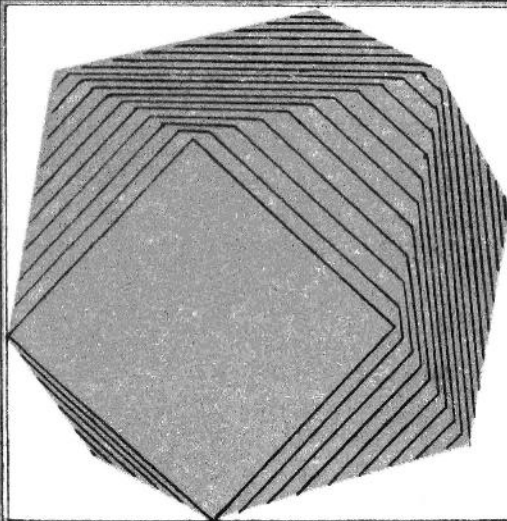


УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск 16



УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 16

Республиканский
межведомственный
тематический
научный
сборник

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ХАРЬКОВ — 1974

УДК 513

Основную часть выпуска составляют статьи по геометрии «в целом»: в них исследуются свойства выпуклых тел, поверхностей, кривых в пространстве и на поверхности. Остальные статьи относятся к геометрии обобщенных пространств, в частности физического типа, пространств с заданной фундаментальной группой, клинчатой геометрии и к другим вопросам геометрии.

Редакционная коллегия:

акад. А. Н. УССР проф. А. В. Погорелов (ответственный редактор), доц. В. П. Белоусова, проф. Я. П. Бланк (зам. ответственного редактора), доц. Д. З. Горdevский, проф. Н. И. Кованцов, доц. Е. А. Косачевская, доц. А. С. Лейбин (ответственный секретарь), канд. физ.-мат. наук А. Д. Милка, доц. Е. П. Сенькин, проф. Н. С. Синюков, доц. В. Н. Скрыдлов, доц. М. А. Улановский.

Адрес редакционной коллегии:

310077, Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Государственный университет, механико-математический факультет.

Редакция естественнонаучной литературы.
Зав. редакцией А. Г. Роскопыт.

У $\frac{20203-124}{M226(04)-74}$ 350-74

© Издательское объединение «Вища школа», 1974 г.

Игнатенко В. Ф., канд. физ.-мат. наук,
Лейбин А. С., канд. физ.-мат. наук.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С СИММЕТРИЕЙ ПРАВИЛЬНОГО m -МЕРНОГО СИМПЛЕКСА

Пусть G^s — конечная группа отражений m -мерного евклидова пространства E^m и s — число всех $(m-1)$ -мерных плоскостей симметрии, отражения в которых являются элементами группы G^s . В 1955 г. К. Шевалле доказал, что алгебра J над полем комплексных чисел всех полиномиальных инвариантов этой группы порождается m алгебраически независимыми однородными полиномами I_i ($i=1, \dots, m$) — образующими этой алгебры [1, теорема (A)]. Если при этом полиномы I_i составляют минимальную систему образующих алгебры J и k_i — их степени, то произведение всех k_i равно порядку группы G^s [1, теорема (B)], а сумма всех k_i не меньше $s+m$ [2, п. 1°].

Для конечных групп отражений пространства E^3 еще в 1889 г. Л. Лекорню и Э. Гурса получили вид минимальных образующих алгебры J [3, 4]. При этом Э. Гурса нашел в E^m все образующие для группы симметрий m -мерного куба и для той ее подгруппы, которая получается, если из всех плоскостей симметрии куба удалить плоскости, вполне параллельные его $(m-1)$ -граням. (Эту подгруппу Э. Гурса назвал «группой тетраэдра»; в E^3 она действительно является группой симметрий тетраэдра, или 3-симплекса, но в E^m при $m \neq 3$ это уже неверно [2, с. 26, сноски]).

В настоящей заметке указан способ построения всех независимых образующих (базисных полиномов) алгебры J полиномиальных инвариантов группы G^s симметрий правильного m -мерного симплекса в E^m ; иными словами, здесь указан общий вид уравнения алгебраической $(m-1)$ -мерной поверхности в E^m , инвариантной относительно группы G^s . В работе [2] эти образующие (они названы там, следуя Лекорню, «элементами симметрии») найдены в пространстве E^4 .

В дальнейшем предполагается, что в E^m введена декартова прямоугольная система координат.

1°. Основной результат настоящей заметки содержит

Теорема. Если уравнения $(m-1)$ -граней правильного m -симплекса записаны в виде

$$\eta_j(x) = (N_j, x) = a, \quad j = 1, \dots, m+1, \quad (1)$$

где все нормальные векторы N_i граней имеют одну и ту же длину и направлены внутрь (или все наружу) симплекса, то полиномы

$$I_i(x) = \sum_{j=1}^{m+1} \eta_j^{i+1}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

составляют минимальную систему образующих алгебры всех полиномов, инвариантных относительно группы G^s симметрий симплекса.

Таким образом, если Φ — полином от m переменных, то всякую алгебраическую поверхность с симметрией правильного m -симплекса можно задать уравнением $\Phi(I_1, \dots, I_m) = 0$.

2°. Для доказательства теоремы заметим, что η_j — линейные однородные функции от x_i , поэтому I_i однородны степени $i+1$. Группа симметрий симплекса G^s сводится к всевозможным перестановкам его $(m+1)$ -граней, т. е. к перестановкам $(\eta_1, \dots, \eta_{m+1})$ элементов η_j , и инвариантность каждого I_i относительно любого преобразования из G^s очевидна. Порядок группы G^s равен $(m+1)!$, число плоскостей симметрии $s = \frac{m(m+1)}{2}$, поэтому выполняются условия для степеней k_i полиномов I_i , указанные в начале статьи: $\Pi k_i = (m+1)!$ и $\Sigma k_i = m+s$. Остается доказать алгебраическую независимость полиномов I_i , для чего применим метод полной математической индукции по размерности m ; в связи с этим у символов I_i , η_j , s введем индекс m размерности $I_{m,i}$, $\eta_{m,j}$, s_m .

Начало координат O , согласно условию (1) теоремы, лежит в центре симплекса. Направления осей x_i выберем так, чтобы координаты вершин V_j симплекса образовали строки $(m+1) \times m$ -матрицы

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_{m-1}}} & \frac{1}{\sqrt{s_m}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_{m-1}}} & \frac{1}{\sqrt{s_m}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_{m-1}}} & \frac{1}{\sqrt{s_m}} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_{m-1}}} & \frac{1}{\sqrt{s_m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-(m-1)}{\sqrt{s_{m-1}}} & \frac{1}{\sqrt{s_m}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-m}{\sqrt{s_m}} \end{pmatrix}.$$

Координаты каждой вершины V_j симплекса являются также координатами нормального вектора N_j грани, противолежащей вершине V_j . Все эти векторы направлены от граней внутрь симплекса и имеют одну и ту же длину $|N_j| = |v_{m+1,m}| =$

$= \frac{m}{V s_m} = \sqrt{\frac{2m}{m+1}}$, равную радиусу описанной около симплекса $(m-1)$ -сферы. Заметим, что элемент v_{mm} матрицы равен радиусу вписанной $(m-1)$ -сферы, длина ребра симплекса равна 2 и не зависит от m , разность любых двух строк матрицы V дает координаты нормального вектора $(m-1)$ -плоскости симметрии симплекса. Из матрицы видно также, что

$$\sum_{j=1}^{m+1} \eta_{m,j} \equiv 0. \quad (3)$$

В случае $m=2$ нужно рассмотреть только два инварианта $I_{2,1}$ и $I_{2,2}$. Составленные по формулам (2), они с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$I_{2,1} = x_1^2 + x_2^2; \quad I_{2,2} = \frac{x_2}{\sqrt{3}}(3x_1^2 - x_2^2).$$

Их алгебраическая независимость следует из их функциональной независимости: якобиан

$$\frac{\partial(I_{2,1}, I_{2,2})}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{6}{\sqrt{3}} x_1 (x_1^2 - 3x_2^2)$$

равен нулю только в точках осей симметрии 2-симплекса (треугольника) — на необходимость этого указал Лекорню [3, с. 204 — 205].

