_2(i, j, e, I) = {}^1\tilde{\bar{S}}_2(i, j, l, I)$ и $\hat{\tilde{\bar{S}}}_2(i, j, l, E) =$

$= S_2(i, j, l, E)$ однократным предельным переходом при соответ-...ующем инволюционном движении этих плоскостей, а группы ...ижений первых плоскостей получаются предельным переходом ... групп движений вторых плоскостей, и потому являются ква-...простыми группами Ли класса E_6.

Б. А. Розенфельд и Л. М. Карпова [6] дали классификацию ...евклидовых пространств, фундаментальными группами кото-...ых являются простые и квазипростые группы Ли. Эта задача ...шена авторами для всех групп Ли, за исключением некоторых ...вазипростых групп классов E_6, E_7, E_8. Приведем дополнение ...их таблиц с указанием плоскостей, фундаментальными груп-...ами которых являются отсутствующие в работе [6] квазипрос-...ые группы класса E_6: этими плоскостями являются определен-...ые выше биэрмитовы плоскости. В первом столбце таблицы ...кажем простые группы Ли класса E_6, во втором — плоскости, фундаментальными группами которых являются эти группы Ли, ...третьем — пространства, фундаментальными группами которых ...вляются стационарные подгруппы образов симметрии, в чет-...вертом и пятом соответственно — плоскости, фундаментальными группами которых являются двойственные по Картану простые и квазипростые группы Ли (см. табл. 6).

Рассмотрим проективную прямую как подмногообразие неев-...клидовой плоскости, то есть неевклидову прямую $\bar{S}_1(i, \theta, \omega, \Theta)$, $S_1(i, \theta, \omega, \Theta)$, $\tilde{\bar{S}}_1(i, \theta, \omega, \Theta)$ и ${}^1\tilde{\bar{S}}_1(i, \theta, \omega, \Theta)$, метрика на ко-...торой определена метрикой соответствующей неевклидовой плос-...кости.

В рассматриваемых неевклидовых плоскостях в общем случае существует три типа прямых в зависимости от их расположения относительно абсолюта. Очевидно, абсолют инвариантен относи-...тельно группы подобий соответствующей плоскости.

Нетрудно показать, что если точка принадлежит абсолюту, то матрица X, определяющая эту точку, должна удовлетворять условию $\mathrm{Sp}(X) = 0$. Тогда по принципу двойственности всякая прямая, касающаяся абсолюта, будет определяться матрицей U, удовлетворяющей тому же условию $\mathrm{Sp}(U) = 0$.

Рассмотрим множество таких точек X, для которых сущест-...вует прямая U, касающаяся абсолюта и инцидентная данной точке, т. е.

$$X \circ U = 0, \quad \mathrm{Sp}(U) = 0.$$

Множество таких точек назовем собственной областью неев-...клидовой плоскости.

Так же как и в неевклидовых плоскостях над алгебрами обобщенных октав [2], группы подобий рассматриваемых плоскостей действуют транзитивно на их собственных областях. А поскольку в собственной области всегда существует прямая $E_1 = \mathrm{diag}\{1, 0, 0\}$, то в качестве неевклидовой прямой собственной области всегда можно выбрать эту прямую.

В работе [7] доказано, что прямая $\overline{S}_1(i, j, l)$ радиуса кривизны r изометрична сфере радиуса $\frac{r}{2}$ в евклидовом пространстве R_9. Почти дословно это доказательство можно перенести на прямую $\overline{S}_1(i, j, l, I) = \overline{S}_1(i, j, e, I)$ и показать, что она изометрична сфере радиуса $\frac{r}{2}$ в евклидовом комплексном пространстве $R_9(i)$. Поэтому группа движений неевклидовой прямой $\overline{S}_1(i, j, l, I) = \overline{S}_1(i, j, e, I)$ изоморфна группе движений неевклидова пространства $S_8(i)$, получаемого из сферы отождествлением диаметрально противоположных точек. Аналогично этому устанавливается изоморфизм групп движений неевклидовых прямых $\overline{S}_1(i, j, l, E)$, ${}^1\overline{S}_1(i, j, l, E)$ и $\overline{S}_1(j, j, e, E)$ группам движений неевклидовых пространств $S_8(e)$, ${}^1S_8(e)$, ${}^4S_8(e)$. Неевклидовы прямые $\overline{S}_1(i, j, l, \epsilon)$, ${}^1\overline{S}_1(i, j, l, \epsilon)$, $\overline{S}_1(i, j, e, \epsilon)$, $\overline{S}_1(i, j, \varepsilon, I)$, $\overline{S}_1(i, j, \varepsilon, E)$, $\overline{S}_1(i, e, \varepsilon, I)$, $\overline{S}_1(i, e, \varepsilon, E)$ могут быть получены из неевклидовых прямых $\overline{S}_1(i, j, l, I) = \overline{S}_1(i, j, e, I)$, $\overline{S}_1(i, j, l, E)$, $\overline{S}_1(i, j, e, E)$, ${}^1\overline{S}_1(i, j, l, E)$ однократным предельным переходом при некотором инволюционном движении. Применяя предельный переход в соответствующих им неевклидовых пространствах, устанавливаем изоморфизм групп движений неевклидовых прямых $\overline{S}_1(i, j, l, \epsilon)$, ${}^1\overline{S}_1(i, j, l, \epsilon)$, $\overline{S}_1(i, j, e, \epsilon)$, $\overline{S}_1(i, j, \varepsilon, I)$, $\overline{S}_1(i, j, \varepsilon, E)$, $\overline{S}_1(i, e, \varepsilon, I)$, $\overline{S}_1(i, e, \varepsilon, E)$ группам движений неевклидовых и квазинеевклидовых пространств $S_8(\epsilon)$, ${}^1S_8(\epsilon)$, ${}^4S_8(\epsilon)$, $S_8^4(i)$, $S_8^4(e)$, $S_8^4(i)$, ${}^{22}S_8^4(e)$. Применяя двукратный предельный переход к рассматриваемым неевклидовым прямым, убеждаемся в изоморфизме групп движений неевклидовых прямых $\overline{S}_1(i, j, \varepsilon, \epsilon)$ и $\overline{S}_1(i, e, \varepsilon, \epsilon)$ группам движений квазинеевклидовых пространств $S_8^4(\epsilon)$ и ${}^{22}S_8^4(\epsilon)$.

Покажем, что группа движений эрмитовой прямой $\overset{\approx}{S}_1(i, j, l, I)$ изоморфна группе движений неевклидова пространства S_9, причем каждой точке прямой $\overset{\approx}{S}_1(i, j, l, I)$ соответствует прямая пространства S_9.

Действительно, проективная прямая $P_1(i, j, l, I)$ гомеоморфна конформному пространству $C_8(i)$, группа конформных преобразований которого изоморфна группе движений неевклидова пространства $S_9(i)$, причем каждой точке пространства $C_8(i)$

Таблица 6

E_6	$\tilde{\bar S}_2(i, j, l, I) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, I)$	$\bar S_3(i, j) = \hat{\bar S}_2(i, j, e)$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, e, E) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, E)$	$\hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$
${}^1E_6$	${}^1\tilde{\bar S}_2(i, j, l, I) = {}^1\hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, I)$	${}^2\bar S_3(i, j) = {}^1\hat{\bar S}_2(i, j, e)$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, e, E) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, E)$	${}^1\hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$
$\tilde{E}_6$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, l, E) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, l, E)$	${}^1\bar S_3(i, j) = \hat{\bar S}_2(i, j, l)$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, e, I) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, l, I)$	$\hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, l, \mathcal{E})$
$\bar{E}_6$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, e, I) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, l, I) = \check{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, I)$	${}^1\bar S_3(i, j) = \hat{\bar S}_2(i, j, l)$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, l, E) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, l, E)$	$\hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, l, \mathcal{E})$
		$\bar S_3(i, e) = \check{\bar S}_2(i, j, e)$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, e, E) = \check{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, E)$	$\check{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$
$\bar{\tilde{E}}_6$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, e, E) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, E) = \check{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, E)$	${}^2\bar S_3(i, j) = \hat{\bar S}_2(i, j, e)$	${}^1\tilde{\bar S}_2(i, j, l, I) = {}^1\hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, I)$	${}^1\hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$
		$\bar S_3(i, e) = \check{\bar S}_2(i, j, e)$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, e, I) = \check{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, I)$	$\check{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$
		$\bar S_3(i, j) = \hat{\bar S}_2(i, j, e)$	$\tilde{\bar S}_2(i, j, l, I) = \hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, I)$	$\hat{\tilde{\bar S}}_2(i, j, e, \mathcal{E})$

соответствует точка абсолюта пространства $S_9(i)$. Таким образом, проективная прямая, рассматриваемая как множество точек, изображается точками абсолюта пространства $S_9(i)$, который можно рассматривать как абсолют вещественного пространства S_9, причем каждой точке абсолюта пространства $S_9(i)$ соответствует на абсолюте пространства S_9 данная точка и точка ей мнимо сопряженная.

Фундаментальная группа неевклидовой прямой $\overset{\approx}{S}_1(i, j, l, I)$ является максимальной компактной подгруппой фундаментальной группы прямой $P_1(i. j, l, I)$, выделяемой из последней инволюционным преобразованием $'x = \tilde{x}$. А фундаментальная группа неевклидова пространства S_9 является максимальной компактной подгруппой фундаментальной группы пространства $S_9(i)$, выделяемой из последней инволюционным преобразованием $'x^i = \bar{x}^i$, соответствующим преобразованию $'X = \tilde{X}$ на проективной прямой $P_1(i, j, l, I)$. Отсюда и следует требуемое утверждение $\overset{\approx}{S}_1(i, j, l, I) = S_9$, причем каждой точке прямой $\overset{\approx}{S}_1(i, j, l, I)$ соответствует пара мнимо сопряженных точек абсолюта пространства S_9, определяющих прямую этого пространства. Если соблюдать ориентацию прямых, то это соответствие будет взаимно однозначным.

Аналогичным способом можно доказать изоморфизм групп движений неевклидовых прямых ${}^1\overset{\approx}{S}_1(i, j, l, I), \overset{\approx}{S}_1(i, j, l, E), \overset{\approx}{S}_1(i, j, e, I)$ и $\overset{\approx}{S}_1(i, j, e, E)$ и групп движений неевклидовых пространств ${}^2S_9$, ${}^1S_9$, ${}^4S_9$ и ${}^5S_9$.

Неевклидова прямая $\overset{\approx}{S}_1(i, j, \varepsilon, I)$ может быть получена из прямых $\overset{\approx}{S}_1(i, j, l, I)$ и $\overset{\approx}{S}_1(i, j, e, I)$ с помощью предельного перехода, соответствующего инволюционному преобразованию $'X = \hat{X}$. Этому преобразованию в соответствующих им пространствах отвечает инволюционное преобразование $'x^a = x^a$, $'x^u = -x^u$. Предельный переход в вещественных неевклидовых пространствах относительно этого инволюционного преобразования приводит нас к квазиэллиптическому пространству $S_9^3 = S_9^5$, фундаментальной группой которого является квазипростая группа Ли класса D_5.

Таким образом, прямая $\overset{\approx}{S}_1(i, j, \varepsilon, I)$ интерпретируется на множестве прямых вещественного квазиэллиптического пространства $S_9^3 = S_9^5$.

Аналогично строятся интерпретации эрмитовых прямых ${}^1\overset{\approx}{S}_1(i, j, \varepsilon, I)$, $\overset{\approx}{S}_1(i, j, \varepsilon, E)$, $\overset{\approx}{S}_1(i, e, \varepsilon, I)$, $\overset{\approx}{S}_1(i, e, \varepsilon, E)$, $S_1(i, j, l, \varepsilon)$ и

$(i, j, e, \in)$, на множестве прямых вещественных квазигиперболических, евклидовых и полуевклидовых пространств ${}^{02}S_9^3 = {}^{20}S_9^5$, $S_9^1 = {}^{10}S_9^5$, ${}^{22}S_9^5 = {}^{42}S_9^3$, ${}^{32}S_9^5 = {}^{32}S_9^3$, R_9, ${}^4R_9$.

Неевклидовы прямые $\overset{\approx}{S}_1(i, j, \varepsilon, \in)$ и $\overset{\approx}{S}_1(i, e, \varepsilon, \in)$ могут быть получены из неевклидовых прямых $\overset{\approx}{S}_1(i, j, e, I)$ и $\overset{\approx}{S}_1(i, j, e, E)$ с помощью двукратного предельного перехода, соответствующего инволюционным преобразованиям $'X = \widehat{X}$, $'X = \widetilde{X}$ и $'X = \breve{X}$, $'X = \widetilde{X}$. Этим преобразованиям в соответствующих вещественных пространствах отвечают инволюционные преобразования $'x^a = x^a$, $'x^u = -x^u$, $'x^i = \overline{x}^i$. Предельный переход в вещественных неевклидовых пространствах относительно этих инволюционных преобразований приводит нас к пространствам R_9^5 и ${}^{20}R_9^5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. М., Гостехиздат, 1955. 744 с.
2. *Персиц Д. Б.* Геометрии над вырожденными октавами и вырожденными антиоктавами. — «Тр. семинара по векторному и тензорному анализу», 1970, вып. XV. с. 165—187.
3. *Розенфельд Б. А., Колокольцева И. И., Руденко А. Б.* Квазипростые алгебры. — «Геометр. сб.» № 13. Тр. Томск. ун-та, 1973, т. 246. с. 20—31.
4. *Розенфельд Б. А., Замаховский М. П.* Простые и квазипростые йордановы алгебры. — «Изв. вузов. Математика», 1971, № 8. с. 111—121.
5. *Заболоцких Н. М.* Октавные геометрии с классическими фундаментальными группами. — «Учен. зап. МОПИ им Н. К. Крупской», 1969, т. 253, вып. 3. с. 62—76.
6. *Розенфельд Б. А., Карпова Л. М.* Флаговые группы и сжатие групп Ли. — «Тр. семинара по векторному и тензорному анализу», 1966, вып. 13. с. 168—202.
7. *Розенфельд Б. А.* К теории симметрических пространств ранга. I. — «Мат. сб.», 1957, т. 41 (83), № 3. с. 373—380.

Поступила 3 июля 1973 г.

УДК 513. 74; 530. 12; 531. 51

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ,
А. К. ЛАПКОВСКИЙ

О СРАВНЕНИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНЕСЕНИЯ И ПЕРЕНЕСЕНИЯ ФЕРМИ — УОЛКЕРА В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Рассмотрим пространство-время ${}^1V_4$ теории гравитации. Считаем, что ${}^1V_4$ можно разбить на частичнс перекрывающие области $\{U_i\}$ с системой допустимых координат $\{\varphi_i\}: U_i \to R_4$ в каждой из них: преобразования, связанные с переходом от одной системы координат к другой относятся к классу C^∞.

Предполагаем, что задана непрерывная кусочно-дифференцируемая временноподобная кривая $x(s)$, отнесенная к параметру

s, где s — расстояние по кривой от текущей точки $x(s)$ до точки, в которой $s = s_0$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ $(A^i(s))$ есть мнимо-единичный вектор, касательный к $x(s)$, а $k(s)$, $\boldsymbol{B}$ $(B^i(s))$, соответственно, первая кривизна и первая нормаль к $x(s)$.

Говорят, что орторепер $\vec{\lambda}_{(a)}$ $(\lambda^i_{(a)})$, $a, b = 0, 1, 2, 3$; $i, j = 0, \ldots, 3$,

$$\vec{\lambda}_{(a)} \cdot \lambda_{(b)} = \eta_{(ab)} = \mathrm{diag}\,(-1,\ 1,\ 1,\ 1), \qquad (1)$$

претерпевает параллельный перенос вдоль $x(s)$, если абсолютная производная каждого вектора $\vec{\lambda}_{(a)}$ обращается в нуль

$$\frac{\delta}{\delta s} \vec{\lambda}_{(a)} = 0. \qquad (2)$$

Перенос Ферми—Уолкера [1, 2] репера $\vec{\lambda}_{(a)}$ $(\lambda^i_{(a)})$ определяется, см. [3, с. 21], с помощью системы уравнений

$$\frac{\delta \lambda^i_{(a)}}{\delta s} = k \lambda_{(a)j} \left(A^i B^j - B^i A^j\right). \qquad (3)$$

Здесь $\lambda_{(a)j}$ ковариантные компоненты вектора $\vec{\lambda}_{(a)}$.

Будем считать, что $\vec{\lambda}_{(0)}(s)$ есть вектор, касательный к $x(s)$, причем $\vec{\lambda}_{(0)}(s) = c\boldsymbol{A}$, c — скорость света.

Тогда система (3) примет вид

$$\frac{\delta \vec{\lambda}_{(0)}}{\delta s} = \sum_{\alpha=1}^{3} ck B_{(\alpha)} \vec{\lambda}_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3 \qquad (4)$$

$$\frac{\delta \vec{\lambda}_{(\alpha)}}{\delta s} = \frac{k}{c} B^{(\alpha)} \vec{\lambda}_{(0)},$$

где $B^{(\alpha)}$ — компоненты вектора $\boldsymbol{B}$ в разложении по векторам

$$\vec{\lambda}_{(\alpha)} : B_{(\alpha)} = \vec{B}_{(\alpha)} = \vec{\lambda}_{(\alpha)i} B^i.$$

В дальнейшем удобно систему (4) представить в матричном виде:

$$\frac{\delta}{\delta s} \{\vec{\lambda}_{(a)}\} = ck \{\vec{\lambda}_{(a)}\} [B]. \qquad (5)$$

Здесь $[B]$ есть матрица вида

$$\begin{bmatrix} 0 & B^{(1)}/c^2 & B^{(2)}/c^2 & B^{(3)}/c^2 \\ B^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ B^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ B^{(3)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а $\{\vec{\lambda}_{(a)}\}$ — матрица-строка $\{\vec{\lambda}_{(0)}, \vec{\lambda}_{(1)}, \vec{\lambda}_{(2)}, \vec{\lambda}_{(3)}\}$.

Отметим, что если $x(s)$ временноподобная геодезическая, то $k = 0$ и перенос Ферми—Уолкера совпадает с параллельным переносом.

Нашей задачей является изучение отклонения перенесения Ферми—Уолкера от параллельного перенесения в общем случае.

Предположим, что начиная с точки $x(s_0)$ орторепер $\{\vec{\lambda}_{(a)}(s_0)\}$ ($\lambda_{(0)}(s)$ — по-прежнему касательный вектор к $x(s)$) переносится по закону параллельного перенесения и закону перенесения Ферми—Уолкера. Обозначим через $\vec{\mu}_{(a)}(s)$ параллельно переносимый репер $\vec{\mu}_{(a)}(s_0) = \vec{\lambda}_{(a)}(s_0)$, а через $\vec{\lambda}_{(a)}(s)$ — репер, переносимый по закону Ферми—Уолкера.

Очевидно, существует матрица $[L(s)]$, принадлежащая собственной группе Лоренца L, такая что

$$\{\vec{\lambda}_{(a)}\} = \{\vec{\mu}_{(a)}\}[L]. \tag{6}$$

На основании (4) матрица $[L(s)]$ является решением следующей дифференциальной системы:

$$[L]^{-1}\frac{d}{ds}[L] = kc[B], \tag{7}$$

где $[L]^{-1}$ — обратная матрица к $[L]$.

Известно, что любое преобразование $[L]$ собственной группы Лоренца L можно представить как последовательное выполнение шести вращений в координатных плоскостях, причем три из этих вращений гиперболические, а три — круговые. Таким образом, ищем решение $[L(s)]$ системы (7) в виде

$$[L(s)] = \exp u^1 N_1 \exp u^2 N_2 \exp u^3 N_3 \exp \psi R_3 \exp \vartheta R_1 \exp \varphi R_3, \tag{8}$$

где R_α, N_β, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, — инфинитезимальные матрицы, отвечающие соответственно круговым и гиперболическим вращениям:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/c^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры ψ, ϑ, φ — углы Эйлера пространственного вращения D (ψ — угол прецессии, ϑ — угол нутации, φ — угол собственного вращения).

После соответствующих вычислений система (7) сводится к следующему:

$$\dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta = \frac{\dot{u}^2}{c}\operatorname{sh}\frac{u^3}{c},$$

$$\dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta = -\frac{\dot{u}^1}{c}\operatorname{sh}\frac{u^3}{c}\operatorname{ch}\frac{u^2}{c}, \tag{9}$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta = \frac{\dot{u}^1}{c}\,\mathrm{sh}\,\frac{u^2}{c},$$

$$[\mathbf{M}]\,\|\dot{u}^\alpha\| = ck\,[D]\,\|B^{(\alpha)}\|,$$

где

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\frac{u^2}{c}\,\mathrm{ch}\,\frac{u^3}{c} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\,\frac{u^3}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[D] = \exp\psi R_3 \exp\vartheta R_1 \exp\varphi R_3, \quad \|B^{(\alpha)}\| = \left\| \begin{matrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ B^{(3)} \end{matrix} \right\|.$$

Значком $(\cdot)$ отмечено дифференцирование по s.

Итак, можем формулировать основное утверждение. Пусть имеем вдоль кривой $x(s)$, начиная с $x_0 = x(s_0)$, «поле» параллельно переносимых реперов $\{\vec{\mu}_{(a)}\}$, $a = 0, \ldots, 3$; $\vec{\mu}^{\,2}_{(0)} = -1$, $\vec{\mu}_{(0)}(s_0)$ — касательный вектор к кривой $x(s)$. Тогда, чтобы «поле» ортореперов (6) претерпевало перенесение Ферми—Уолкера, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись соотношения (9), (10).

По аналогии с кинематическими формулами Эйлера, например, [3, с. 117], введем

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta &= \omega_x, \\ \dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta &= \omega_y, \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta &= \omega_z, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ характеризуют компоненты вектора мгновенной угловой скорости инфинитезимального пространственного вращения 3-репера $\{\vec{\mu}_{(\alpha)}(s)\}$ (для совпадения с $\{\vec{\lambda}_{(\alpha)}(s)\}$).

Это пространственное вращение в силу (9′)

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\dot{u}^2}{c}\,\mathrm{sh}\,\frac{u^3}{c} \\ \omega_y &= \frac{\dot{u}^1}{c}\,\mathrm{sh}\,\frac{u^3}{c}\,\mathrm{ch}\,\frac{u^2}{c} \\ \omega_z &= \frac{\dot{u}^1}{c}\,\mathrm{sh}\,\frac{u^2}{c} \end{aligned}\right\} \tag{9″}$$

является число релятивистским эффектом, называемым прецессией Томаса, ибо, см. [4, с. 468], правая часть соотношений (9″) возникает как следствие коммутационных соотношений вида

$$[N_1 N_2] = -\frac{1}{c^2}R_3, \quad [N_3 N_1] = -\frac{1}{c^2}R_2, \quad [N_2 N_3] = -\frac{1}{c^2}R_1.$$

Авторы выражают благодарность доктору физико-математических наук О. С. Иваницкой за полезное обсуждение результатов настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

Fermi E. «Atti R. Acad. Lincei Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.», 1922, vol. 31, № 21 (51).
Walker A. G. — «Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1932, vol. 52, p. 345.
Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики, т. I. М., «Наука», 1972. 465 с.
Зайцев Г. А. О связи теории относительности с теорией групп. Дополнение к книге М. А. Тоннела «Основы электромагнетизма и теории относительности». М., ИЛ., 1962, с. 444—475.

Поступила 28 августа 1973 г.

ДК 513

А. И. МЕДЯНИК

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ. I

А. В. Погорелов в работе [1] решил общую проблему сущест-вания замкнутой выпуклой поверхности, главные радиусы ривизны $R_1(\boldsymbol{n})$ и $R_2(\boldsymbol{n})$ которой в точке с нормалью $\boldsymbol{n}$ удов-творяют уравнению

$$f(R_1, R_2) = \varphi(\boldsymbol{n}), \tag{1}$$

е φ — четная функция. Функция $f(R_1, R_2)$, определенная в об-сти $R_1 \geqslant R_2 > 0$, строго возрастающая и симметричная по им переменным, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial R_1} > 0 \quad \frac{\partial f}{\partial R_2} > 0, \tag{2}$$

$$f(R_1, R_2) \equiv g(R_1 R_2, R_1 + R_2). \tag{3}$$

Это обобщает постановку классических проблем Христоффеля $(R_1, R_2) = R_1 + R_2)$ и Минковского $(f(R_1, R_2) = R_1 R_2)$. Д. Александров [2] отметил, что уже в случае проблемы ристоффеля одной положительности функции φ недостаточно я того, чтобы искомая поверхность была выпуклой.

Общую проблему существования А. В. Погорелов решает на нове априорных оценок главных радиусов кривизны замкнутой пуклой поверхности. Именно, если для любой точки $\boldsymbol{n}$ еди-ичной сферы и для любого направления дифференцирования о дуге s большого круга) из этой точки выполняются условия:

$$\overline{\lim_{\substack{R_2 = R_2(R_1, n) \\ R_1 \to \infty}}} \left\{ (R_2 - R_1) \frac{\partial f}{\partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} \frac{\varphi_s^2}{(\partial f / \partial R_2)^2} \right\} < \varphi_{ss}, \tag{*}$$

$$\underline{\lim_{\substack{R_1 = R_1(R_2, n) \\ R_2 \to 0}}} \left\{ (R_1 - R_2) \frac{\partial f}{\partial R_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} \frac{\varphi_s^2}{(\partial f / \partial R_1)^2} \right\} > \varphi_{ss}, \tag{**}$$

то для радиусов нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению (1), существуют априорные оценки сверху и снизу соответственно, зависящие только от функций f и φ. В условиях (*) и (**) $R_1(R_2, \boldsymbol{n})$ и $R_2(R_1, \ldots$ решения (1) относительно R_1 и R_2.

В монографии [3] А. В. Погорелов предложил метод исследования вопроса о существовании выпуклой поверхности F, сферическое изображение которой выпукло, опорная функция на границе сферического изображения обращается в заданную непрерывную функцию $\phi(\boldsymbol{n})$, а главные радиусы кривизны во внутренней точке поверхности удовлетворяют уравнению (1).

В предлагаемом исследовании дается решение поставленного А. В. Погореловым вопроса для случая, когда функция g из условия (3) является вогнутой функцией своих переменных, т. е.

$$d^2 g(R_1 R_2,\ R_1 + R_2) \leqslant 0. \tag{4}$$

Предполагается также, что функция $g(x, y)$ в области $x > 0$, $y > 0$, $y^2 \geqslant 4x$ удовлетворяет условиям:

при $x \to 0$ функция $g(x, y)$ стремится к 0;

при $x \to \infty$ функция $g(x, y)$ неограниченно возрастает; (5)

при $x = m = \mathrm{const}$

$$g(x, y) \leqslant C_m, \tag{6}$$

$$2xg_x + yg_y \geqslant c_m > 0,$$

где C_m, c_m — постоянные, зависящие только от m.

Из разложения

$$g(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - g(x, y) =$$

$$= \Delta x g_x(x, y) + \Delta y g_y(x, y) + \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 g_{xx}(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y) +$$

$$+ 2\Delta x\Delta y g_{xy}(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y) + (\Delta y)^2 g_{yy}(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y)],$$

где $0 < \theta < 1$, вытекает, что

$$g_y \geqslant 0, \tag{7}$$

а условия (2) являются следствием условий (3)—(5). Для доказательства последнего утверждения достаточно положить

$$\Delta x = R_i \Delta y \ \ (i = 1, 2).$$

Для выпуклых поверхностей с краем имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $f(R_1, R_2)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная в области $R_1 \geqslant R_2 > 0$ и удовлетворяющая условиям (3)—(6), и $\varphi(\boldsymbol{n})$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная в выпуклой области ω, лежащей строго внутри полусферы. Если функция φ ограничена снизу некоторой положительной постоянной, то существует выпуклая поверхность F, у которой сферическое изображение совпадает с ω, опорная функция $H(\boldsymbol{n})$ на границе сферического изображения* *обращается в заданную непрерывную функцию* $\psi(\boldsymbol{n})$, *а главные радиусы кривизны в каждой внутренней точке поверхности удовлетворяют уравнению* (1).

Доказательство этой теоремы будет дано во второй части работы. Первым шагом на пути доказательства теоремы 1 является решение поставленного вопроса для случая аналитических функций (R_1, R_2), $\varphi(\boldsymbol{n})$ и $\psi(\boldsymbol{n})$ и области ω, ограниченной аналитическим строго выпуклым контуром (строгая выпуклость контура означает положительность его геодезической кривизны), рассмотрению которого и посвящена настоящая статья.

Пусть область ω, являющаяся сферическим изображением искомой поверхности F, расположена в верхней полусфере $z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Спроектируем область ω из центра единичной сферы на плоскость $z = 1$. Затем образ ω ортогонально спроектируем на плоскость $z = 0$. При таком преобразовании область ω перейдет в строго выпуклую область G на плоскости xy, причем строгая выпуклость G означает, что кривизна ее границы положительна в каждой точке.

Пусть

$$h(x, y) = H(x, y, 1),$$

где $H(x, y, z)$ — опорная функция поверхности F. Тогда для суммы и произведения главных радиусов кривизны поверхности F в точке с нормалью направления $(x, y, 1)$ имеем следующие выражения [3, с. 528]:

$$R_1R_2 = (rt - s^2)(1 + x^2 + y^2)^2, \tag{8}$$

$$R_1 + R_2 = [(1 + x^2) r + 2xys + (1 + y^2) t] (1 + x^2 + y^2)^{1/2},$$

где r, s, t — обычные обозначения вторых производных функции $h(x, y)$.