Предположим теперь, что многочлены (2) алгебраически независимы в E^{m-1} , и докажем, что они тогда не могут быть зависимы в E^m . В самом деле, их зависимость в E^m означает существование многочлена f такого, что равенство

$$f(I_{m,1}, \dots, I_{m,m}) = 0 \quad (4)$$

выполняется тождественно относительно $x_1, \dots, x_m$.

В силу строения матрицы V можно записать

$$I_{m,m-1} = \sum_{j=1}^{m+1} \eta_{m,j}^r = \sum_{j=1}^m \left(\eta_{m-1,j} + \frac{x_m}{V s_m} \right)^r + \left(\frac{-m x_m}{V s_m} \right)^r.$$

Общий член стоящей справа суммы выпишем в развернутой форме

$$\left(\eta_{m-1,j} + \frac{x_m}{V s_m} \right)^r = \eta_{m-1,j}^r + \dots + r \left(\frac{x_m}{V s_m} \right)^{r-1} \eta_{m-1,j} + \left(\frac{x_m}{V s_m} \right)^r.$$

В результате суммирования по j от 1 до m предпоследние члены исчезнут в силу тождества (3), верного и в E^{m-1} , поэтому

$$I_{m,r-1} = I_{m-1,r-1} + r \frac{x_m}{\sqrt{s_m}} I_{m-1,r-2} + \dots + \frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{x_m}{\sqrt{s_m}} \right)^{r-2} I_{m-1,1} + \\ + [m + (-m)^r] \left(\frac{x_m}{\sqrt{s_m}} \right)^r, \quad r-1 = i = 1, \dots, m.$$

Полагая $x_m = \text{const}$ и подставляя в (4), получим алгебраическую зависимость между $I_{m-1,1}, \dots, I_{m-1,m-1}$ в E^{m-1} , что противоречит предположению об их независимости. Теорема доказана для выбранного положения координатного m -эдра относительно симплекса.

Так же, но с некоторыми осложнениями, независимость инвариантов (2) можно доказать и при любом положении осей x_i . Выражение $I_{m,i}$ через $I_{m-1,i}$ получается, если разложить каждую нормаль N_j ($j=1, \dots, m$) на две перпендикулярные составляющие: $N_j = -\frac{1}{m} N_{m+1} + N'_j$, где в $(m-1)$ -плоскости

E^{m-1} $(m+1)$ -й грани m -симплекса составляющие N'_j являются векторами нормалей для $(m-2)$ -граней $(m-1)$ -симплекса — этой самой $(m+1)$ -й грани m -симплекса. При переходе из E^m в эту E^{m-1} нужно еще избавиться от x_m при помощи последнего уравнения из (1), т. е., по существу, перейти к внутренним координатам в E^{m-1} . Теорема доказана полностью.

Заметим, что независимость I_i может быть доказана так. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_{m+1}$ — декартовы прямоугольные координаты точки в E^{m+1} . Уравнением $\sum \eta_j = b$, $b > 0$ определим m -плоскость E^m исходного m -симплекса, который выделим в ней условиями $\eta_j \geq 0$, $j=1, \dots, m+1$. При этом все инварианты I_i вместе с тривиальным инвариантом $I_0 = \eta_1 + \dots + \eta_{m+1}$ будут степенными суммами координат η_j ; якобиан для них сводится к определителю Вандермонда, равному нулю только при $\eta_j = \eta_k$, $j \neq k$, т. е. в точках, принадлежащих $(m-1)$ -плоскостям симметрии m -симплекса. Однако переход от координат η_j , являющихся для m -плоскости симплекса барицентрическими, к координатам x_i в E^m (I_i должны быть алгебраически независимы как функции от x_i) требует преодоления известных трудностей.

3°. Инвариант второй степени («сферический»)

$$I_{m,1} = x_1^2 + \dots + x_m^2$$

не зависит от направления осей координатного прямоугольного

м-эдра. При $i > 1$ все инварианты I_i уже зависят от направления осей. Так, записанные по формулам (2) для E^2 , E^3 и E^4 эти инварианты отличаются по форме от приведенных в работах [2—4]. Например, в [2] матрица V имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & -1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}.$$

Кроме того, даже в одной и той же системе координат инварианты определяются неоднозначно: к любому инварианту степени выше трех можно прибавить произвольный однородный многочлен той же степени, составленный из инвариантов низших степеней. Это дает возможность упрощать вид инвариантов, что и делалось в предыдущих работах авторов [2, 5]; упрощенные инварианты там обозначались через L_i . Нельзя упростить только инвариант второй степени — сферический, общий для всех конечных групп ортогональных симметрий в E^m , и инвариант третьей степени, который в системе координат, выбранной в п. 2°, имеет вид

$$I_{m,2} = - \sum_{k=2}^m \frac{(k-1)x_k^3}{\sqrt{s_k}} + 3 \sum_{k=1}^{m-1} \left(x_k^2 \sum_{l=k+1}^m \frac{x_l}{\sqrt{s_l}} \right);$$

для него можно записать рекуррентную формулу

$$I_{m,2} = I_{m-1,2} + \frac{x_m}{\sqrt{s_m}} [3I_{m-1,1} - (m-1)x_m^2].$$

$$I_{m,2} = I_{m-1,2} + \frac{x_m}{\sqrt{s_m}} [3I_{m-1,1} - 2(m-1)x_m^2]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections. — Amer. J. of Math., 1955, vol. LXXVII, N 4, p. 778—782.
2. Писаренко В. Ф., Лейбин А. С. Об алгебраических поверхностях в A^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника. — Укр. геометр. сб., вып. 11. Харьков, 1971, с. 26—31.

3. LECORNU L. Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. — „Acta Math.“, 1887, vol 10, p. 201—280.
4. GOURSAT E. Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. — „Ann. sc. de l'École Norm.“, 1887, a. IV, N 3, p. 159—200.
5. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. К общему уравнению алгебраической поверхности в E^4 с симметрией правильного 24-гранника. — «Укр. геометр. сб.», вып. 12. Харьков, 1972, с. 57—59.

Поступила 3 июня 1973 г.

В. Л. Карпенко, канд. физ.-мат. наук

СВОЙСТВА ИНВАРИАНТА ВТОРОЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ
КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

Уравнения второй дифференциальной окрестности комплекса прямых в трехмерном проективном пространстве, отнесенного к нормальному тетраэдру, имеют вид [1]

$$\begin{aligned}\omega_1^2 - \omega_3^4 &= p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ \omega_1^3 - \omega_4^3 &= \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^4 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4,\end{aligned}\quad (1)$$

а вариация параметров второй дифференциальной окрестности комплекса определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}\delta p &= 2\beta\pi_1^2 - p(\pi_2^2 - 2\pi_3^3 + \pi_4^4), \\ \delta q &= 2\gamma\pi_1^2 - q(\pi_2^2 + 2\pi_3^3 - 3\pi_4^4), \\ \delta\beta &= (r - 2\alpha)\pi_1^2 + 2p\pi_1^2 - \beta(\pi_2^2 - \pi_3^3), \\ \delta\gamma &= 2q\pi_1^2 + (r - 2\alpha)\pi_1^2 - \gamma(\pi_2^2 + \pi_3^3 - 2\pi_4^4), \\ \delta(r - 2\alpha) &= 6\gamma\pi_1^2 + 6\beta\pi_1^2 - (r - 2\alpha)(\pi_2^2 - \pi_4^4).\end{aligned}\quad (2)$$

Исключая из этой системы вторичные дифференциальные формы и решая полученное дифференциальное уравнение, находим, что величина

$$I = \frac{54q\beta^2 + 54p\gamma^2 - 18\gamma\beta(r - 2\alpha) - 36pq(r - 2\alpha) + (r - 2\alpha)^3}{V[12\gamma\beta - 12pq - (r - 2\alpha)^2]^3}\quad (3)$$

является инвариантом второй дифференциальной окрестности комплекса прямых. В настоящей работе рассматриваются некоторые свойства этого инварианта.

§ 1. Связь инварианта с величиной сложного отношения четверки инфлекссионных центров

Покажем, что инвариант окрестности второго порядка комплекса прямых является функцией от величины сложного отношения четверки инфлекссионных центров на текущем луче комплекса.