Как известно, из условий (2), (3) следует, что функция $h(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению эллиптического типа

$$\Phi(r, s, t, x, y) = \varphi(x, y), \tag{9}$$

где функция $\Phi(r, s, t, x, y)$ получается из функции $g(R_1R_2, R_1 + R_2)$ заменой R_1R_2 и $R_1 + R_2$ их значениями из (8). В силу условия (3) аналитичность функции $f(R_1, R_2)$ влечет аналитичность функции $\Phi(r, s, t, x, y)$ [4].

Таким образом, решение поставленной задачи о существовании поверхности F сводится к вопросу о разрешимости задачи Дирихле для уравнения (9) в области G при краевом условии

$$h(x, y)|_{\partial G} = \psi(x, y). \tag{9'}$$

Разрешимость задачи Дирихле следует из теоремы С. Н. Бернштейна [5], если указаны априорные оценки для модулей предполагаемого решения $z = h(x, y)$ и его производных до второго порядка включительно.

$^1/_4$ 8 4-1761

Лемма. *Пусть $f(R_1, R_2)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая условиям (3)—(6). Тогда для любой аналитической функции $\varphi(\boldsymbol{n})$, ограниченной в области ω снизу положительной постоянной, модуль решения $z = h(x, y)$ уравнения (9) в области G ограниченной аналитическим строго выпуклым контуром, при краевом условии (9′) с аналитической функцией $\psi(x, y)$ и модули его производных до второго порядка включительно допускают априорные оценки, зависящие только от функций f, φ, ψ и их производных.*

Доказательство. Пусть F' — поверхность, задаваемая уравнением $z = h(x, y)$. Из равенств (8) следует, что F' — выпуклая поверхность, обращенная выпуклостью в сторону $z < 0$. Не ограничивая общности можно считать, что начало координат находится внутри области G.

Очевидно, что максимум функции $h(x, y)$ достигается на границе области G, и поэтому он не превосходит максимума модуля функции ψ.

Чтобы оценить снизу минимум функции $h(x, y)$, рассмотрим в G поверхность, задаваемую уравнением

$$z = h_1(x, y) = R(1 + x^2 + y^2)^{1/2}, \tag{10}$$

где R — положительная постоянная.

Эта поверхность удовлетворяет уравнению

$$\Phi(r, s, t, x, y) = f(R, R). \tag{11}$$

Из условий (3), (5) следует, что при достаточно большом R выполняется неравенство

$$f(R, R) > \varphi(x, y). \tag{12}$$

Будем считать условие (12) выполненным. Рассмотрим функции

$$h_\lambda = \lambda h + (1 - \lambda) h_1.$$

В силу условий (9), (11), (12) $\overline{\Phi}(0) > \overline{\Phi}(1)$, где

$$\overline{\Phi}(\lambda) = \Phi(r_\lambda, s_\lambda, t_\lambda, x, y).$$

Поэтому по теореме о среднем значении найдется такое $\lambda = \theta$, что

$$\left.\frac{d\overline{\Phi}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\theta} = \Phi_r(r - r_1) + \Phi_s(s - s_1) + \Phi_t(t - t_1) < 0, \tag{13}$$

где в выражениях Φ_r, Φ_s, Φ_t λ заменено на θ. Из эллиптичности уравнения (9) вытекает, что выражение (13) также эллиптического типа, причем $\Phi_r > 0$, $\Phi_t > 0$ [3, с. 528]. Следовательно,

$$(r - r_1)(t - t_1) - (s - s_1)^2 < 0.$$

Но тогда минимум функции $h - h_1$ не может достигаться внутри области G. А это дает возможность получить оценку снизу для минимума $h(x, y)$, зависящую только от R, диаметра области G и минимума функции ψ.

Оценим теперь максимум модулей первых производных p, q функции $h(x, y)$.

Из выпуклости поверхности F' следует, что максимум и минимум p и q достигаются на границе ∂G области G Чтобы получить оценку максимума модулей первых производных на границе ∂G, достаточно оценить радиальную производную функции h. Покажем, например, как получить требуемую оценку в точке M, направление радиуса-вектора которой противоположно направлению оси x. В этой точке радиальная производная совпадает с p. Поэтому ее максимум не превосходит отношения максимума $|\psi|$ к радиусу наибольшего содержащегося в G круга с центром в начале координат.

Оценим минимум p в той же точке M.

Для произвольной выпуклой области G, кривизна границы которой положительна, справедливо следующее утверждение С. Н. Бернштейна [5]: через касательную в произвольной точке контура γ, ограничивающего поверхность F', можно провести плоскость σ

$$z = ax + by + c$$

так, что ниже плоскости σ не будет точек кривой γ. При этом коэффициенты a, b, c ограничены по модулю числом, зависящим только от максимума модуля функции ψ и ее производных до третьего порядка.

Применим эту лемму С. М. Бернштейна к кривой, ограничивающей поверхность, задаваемую уравнением

$$z = h - h_1,$$

где h_1 — функция, определяемая равенством (10) с R, удовлетворяющим условию (12).

Рассмотрим функцию

$$\bar{z} = h - h_1 - (ax + by + c),$$

линейная часть которой задает плоскость σ, проходящую через касательную кривой в точке, проектирующейся в M По лемме С. Н. Бернштейна на границе области G эта функция принимает неотрицательные значения, причем в исследуемой точке $\bar{z} = 0$. Ни в одной точке области G форма $d^2\bar{z}$ не может быть положительно определенной, т. е. минимум $\bar{z}$ достигается на ∂G и, значит, в G $\bar{z} \geqslant 0$. Тогда в точке M $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \geqslant 0$. Так как модули коэффициентов a, b, c ограничены, то отсюда следует оценка минимума p снизу.

Получим теперь априорные оценки модулей вторых производных. Начнем с оценок вторых производных на границе области G. Вместо декартовых координат x, y введем полярные

8 4-1761

ρ, θ. Произведение и сумма главных радиусов кривизны поверхности F в полярных координатах будут иметь следующий вид

$$R_1R_2 = \left[z_{\rho\rho}\left(\frac{z_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{z_\rho}{\rho}\right) - \left(\frac{z_{\rho\theta}}{\rho} - \frac{z_\theta}{\rho^2}\right)^2\right](1+\rho^2)^2, \tag{14}$$

$$R_1 + R_2 = \left[(1+\rho^2)\,z_{\rho\rho} + \frac{z_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{z_\rho}{\rho}\right](1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Дифференцируя преобразованное уравнение (9) по θ и обозначая z_θ через z_1, получим

$$L(z_1) \equiv (1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\left[(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{z_\rho}{\rho}\right)g_1 + g_2\right](z_1)_{\rho\rho} -$$

$$-2(1+\rho^2)^2\left(\frac{z_{\rho\theta}}{\rho} - \frac{z_\theta}{\rho^2}\right)g_1\left[\frac{(z_1)_{\rho\theta}}{\rho} - \frac{(z_1)_\theta}{\rho^2}\right] +$$

$$+(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\left[(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}z_{\rho\rho}\,g_1 + g_2\right]\left[\frac{(z_1)_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{(z_1)_\rho}{\rho}\right] = \varphi_\theta.$$

Отсюда следует, что функция $\bar{z} = z_1 - \mu z$, где μ — постоянная, удовлетворяет уравнению

$$L(\bar{z}) = \varphi_0 - \mu\left(R_1\frac{\partial f}{\partial R_1} + R_2\frac{\partial f}{\partial R_2}\right). \tag{15}$$

Так как

$$f_1R_1 + f_2R_2 = 2R_1R_2g_1 + (R_1+R_2)\,g_2,$$

то по условиям (3), (5), (6) и условию леммы $\varphi \geqslant c > 0$ постоянную μ можно выбрать настолько большой, чтобы в области G правая часть уравнения (15) была отрицательной.

Но

$$\left[(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{z_\rho}{\rho}\right)g_1 + g_2\right]\left[(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}z_{\rho\rho}g_1 + g_2\right] -$$

$$-(1+\rho^2)^2\left(\frac{z_{\rho\theta}}{\rho} - \frac{z_\theta}{\rho^2}\right)g_1^2 = \frac{\partial f}{\partial R_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial R_2} > 0.$$

Поэтому из уравнения (15) при достаточно большом μ следует

$$\bar{z}_{xx}\bar{z}_{yy} - \bar{z}_{xy}^2 = \bar{z}_{\rho\rho}\left(\frac{\bar{z}_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{\bar{z}_\rho}{\rho}\right) - \left(\frac{\bar{z}_{\rho\theta}}{\rho} - \frac{\bar{z}_\theta}{\rho^2}\right)^2 \leqslant 0,$$

т. е. форма $d^2\bar{z}$ не может быть положительно определенной. Значит, с помощью уже применявшейся выше леммы С. Н. Бернштейна для $|\bar{z}_\rho| = |z_{\rho\theta} - \mu z_\rho|$ и одновременно для $|z_{\rho\theta}|$ может быть получена оценка в зависимости от максимума модуля функции φ и ее производных до третьего порядка.

Из условия леммы $\varphi \geqslant c > 0$ следует, что произведение главных радиусов кривизны поверхности F заключено в положительных пределах. Поэтому для оценки $z_{\rho\rho}$ на основании (14) достаточно найти нижнюю грань положительного выражения

$$\frac{1}{\rho^2}z_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho}z_\rho.$$

...йдем нижнюю грань этого выражения, например, в точке ...($\theta=0$). Сначала предположим, что $\rho_0(\theta)=0$, $\rho_{\theta\theta}(0)=0$. Сле... С. Н. Бернштейну [5], рассмотрим функцию

$$u=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a,$$

...

$$a_{11}=\frac{a-\psi_0}{\rho_0^2}+\frac{2\alpha\rho_0^2-\psi_0}{K_0\rho_0^3},$$

$$a_{22}=\alpha>0,$$

$$2a_{12}=-\frac{\psi_0'}{\rho_0^2}+\frac{2\psi_0'-\psi_0'''}{3K_0\rho_0^3}+\frac{2\alpha\rho_0^2-\psi_0''}{3K_0^2\rho_0^5}\rho_0''';$$

$$a_1=\frac{2(\psi_0-a)}{\rho_0}+\frac{\psi_0''-2\alpha\rho_0^2}{K_0\rho_0^2},$$

$$a_2=\frac{2\psi_0'}{\rho_0}+\frac{\psi_0'''-2\psi_0'}{3K_0\rho_0^2}+\frac{\psi_0''-2\alpha\rho_0^2}{3K_0^2\rho_0^4}\rho_0'''.$$

...чения всех переменных величин, входящих в формулы для ...эффициентов, вычислены в точке M. В частности, K_0 — кри...на границы области G в этой точке, а ρ_0 — ее полярный ...диус. Построенная функция обладает следующими свойствами ...и заданном $R^2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ и при достаточно большом поло...жительном a:

1) в точке M при $\theta=0$

$$u=\psi_0,\ \frac{du}{d\theta}=\psi_0',\quad \frac{d^2u}{d\theta^2}=\psi_0'',\quad \frac{d^3u}{d\theta^3}=\psi_0''';$$

2) в точках ∂G, отличных от M,

$$u>\psi;$$

3) в точке M

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}=2\alpha>0,$$

...е α зависит только от максимума модулей производных функ...ии ψ до четвертого порядка и минимума K и $\frac{1}{K}$.

Как следует из свойств (3), (5) функции f, при достаточно ...ом R функция u удовлетворяет уравнению

$$\Phi(u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy},\ x,\ y)=\bar{\varphi}(x,\ y),$$

...е $\bar{\varphi}(x,\ y)<\varphi(x,\ y)$.

Поступая теперь так же как и при оценке модуля функции ...(x, y), заключаем, что минимум функции $u-z$ достигается на ...нице, т. е. $u-z\geqslant 0$. Следовательно в M имеем $(u-z)_\rho\leqslant 0$. ...роме того, в рассматриваемом случае в точке M $u_{\theta\theta}=z_{\theta\theta}=\psi_{\theta\theta}$.

Отсюда вытекает, что в исследуемой точке величина $\frac{1}{\rho^2} z_{\theta\theta}$ $+\frac{1}{\rho} z_\rho$ не меньше, чем 2α.

В общем случае оценка для $z_{\rho\rho}$ следует из того, что при преобразовании полярных координат выражение

$$z_{\rho\rho}\left(\frac{z_{\theta\theta}}{\rho^2}+\frac{z_\rho}{\rho}\right)-\left(\frac{z_{\rho\theta}}{\rho}-\frac{z_\theta}{\rho^2}\right)^2$$

сохраняет свой вид. Если $\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$ — новые полярные координаты, то

$$z_{\rho\rho}=\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\right)^2 z_{\bar{\rho}\bar{\rho}}+2\,\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\,\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\rho}\,z_{\bar{\rho}\bar{\theta}}+\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\rho}\right)^2 z_{\bar{\theta}\bar{\theta}}+\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\rho^2}\,z_{\bar{\rho}}+\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial\rho^2}\,z_{\bar{\theta}}.$$

Если начало новой системы совпадает с центром кривизны границы области G для точки M, то в M

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial\theta^2}=0.$$

Итак, получены оценки для вторых производных функции $h(x, y)$ на границе области G.

Оценки вторых производных внутри области G получаются из априорных оценок А. В. Погорелова [3, с. 537], так как функции f и φ удовлетворяют условию (*) Действительно, по условиям леммы форма d^2g — отрицательно определенная. Следовательно, выполнение условия (*) будет доказано, если при $R_1 \to \infty$ выражение $R_1 f_2$ также стремится к бесконечности. На поверхности F в силу условий леммы $R_1 R_2 < M < \infty$. Поэтому при неограниченном возрастании $R_1 + R_2$ функция f остается ограниченной и, значит, g_2 имеет порядок убывания больше, чем $1/(R_1 + R_2)$. Но тогда из условия (6) следует, что на поверхности F при достаточно большом R_1 производная g_1 отделена от нуля положительной постоянной. Это и доказывает, что с ростом R_1 функция $R_1 f_2$ неограниченно возрастает.

Таким образом, получены оценки для функции $h(x, y)$ и ее производных первых двух порядков в замкнутой области G.

После того, как известны априорные оценки предполагаемого решения и его производных до второго порядка, существование решения можно обосновать с помощью следующей теоремы С. Н. Бернштейна [5].

Если задано аналитическое уравнение эллиптического типа

$$F(r,\ s,\ t,\ p,\ q,\ z,\ x,\ y,\ \alpha)=0,$$

где $F'_r F'_z \leqslant 0$, то задача Дирихле с определенными данными на контуре будет возможна при всяком значении α, заключенном между α_0 и α_1. Если известно, что задача возможна при $\alpha = \alpha_0$ и если допустить существование решения, можно посредством данных на контуре a priori ограничить сверху модули z и ее производных двух первых порядков.

Теорема 2. *Пусть* $f(R_1, R_2)$ *и* $\varphi(\boldsymbol{n})$ — *аналитические функции, удовлетворяющие условиям леммы. Тогда существует аналитическая выпуклая поверхность* F, *обладающая следующими свойствами:*

1. Сферическое изображение F *совпадает с заданной аналитической строго выпуклой областью* ω, *лежащей внутри полусферы.*

2. На границе сферического изображения опорная функция $H(\boldsymbol{n})$ *обращается в заданную аналитическую функцию* $\psi(\boldsymbol{n})$.