Инфлекссионные центры на текущем луче комплекса прямых определяются уравнением [1]

$$qt^4 + \gamma t^3 + (r - 2\alpha)t^2 + 2\beta t + p = 0. \quad (4)$$

Пусть корнями уравнения (4) будут t_1, t_2, t_3, t_4 . Эти числа можно рассматривать как координаты инфлекссионных центров на луче комплекса. Примем два инфлекссионных центра (например, t_1 и t_3) за базисные. Тогда

$$W = (t_1 t_2 t_3 t_4) = \frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_4)}{(t_4 - t_1)(t_2 - t_3)}.$$

Поскольку числа t_1, t_2, t_3, t_4 — корни уравнения (4), то

$$q(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4) = 0$$

или

$$\begin{aligned} W - qt^3(t_1+t_2+t_3+t_4) + qt^2(t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+ \\ + t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4) - qt(t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+ \\ + t_2t_3t_4) + qt_1t_2t_3t_4 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) должны совпадать. Значит:

$$\begin{aligned} \beta = -\frac{q}{2}(t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4), \\ \gamma = -\frac{q}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} r - 2\alpha = q(t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4), \\ p = qt_1t_2t_3t_4. \end{aligned}$$

Учитывая значения (6), получаем

$$\begin{aligned} 12\beta\gamma - 12pq - (r - 2\alpha)^2 = 3q^2(t_1+t_2+t_3+t_4)(t_1t_2t_3+ \\ + t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4) - 12q^2t_1t_2t_3t_4 - q^2(t_1t_2+ \\ + t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4)^2. \end{aligned}$$

После перегруппировки членов в правой части получаем

$$12\beta\gamma - 12pq - (r - 2\alpha)^2 = q^2[(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)(t_3 - t_4)(t_4 - t_1) - (t_1 - t_3)^2(t_2 - t_4)^2]. \quad (7)$$

Поскольку

$$W = (t_1 t_3 t_2 t_4),$$

то

$$(t_1 t_2 t_3 t_4) = 1 - W$$

или

$$1 - W = \frac{(t_1 - t_3)(t_4 - t_2)}{(t_4 - t_1)(t_2 - t_3)}.$$

В этом случае

$$-W - (1 - W)^2 = \frac{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)(t_3 - t_4)(t_4 - t_1) - (t_1 - t_3)^2(t_2 - t_4)^2}{(t_1 - t_4)^2(t_2 - t_3)^2}.$$

Отсюда

$$(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)(t_3 - t_4)(t_4 - t_1) - (t_1 - t_3)^2(t_2 - t_4)^2 = \\ = -[W + (1 - W)^2](t_1 - t_4)^2(t_2 - t_3)^2.$$

Внося это значение в равенство (7), имеем

$$12\beta\gamma - 12pq - (r - 2\alpha)^2 = -q^2[W + (1 - W^2)](t_1 - t_4)^2(t_2 - t_3)^2. \quad (8)$$

Аналогичным образом находим

$$54\beta^2q + 54\gamma^2p - 18\gamma\beta(r - 2\alpha) - 36pq(r - 2\alpha) + (r - 2\alpha)^3 = \\ = -\frac{1}{2}q^3(t_4 - t_1)^3(t_2 - t_3)^3(W + 1)(2W^2 - 5W + 2). \quad (9)$$

Подставляя значения (8) и (9) в формулу (3), получаем

$$I = -\frac{(W + 1)(2W^2 - 5W + 2)}{2\sqrt{-(W^2 - W + 1)^3}}. \quad (10)$$

Если инвариант обращается в нуль, то

$$(W + 1)(2W^2 - 5W + 2) = 0.$$

Последнее равенство выполняется при одном из трех значений сложного отношения четверки инфлекционных центров: -1 ; 2 ; $\frac{1}{2}$. А это означает, что в данном случае четверка инфлекционных центров является гармонической.

Если инвариант обращается в бесконечность, то

$$W^2 - W + 1 = 0$$

и

$$W = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Это означает, что четверка инфлекционных центров на луче комплекса в данном случае является псевдогармонической [2, с. 60].

Известно, что когда $W=1$ (или $W=0$, или $W=\infty$), то не все точки, образующие сложное отношение, различны.

Если $W=1$, то $I=-i$. Если $W=0$, то $I=i$. Если $W=\infty$, то $I=-i$.

Таким образом, значения инварианта второй дифференциальной окрестности комплекса прямых равные $0, \infty, \pm i$, соответственно выделяют комплексы с гармоническими, псевдогармоническими и совпадающими инфлекссионными центрами.

§ 2. Связь инварианта с главными поверхностями комплекса прямых

Характеристическое уравнение, определяющее главные поверхности комплекса прямых в трехмерном проективном пространстве, имеет вид [1]

$$\begin{vmatrix} \alpha-s & q & -\gamma \\ p & \alpha-s & \beta \\ \beta & -\gamma & r-2s \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Положив

$$s = x + \frac{4\alpha + r}{6}$$

и раскрывая определитель (11), получаем

$$108x^3 + 9[12\beta\gamma - 12pq - (r-2\alpha)]x - [54q\beta^2 + 54p\gamma^2 - 18\beta\gamma(r-2\alpha) - 36pq(r-2\alpha) + (r-2\alpha)^3] = 0. \quad (12)$$

Обозначим

$$12\beta\gamma - 12pq - (r-2\alpha)^2 = A, \quad (13)$$

$$54q\beta^2 + 54p\gamma^2 - 18\beta\gamma(r-2\alpha) - 36pq(r-2\alpha) + (r-2\alpha)^3 = B.$$

Учитывая обозначения (13), характеристическое уравнение (12) главных поверхностей комплекса прямых можно записать в виде

$$108x^3 + 9Ax - B = 0. \quad (14)$$

Кроме того, внося значения (13) в формулу (3), определяющую инвариант второй дифференциальной окрестности комплекса прямых, получаем

$$I = \frac{B}{\sqrt{A^3}}. \quad (15)$$

Таким образом, мы видим, что величины, стоящие в числителе и знаменателе инварианта, являются коэффициентами характеристического уравнения (14) главных поверхностей комплекса прямых.

Продифференцируем уравнение (13₁):

$$\delta A = 12\gamma\delta\beta + 12\beta\delta\gamma - 12q\delta p - 12p\delta q - 2(r-2\alpha)\delta(r-2\alpha).$$

Внося в это уравнение значения дифференциалов $\delta\beta$, $\delta\gamma$, δp , δq и $\delta(r-2\alpha)$ из системы (2), получаем

$$\delta A = 2A(\pi_4^4 - \pi_2^2),$$

или

$$\delta \ln A = 2(\pi_4^4 - \pi_2^2).$$

Следовательно, нормированием координат вершин сопровождающего тетраэдра можно привести коэффициент A к единице. В этом случае

$$I = B$$

и характеристическое уравнение (14) принимает вид

$$108x^3 + 9x - I = 0. \quad (16)$$

Корни характеристического уравнения (16) являются инвариантами преобразования вторичных параметров. Отсюда непосредственно следует, что кратность корней характеристического уравнения также является инвариантом преобразования вторичных параметров.

В заключение рассмотрим действительный комплекс. Для такого комплекса коэффициенты p , q , β , γ , α и r второй дифференциальной окрестности являются действительными числами, а значит, как показывают равенства (13), действительными будут и числа A , B . Кроме того, будем считать, что $AB \neq 0$. Этим мы исключаем из рассмотрения комплексы с гармоническими и псевдогармоническими четверками инфлекссионных центров.

Известно, что кубическое уравнение

$$x^3 + mx + n = 0 \quad (17)$$

с действительными коэффициентами допускает решение Кардано:

$$x_1 = C + D; \quad x_{2,3} = -\frac{C+D}{2} \pm i \frac{C-D}{2} \sqrt{3},$$

где

$$C = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{Q}}; \quad D = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{Q}}; \quad Q = \left(\frac{m}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

При этом уравнение (17) имеет или один действительный и два сопряженных комплексных корня, или три действительных корня, по крайней мере два из которых равны, или три различных действительных корня в зависимости от того, будет ли Q соот-

ответственно положительно, равно нулю или отрицательно. Исходя из этого, для характеристического уравнения (14) имеем

$$Q = \left(\frac{A}{36}\right)^3 + \left(-\frac{B}{216}\right)^3 = \frac{A^3 + B^3}{6^3}.$$

Здесь возможны три случая:

$$1. A^3 + B^3 > 0.$$

Из (15) имеем

$$A^3 = \frac{B^3}{I^3} (I \neq 0, \text{ так как } AB \neq 0).$$

Тогда

$$\frac{B^3}{I^3} + B^3 = B^3 \left(\frac{1}{I^3} + 1 \right) > 0.$$

Так как B — действительно, то

$$\frac{1}{I^3} + 1 > 0.$$

а) Если I — любое действительное число, то последнее неравенство выполняется всегда.

б) Если I — мнимое число вида ki , то $I^2 < 0$ и

$$1 + I^2 < 0; I^2 < -1.$$

Следовательно, если инвариант второй дифференциальной окрестности комплекса — любое действительное число или мнимое число, квадрат которого меньше минус единицы, то $Q > 0$ и комплекс прямых имеет одну действительную и две комплексно сопряженные главные поверхности.

$$2. A^3 + B^3 = 0.$$

Тогда

$$B = \pm \sqrt[3]{-A^3}$$

и, значит,

$$I = \pm i.$$

В этом случае $Q = 0$ и комплекс имеет три действительные главные поверхности, по крайней мере две из которых совпадают. При этом (см. § 1) не все инфлекссионные центры на луче комплекса прямых различны.

$$3. A^3 + B^3 < 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{I^3} + 1 < 0.$$

а) Если I — любое действительное число, то последнее неравенство места не имеет.

- б) Если I — мнимое число вида ki , то $I^2 < 0$ и
 $I^2 + 1 > 0$; $I^2 > -1$.

Таким образом, если инвариант — мнимое число, квадрат которого больше минус единицы, то комплекс прямых имеет три различные действительные главные поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 191 с.
2. Кованцов М. И. Проективная геометрия. Київ, «Вища школа», 1969. 410 с.

Поступила 5 марта 1973 г.

УДК 513

Г. В. Киотина, канд. физ.-мат. наук

БИФЛАГОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В данной работе строятся однородные n -пространства F_n^2 с гиперболическим измерением углов в пучках r -плоскостей всех размерностей с помощью абсолютов, состоящих из двух флагов, соединенных между собой особым образом. Группы движений пространств F_n^2 зависят от того же числа параметров, что и группы движений максимально подвижных неевклидовых n -пространств, и являются разрешимыми группами Ли.

1. Пространства $\mathcal{L}_n^2$. Проективное n -пространство P_n , в котором задан абсолют $(\mathcal{L}_n^2)$, состоящий из пар действительных k -плоскостей p_k^i всех размерностей $k=0, 1, \dots, n-1$, будем обозначать $\mathcal{L}_n^2$.

В пространствах $\mathcal{L}_n^2$ можно ввести гиперболическое измерение расстояний между точками и углов в пучках r -плоскостей всех размерностей, инвариантное относительно группы G коллинеаций P_n , преобразующих абсолют $(\mathcal{L}_n^2)$ в себя. Действительно, две r -плоскости q_r^i пучка r -плоскостей (q_{r-1}) , а при $r=0$ две точки в $(r+1)$ -плоскости $q_{r+1} = q_r^1 \cup q_r^2$ имеют относительно группы G инвариант $\varphi = (q_r^1 q_r^2 q_{r-1}^1 q_{r-1}^2)$, где $q_r^i \equiv M_i \cup q_{r-1}$, $M_i = q_{r+1} \cap p_{n-r-1}^i$, $i=1, 2$, $r=0, 1, \dots, n-1$. Назовем коллинеации группы G движениями пространства $\mathcal{L}_n^2$. Размерность* группы G зависит от расположения k -плоскостей абсолюта $\mathcal{L}_n^2$ и, в частности, может равняться $\frac{n}{2}(n+1)$. Примером являет-

ся пространство $\bar{F}_n^2$, абсолют $(\bar{F}_n^2)$ которого состоит из абсолюта n -мерного флагового пространства F_n и одной гипер-

* Под размерностью группы здесь понимается число параметров, от которых она зависит.

и плоскости p_{n+1} занимающей произвольное положение по отношению к флагу. Гиперплоскость $p_{n+1}k$ пересекает $(k+1)$ -плоскость флага по k -плоскости, которая вместе с k -плоскостью флага образует пару k -плоскостей абсолюта ($\bar{F}_n^1$). При $k=0, 1, \dots, n-1$ получим пары k -плоскостей всех размерностей от 0 до $n-2$. Гиперплоскость флага и гиперплоскость p_{n-1} образуют пару гиперплоскостей абсолюта ($\bar{F}_n^2$). Абсолют n -мерного флагового пространства F_n зависит от $\frac{n}{2}(n+1)$ параметров, гиперплоскость p_{n+1} зависит от n параметров, следовательно, абсолют $\bar{F}_n^2$ зависит от $\frac{n}{2}(n+3)$ параметров, а группа движений пространства $\bar{F}_n^2$ от $\frac{n}{2}(n+1)$ параметров.

При $n=2$ абсолют ($\bar{F}_2^2$) состоит из двух прямых и точки на одной из них и зависит от пяти параметров. По утверждению историка математики Э. М. Брейнса, абсолют такого вида рассматривался античным философом-стоиком Зеноном Сидонским [8].

Оказывается, что $\frac{n}{2}(n+3)$ — минимальное число параметров, от которых может зависеть абсолют ($\bar{F}_n^2$) при различных расположениях его пар k -плоскостей. Докажем это с помощью следующих теорем.

Теорема 1. Если в P_n пары r -плоскостей p_r^i размерностей $r=0, 1, \dots, k-1$ расположены так, что пары всех r_1 -плоскостей размерностей $r_1=0, 1, \dots, k_1-1$ при любом $k_1 < k$ принадлежат одной заданной k_1 -плоскости, а другая заданная k_1 -плоскость проходит через одну из заданных (k_1-1) -плоскостей, то число параметров, от которых зависят r -плоскости p_r^i , равно $(k+1)n - \frac{k}{2}(k-1)$.

Доказательство. Две точки в P_n определяются $2n$ параметрами; прямая, проходящая через одну из них, определяется $(n-1)$ параметрами; 2-плоскость, проходящая через известную прямую, определяется $(n-2)$ параметрами и т. д.; $(k-1)$ -плоскость, проходящая через известную $(k-2)$ -плоскость, определяется $(n-k+1)$ параметрами. Таким образом, получим $n(k+1) - \frac{k}{2}(k-1)$ параметров.

Теорема 2. Наименьшее число параметров, от которых зависят в P_n пары r -плоскостей всех размерностей $r=0, 1, \dots, k-1$ при их различных расположениях, равно $n(k+1) - \frac{k}{2}(k-1)$.

Доказательство. Рассмотрим все возможные способы расположения в P_n пар r -плоскостей p_r^i всех размерностей $r=0, 1, \dots, n-1$. Две точки p_0^1, p_0^2 при любом способе задания r -плоскостей p_r^i принадлежат одной прямой и зависят от $2n$ параметров. Предположим, что пары r_1 -плоскостей всех размерностей от 0 до $l-1$, где $0 \leq l \leq k$, расположены так, как указано в теореме 1, и, следовательно, принадлежат одной l -плоскости p_l^1 , а l -плоскость p_l^2 пересекает l -плоскость p_l^1 по r -плоскости p_r , где $-1 \leq r \leq l-1$ (при $r=-1$ l -плоскости p_l^1, p_l^2 не имеют общих точек). Тогда l -плоскость p_l^2 определится $(l-r)(n-l)+p$ параметрами, где $p \geq 0$ — число параметров, которыми определяется r -плоскость p_r . При любом $r_1 = 0, 1, \dots, l-1$

$$p_l^1 \cup p_l^2 = p_{l-r} \supset p_r^1 \cup p_r^2,$$

поэтому с помощью $\lambda_1 = [(l-r)(n-l)+p]$ параметров будет определены пары l_1 -плоскостей размерностей самое большее от l до $2l-r-1$. Пары l_1 -плоскостей размерностей $l_1=l, l+1, \dots, 2l-r-1$ при вышеуказанном способе их расположения определяются $(l-r)(n-l) + \frac{l-r}{2}(r+1-l) = \lambda_2$ параметрами.