3. Главные радиусы кривизны поверхности F *во внутренней точке с внешней нормалью* $\boldsymbol{n}$ *удовлетворяют уравнению* (1).

Доказательство. По теореме С. Н. Бернштейна на основании леммы при любом $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ существует поверхность F_λ, главные радиусы кривизны которой удовлетворяют уравнению

$$f(R, R_2) = \lambda\varphi(\boldsymbol{n}) + (1-\lambda) f(R, R),$$

а ее опорная функция на границе сферического изображения равна

$$\lambda\psi(\boldsymbol{n}) + (1-\lambda) R\,|\boldsymbol{n}|,$$

где R выбрано так, чтобы функция $f(R, R)$ была равна нижней грани функции $\varphi(\boldsymbol{n})$ в области ω.

Действительно, задача тривиально разрешима при $\lambda = 0$. Соответствующая поверхность есть сфера радиуса R. Так как левая часть уравнения (9) не зависит от z, то условие $F'_r F'_z \leqslant 0$ также выполнено. На основании леммы можно указать априорные оценки соответствующего поверхности F_λ решения уравнения (9) и его производных до второго порядка. При $\lambda = 1$ получаем решение исходной задачи. Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(\boldsymbol{n}) > 0$ — *аналитическая функция. Тогда существует аналитическая выпуклая поверхность с гауссовой кривизной* $K(\boldsymbol{n}) = 1/\varphi(\boldsymbol{n})$, *сферическое изображение которой совпадает с заданной аналитической строго выпуклой областью, лежащей внутри полусферы, и опорная функция которой на границе сферического изображения обращается в заданную аналитическую функцию.*

Представление о широте класса функций от главных радиусов кривизны, удовлетворяющих условиям (3)—(6) дает следующая

Теорема 4. *Теоремы 1 и 2 имеют место, если условие* (4) *заменить условием*

$$g_{11}\xi^2 + 2g_{12}\xi\eta + g_{22}\eta^2 < 0, \tag{16}$$

а условия (5), (6) *условием*

$$B\left[(1+x)^\alpha - 1\right] \leqslant g(x, y) \leqslant Cx, \tag{17}$$

где $C > B > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Действительно, из условия (17) следует, что функция g удовлетворяет условию (5), а на основании условий (16), (17) заключаем, что функция g удовлетворяет также и услови[...] (6), причем

$$C_m = Cm,\ c_m = 2\alpha m\ \ B^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1-\alpha}{Cm+B}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Существование выпуклой поверхности с заданной функц[...] главных радиусов кривизны. — ДАН СССР, 1967, т. 174, № 2, с. 291—[...]
2. *Александров А. Д.* К вопросу о существовании выпуклого тела, су[...] главных радиусов кривизны которого есть данная положительная фу[...]ция, удовлетворяющая условиям замкнутости. — ДАН СССР, 1937, [...] XIV, № 2, с. 59—60.
3. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наук[...] 1969. 760 с.
4. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в цел[...] II. —«Вестн. Ленингр. ун-та». Вып. 7. Ленинград, 1957, с. 15—44.
5. *Бернштейн С. Н.* Исследование и интегрирование дифференциальных ур[...]нений с частными производными второго порядка эллиптического ти[...] — Сообщ. Харьковск. мат. о-ва, 1907, т. XI, № 1—2, с. 1—164.

Поступила 11 февраля 197[...]

УДК 513

А. Д. МИЛКА

НОВЫЕ СВОЙСТВА КРАТЧАЙШИХ НА ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В заметке устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 1. *В трехмерном пространстве R_K с постоянной кривизной K на выпуклой поверхности каждая гладкая точка* *открытой кратчайшей, не сводящейся к прямолинейному отрезку, является также гладкой точкой поверхности.*

Теорема 2. *Пусть l — открытая кратчайшая в двумерном многообразии R с кривизной $\geqslant K$. Пусть $\{E_n | E_n \subset R\}$ — последовательность замкнутых множеств, сходящихся к замкнутому множеству $E \subset l$. Обозначим s_1, s_2 и s соответственно расстояния от концов l до E и длину содержащего E минимального интервала, h_n — высоту множества E_n над l. Тогда внешняя кривизна $\bar{\omega}(E_n)$ подчинена неравенству*

$$\bar{\omega}(E_n) \leqslant \begin{cases} 2\sqrt{K}\,(\operatorname{ctg}\sqrt{K}s_1 + \operatorname{ctg}\sqrt{K}s_2 - \delta_n\sqrt{K}s + \varepsilon_n)\,h_n \\ \qquad \text{при } K > 0 \\ 2\,(1/s_1 + 1/s_2)\,h_n \quad \text{при } K = 0, \\ 2\sqrt{-K}\,(\operatorname{cth}\sqrt{-K}s_1 + \operatorname{cth}\sqrt{-K}s_2 + \\ \quad + \delta_n\sqrt{-K}s + \varepsilon_n)\,h_n, \text{ при } K < 0, \end{cases}$$

где $\delta_n \to 1$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть l — открытая квазигеодезическая с нулевым поворотом на обе стороны в двумерном многообразии R с кривизной $\geqslant K$. Чтобы линия l была геодезической, необходимо и достаточно выполнение следующего условия. Для каждой точки $P \in l$ существует константа D_P такая, что для любой последовательности замкнутых множеств $\{E_n | E_n \subset R\}$, сходящихся к P, при больших n*

$$\bar{\omega}(E_n) \leqslant D_P h_n,$$

где h_n — высота E_n над l,

$$\bar{\omega} = \omega - K\sigma,$$

$\omega(\cdot)$ — обычная кривизна множества $(\cdot)$, а $\sigma(\cdot)$ его площадь. Если R — выпуклая поверхность в R_K, то функция $\bar{\omega}(\cdot)$ — обычная внешняя кривизна множества $(\cdot)$ [1].

1°. Первая теорема, которую можно назвать теоремой о гладкой точке кратчайшей, как гипотеза высказывалась в [2] и, для евклидова пространства, в [3]. Там же были даны доказательства соответственно для случая поверхности вращения и случая поверхности с плоскостью симметрии, которой (плоскости) принадлежит рассматриваемая кратчайшая. Для произвольных поверхностей в евклидовом пространстве эта теорема была установлена в [4, 5]. Теорема 2 распространяет на многообразия с кривизной $\geqslant K$ точные оценки из [6].

Ограничимся лишь доказательством теоремы 1, которое приводится в п. 2°. Из этого доказательства ясно, как устанавливается и вторая теорема. Необходимость условия теоремы 3 следует из теоремы 2; его достаточность показывается так же, как для случая евклидова пространства [7]. По поводу теоремы 2 существенно подчеркнуть следующее [8]. Длина кратчайшей l

на выпуклой поверхности в R_K при $K>0$ всегда подчинен[а] условию

$$|l| \leqslant \pi/\sqrt{K},$$

если здесь выполняется равенство, то при больших n будет тож[]дественно

$$\bar{\omega}(E_n) = 0.$$

Заметим, что эта же теорема в регулярном случае дает оцен[]ку для интеграла от внешней кривизны $\bar{K}$ метрики на стро[гом] внутреннем интервале E кратчайшей l:

$$\int_E \bar{K} ds \leqslant \begin{cases} 2\sqrt{K}(\operatorname{ctg}\sqrt{K}s_1 + \operatorname{ctg}\sqrt{K}s_2 - \sqrt{K}s) \text{ при } K>0, \\ 2(1/s_1 + 1/s_2) \text{ при } K=0, \\ 2\sqrt{-K}(\operatorname{cth}\sqrt{-K}s_1 + \operatorname{cth}\sqrt{-K}s_2 - \sqrt{-K}s) \text{ при } K<0. \end{cases}$$

Подобная оценка — с константой 1 вместо 2 — устанавлива[]ется также и с помощью одного результата Калаби [9]

2°. Докажем теорему 1. Предположим, что утверждение тео[]ремы не выполняется.

Пусть F — выпуклая поверхность в пространстве R_K и l — кратчайшая на этой поверхности, проходящая через ребристу[ю] точку P в направлении ребра F и не сводящаяся к прямоли[]нейному отрезку в окрестности этой точки. Выберем точки X, $Y \in l$ по разные стороны от P и проведем через них плоскост[ь] τ, перпендикулярную к биссекторной плоскости соприкасающе[]гося двугранного угла поверхности в точке P. При достаточно[й] близости X, Y к P плоскость τ отсекает от F открытую шапоч[]ку G. Внешняя кривизна этой шапочки оценивается снизу в за[]висимости от ее внешне геометрических размеров [10, гл. II, § 3 и гл. VII, § 7]. На основании этого тем же способом, кото[]рым мы пользовались в [4] в случае евклидова пространства, устанавливается следующее.

Существуют такие пары точек (X, Y), сколь угодно близки[х] к P, что для определяемых ими шапочек выполняется нера[]венство

$$\bar{\omega}(E) \geqslant h/\varepsilon. \tag{*}$$

Здесь E — одна из частей шапочки G, на которые эта ша[]почка разделяется линией l, h — высота E над l, $\varepsilon \to 0$ при $X, Y \to P$. Считается, что множества $\{E\}$ принадлежит одной полуокрестности Λ кратчайшей l на F.

Обозначим: R, Q — концы кратчайшей; A, $B \in l$ — точки, и[з] которых исходят соответственно кратчайшие α, $\beta \subset \Lambda$, ортого[]нальные l. Предполагается, что на кратчайшей l в смысле по[]рядка точек $R < A < P < B < Q$. Пусть H_t — замкнутый экви[]дистантный прямоугольник на F, ограниченный дугой $AB \subset l$, дугами $AA_t \subset \alpha$, $BB_t \subset \beta$ и дугой $\breve{A_t B_t} \subset l_t$, где l_t — эквидистант[а] высоты t над l в Λ. Пусть s_t, σ_t — длина $A_t \breve{} B_t$, площадь H_t и $s_{\alpha, t}$, $s_{\beta, t}$ — длины кратчайших RA_t, QB_t на поверхности; по непрерывности

$$s_0 = |AB|, \quad s_{\alpha, 0} = |RA|, \quad s_{\beta, 0} = |QB|.$$

Согласно результатам Ю. Ф. Борисова [11, 12] при малых t линии l_t просто покрывают полуокрестность Λ, линии $A_t \breve{} B_t$ — простые кривые с ограниченными вариациями поворота, s_t и σ_t — абсолютно непрерывные функции.

Множества $\{E\}$ стягиваются к точке P. Поэтому можно принять, что каждое конкретное множество E (высота которого над l равна h) принадлежит прямоугольнику H_h.

Покажем, что при достаточно малом h линия

$$l_{2h} \equiv RA_{2h} U A_{2h}\breve{} B_{2h} U B_{2h} Q$$

короче l. Рассмотрим в K-плоскости треугольники $\Delta R' A' A'_{2h}$ и $\Delta Q' B' B'_{2h}$, соответствующие треугольникам ΔRAA_{2h} и ΔQBB_{2h} на поверхности. При $h \to 0$ кривизны и площади треугольников на F стремятся к нулю, поэтому углы соответствующих плоских треугольников в вершинах A' и B' стремятся к $\pi/2$. Отсюда вытекают неравенства

$$s_{\alpha, h} \leqslant s_{\alpha, 0} + C_\alpha h^2, \quad s_{\beta, h} \leqslant s_{\beta, 0} C_\beta h^2,$$

где C_α, C_β — не зависящие от h постоянные, значения которых просто выписываются. Функция $\omega(H_t)$, как сумма двух монотонных по t функций, интегрируема. Применяя формулы Ю. Ф. Борисова из (11) для вариаций длины s_t и площади σ_t, формулу Гаусса—Бонне, учитывая аддитивность и неотрицательность функции множества $\bar{\omega}(\cdot)$ и используя неравенство $(*)$, получаем

$$s_{2h} - s_0 \leqslant -\int_0^{2h} \omega(H_t)\,dt \leqslant -\int_h^{2h} \bar{\omega}(H_t)dt - K\int_0^{2h} \sigma_t dt \leqslant$$

$$\leqslant -\bar{\omega}(H_h)\,h - 2\delta(h)\,Ksh^2 \leqslant -\bar{\omega}(E)\,h - 2\delta(h)\,Ksh^2 \leqslant$$

$$\leqslant -h^2/\varepsilon - 2\delta(h)\,Ksh^2,$$

где $\delta(h) \to 1$ при $h \to 0$.

Собирая установленные неравенства для длин s, находим

$$|\tilde{l}_{2h}| \leqslant |l| - h^2/\varepsilon',$$

где $\varepsilon' \to 0$ при $h \to 0$. Тем самым доказывается, что линия l на поверхности F — не кратчайшая. Следовательно, наше исходное предположение неверно.

Теорема доказана.

Замечание. Попутно по существу нами найдено неравенство вида

$$|\tilde{l}_{2h}| \leqslant |l| - \bar{\omega}(H_h)\,h + (\cdots)\,h^2,$$

на котором основывается доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Кривизна выпуклых поверхностей.—ДАН СССР 1945, т. 50, № 1, с. 23—26.
2. *Милка А. Д.* Об одном признаке сферы.—«Укр. геометр. сб.» Вып. 9, Харьков, 1970, с. 78—86.
3. *Залгаллер В. А.* Вопрос о сферическом изображении кратчайшей.—«Укр. геометр. сб.», Вып. 10, Харьков, 1971, с. 12—18.
4. *Милка А. Д.* Теорема о гладкой точке кратчайшей.—«Укр. геометр. сб.» Вып. 15. Харьков, 1974, с. 62—70.
5. *Дубровин А. А.* О регулярности выпуклой поверхности в окрестности кратчайшей.—«Укр. геометр. сб.» Вып. 15. Харьков, 1974, с. 42—54.
6. *Милка А. Д.* Оценки для кривизны множества на выпуклой поверхности, примыкающего к кратчайшей.—«Укр. геометр. сб.» Вып. 15, Харьков, 1974, с. 70—80.
7. *Милка А. Д.* Кратчайшая с неспрямляемым сферическим изображением.— «Укр. геометр. сб.» Вып. 16, Харьков, 1974, с. 20—25.
8. *Милка А. Д.* Об одном классе пространств, содержащих прямые линии.— «Укр. геометр. сб.» Вып. 4, Харьков, 1967, с. 43—48.
9. *Calabi E.* On Ricci curvature and geodesics.—Duke Math. Journ., 1967, vol. 34, № 4, p. 667—676.
10. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969. 760 с.
11. *Борисов Ю. Ф.* Геометрия полуокрестности кривой в двумерном многообразии ограниченной кривизны.—ДАН СССР, 1955, т. 103, № 4, с. 537—539.
12. *Борисов Ю. Ф.* Полуокрестность и вариация длины кривой на поверхности.—В сб.: Двумерные многообразия ограниченной кривизны, ч. II. Тр. МИАН СССР, 1965, т. 76, с. 26—48.

Поступила 18 февраля 1974 г.

УДК 513

А. Д. МИЛК[…]

ОСОБЕННОСТЬ У КОНЦА КРАТЧАЙШЕЙ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ. II

Пусть l — открытая кратчайшая на выпуклой поверхности [F], оканчивающаяся в точке P и не сводящаяся к прямолиней[ному] отрезку в окрестности этой точки. Предел внешних норма[лей] к F в точках кратчайшей l при стремлении точек к P на[зы]вается предельной нормалью. Больший из углов $\nu_l(P)$ ме[жду] предельными нормалями называется колебанием сферическо[го] изображения l в точке P. Аналогично определяются предель[ные] нормали и колебание сферического изображения $\nu_l(P)$ в бес[ко]нечно удаленной точке P луча l на бесконечной выпуклой [по]верхности.

Существуют кратчайшие и лучи с ненулевым колебан[ием] $\nu_l(P)$ [1, 2].

В этой статье устанавливается, что существуют кратчай[шие] и лучи с колебанием $\nu_l(P)=\pi/2$.

Внешне геометрическое исследование подобных линий встр[ечa]ется с затруднениями ввиду ограниченной возможности при[ме]нения леммы Либермана. В дополнение нами показывается [(на] примерах плоских лучей и кратчайших), что колебание $\nu_l(P)$ может принимать любые значения из интервала $(0, \pi/2)$; кро[ме] этого приводится пример луча с нулевым колебанием $\nu_l(P)$ [и] с неспрямляемым сферическим изображением в окрестно[сти] бесконечно удаленной точки P.

По-видимому, и для кратчайшей, и для луча на поверхно[сти]

$$\nu_l(P) \leqslant \pi/2.$$

Имевшееся в виду в [1] доказательство этого факта в основном применимо только для случая плоской линии; оно излагается в § 6.

Нами также указывается пример кратчайшей, оканчивающейся в гладкой точке поверхности, с неспрямляемым сферическим изображением в окрестности этой точки и непродолжаемой, т. е. не являющейся внутренним участком некоторой геодезической.

Заметим, что в [1] использовалось значение «предельный угол», дополняющее $\nu_l(P)$ до π.

1°. Построение поверхностей

В дальнейшем считается, что в пространстве фиксирована декартова координатная система (x, y, z).

Введем выпуклую ломаную L в плоскости (x, y), обращенную выпуклостью в направлении оси (x). Пусть $P_n, P_{n+1}, \ldots, P_k, \ldots$ — последовательные вершины этой ломаной; если $\{P_k\}$ имеют предельную точку P, то полагаем $P \equiv (0, 0, 0)$; считается, что n достаточно велико и фиксировано. Угол между вектором P_kP_{k-1} и направлением оси (y) будем обозначать α_k, длину указанного вектора s_k. Проведем плоскость E_k через отрезок $P_{k-1}P_k$ с четным (нечетным) номером k, пересекающую положительную (соответственно — отрицательную) полуось (z) под углом γ_k; нормаль к E_k, обращенную в направлении оси (x), будем обозначать n_k. Пересечение полупространств с внешними нормалями $\{n_k\}$, определяемых плоскостями $\{E_k\}$, является выпуклым телом. Границу замыкания этого тела, выпуклую бесконечногранную поверхность, будем обозначать F. Если L ограничена, то ее направление на F в точке P будем обозначать e. Поверхность F и есть искомая для определенных значений $\{\alpha_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{s_k\}$.

Приведем уравнения соответствующих поверхностей.

Поверхность $F_{\pi/2}$:

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \ \operatorname{tg} \gamma_k = 1 - \frac{\gamma}{k} (\gamma = \text{const} > 1), \ s_k = e^{-k^2}.$$

Поверхность

$$F_\mu \, (0 < \mu = \text{const} < \pi/2):$$

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \ \gamma_k \equiv \mu, \ s_k = e^{-k^2}.$$

Поверхность F_0:

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \ \operatorname{tg} \gamma_k = \frac{1}{k}, \ s_k = e^{-k^2}.$$

На каждой из этих поверхностей из точки P в направлении e исходит кратчайшая, имеющая в этой точке колебание сферического изображения, соответственно равное $\pi/2$, μ, 0; кратчайшая на F_0 не продолжается за точку P (§ 5) и имеет в окрестности этой точки неспрямляемое сферическое изображение

Поверхность $F^{\infty}_{\pi/2}$:

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \ \operatorname{tg}\gamma_k = 1 + \frac{\gamma}{k}\gamma \neq 0; \ \gamma = \text{const} < 1, \ s_k = e^{k^2}.$$

Поверхность F^{∞}_{μ} $(0 < \mu = \text{const} < \pi/2)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \ \gamma_k \equiv \mu, \ s_k = e^{k^2}.$$

Поверхность F^{∞}_0:

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \ \operatorname{tg}\gamma_k = \frac{1}{k}, \ s_k = e^{k^2}.$$

На каждой из этих поверхностей имеется луч того же направления, что и L на бесконечности с колебанием сферического изображения, соответственно равным $\pi/2$, μ, 0; указанный луч на F^{∞}_0 в окрестности бесконечно удаленной точки — с неспрямляемым сферическим изображением.

Схемы исследования введенных поверхностей принципиально близки.

Рассмотрим случай ограниченной ломаной L.

Аналогично построению F можно определить поверхности F^+ и F^- с помощью плоскостей E_k с четными и соответственно нечетными номерами k. Для этих поверхностей имеет место такое утверждение о распределении кривизны.

Кривизна поверхности F^+ (F^-) сосредоточена в полупространстве

$$z > Dy \, (z < Dy),$$

где $D > 0$ — некоторая постоянная.

Отсюда вытекает, что в малой окрестности точки P в некотором замкнутом секторе на поверхности с вершиной в P, содержащем внутри направление e, F устроена следующим образом.

Поверхность F представляет собой бесконечногранную выпуклую поверхность, вершинами которой являются точки $Q_k = E_k \cap E_{k+1} \cap E_{k-1}$, а ребрами служат отрезки Q_kQ_{k+1} и соответствующие части линий $E_{k+1} \cap E_{k-1}$.

Введем вспомогательные ломаные $L^+ = \ldots Q_kQ_{k+2} \ldots$ и $L^- = Q_kQ_{k+2}$, составленные из прямолинейных отрезков Q_kQ_{k+2} в гранях поверхности, определяемые нечетными и соответственно четными номерами k точек Q_k. Рассматриваемая угловая окрестность P делится этими ломаными на три части, каждая из которых развертывается на плоскость: часть Δ, содержащая соответствующий участок L, и части Δ^+, Δ^-, в границы которых соответственно входят участки ломаных L^+, L^-. Устанавливается, что ломаные L^+ и L^- исходят из P в направлении e и имеют на F со стороны Δ отрицательные повороты, а со стороны $\Delta^\pm$

Δ^- — положительные. Рассмотрим в Δ открытую геодезическую, исходящую из P в направлении e. Устанавливается, что эта геодезическая — кратчайшая на F в окрестности P. Это и есть искомая кратчайшая l: колебание $\nu_l(P)$ по построению имеет заданное значение.

Случай поверхности F, соответствующей неограниченной ломаной L рассматривается подобно; соответствующие рассуждения здесь проводятся в окрестности бесконечно удаленной точки P. Вводятся поверхности F^+, F^-; показывается, что кривизны этих поверхностей, если n велико, сосредоточены в полупространстве

$$y < D,$$

где $D > 0$ — постоянная. Определяются линии L^+, L^- и области Δ, Δ^+, Δ^-. Устанавливается, что повороты L^+, L^- со стороны Δ положительные, а эти линии в этой области имеют на бесконечности общее направление; их повороты со стороны Δ^+, Δ^- — положительные для поверхностей $F^\infty_{\pi/2}$ и F^∞_μ и отрицательные — в случае F^∞_0. Каждый луч l в области Δ на достаточно удаленной части является также лучом на F. Луч l и есть искомый, с заданным по построению колебанием $\nu_l(P)$ на бесконечности.

В связи с изложенным, в дальнейшем будет изучаться только поверхность $F_{\pi/2}$ (кроме п. п. 5 и 6).

2°. Распределение кривизны

Пусть $D > 0$ — фиксированное число, для которого $D\gamma < 1$. Пусть (x, y, z) — точки пересечения плоскостей E_p, E_s и E_q, где $p < s < q$ — числа одинаковой четности. Докажем, что при большом n, независимо от выбора этих чисел,

$$|\bar{z}| > D|\bar{y}|. \tag{*}$$

Уравнение плоскости E_k;

$$x \cos\alpha_k + y \sin\alpha_k + z(-1)^k \operatorname{tg}\gamma_k = \varphi(k),$$

где

$$\varphi(k) = \sum_{j>k} s_j \sin(\alpha_k - \alpha_j).$$

Обозначение:

$$\varkappa = \operatorname{tg}\gamma_p \sin(\alpha_s - \alpha_q) + \operatorname{tg}\gamma_q \sin(\alpha_p - \alpha_s) - \operatorname{tg}\gamma_s \sin(\alpha_p - \alpha_q).$$

Решая соответствующую систему уравнений для $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, находим

$$(|\bar{z}| - D|\bar{y}|) = \varphi(p)[\sin(\alpha_s - \alpha_q) + D(\operatorname{tg}\gamma_s \cos\alpha_q - \operatorname{tg}\gamma_q \cos\alpha_s)] + \varphi(q)[\sin(\alpha_p - \alpha_s) + D(\operatorname{tg}\gamma_p \cos\alpha_s - \operatorname{tg}\gamma_s \cos\alpha_p)] - \varphi(s)[\sin(\alpha_p - \alpha_q) + D(\operatorname{tg}\gamma_p \cos\alpha_q - \operatorname{tg}\gamma_q \cos\alpha_p)].$$

Правая часть этого равенства положительная; она не меньше

$$[\delta(p) - D\gamma\delta(p)]\, e^{-(p+1)^2} \cdot \frac{1}{p^2 s^2} - [\delta(p) - D\gamma\delta(p)]\, e^{-(s+1)^2} \cdot \frac{1}{ps^2} > 0.$$

Здесь символом $\delta(p)$ обозначаются функции, стремящиеся к единице при $p \to \infty$, точное выражение которых для нас не существенно. Для доказательства (*) достаточно убедиться, что также является положительной величина $\varkappa$.

Имеем $\varkappa = f(s)$, где

$$f(t) = \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right)\sin\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{q}\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{q}\right)\sin\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right) - \\ - \left(1 - \frac{\gamma}{t}\right)\sin\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$$

— функция, определенная на интервале $p \leqslant t \leqslant q$. Поскольку $f(p) = f(q) = 0$, а в точке экстремума $\bar{t}$

$$f''(\bar{t}) = -\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right)\sin\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{q}\right) - \left(1 - \frac{\gamma}{q}\right)\sin\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t}\right) < 0,$$

то $f = f(t)$ внутри (p, q) положительная. Следовательно, $\varkappa > 0$.

3°. Вспомогательные величины

Обозначения:

δ_k' и δ_{k-1}'' — углы в вершинах P_k и P_{k-1} треугольника $\Delta P_k P_{k-1} Q_k$;

η_k' и η_k'' — углы в вершине Q_k в $\Delta Q_k Q_{k+1} Q_{k+2}$ и $\Delta Q_k Q_{k-1} Q_{k-2}$;

τ_k — поворот L в вершине P_k со стороны точки Q_k на F;

τ_{kQ} — поворот L^+(k — нечетное) или L^- (k — четное) в точке Q_k со стороны Δ;

ω_k — кривизна F в вершине Q_k;

ν_k, $\bar{\nu}_k$ соответственно углы между нормалями n_k и n_{k+1}, n_{k+1} и n_{k-1}.

1) Имеем

$$\operatorname{tg}\delta_k' = \frac{\sin(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{\cos\gamma_k\,[\operatorname{tg}\gamma_{k+1} + \operatorname{tg}\gamma_k\cos(\alpha_k - \alpha_{k+1})]} = \frac{\sqrt{2}}{2k^2} + 0\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

$$\operatorname{tg}\delta_{k-1}'' = \frac{\sin(\alpha_{k-1} - \alpha_k)}{\cos\gamma_k\,[\operatorname{tg}\gamma_{k+1} + \operatorname{tg}\gamma_k\cos(\alpha_{k-1} - \alpha_k)]} = \frac{\sqrt{2}}{2k^2} + 0\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

2) $\tau_k = \delta_k'' - \delta_k'$, поэтому из 1) следует, что

$$\tau_k > 0,\ \tau_k = 0\left(\frac{1}{k^4}\right),$$

и что τ_k монотонно убывает при $k \to \infty$.

3) Применяя к $\Delta Q_k Q_{k+1} Q_{k+2}$ теорему синусов, учитывая равенство $\eta_k'' + \eta_{k-2} = \delta_{k-1} + \delta_{k-2}$ и используя соответствующие значения s_k, δ_k и δ_k'', находим

$$\eta_k' = 0\left(\frac{1}{k^2}e^{-2k}\right),\ \eta_k'' = \delta_{k-1}' + \delta_{k-2}'' + 0\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

4) Из 1) получаем

$$\delta_{k-1}-\delta_k'=\frac{\sqrt{2}}{k^3}+0\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

Поэтому, учитывая 2), имеем

$$-\tau_{k,Q}=\delta_{k-2}''-\delta_{k-1}'+\delta_{k-1}''-\delta_k'+0\left(\frac{1}{k^4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{k^3}+0\left(\frac{1}{k^4}\right)>0.$$

5) Таким образом, ломаные L^+ и L^- имеют на поверхности F со стороны Δ отрицательные, а со стороны Δ^+ и Δ^- соответственно положительные повороты; эти ломаные образуют в точке P нулевой угол, поскольку δ_k', $\delta_k''\to 0$ при $k\to\infty$, и, следовательно, имеют в P то же направление, что и L. Кроме того, теперь очевидно, что в области Δ существует исходящая из P в направлении e линия l, которая обладает свойствами: l — геодезическая, если из нее исключить P; l пересекает все ребра поверхности $Q_{n+1}Q_{n+2}$, $Q_{n+2}Q_{n+3}$, ...

Угол ξ_k в Δ между отрезком P_kP_{k+1} и l равен

$$\xi_k=0\left(\frac{1}{k^4}\right),$$

поскольку из 2)

$$|\xi_k|=\left|\sum_{j\geqslant k}(-1)^j\tau_j\right|<\tau_k.$$

Пусть $\delta_{k,l}$ — острый угол пересечения отрезка $Q_{k+1}Q_k$ с l. Тогда

$$\delta_{k,l}=\delta_k'\pm\xi_k=\delta_k'+0\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

Замечание. Можно показать, что вблизи P линия l последовательно пересекает звенья ломаной L.

6) Найдем кривизну поверхности в точке Q_k.