Так как $l \geq r+1$, то $\lambda_1 \geq \lambda_2$, причем равенство выполняется лишь при $p=0, l=r-1$, т. е. если p_r — данная $(l-1)$ -плоскость. Теорема доказана.

При $k=n$ получим, что абсолюты (J_n^2) зависят самое меньшее от $\frac{n}{2}(n+3)$ параметров; и тогда пары r -плоскостей этого абсолюта расположены так, что для любого $k < n$ пары r_1 -плоскостей всех размерностей от 0 до $k-1$ принадлежат одной данной k -плоскости, а другая k -плоскость проходит через одну из данных $(k-1)$ -плоскостей. Такие абсолюты будем обозначать (F_n^2) .

В каждой из двух гиперплоскостей абсолюта (F_n^2) имеется флаг, поэтому проективное n -пространство с абсолютом (F_n^2) будем называть бифлаговым и обозначать F_n^2 . Бифлаговые пространства являются пространствами J_n^2 максимальной подвижности, их группы движений зависят от $\frac{n}{2}(n+1)$ параметров, т. е. от того же числа, что и группы движений классических неевклидовых пространств.

Определение 1. k -плоскость, принадлежащую абсолюту пространства F_n^2 , будем называть абсолютной k -плоскостью вто-

ного (первого) порядка, если ей принадлежат две (одна) $(l-1)$ -плоскости абсолюта и абсолютной l -плоскостью второго (первого) класса, если она принадлежит двум (одной) $(l+1)$ -плоскостям абсолюта.

При $n > l > 0$ одна из абсолютных l -плоскостей абсолюта (F_n^2) первого порядка, а другая — второго порядка, при $0 \leq l \leq n-1$ одна из абсолютных l -плоскостей первого класса, а другая — второго класса. Точки абсолюта (F_n^2) будем считать абсолютными 0-плоскостями первого порядка, а гиперплоскости $(n-1)$ — плоскостями первого класса.

Определение 2. Два абсолюта (Π_n^2) будем называть проективно эквивалентными, если существует коллинеация P_n , преобразующая один абсолют в другой, и проективно неэквивалентными в противном случае.

Если два абсолюта (Π_n^2) зависят от разного числа параметров, то они проективно неэквивалентны. Выясним, сколько существует в P_n проективно неэквивалентных бифлаговых пространств.

В P_2 все абсолюты (F_2^2) проективно эквивалентны. В P_3 существуют два проективно неэквивалентных абсолюта (F_3^2) и (F_3^3) , для которых абсолютная прямая второго порядка является абсолютной прямой первого или второго класса.

Для пространств любой размерности имеет место

Теорема 3. Существует 2^{n-2} проективно неэквивалентных абсолютов (F_n^2) .

Доказательство. При коллинеациях пространства P_n класс и порядок l -плоскостей абсолюта (F_n^2) сохраняются. Поэтому если для двух абсолютов (F_n^2) l -плоскость первого порядка имеет разные классы, то эти абсолюты проективно неэквивалентны. При $1 \leq l \leq n-2$ получим 2^{n-2} проективно неэквивалентных абсолютов бифлаговых пространств. Если же все l -плоскости $1 \leq l \leq n-2$ первого порядка двух абсолютов (F_n^2) имеют одинаковые классы, то существует коллинеация, преобразующая один из этих абсолютов в другой. Такую коллинеацию можно задать однозначно, если для произвольной точки каждой абсолютной l -плоскости первого порядка одного абсолюта указать соответственную точку абсолютной l -плоскости первого порядка второго абсолюта и пару соответственных точек, не принадлежащих абсолютам. Коллинеация в этом случае будет задана $n+2$ парами соответственных точек. Теорема 3 доказана.

2. Фундаментальные группы бифлаговых пространств. Коллинеации, преобразующие абсолюты (F_n^2) в себя, образуют группу G . Отдельную коллинеацию группы G можно определить однозначно, если указать в каждой абсолютной l -плоскости первого порядка пару соответственных точек, не принадлежащих абсо-

лютой $(l-1)$ -плоскости, и пару соответственных точек, не принадлежащих абсолюту. Отсюда следует, что группа G транзитивна всюду в P_n , кроме точек, принадлежащих абсолюту. Если из пространства P_n удалим абсолютные гиперплоскости, то получим топологическое, некомпактное, несвязное пространство F_n^2 , на котором группа G будет транзитивна всюду. Группа G задает гомеоморфные отображения пространства F_n^2 на себя поэтому пространство F_n^2 однородно, а G — его фундаментальная группа [1].

Группа G является импримитивной, классами импримитивности пространства F_n^2 являются две области, на которые разбивается проективное пространство P_n двумя гиперплоскостями абсолюта (F_n^2). Каждая из этих областей представляет собой связные компоненты пространства F_n^2 .

Зададим абсолют пространства F_n^2 аналитически. Абсолютные гиперплоскости p_{n-1}^1, p_{n-1}^2 зададим уравнениями $x^n=0, x^{n-1}=0$, а абсолютные $(n-2)$ -плоскости p_{n-2}^1, p_{n-2}^2 — уравнениями $x^n=x^{n-1}=0, x^{n-1}=x^{n-2}=0$. Абсолютные $(n-3)$ -плоскости p_{n-3}^1 и p_{n-3}^2 зададим уравнениями $x^n=x^{n-1}=x^{n-2}=0, x^{n-1}=x^{n-3}=x^{n-2}=0$, где $n_2=n, n-2$, т. е. в зависимости от значения n_2 получим два проективно неэквивалентных абсолюта. Абсолютные $(n-4)$ -плоскости p_{n-4}^1 зададим уравнениями

$$x^n=x^{n-1}=x^{n-2}=x^{n-3}=0, \quad x^{n-4}=x^{n-1}=x^{n-2}=x^{n-3}=0,$$

где $n_3=n, n-2, n-3$, а n_2, n_3 различны для данного абсолюта и т. д., точку p_0^2 — уравнениями $x^i=0, i=1, 2, \dots, n$ точку p_0^1 — уравнениями $x^i=0, i=0, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ при этом j в зависимости от абсолюта может принимать значения $1, 2, \dots, n-2, n$.

Заметим, что в каждой абсолютной l -плоскости первого порядка имеется одна вершина координатного симплекса, не принадлежащая абсолютной $(l-1)$ -плоскости, а в каждой абсолютной l -плоскости второго порядка вершины координатного симплекса принадлежат абсолютным $(l-1)$ -плоскостям.

Коллинеации фундаментальных групп G построенных пространств имеют вид $\rho x^i = \alpha^i x^i + \beta^j x^j, \rho x^k = \alpha^k x^k, i=0, 1, \dots, n-2, i < j=1, \dots, n, k=n, n-1$, причем $\beta^{n-k}_{n_k} = 0$, где n_k^1 принимает то из двух значений n_k , которому для данного абсолюта n_k не равно, т. е. матрицы коллинеаций групп G имеют треугольный вид все элементы ниже главной диагонали — нули и в каждой строке выше главной диагонали имеется один нулевой элемент. При этом в $(n-1)$ -й и $(n-2)$ -й строках нули стоят в последнем столбце для всех абсолютов, а для любой другой $(n-r)$ -й строки нули могут стоять в одном из двух столбцов, если во всех

($n-r_1$) строках (при $r > r_1$) нули уже расставлены. Таким образом, получим 2^{n-2} фундаментальных групп проективно неэквивалентных пространств F_n^2 .

Все группы G являются группами Ли, так как они выделяются из групп всех коллинеаций пространства P_n заданием инвариантных линейных элементов, т. е. с помощью алгебраических условий. Коллинеации группы G взаимнооднозначно отображаются в точки топологического пространства ${}^n P_m$, которое получается из проективного пространства размерности $m = \frac{n}{2}(n-1)$ после удаления $n+1$ гиперплоскостей. Поэтому ба-

зисные пространства групп G гомеоморфны пространству ${}^n P_m$. Так как пространство ${}^n P_m$ некомпактно и несвязно, то и группы G некомпактны и несвязны. Относительно групп G имеет место также

Теорема 4. *Фундаментальные группы G бифлаговых пространств являющиеся разрешимыми группами Ли.*

Доказательство. Каждая группа G содержит нормальный делитель — подгруппу G_0 коллинеаций, для которых в их матрицах все элементы по главной диагонали равны. Группа G_0 является подгруппой разрешимой группы движений флагового n -пространства и поэтому разрешима [2, 3]. Фактор-группа G/G_0 коммутативна, так как она изоморфна группе коллинеаций вида $\rho x^i = \alpha^i x^i$. Отсюда следует, что G — разрешимая группа Ли [1, 4].