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\frac{\omega_k}{2}=\frac{\sin\frac{\nu_{k-1}}{2}\cdot\sin\frac{\nu_k}{2}}{\cos\frac{\bar\nu_k}{2}}\sin(\delta_k'+\delta_{k-1}'').$$

Выписывая соответствующие скалярные произведения между нормалями n_k, n_{k+1} и n_{k-1}, получим

$$\cos\bar\nu_k=1+0\left(\frac{1}{k^2}\right),\quad \cos\nu_{k-1}=\frac{\gamma}{k}+0\left(\frac{1}{k^2}\right),\quad \cos\nu_k=\frac{\gamma}{k}+0\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Таким образом,

$$\omega_k=\left(1-\frac{\gamma}{k}\right)(\delta_k'+\delta_{k-1}'')+0\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

4°. Доказательство основного утверждения

Достаточно установить, что линия l, построенная в 5) п. 3° — кратчайшая на поверхности F в малой окрестности точки P. Допустим противное. Тогда существует последовательность кратчайших $\{\widetilde{XY}\}$ с концами $X, Y \in l$ $(\widetilde{XY} \neq XY \subset l)$, стягивающимися к точке P. Для определенности можно принять, что линия $\widetilde{XY}$ располагается относительно l по ту же сторону, что и L^+, и что Y на l ближе к P, чем X.

Кратчайшая $\widetilde{XY}$ и дуга XY ограничивают на поверхности луночку Λ. Учитывая характер распределения кривизны на F, можем принять, что кривизна внутренности Λ сосредоточена только в точках Q_j, попадающих в луночку. Пусть $Q_{m_1}, Q_{m_1+2}, \ldots, Q_{m_2}$ — все эти точки и $Z \in Q_{m_2}Q_{m_2+2}$ — точка пересечения $\widetilde{XY}$ и L^+. Проведем в $\Lambda \cap \Delta$ и в $\Lambda \cap \Delta^+$ соответственно геодезические $XQ_{m_1}, XQ_{m_1+2}, \ldots, XQ_{m_2}$ и $ZQ_{m_1}, ZQ_{m_1+2}, \ldots, ZQ_{m_2-2}$. Для любой из вершин Q_j в Λ рассмотрим двухзвенную ломаную XQ_jZ, составленную из геодезических XQ_j, ZQ_j и обозначим φ_j и $\bar{\varphi}_j$ соответственно углы на F при ее вершине Q_j со стороны точек Q_{j+2} и Q_{j-2}.

Покажем, что при любом j выполняется неравенство

$$\bar{\varphi}_j > \varphi_j. \tag{*}$$

Имеем

$$\varphi_j = \zeta_j + \eta_j + \pi - \delta_{j,l} - \delta_j,$$

где ζ_j — угол в $\Lambda \cap \Delta^+$ между отрезками Q_jQ_{j+2} и Q_jZ, а δ_j — наклон геодезической XQ_j к линии l в Δ. Легко устанавливается, что независимо от выбора точки P_j и луночки Λ вблизи P

$$\zeta_j = 0\left(\frac{1}{j^2}e^{-4j}\right).$$

Тогда учитывая 3) и 5) п. 3° и равенство $\bar{\varphi}_j = 2\pi - \omega_j - \varphi_j$, находим

$$\bar{\varphi}_j - \varphi_j = 2\delta_j' - \omega_j + 2\delta_j + 0\left(\frac{1}{j^4}\right).$$

Из 1), 4) и 6) п. 3°

$$2\delta_j' - \omega_j = 2\delta_j' - \left(1 - \frac{\gamma}{j}\right)(\delta_j' + \delta_{j-1}'') + 0\left(\frac{1}{j^4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}(\gamma - 1)\frac{1}{j^3} + 0\left(\frac{1}{j^4}\right).$$

Поэтому $\bar{\varphi}_j - \varphi_j > \sqrt{2}(\gamma - 1)\frac{1}{j^3} + 0\left(\frac{1}{j^4}\right) > 0$.

Для пар соседних точек Q_k, принадлежащих Λ, построим плоские четырехугольники $\{\Delta_l = X'Q_l'Z'Q_{l+2}X'\}$, соответствующие как развертки четырехугольникам $\{XQ_jZQ_{j+2}X\}$ на поверхности. С целью упрощения для одноименных вершин Δ_j употребляются тождественные обозначения; надо понимать, что геометрически эти вершины различные. Обозначим d_j длину диагонали $X'Z'$ четырехугольника Δ_j, d' — длину геодезической $XZ \subset \Delta$, d — длину отрезка $XY \subset l$, $\tilde{d}'$ — длину участка XZ кратчайшей $\widetilde{XY}$, d'' — длину ее участка ZY, $\tilde{d}$ — длину всей кратчайшей.

Справедлива цепочка неравенств

$$\tilde{d}' > d_{m_1} > d_{m_1+2} > \ldots > d_{m_2-2} > d'.$$

Первое из этих неравенств вытекает из (*). Второе устанавливается так же, если в четырехугольнике Δ_{m_1} угол при вершине Q'_{m_1+2} меньший π; в противном случае второе неравенство следует из положительности кривизны поверхности в точке Q_{m_1+2}. Аналогично выводятся остальные неравенства.

Тогда

$$\tilde{d} = \tilde{d}' + d'' > d' + d'' > d,$$

а это противоречит нашему предположению.

Основное утверждение доказано.

5°. Непродолжаемая кратчайшая

Утверждается, что кратчайшая l на F_0, исходящая из точки P в направлении L, непродолжаемая. Допустим противное. Пусть $\bar{l}$ — геодезическая, проходящая через P, причем $\bar{l} \supset l$. Пусть h_k — высота Q_k над l, ω_k — кривизна F в Q_k и Q_{m_l} — подпоследовательность из точек Q_k, обладающих свойством:

$$h_{m_l} \geqslant_{j>0} h_{m_l+2j}.$$

Обозначим H_{m_l} замкнутый эквидистантный прямоугольник с высотой h_{m_l}, содержащий точки $\{Q_{m_l+2j} \mid j \geqslant 0\}$, Ω_{m_l},—кривизну H_{m_l}. Считаем, что прямоугольники $\{H_{m_l}\}$ стягиваются к точке P.

Справедлива оценка [3]: $\Omega_{m_l} \leqslant Ch_{m_l}$,

где $C = \mathrm{const} > 0$. Имеем

$$\omega_k = 2\delta(k)\frac{1}{k^3},\ h_k = \frac{\delta(k)}{2k}e^{-k^2}.$$

Тогда

$$Ch_{m_l} \geqslant \Omega_{m_l} \geqslant \sum_{j>0} \omega_{m_l+2j} \geqslant \frac{\delta(l)}{2m_l^2} = \frac{2\delta(l)}{m_l} e^{m_l^2} h_{m_l}.$$

Полученное противоречие показывает, что l непродолжаемая.

6°. Оценка колебания сферического изображения

Пусть l — кратчайшая или луч на выпуклой поверхности F с колебанием $\nu_l(P)$ в соответствующей точке, и пусть l — плоская линия. Тогда $\nu_l(P) \leqslant \pi/2$.

Доказательство. Рассмотрим случай кратчайшей. Нетрудно устанавливается, что линия l — бесконечнозвенная ломаная, звенья которой сгущаются к точке P, и что опорные плоскости к поверхности, проведенные через эти звенья, наклонены к плоскости линии l под постоянным углом $(\pi - \nu_l(P))/2$. Бесконечногранная выпуклая поверхность Φ, которую определяют эти опорные плоскости, обладает следующими свойствами. Ломаная l — кратчайшая на Φ; каждые три соседние вдоль l грани Φ образуют трехгранный угол, окрестность вершины которого принадлежит Φ. Пусть V — такой угол, ω — его кривизна в вершине, g_1 и g_2 — ребра V, пересекающие l соответственно в точках P_1 и P_2, δ_1 и δ_2 — углы между g_1 и g_2 и звеном $P_1P_2 \subset l$, ν_1 и ν_2 — соответственно углы между нормалями к граням Φ, сходящимся в этих ребрах. Считаем, что точка P_2 располагается ближе к P, чем P_1. Если звено P_1P_2 стремится к P, то δ_1, $\delta_2 \to 0$ и ν_1, $\nu_2 \to \nu_l(P)$, поэтому найдутся такие углы V, для которых $\delta_2 < \delta_1$. Можно установить [3], что $\omega \leqslant 2(1+\varepsilon)\delta_2$, где $\varepsilon \to 0$. Из точного выражения для кривизны ω (п.3°) тогда имеем

$$\sin\frac{\nu_1}{2}\sin\frac{\nu_2}{2} \leqslant (1+\varepsilon')\frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2} \leqslant \frac{1+\varepsilon'}{2},$$

где также $\varepsilon' \to 0$. Переходя к пределу, находим

$$\sin^2\frac{\nu_l(P)}{2} \leqslant \frac{1}{2} \text{ и } \nu_l(P) \leqslant \pi/2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Милка А. Д.* Особенность у конца кратчайшей на выпуклой поверхности, I. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 14. Харьков, 1973, с. 48—55.
2. *Борисенко А. А.* О сферическом изображении кратчайшей на выпуклой поверхности. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 10, Харьков, 1971, с. 11—12.
3. *Милка А. Д.* Оценки для кривизны множества, примыкающего к кратчайшей. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 15, Харьков, 1974, с. 20—25.

Поступила 16 февраля 1974 г.

Е. П. СЕНЬКИН

УДК 513

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «НЕИЗГИБАЕМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ»

В работе* доказана однозначная определенность и жесткость замкнутых выпуклых гиперповерхностей n-мерного евклидова пространства. Там же доказана однозначная определенность и жесткость выпуклых гиперповерхностей в окрестности точек строгой выпуклости. Теоремы жесткости получены для общих выпуклых гиперповерхностей, теоремы однозначной определенности — при условии гладкости.

В настоящей заметке будут усилены теоремы локальной неизгибаемости.

Теорема 1. *Выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности $n-1$, жесткая в окрестности каждой точки, не лежащей в плоской области размерности $n-2$ и $n-3$,*

---

* *Е. П. Сенькин.* Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей.—«Украинский геометрический сборник». Вып. 12. Харьков, 1972, с. 131—152.

Если же гиперповерхность содержит $(n-1)$-мерные плоские области, то она жесткая в окрестности указанных точек вне $(n-1)$-мерных плоских областей.

Теорема 2. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные гладкие выпуклые гиперповерхности. Пусть P_1 — точка на F_1, не принадлежащая плоским областям размерности $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, а P_2 — точка на F_2, соответствующая по изометрии P_1. Тогда достаточно малые окрестности точек P_1 и P_2 конгруентны.*

Доказательство теоремы 1.

Пусть x_0 — точка гиперповерхности F, не принадлежащая плоским областям размерности $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$.

Если x_0 — точка строгой выпуклости, то, как показано в [1], гиперповерхность в окрестности точки x_0 — жесткая вне $(n-1)$-мерных плоских областей.

Покажем, что она жесткая вне $(n-1)$-мерных плоских областей в окрестности точки x_0, если x_0 принадлежит плоской области размерности не выше $n-4$.

Доказательство будем вести по индукции. Трехмерная гиперповерхность четырехмерного пространства жесткая в окрестности точки строгой выпуклости (нуль-мерная плоская область) вне трехмерных плоских областей.

Предположим, что $(n-2)$-мерная гиперповерхность $(n-1)$-мерного пространства жесткая в окрестности точки плоской области размерности $(n-1)-k$ $(k \geqslant 4)$ вне $(n-2)$-мерных плоских областей и покажем, что $(n-1)$-мерная гиперповерхность n-мерного пространства жесткая в окрестности точки плоской области размерности $n-k$ $(k \geqslant 4)$ вне $(n-1)$-мерных плоских областей.

Пусть точка x_0 гиперповерхности F принадлежит плоской области L размерности $n-k$ $(k \geqslant 4)$. Проведем через точку x_0 гиперплоскость P, пересекающую плоскую область L. Она пересечет гиперповерхность F по некоторой $(n-2)$-мерной выпуклой поверхности F_1, причем на F_1 точка x_0 будет принадлежать плоской области размерности $(n-1)-k$ $(k \geqslant 4)$. По предположению индукции F_1 будет жесткой в гиперплоскости P вне $(n-2)$-мерных плоских областей.

Покажем, что F_1 будет жесткой в P и на $(n-2)$-мерных плоских областях. Пусть точки x и y на F_1 не принадлежат $(n-1)$-мерной плоской области на F и хотя бы одна из них принадлежит $(n-2)$-мерной плоской области на F_1.

Повернем гиперплоскость P вокруг отрезка xy в положение P_1. Если поворот достаточно мал, то P_1 пересечет плоскую область L по плоской области размерности $(n-1)-k$, $(k \geqslant 4)$, а гиперповерхность F по некоторой $(n-2)$-мерной поверхности F_2. На F_2 точки x и y уже не будут принадлежать $(n-2)$-мерным плоскостям, так как в противном случае они должны принадлежать $(n-1)$-мерной плоской области на F.

По предположению индукции поверхность F_2 жесткая вне $(n-2)$-мерных плоских областей. Следовательно, расстояние между точками x и y стационарно, а это и значит, что F_1 жесткая в P и на $(n-2)$-мерных плоских областях.

Таким образом, все сечения гиперповерхности F гиперплоскостями, проходящими через точку x_0 и пересекающими L, жесткие вне точек на $(n-1)$-мерных плоских областях. То же верно и для всех сечений, проходящих через любую точку, близкую x_0, и пересекающих L. А это и значит, что гиперповерхность F жесткая в окрестности точки x_0 вне $(n-1)$-мерных плоских областей.

Доказательство теоремы 2.

Движением совместим точки P_1 и P_2 так, чтобы совпали касательные гиперплоскости в этих точках и соответствующие по изометрии направления.

Пусть r_1 и r_2 радиусы-векторы гиперповерхностей F_1 и F_2.

Рассмотрим гиперповерхность Φ с радиусом-вектором

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Как показано в [1], она будет выпуклой в окрестности точки P, где P есть общее положение точек P_1 и P_2.

Векторное поле $\tau = r_1 - r_2$ будет изгибающим для Φ.

Так как точка P_1 на F_1 не принадлежит плоской области размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$, то и на Φ она не будет принадлежать плоской области размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$.

По теореме 1 гиперповерхность Φ будет жесткой в окрестности точки P вне $(n-1)$-мерных плоских областей. Но $(n-1)$-мерные плоские области на Φ получаются лишь в том случае, когда соответствующие им области на F_1 и F_2 также $(n-1)$-мерные и соответствуют по изометрии.

Следовательно, поле τ будет тривиальным вне $(n-1)$-мерных плоских областей на Φ, а это значит, что гиперповерхности F_1 и F_2 совпадают вне $(n-1)$-мерных плоских областей. Но тогда они совпадают и на $(n-1)$-мерных плоских областях.

Поступила 11 февраля 1974 г.

УДК 513

С. И. ФЕДИЩЕНКО

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. I.

Ранее [1] нами рассматривалось такое конформное отображение риманова пространства V_n на $\overline{V}_n$, при котором остается неизменной риманова кривизна K пространства V_n для каждой двумерной площадки. В данной работе исследуется конформное соответствие, при котором в точках пространств V_n и $\overline{V}_n$, имеющих одинаковые координаты в общей по отображению системе ординат, их римановы кривизны K и $\overline{K}$ в соответствующих двумерных направлениях связаны условием

$$\overline{K} = \rho K, \ \rho = \rho(x^1, \ \ldots, \ x^n). \tag{1}$$

Пусть два римановых пространства V_n и $\overline{V}_n$ находятся в конформном соответствии. Тогда их основные тензоры и тензоры кривизны связаны соотношениями [2]

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}, \ \sigma = \sigma(x^1, \ \ldots, \ x^n), \tag{2}$$

$$e^{-2\sigma}\overline{R}_{hijl} = R_{hijl} + g_{hl}\sigma_{ij} + g_{ij}\sigma_{hl} - g_{hj}\sigma_{il} - g_{il}\sigma_{hj} + \\ + (g_{hl}g_{ij} - g_{hj}g_{il})\Delta_1\sigma, \tag{3}$$

где

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,j}, \ \ \Delta_1\sigma = g^{hl}\sigma_{,h}\sigma_{,l} \ (i, \ j, \ h, \ l = 1, \ \ldots, \ n)$$

запятой обозначено ковариантное дифференцирование относительно связности пространства V_n.

Будем рассматривать лишь нетривиальные конформные отображения, т. е. при $\sigma \neq \text{const}$.

Риманова кривизна K пространства V_n в данной его точке для данной двумерной площадки $\{\lambda^i_{1|}, \ \lambda^i_{2|}\}$, как известно [2], определяется по формуле

$$K = \frac{R_{hijl}\lambda^h_{1|}\lambda^i_{2|}\lambda^j_{1|}\lambda^l_{2|}}{(g_{hj}g_{il} - g_{hl}g_{ij})\lambda^h_{1|}\lambda^i_{2|}\lambda^j_{1|}\lambda^l_{2|}}. \tag{4}$$

Потребуем, чтобы при конформном отображении V_n на $\overline{V}_n$ было выполнено условие (1). При таком условии на кривизны пространств V_n и $\overline{V}_n$ зависимость между их тензорами кривизны в силу (2) и (4) оказывается следующей:

$$\overline{R}_{hijl} = \rho e^{4\sigma} R_{hijl}.$$

Но тогда в соответствии с (3) тензор кривизны пространства V_n должен удовлетворять соотношению

$$(\rho e^{2\sigma} - 1) R_{hijl} = g_{hl}\sigma_{ij} + g_{ij}\sigma_{hl} - g_{hj}\sigma_{il} - g_{il}\sigma_{hj} + \\ + (g_{hl}g_{ij} - g_{hj}g_{il})\Delta_1\sigma. \tag{5}$$

Мы получили необходимые и достаточные условия того, что при конформном отображении пространства V_n на $\overline{V}_n$ его риманова кривизна в каждой точке для каждой двумерной площадки изменяется по закону (1). Исследуем эти условия.

Свернув (5) с g^{hl}, получим

$$(\rho e^{2\sigma} - 1) R_{ij} = (n-2)\sigma_{ij} + [\Delta_2\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma] g_{ij}, \tag{6}$$

где $\Delta_2\sigma = g^{hl}\sigma_{,hl}$, R_{ij} — тензор Риччи пространства V_n.

Свертывая (6) с g^{ij}, находим

$$\Delta_2\sigma = \frac{\rho e^{2\sigma} - 1}{2(n-1)} R - \frac{n-2}{2}\Delta_1\sigma, \tag{7}$$

где R — скалярная кривизна V_n. Подставляя (7) в (6), видим, что функция σ должна удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho e^{2\sigma} - 1}{n-2}\left[R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij}\right] - \frac{\Delta_1\sigma}{2} g_{ij}. \quad (8)$$

Соотношения (5) вследствие (8) принимают вид

$$(\rho e^{2\sigma} - 1) C_{hijl} = 0,$$

где C_{hijl} — тензор конформной кривизны.

Отсюда следует, что возможны два случая:

$$1)\quad \rho e^{2\sigma} - 1 = 0, \text{ т. е. } \rho = e^{-2\sigma}; \quad (9)$$

$$2)\quad C_{hijl} = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим только первый случай.

Уравнения (8) вследствие (9) принимают вид

$$\sigma_{ij} = -\frac{\Delta_1\sigma}{2} g_{ij},$$

следовательно, пространство V_n является в этом случае эквидистантным [3] (при $\Delta_1\sigma \neq 0$).

Найдем условия интегрируемости полученной системы, переписав ее в виде

$$\sigma_{,ij} = \sigma_{,i}\sigma_{,j} - \frac{\Delta_1\sigma}{2} g_{ij}. \quad (11)$$

Дифференцируя (11) ковариантно по x^l, учитывая (11) и то, что в этом случае

$$(\Delta_1\sigma)_{,l} = \sigma_{,l}\Delta_1\sigma, \quad (12)$$

получаем

$$\sigma_{,ijl} = 2\sigma_{,i}\sigma_{,j}\sigma_{,l} - \frac{\Delta_1\sigma}{2}(g_{ij}\sigma_{,l} + g_{il}\sigma_{,j} + g_{jl}\sigma_{,i}).$$

Альтернируя это соотношение по j и l и используя тождество Риччи

$$\sigma_{,ijl} - \sigma_{,ilj} = \sigma_{,m}R^m_{ijl},$$

приходим к соотношению

$$\sigma_{,m}R^m_{ijl} = 0. \quad (13)$$

Далее рассмотрим отдельно случаи неизотропности и изотропности вектора $\sigma_{,i}$:

а) $\Delta_1\sigma \neq 0$. Вектор $\sigma_{,i}$ будет неизотропным, а также неизотропной будет гиперповерхность $\sigma = \mathrm{const}$. Перейдем к новой системе координат, приняв эту гиперповерхность в качестве координатной поверхности $x^1 = \mathrm{const}$. Систему координат можно в этом случае построить таким образом, чтобы координатная гиперюверхность $x^1 = \mathrm{const}$ была ортогональна остальным координат-ым гиперповерхностям. В этом случае будем иметь

$$g_{11} \neq 0, \quad g_{ij} = 0 \quad (j = 2, \ldots n), \quad \sigma = x^1. \tag{14}$$

Из соотношения (12) находим $\Delta_1 \sigma = Ce^{\sigma}$, где C — произволь-ая отличная от нуля константа. В новой системе координат удет

$$\Delta_1 \sigma = Ce^{x^1}$$

А так как $\Delta_1 x^1 = g^{11}$, то $g^{11} = Ce^{x^1}$, и следовательно, в вы-ранной системе координат (ввиду невырожденности метрики)

$$g_{11} = \frac{1}{C} e^{-x^1}. \tag{15}$$

Уравнения (11) в развернутом виде запишутся следующим бразом:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \sigma}{\partial x^m} \Gamma_{ij}^m - \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \frac{\partial \sigma}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \Delta_1 \sigma g_{ij} = 0, \tag{16}$$

о в рассматриваемом случае дает нам

$$\Gamma_{ij}^1 = \frac{1}{2} Ce^{x^1} g_{ij} - \delta_i^1 \delta_j^1.$$

Остальные Γ_{ij}^l $(l \neq 1)$ — произвольные. Учитывая выражение мволов Кристоффеля второго рода через компоненты метриче-кого тензора, запишем последние уравнения в виде

$$\frac{\partial g_{1i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{1j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} = g_{ij} - \frac{2}{C} e^{-x^1} \delta_i^1 \delta_j^1. \tag{17}$$

При $i = j = 1$ решением уравнения (17) является функция (15). ри $i = 1$, $j \neq 1$ (или $j = 1$, $i \neq 1$) уравнения (17) выполняются ждественно. Для остальных значений i и j из (17) имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} = -g_{ij} \quad (i, j = 2, 3, \ldots, n),$$

куда

$$g_{ij} = e^{-x^1} a_{ij} (x^2, \ldots, x^n), \tag{18}$$

е a_{ij} — некоторые функции своих аргументов. Но мы еще имеем ловия интегрируемости (13), которые должны быть выполнены. новой системе координат эти условия принимают вид $R_{ijl}^1 = 0$. епосредственной проверкой убеждаемся, что вследствие (14), 5) и (18) условия интегрируемости выполняются тождественно. ким образом, метрический тензор полученного нами эквиди-антного пространства в специальной системе координат имеет едующий вид:

$$g_{11} = \frac{1}{C} e^{-x^1}, \quad g_{1j} = 0 \quad (j \neq 1),$$

$$g_{ij} = e^{-x^1} a_{ij} (x^2, \ldots, x^n), \quad (i, j = 2, \ldots, n),$$

е $a_{ij} (x^2, \ldots, x^n)$ — произвольные функции своих переменных.

Так как метрику произвольного эквидистантного простра[нст]ва в специальной системе координат можно записать в виде

$$ds^2 = f(x^1)\,[(dx^1)^2 + a_{ij}(x^2, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j],$$

где $a_{ij}(x^2, \ldots, x^n)$ — произвольные функции своих аргуме[нтов] $(i, j, = 2, \ldots, n)$, а в нашем случае

$$ds^2 = \frac{e^{-x^1}}{C}\,[(dx^1)^2 + a_{ij}(x^2, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j], \qquad (19)$$

т. е. имеем специальную функцию

$$f(x^1) = \frac{1}{C} e^{-x^1},$$

то полученное V_n не является произвольным эквидистант[ным] пространством.

С помощью преобразования координат по формулам

$$\tilde{x}^1 = -\frac{2}{\sqrt{|C|}} e^{-\frac{1}{2}x^1}, \quad \tilde{x}_i = x^i \quad (i = 2, \ldots, n)$$

метрика (19) приводится к виду

$$ds^2 = e\,(d\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^1)^2\, \tilde{a}_{ij}(\tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n)\, d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j, \qquad (20)$$

где $e = \pm 1$ $(i, j = 2, \ldots, n)$. Следовательно, полученное на[ми] V_n является пространством с полем сходящихся направлений [4].

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *Для того чтобы риманово пространство* $\overline{V}_n$ *до[пу]скало неизотропное* ($\Delta_1\sigma \neq 0$) *конформное отображение на* V_n, *[из]меняющее риманову кривизну двумерной площадки по закону* $\overline{K} = e^{-2\sigma}K$, *необходимо и достаточно, чтобы оно было простран[ст]вом с полем сходящихся направлений. Его метрика в специал[ь]ной системе координат имеет вид* (20).

б) Рассмотрим изотропный случай: $\Delta_1\sigma = 0$, т. е. вектор $\sigma_{,i}$ — изотропный.

Построим систему координат следующим образом [5, § 7]. Рассмотрим систему уравнений

$$\Delta_1(\sigma, \varphi) \equiv g_{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} = 0.$$

Эта система имеет $(n-1)$ независимых решений

$$\varphi^i(x^1, \ldots, x^n) \quad (i = 1, 3, \ldots, n).$$

Перейдем к новой системе координат при помощи следующи[х] формул:

$$x^{1'} = \varphi^1(x^1, \ldots, x^n) \equiv \sigma(x^1, \ldots, x^n), \quad x^{2'} = \psi(x^1, \ldots, x^n),$$

$$x^{i'} = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n) \quad (i = 3, \ldots, n),$$

где $\psi(x^1, \ldots, x^n)$ — некоторая функция, для которой

$$\frac{D(\varphi^1, \psi, \varphi^3, \ldots, \varphi^n)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)} \neq 0.$$

В такой системе координат будем иметь

$$g^{1'1'} = g^{1'3'} = \ldots = g^{1'n} = 0, \quad g^{1'2'} = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\psi_{,\beta},$$

при этом $g^{1'2'} \neq 0$, так как ψ функционально независима от σ и $\varphi^3, \ldots, \varphi^n$ и не может быть решением уравнения $\Delta_1(\sigma, \psi) = 0$.

В дальнейшем будем считать, что такое преобразование координат осуществлено. Следовательно, в рассматриваемом изотропном случае в специально выбранной системе координат

$$g^{11} = g^{13} = \ldots = g^{1n} = 0, \quad g^{12} \neq 0; \quad \sigma = x^1.$$

Отсюда

$$g_{2j} = 0 \quad (j = 2, \ldots, n), \quad g_{12} = \frac{1}{g^{12}} \neq 0.$$

Уравнения (16) дают нам

$$\Gamma^1_{ij} = -\delta^1_i\delta^1_j. \tag{21}$$

Остальные Γ^l_{ij} $(l \neq 1)$ — произвольные. Условия интегрируемости (13) принимают вид $R^1_{ijl} = 0$ и вследствие (21) выполняются тождественно. Уравнения (21) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial g_{2i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{2j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} + 2g_{12}\delta^1_i\delta^1_j = 0. \tag{22}$$

При $i = j = 1$ получаем

$$2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + 2g_{12} = 0 \tag{23}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(e^{x^1}g_{12}) = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}e^{x^1}g_{11}\right).$$

Но если $\frac{\partial}{\partial x^1}(\varphi_2) = \frac{\partial}{\partial x^2}(\varphi_1)$, то $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}$, $\varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}$, а поэтому можем считать

$$e^{x^1}g_{12} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{2}e^{x^1}g_{11} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \text{ где } \varphi = \varphi(x^1, \ldots, x^n).$$

Таким образом

$$g_{11} = 2e^{-x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \quad g_{12} = e^{-x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \neq 0\right). \tag{24}$$

При $i = 1$, $j = 2$ $(j = 1,\ i = 2)$ уравнение (22) выполняется тождественно. При $i = 1$, $j = 3, \ldots, n$ уравнение (22) дает

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{1j}}{\partial x^2} = 0. \tag{25}$$

Подставив в (25) выражение для g_{12} из (24), получим

$$\frac{\partial g_{1j}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(e^{-x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right),$$

откуда

$$g_{1j} = e^{-x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + A_{1j}(x^1, x^3, \ldots, x^n) \quad (j = 3, \ldots, n). \tag{26}$$

Дифференцируя (23) по x^j, (25) по x^1 и исключая из полученных равенств производную второго порядка от g_{12}, придем к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial g_{1j}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^j} + 2g_{1j}\right) = 0.$$

Принимая во внимание (24), (26) и тот факт, что A_{1j} не зависит от x^2, будем иметь $\frac{\partial A_{1j}}{\partial x^1} + A_{1j} = 0$, откуда $A_{1j} = e^{-x^1} A_j(x^3, \ldots, x^n)$. Следовательно,

$$g_{1j} = e^{-x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + e^{-x^1} A_j(x^3, \ldots, x^n). \tag{27}$$

Далее, из (25) путем дифференцирования по x^l получаем

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^j \partial x^l} = \frac{\partial^2 g_{1j}}{\partial x^2 \partial x^l} \text{ и аналогично } \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^l \partial x^j} = \frac{\partial^2 g_{1l}}{\partial x^2 \partial x^j} \quad (l \neq j).$$

Отсюда $\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_{1j}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{1l}}{\partial x^j}\right) = 0$. Подставляя сюда (27), приходим к равенствам $\frac{\partial A_j}{\partial x^l} = \frac{\partial A_l}{\partial x^j}$. Следовательно, $A_j = \frac{\partial \lambda}{\partial x^j}$, где $\lambda = \lambda(x^3, \ldots, x^n)$ — произвольная функция своих переменных. Введем следующее обозначение:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \varphi(x^1, \ldots, x^n) + \lambda(x^3, \ldots, x^n).$$

Тогда (24) и (27) можно записать в виде

$$g_{11} = 2e^{-x^1} \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad g_{1j} = e^{-x^1} \frac{\partial f}{\partial x^j} \quad (j = 2, \ldots, n), \tag{28}$$

где $f(x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная функция своих переменных.