3. *Расстояния и углы в бифлаговых пространствах.* Определим в пространствах F_n^2 расстояние между двумя точками и угол между двумя k -плоскостями в пучках k -плоскостей.

Пусть в пространстве F_n^2 даны две точки A и B . Если прямая AB не пересекает абсолютную $(n-2)$ -плоскость второго класса, то она имеет общие различные точки M_1, M_2 с абсолютными гиперплоскостями. Эти точки назовем базисными точками прямой AB . Коллинеации фундаментальной группы G -пространства F_n^2 переводят базисные точки прямой AB в базисные точки соответствующей ей прямой, поэтому сложное отношение (ABM_1M_2) является инвариантом группы G . Если точки A и B принадлежат одному классу импримитивности пространства F_n^2 , то $(ABM_1M_2) > 0$ [5]. Поэтому $\delta_{AB} = \ln(ABM_1M_2)$, где M_1, M_2 — базисные точки прямой AB и $AM_1 \div BM_2$, является однозначной, действительной, положительной, аддитивной функцией двух точек одной области импримитивности пространства F_n^2 .

Коллинеации фундаментальных групп пространств F_n^2 можно нормировать условием $\alpha^n = 1$. Тогда, полагая для точек пространства F_n^2 $x^n = 1$, превратим пространство F_n^2 в аффинное n -мерное пространство с выделенной в нем гиперплоскостью P_{n-2}^2 .

Гиперплоскость P_{n-2}^2 разобьет аффинное пространство E_n на

два полупространства, каждое из которых является классом примитивности пространства F_n^2 . Выделим положительное полупространство $+F_n^2$. Пространство $+F_n^2$ является связным топологическим пространством, а его фундаментальной группой является подгруппа Y_+ группы G , для коллинеаций которой $\alpha^{n-1} > 0$.

Найдем в пространстве $+F_n^2$ формулу длины отрезка AB .

Пусть $A(x^i)$, $B(y^i)$, тогда $M_1(x^i + \lambda_1 y^i)$, $M_2(x^i + \lambda_2 y^i)$, где $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = x^{n-1} : y^{n-1}$, M_1 — несобственная точка прямой AB , M_2 принадлежит гиперплоскости p_{n-1}^2 . Отсюда следует, что $(ABM_1M_2) = y^{n-1} : x^{n-1}$. Если $AM_1 \div BM_2$, т. е. имеет место $B \times AM_2$, то $y^{n-1} > x^{n-1}$ и $\ln(y^{n-1} : x^{n-1}) > 0$. Если же $AM_1 \div BM_2$, тогда $AM_2 \div BM_1$ и $\ln(x^{n-1} : y^{n-1}) > 0$. Таким образом, длина δ_{AB} отрезка AB равна $\ln(x^{n-1} : y^{n-1})$ при $x^{n-1} > y^{n-1}$ и $\ln(y^{n-1} : x^{n-1})$ при $x^{n-1} < y^{n-1}$. Если прямая пересекает $(n-2)$ -плоскость $x^n = x^{n-1} = 0$, то для ее точек x^{n-1} постоянно, и, следовательно, длина всякого отрезка на ней, вычисленная указанным способом, равна нулю. Такие прямые будем называть изотропными. Они образуют линейный комплекс прямых. Можно доказать, что существует коллинеация в группе G , преобразующая любые две точки одной изотропной прямой в любые две точки другой изотропной прямой, т. е. инварианта двух точек изотропной прямой относительно группы G не существует.

Величину угла между гиперплоскостями определим с помощью абсолютных точек p_0^1 и p_0^2 , а именно: за величину угла между гиперплоскостями $\bar{q}_{n-1}$ и $\bar{q}_{n-1}$ возьмем

$\ln(q_{n-1}^1 q_{n-1}^2 q_{n-1} \bar{q}_{n-1})$ при $q_{n-1}^1 q_{n-1}^2 \div q_{n-1} \bar{q}_{n-1}$ и $\ln(q_{n-1}^1 q_{n-1}^2$

$$q_{n-1} \bar{q}_{n-1}) + \frac{\pi}{2} \text{ при } q_{n-1}^1 q_{n-1}^2 \div q_{n-1} \bar{q}_{n-1},$$

где $q_{n-1}^i \equiv q_{n-2} \cup p_0^i$, $q_{n-2} \equiv \bar{q}_{n-1} \cap q_{n-1}$, $i = 1, 2$.

Две гиперплоскости в F_n^2 назовем перпендикулярными, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Из определения величины угла между гиперплоскостями следует, что если гиперплоскости перпендикулярны, то они пересекают абсолютную прямую второго порядка в двух точках, которые делят гармонически пару абсолютных точек. Поэтому все гиперплоскости, перпендикулярные к данной, образуют связку гиперплоскостей с центром на абсолютной прямой второго порядка.

Величину угла ϕ между k -плоскостями q_k , $\bar{q}_k$ в пучке (q_{k-1}) k -плоскостей в пространстве F_n^2 определим с помощью абсолют

ных $(n-k-1)$ -плоскостей p_{n-k-1}^1, p_{n-k-1}^2 . Положим $\varphi = \ln(q_k^1 q_k^2 q_k \bar{q}_k)$, если $(q_k^1 q_k^2 q_k \bar{q}_k) > 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2} + \ln(q_k^1 q_k^2 q_k \bar{q}_k)$, если $(q_k^1 q_k^2 q_k \bar{q}_k) < 0$, где $q_k^i \equiv q_{k-1} \cup M_i$,

$$M_i \equiv q_{k-1} \cap p_{n-k-1}^i, q_{k+1} \equiv q_k^1 \cup q_k^2, k=1, 2, \dots, n-1, i=1, 2.$$

Для функции δ_{AB} расстояния между точками в бифлатовых пространствах F_n^2 , как и во флаговых пространствах F_n , выполняется равенство треугольника, а углы треугольника в F_n^2 удовлетворяют условию: существует угол A , равный сумме двух других, или $A + \pi = B + C$.

В бифлатовых пространствах, как и в классических неевклидовых пространствах, группы движений и подобий совпадают и зависят от $\frac{n}{2}(n+1)$ параметров. Однако, в отличие от классических неевклидовых пространств, группы движений бифлатовых пространств не содержат отражений от точек, так как при движениях пространства F_n^2 инвариантны две гиперплоскости абсолюта (F_n^2). Следовательно, пространства F_n^2 не являются симметрическими пространствами [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Поитрягин Л. С. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954. 515 с.
2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., «Наука», 1969. 547 с.
3. Курош А. Г. Теория групп. М., «Наука», 1967. 648 с.
4. Шевалле К. Теория групп Ли. Ч. III. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1958. 307 с.
5. Кэли В. Ф. Основания геометрии. Ч. II. М., Гостехиздат, 1956. 407 с.
6. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп Ли и топология. — В кн.: Э. Картан. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1949, с. 240—292.
7. Буземан Г. Геометрия геодезических. Пер. с нем. М., Физматгиз, 1962. 503 с.
8. Bruilns E. M. A wrong track followed for two millenia pure geometry. — In: Radovi međunarodnog simpozija «Geometrija i algebra početkom XVII stoljeća». Povod 400-godišnjice rođenja Marina Getaldića. (Dubrovnik, 29/IX—3/X 1969 g.). Zagreb, 1969, s. 113—125.

Поступила 14 октября 1972 г.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ «СТРУКТУРЫ КРИВИЗНЫ»

В настоящей работе рассматривается структура на векторных расслоениях, аналогичная «структуре кривизны» на римановых многообразиях [8].