Наконец, при $i, j = 3, \ldots, n$ из (22) получаем $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} = 0$, откуда

$$g_{ij} = a_{ij}(x^1, x^3, \ldots, x^n) \quad (i, j = 3, \ldots, n), \tag{29}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ — произвольные функции, не зависящие от x^2.

Итак, в изотропном случае в специальной системе координат компоненты метрического тензора исследуемого пространства даются формулами (28) и (29), т. е. метрика V_n имеет вид

$$ds^2 = 2e^{-x^1} dx^1 df + a_{ij}(x^1, x^3, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j. \tag{30}$$

Введем новую систему координат при помощи формул преобразования

$$\tilde{x}^1 = -e^{-x^1}, \quad \tilde{x}^2 = f(x^1, \ldots, x^n), \quad \tilde{x}^i = x^i \quad (i = 3, \ldots, n).$$

Такое преобразование возможно, так как

$$\frac{D(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = e^{-x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2} \neq 0 \quad \left(\text{ввиду } \frac{\partial f}{\partial x^2} \neq 0\right).$$

Метрика (30) в новой системе координат примет вид

$$ds^2 = 2d\tilde{x}^1 d\tilde{x}^2 + \tilde{a}_{ij}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \ldots, \tilde{x}^n)\, d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \quad (i, j = 3, \ldots, n). \tag{31}$$

Таким образом имеет место

Теорема 2. *Для того, чтобы риманово пространство* V_n *допускало нетривиальное* ($\sigma \neq \mathrm{const}$) *изотропное* ($\Delta_1\sigma = 0$) *конформное отображение на* $\overline{V}_n$, *изменяющее риманову кривизну двумерной площадки по закону* $\overline{K} = e^{-2\sigma}K$, *необходимо и достаточно, чтобы его метрика в специальной системе координат имела вид* (31).

Из (31) следует, в частности, что при

$$\tilde{a}_{ij} = \nu(\tilde{x}^1)\, A_{ij}(\tilde{x}^3, \ldots, \tilde{x}^n)$$

V_n будет субпроективным пространством исключительного случая [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федіщенко С. І.* Про один клас конформних відображень ріманових просторів. — «Матеріали наукової конференції молодих вчених університету». Одеса, 1968, с. 220—224.
2. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948. 316 с.
3. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства. — «Научный ежегодник Одесск. ун-та за 1956 г.». Одесса, 1957, с. 133—135.
4. *Широков П. А.* Избранные работы по геометрии. Казань, 1966, с. 343—352.
5. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966. 496 с.
6. *Каган В. Ф.* Субпроективные пространства. М., Физматгиз, 1961. 218 с.

Поступила 7 февраля 1974 г.

СОДЕРЖАНИЕ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский межведомственный тематический научный сборник

Выпуск 17

Редактор *Л. Ф. Кизилова*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Технический редактор *Л. Т. Момот*
Корректор *Л. А. Федоренко*

Сдано в набор 20/VIII 1974 г. Подписано в печать 12/XII 1974 г. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. Усл.-печ. л. 9,25. Уч.-изд. л. 9,4. Тираж 1 000. Зак. 4-1761. БЦ 50331. Цена 63 коп.

Издательство издательского объединения «Вища школа» при Харьковском государственном университете. 310003, Харьков, 3, Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики «Коммунист» Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР в Харьковской городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков-3, Университетская, 16. Зак. 139.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах. Аминов Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 3—14.

Для поверхности в евклидовом пространстве E^n вводится инвариант кручения $\varkappa$, обращение которого в ноль необходимо и при условии, что гауссова кривизна $K \neq 0$, достаточно, чтобы поверхность лежала в E^3. Установлена интегральная оценка снизу для $\varkappa$, если F^2 — компактно, ориентируемо и имеет $K \leqslant 0$. Оценка выражается через площадь, эйлерову характеристику и внешний диаметр. Рассматриваются инвариант Уитни и кручение Гаусса, а также поверхности $F^2 \subset E^4$, у которых в каждой точке эллипс нормальной кривизны — окружность.

Ил. 2. Библиогр. 11.

УДК 513

Аналог внутреннего условия Риччи для минимального многообразия в римановом пространстве. Аминов Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 15—22.

Доказывается обобщение условия Риччи на метрику минимальной поверхности. Получено условие, аналогичное условию Риччи в дифференциальной форме для минимальных гиперповерхностей F^n в произвольном римановом пространстве.

Библиогр. 6.

УДК 513

О поверхностях изотропного пространства, несущих бесконечное множество сетей переноса. Бланк Я. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 23—33.

Определяются все поверхности изотропного пространства, несущие бесконечное множество сетей переноса. Доказывается, что кроме линейчатых поверхностей с образующими — параллелями Клиффорда, на которых сети переноса существуют с произволом в одну функцию одного аргумента, существуют поверхности, несущие ∞^1 сетей переноса. Их уравнения получены в явном виде.

Библиогр. 12.

УДК 513

О компактных поверхностях неположительной внешней кривизны в сферическом пространстве. Борисенко А. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 33—35.

Доказывается, что в сферическом пространстве l-мерная поверхность неположительной внешней кривизны по двумерным площадкам будет большой сферой, если коразмерность p ее вложения в пространство меньше $l/4$. Тем самым оценка для p, полученная автором раньше («Укр. геометр. сб.», вып. 15), улучшается для всех l, кроме 4 и 8.

Библиогр. 4.

УДК 513

О прямых на полном некомпактном двумерном многообразии. Борисенко А. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 35—44.

Изучаются условия существования прямых на полном двумерном многообразии. Рассматриваются многообразия с одним уходом в бесконечность и доказывается, что если полная кривизна многообразия с эйлеровой характеристикой χ имеет полную кривизну $\omega < 2\pi(\chi - 1)$, то на нем есть прямая, и обратно: если на многообразии есть прямая, то $\omega \leqslant 2\pi(\chi - 1)$.

Библиогр. 4.

УДК 513

О геодезических линиях системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4. Глова Н. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 44—50.

Если условия интегрируемости выполнены для обоих уравнений Пфаффа, то система интегральных кривых представляет собой n двумерных поверхностей в E_4. Геодезические линии такой поверхности характеризуются тем свойством, что у них главная нормаль лежит в нормальной плоскости. В случае, когда условия интегрируемости не выполнены, интегральные кривые, проходящие через одну точку, касаются в ней одной плоскости. Такая совокупность кривых имеет два типа геодезических линий — геодезические «прямейшие» и геодезические «кратчайшие». Множество геодезических «прямейших» т. е. тех кривых, у которых главная нормаль лежит в нормальной плоскости, зависит от четырех произвольных постоянных, дифференциальное уравнение геодезических «кратчайших», т. е. тех кривых, у которых вариация длины дуги равна нулю, зависит от шести произвольных постоянных. Совпадение этих двух типов кривых имеет место только при выполнении условий интегрируемости.

УДК 513

Об одной теореме изгибания общей выпуклой поверхности с границей. Гулида Л. Л. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 50—53.

В настоящей работе доказано, что, когда границей поверхности является простая замкнутая кривая, такие пары точек A, B и C, D всегда могут быть указаны таким образом, что пары A, B и C, D разделяются.

Аналогичный результат установлен для бесконечно малых изгибаний общих строго выпуклых поверхностей.

Библиогр. 4.

УДК 513.531

Устранимые разрывы первых производных метрического тензора пространства времени. Денисов В. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 53—58.

Рассмотрен вопрос об устранимых разрывах первых производных метрического тензора пространства-времени. Доказано, что продольную часть разрыва производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ можно устранить преобразованием координат, которое имеет разрыв вторых производных функций преобразования. Построен класс преобразований, устраняющих продольную часть разрыва производных $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$. Эти преобразования отличны от тождественного лишь в некоторой окрестности гиперповерхности разрыва.

Библиогр. 4.

УДК 513

К случаю вырождения уравнения диаметральной плоскости симметричной поверхности в E^m. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 58—62.

Пусть F_n — алгебраическая гиперповерхность степени n, инвариантная относительно некоторой конечной группы симметрий евклидова пространства E^m, и две старшие формы ее уравнения имеют вид $\varphi_n(x) = \chi^\sigma\psi$, $\varphi_{n-1}(x) = \chi^\tau\omega$. В работе изучается структура формы $\chi(x)$ в случае, когда уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с некоторым вектором u, вырождается за счет $\chi(u) = 0$ и определяемая этим уравнением плоскость (она изучена ранее авторами («Укр. геометр. сб.», вып. 15) является плоскостью симметрии поверхности.

Библиогр. 3.

УДК 513

Обобщенные пространства полугиперболического типа. Киотина Г. В. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 62—69.

Строится класс однородных пространств с проективной метрикой, абсолюты которых состоят из квадратичных конусов различных индексов и рангов и пар действительных плоскостей. Находятся группы подобий и движений этих пространств. Показано, что если абсолют содержит две k-плоскости и две $(k-1)$- или $(k+1)$-плоскости, то в пространстве не существует отражений от произвольно взятых $(n-k-1)$-плоскостей, и не всякое движение можно представить в виде произведения инволюционных движений.

Библиогр. 7.

УДК 513.73 (075.8)

Строение биаксиально-центральных комплексов. Кованцов Н. И., Боровец А. Н. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 70—82.

В трехмерном биаксиальном пространстве выделяется класс комплексов, названных биаксиально-центральными. Исследованы свойства этих комплексов и связанных с ними линейчатых образов, указывается безынтегральное представление биаксиально-центральных комплексов (геометрически прочитываются системы дифференциальных уравнений, определяющих эти комплексы).

Исследован также один естественно выделяемый класс биаксиально-центральных комплексов.

Библиогр. 5.

УДК 513

Поверхности, ортогональные к конгруэнциям линейного комплекса. Кованцов Н. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 82—92.

Находятся конечные уравнения поверхностей, ортогональных к нормальным конгруэнциям линейного комплекса. Указывается способ построения таких поверхностей. Каждая поверхность однозначно определяется заданием некоторой плоской кривой. Находятся различные поверхности в зависимости от выбора этой кривой (поверхности постоянной кривизны, минимальные поверхности, поверхности, вырождающиеся в винтовые линии, и т. д.). Отдельно рассматривается случай торсов, ортогональных к нормальным конгруэнциям линейного комплекса.

Библиогр. 4.

УДК 513

Биоктавные геометрии и их аналоги. Кузнецова Т. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 92—107.

Различные виды альтернативных алгебр можно получить из альтернативной алгебры биоктав (комплексных октав), заменяя в ней тело октав алгеброй антиоктав, полуоктав или полуантиоктав, а поле комплексных чисел — алгеброй двойных или дуальных чисел.

В работе определяются проективные и неевклидовы (эрмитовы, биэрмитовы) плоскости над всеми указанными алгебрами. Выяснены структуры групп движений в этих плоскостях — это группы Ли соответствующих простоты и класса, определены их основные проективные или метрические инварианты, найдены образы симметрии эрмитовых плоскостей. Рассмотрены также проективные и неевклидовы прямые над теми же алгебрами.

Библиогр. 7.

УДК 513. 74; 530. 12; 531. 51

О сравнении параллельного перенесения и перенесения Ферми—Уолкера в теории гравитации. Лаптинский В. Н., Лапковский А. К. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 107—111.

Для пространства теории гравитации ${}^1V_4$ изучается система дифференциальных уравнений, характеризующая связь параллельно переносимого репера и репера, переносимого по закону Ферми—Уолкера (вдоль непрерывной кусочно-дифференцируемой временноподобной кривой). Выясняется физическая природа этой системы.

Библиогр. 4.

УДК 513

Теоремы существования для выпуклых поверхностей с краем. I. Медяник А. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 111—120.

Доказана теорема существования для аналитической выпуклой поверхности ограниченной кривизны, у которой сферическое изображение совпадает с данной аналитической строго выпуклой областью на единичной сфере, опорная функция на границе сферического изображения обращается в заданную аналитическую функцию, а главные радиусы кривизны R_1 и R_2 во внутренней точке поверхности с внешней нормалью n удовлетворяют аналитическому уравнению

$$f(R_1R_2,\ R_1 + R_2) = \varphi(n),$$

где f — вогнутая функция. Доказательство проводится методом, предложенным А. В. Погореловым в монографии «Внешняя геометрия выпуклых поверхностей», где и был поставлен рассматриваемый вопрос.

Библиогр. 5.

УДК 513

Особенность у конца кратчайшей на выпуклой поверхности. II. Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 120—128.

В статье приводятся примеры кратчайших (лучей) на выпуклых поверхностях, имеющих в окрестностях конечных (бесконечно удаленных) точек наперед заданные колебания сферического изображения. В частности, строится пример с колебанием в $\pi/2$.

Библиогр. 3.

УДК 513

Новые свойства кратчайших на выпуклых поверхностях. Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 128—132.

Доказывается теорема: в трехмерном пространстве с постоянной кривизной на выпуклой поверхности каждая гладкая точка открытой кратчайшей, не сводящейся к прямолинейному отрезку, является также гладкой точкой поверхности. Устанавливается также характеристический признак геодезической линии в двумерном многообразии с кривизной $\geqslant K$, выражающийся через специальную оценку для кривизны множества в многообразии, примыкающего к кратчайшей.

Библиогр. 12.

УДК 513

Дополнение к статье «Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей. Сенькин Е. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 132—134.

Доказаны теоремы локальной жесткости (вне $(n-1)$-мерных плоских областей) и однозначной определенности выпуклых гиперповерхностей в окрестности точек, не принадлежащих плоским областям размерности $n-1$, $n-2$, $n-3$.

Теорема жесткости доказана для общих выпуклых гиперповерхностей, теорема однозначной определенности при условии гладкости гиперповерхности.

УДК 513

Специальные конформные отображения римановых пространств. I. Федищенко С. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 17, 1975, с. 134—141.

Рассматривается конформное соответствие между двумя римановыми пространствами V_n и $\overline{V}_n$, при котором их римановы кривизны K и $\overline{K}$ в соответствующих двумерных направлениях связаны соотношением $\overline{K} = e^{-2\sigma}K$.

Показано, что в неизотропном случае $(\Delta_1\sigma \neq 0)$ V_n является пространством с полем сходящихся направлений. В случае изотропности градиентного вектора σ_i метрика пространства в специальной системе координат имеет вид $ds^2 = 2dx^1dx^2 + a_{ij}dx^idx^j$, где a_{ij} — произвольные функции, не зависящие от x^2 $(i, j = 3, \ldots, n)$,

Библиогр. 6.