I. Общей тройной системой Ли (сокращенно — общей 3-системой) называется [10] конечномерное векторное пространство T , на котором задано трилинейное отображение

$$f: T \times T \times T \rightarrow T, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$f(x, y, z) + f(y, x, z) = 0, \quad (2)$$

$$f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) = 0. \quad (3)$$

Элемент $f(x, y, z)$ будем обозначать просто символом $[x, y, z]$. Если для любых x, y, z

$$[x, y, z] = 0,$$

то общая 3-система T называется тривиальной.

Пусть элементы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис общей 3-системы T .

Положим

$$[e_i, e_j, e_k] = \sum_s R_{kij}^s e_s.$$

Числа R_{kij}^s будем называть структурными константами общей 3-системы T относительно базиса $e_1, \dots, e_n$. Из (2) и (3) следует, что структурные константы удовлетворяют следующим условиям:

$$R_{kil}^s + R_{kji}^s = 0, \quad (4)$$

$$R_{kij}^s + R_{ljk}^s + R_{jki}^s = 0. \quad (5)$$

Общие тройные системы Ли допускают простую геометрическую интерпретацию [10]: если A — пространство аффинной связности без кручения и $p \in A$, то тензор кривизны R индуцирует в касательном пространстве A_p структуру общей 3-системы.

Подпространство B общей 3-системы T называется идеалом T [10], если имеет место включение $[B, T, T] \subset B$ (символом $[B, T, T]$ обозначено подпространство векторного пространства T , порожденное элементами вида $[b, x, y]$, где $b \in B, x, y \in T$).

Общая тройная система Ли T просто называется *тройной системой Ли* [7, 10], если для любых элементов $a, b, x, y, z \in T$

$$[a, b, [x, y, z]] = [[a, b, x], y, z] + [x, [a, b, y], z] + [x, y, [a, b, z]]. \quad (6)$$

Тройные системы Ли будем для краткости называть 3-системами.

Если T — общая 3-система, R_{kij}^s — ее структурные константы относительно некоторого базиса, то (6) эквивалентно условию

$$\sum_i \{-R_{jkr}^s R_{sab}^i + R_{skr}^i R_{jab}^s + R_{jsr}^i R_{kab}^s + R_{jks}^i R_{rab}^s\} = 0. \quad (7)$$

Общую 3-систему T будем называть *метабелевой 3-системой*, если для любых элементов $x, y, z, a, b \in T$

$$[[x, y, z], a, b] = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что для метабелевых 3-систем справедливо условие (6), т. е. метабелевы 3-системы являются частным случаем 3-систем.

2. Пусть

$$p: E \rightarrow X \quad (9)$$

действительное векторное расслоение размерности n , $\{U_i\}$ — семейство координатных окрестностей расслоения (9),

$$\varphi_i: U_i \times V \xrightarrow{-1} p^{-1}(U_i)$$

координатные отображения, соответствующие этим окрестностям. Если $x \in U_i$, то символом $\varphi_{i,x}$ будем обозначать изоморфное отображение векторного пространства V на векторное пространство $E_x = p^{-1}(x)$, определенное следующим образом:

$$\varphi_{i,x}(v) = \varphi_i(x, v).$$

Если $x \in U_i \cap U_j$, то отображение $g_{ji}(x) = \varphi_{j,x}^{-1} \cdot \varphi_{i,x}$

является автоморфизмом V ; если элементы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис V , то $g_{ji}(x)$ может быть представлено невырожденной матрицей $(g_{js(ji)}^i(x))$, элементы которой являются непрерывными функциями от x .

Векторное расслоение (9) будем называть *пучком общих 3-систем* (соответственно *пучком алгебр Ли*), если задан морфизм расслоений

$$f: E \oplus E \oplus E \rightarrow E \quad (\text{соответственно } f: E \oplus E \rightarrow E)$$

такой, что f индуцирует в любом слое структуру общей 3-системы (соответственно алгебры Ли). Если расслоение (9) является расслоением многообразий и отображение f дифференцируемо, то пучок общих 3-систем (соответственно пучок алгебр Ли) называется дифференцируемым.

Аналогично определяются пучки 3-систем и пучки метабелевых 3-систем.

Приведенное определение несколько отличается от известного определения пучка алгебраических систем [3].

Используя координатные гомеоморфизмы φ_i , легко показать, что задание на векторном расслоении (9) структуры пучка общих 3-систем равносильно заданию на каждой координатной окрестности U_i непрерывных функций $R_{rjk(i)}^s$ ($1 \leq r, s, j, k \leq n$), удовлетворяющих условиям

$$R_{rjk(i)}^s + R_{rkj(i)}^s = 0,$$

$$R_{rjk(i)}^s + R_{jkr(i)}^s + R_{kjr(i)}^s = 0$$

и таких, что для любого $x \in U_i \cap U_j$

$$\sum_a R_{rmk(i)}^a(x) g_{a(mi)}^s(x) = \sum R_{wuv(i)}^s(x) g_{r(ji)}^w(x) g_{m(ji)}^u(x) g_{k(ji)}^v(x).$$

Таким образом, задание на касательном расслоении некоторого многообразия M структуры дифференцируемого пучка общих 3-систем равносильно заданию на M так называемой структуры кривизны [8], т. е. три раза ковариантного и один — контравариантного тензорного поля R , удовлетворяющего условиям

$$R(X, Y, Z) + R(Y, X, Z) = 0,$$

$$R(X, Y, Z) + R(Y, Z, X) + R(Z, X, Y) = 0$$

для любых векторных полей X, Y, Z .

Пусть

$$p': E' \rightarrow X, \quad (10)$$

$$p'': E'' \rightarrow X \quad (11)$$

— пучки общих 3-систем, имеющие общую базу. Морфизмом пучка (10) в пучок (11) будем называть непрерывное отображение $q: E' \rightarrow E''$ (дифференцируемое, если пучки общих 3-систем (10) и (11) дифференцируемы), такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{q} & E'' \\ \left| \begin{array}{cc} p' & p'' \end{array} \right| & & \\ \searrow & & \swarrow \\ & X & \end{array} \quad (12)$$

коммутативна, причем для любого $x \in X$ q индуцирует гомоморфизм общей 3-системы E_x в общую 3-систему E_x . Пучки общих 3-систем, базой которых служит пространство X , и их морфизмы образуют категорию.

Пусть T — общая 3-система, X — топологическое пространство.

На тривиальном расслоении

$$p: T \times X \rightarrow X \quad (13)$$

очевидным образом определяется структура пучка общих 3-систем. Пучок общих 3-систем, изоморфный пучку общих 3-систем вида (13), будем называть тривиальным.

Если

$$p: E \rightarrow X \quad (9)$$

— пучок общих 3-систем и $U \subset X$, то на векторном расслоении

$$p|_{p^{-1}(U)}: p^{-1}(U) \rightarrow U \quad (14)$$

естественным образом индуцируется структура пучка общих 3-систем; этот пучок будем обозначать символом E_U .

Пучок общих 3-систем (9) будем называть локально тривиальным, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$ такая, что пучок общих 3-систем $E_{U(x)}$ тривиален.

Очевидно, пучок общих 3-систем (9) локально тривиален тогда и только тогда, когда существует покрытие пространства X координатными окрестностями U_i такими, что соответствующие функции $R_{ijk}^s(t)$ постоянны.

Легко показать, что если база локально тривиального пучка общих 3-систем (9) связна, то все слои изоморфны (как общие 3-системы).

Если A — некоторая алгебра Ли, то, полагая

$$[x, y, z] = [[x, y], z], \quad (15)$$

определяем на A структуру 3-системы. Таким образом, любой пучок алгебр Ли можно рассматривать как пучок 3-систем. В дальнейшем, говоря о морфизме пучка 3-систем в пучок алгебр Ли, будем считать, что последний превращен в пучок 3-систем.

Известно [7, 10], что любая 3-система может быть вложена в алгебру Ли, т. е. для любой 3-системы T существует алгебра Ли A такая, что T является векторным подпространством A и для любых $x, y, z \in T$ справедливо (15). Имеет место следующий аналог этого результата для пучков 3-систем:

Теорема 1. Пусть X — топологическое пространство; существует ковариантный функтор L из категории пучков 3-систем над пространством X в категорию пучков алгебр Ли над X , причем для каждого пучка 3-систем

$$p: E \rightarrow X \quad (9)$$

существует морфизм i пучка 3-систем (9) в пучок алгебр Ли

$$\bar{p}: L(E) \rightarrow X, \quad (16)$$

который является вложением. Если пучок (9) дифференцируем, то пучок алгебр Ли (16) и морфизм i также дифференцируемы.

Лемма. Существует ковариантный непрерывный функтор K из категории конечномерных векторных пространств в категорию конечномерных векторных пространств, который индуцирует ковариантный функтор (его также будем обозначать символом K) из категории 3-систем в категорию алгебр Ли; для каждого конечномерного векторного пространства V существует вложение $i_V: V \rightarrow K(V)$, причем если V является 3-системой, то i_V — гоморфизм 3-системы V в алгебру Ли $K(V)$ (рассматриваемую как 3-систему).

Доказательство. Пусть V — конечномерное векторное пространство; поставим в соответствие пространству V конечномерное векторное пространство

$$K(V) = V \cdot (V \cdot V) / I,$$

где I — подпространство пространства $V \cdot V$, порожденное элементами вида

$$x \cdot y + y \cdot x.$$

Пусть f — линейное отображение пространства V в пространство W . Тогда

$$(f \cdot f)(x \cdot y + y \cdot x) = f(x) \cdot f(y) + f(y) \cdot f(x),$$

т. е. можно определить отображение

$$K(f): K(V) \rightarrow K(W),$$

полагая для $x, y \in V$

$$K(f)(x) = f(x),$$

$$K(f)(\{x \cdot y\}) = \{f(x) \cdot f(y)\}$$

(здесь символом $\{x \cdot y\}$ обозначен класс эквивалентности элемента $x \cdot y$). Таким образом, определен ковариантный функтор K из категории конечномерных векторных пространств в категорию конечномерных векторных пространств. Очевидно, функтор K непрерывен. Вложение i_V определяется очевидным образом.

Если векторное пространство V является 3-системой, то в пространстве $K(V)$ определим операцию коммутирования полагая для $x, y, z, v \in V$

$$[x, y] = \{x \cdot y\},$$

$$[\{x \cdot y\}, z] = -[z, \{x \cdot y\}] = [x, y, z], \quad (1)$$

$$[\{x \cdot y\}, \{z \cdot v\}] = [\{x, y, z\} \cdot v] + \{z \cdot [x, y, v]\} \quad (1)$$

(операция коммутирования определена корректно, так как предыдущие части (17) и (18) зависят лишь от классов эквивалентности элементов $x \cdot y$ и $z \cdot v$). Эта операция превращает $K(V)$

и стандартную обертывающую алгебру Ли 3-системы V [7]; при этом из (17) и (18) следует, что вложение i_V является гомоморфизмом 3-систем.

Доказательство теоремы 1. Поскольку функтор K непрерывен, то можно определить функтор L , который ставит в соответствие векторному расслоению

$$p: E \rightarrow X \quad (9)$$

векторное расслоение

$$\bar{p}: L(E) \rightarrow X,$$

где

$$L(E) = \bigcup_{x \in X} K(E_x) \quad (19)$$

(см. [1, с. 11—12]). Определим вложение $i: E \subset L(E)$ следующим образом: если $a \in E_x$, то $i(a) = i_{E_x}(a)$.

Очевидно, что если векторное расслоение (9) является пучком 3-систем, то в каждом слое векторного расслоения (19) определена операция коммутирования. Таким образом, (19) является пучком алгебр Ли, следовательно, L является ковариантным функтором из категории пучков 3-систем над X в категорию пучков алгебр Ли над X . При этом i будет морфизмом пучка 3-систем (9) в пучок алгебр Ли (19). Непосредственно проверяется, что если пучок 3-систем (9) дифференцируем, то пучок алгебр Ли (19) и морфизм i также дифференцируемы.

3. Пусть A — некоторое пространство аффинной связности без кручения. (В дальнейшем будем рассматривать только такие пространства). Тогда тензор кривизны индуцирует на касательном расслоении пространства A структуру пучка общих 3-систем. Для того чтобы тензор кривизны пространства аффинной связности A индуцировал на касательном расслоении

$$p: TA \rightarrow A \quad (20)$$

структуру пучка 3-систем, необходимо и достаточно, чтобы тензор кривизны удовлетворял следующему условию: для любых векторных полей X и Y на A

$$R(X, Y)R = 0,$$

(в координатной форме это условие можно записать следующим образом [9]):

$$R^i_{rjk,ab} = R^i_{rjk,ba}, \quad (21)$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование). Пространства аффинной связности, удовлетворяющие (21), были названы в [4] полусимметрическими. Частным случаем полусимметрических пространств будут пространства аффинной связ-

ности, тензор кривизны которых индуцирует на касательном расслоении (20) структуру пучка метабелевых 3-систем. Такие пространства будем называть метабелевыми. Можно показать, что примером метабелевых пространств служат пространства Д. В. Веденяпина [2].

Теорема 2. Тензор кривизны метабелевого локально симметрического пространства A индуцирует на касательном расслоении структуру локально тривиального пучка метабелевых 3-систем. Обратно, если на касательном расслоении

$$p: TU \rightarrow U, \quad (22)$$

базой которого служит открытое подмножество евклидова пространства, задан тензор R , индуцирующий на (22) структуру тривиального пучка метабелевых 3-систем, то R является тензором кривизны некоторой аффинной связности на U , которая превращает U в симметрическое метабелево пространство.

Доказательство. Пусть A — метабелево симметрическое пространство, $q \in A$, N — нормальная окрестность точки q , отнесенная к системе координат $(x^1, \dots, x^n)$,

$$Y_i = b_i^s \frac{\partial}{\partial x^s}$$

— n векторных полей на N , адаптированных к касательным векторам

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_q, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_q.$$

Предположим, что

$$R(Y_i, Y_j)Y_k = \tilde{R}_{kij}^s Y_s.$$

Поскольку пространство A локально симметрично, то $\tilde{R}_{kij}^s$ постоянны.

Рассмотрим 1-формы ω^i , ω_j^i , определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega^i(Y_j) &= \delta_j^i, \\ \omega_j^i &= \sum_k \Gamma_{kj}^i \omega^k. \end{aligned}$$

Пусть V — множество точек $(t, a^1, \dots, a^n) \in R^{n+1}$ таких, что вектор $(ta^1, \dots, ta^n)$ принадлежит нормальной окрестности начала координат в A , которая соответствует нормальной окрестности N , и $\Phi: V \rightarrow N$ — отображение, которое в системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ определяется следующим образом:

$$\Phi(t, a^1, \dots, a^n) = (ta^1, \dots, ta^n). \quad \}$$

Известно [6], что

$$\Phi^* \omega^i = a^i dt + \bar{\omega}^i,$$

$$\Phi^* \omega_j^i = \bar{\omega}_j^i,$$

где $\bar{\omega}^i, \bar{\omega}_j^i$ — 1-формы от $da^1, \dots, da^n$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da^i + \sum_k a^k \bar{\omega}_k^i, \\ \frac{\partial \bar{\omega}_s^i}{\partial t} = \sum_{j,k} \bar{R}_{s/jk}^i a^j \bar{\omega}_k^i, \\ \bar{\omega}^i|_{t=0} = 0, \\ \bar{\omega}_j^i|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что пространство A метабелево, т. е. справедливо условие

$$\sum_s \bar{R}_{ijh}^s \bar{R}_{abs}^i = 0, \quad (23)$$

получаем, что решением этой системы будут формы

$$\bar{\omega}^i = t da^i + \frac{1}{6} t^3 \sum R_{kls}^i a^k a^l da^s,$$

$$\bar{\omega}_s^i = \frac{t^2}{2} \sum \bar{R}_{s/jk}^i a^j da^k$$

(причем это решение единственно).

Отсюда легко получаем

$$c_s^i = \delta_s^i + \frac{1}{6} \sum \bar{R}_{kjs}^i x^j x^k,$$

где c_s^i — элементы матрицы, обратной к матрице (b_s^i) . Тогда

$$b_j^s = \delta_j^s - \frac{1}{6} \sum \bar{R}_{krj}^s x^k x^r.$$

Следовательно, координаты тензора кривизны R в системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ примут вид

$$R_{r/jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = R \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = c_j^i c_k^u c_r^s b_v^i \bar{R}_{stu}^v \frac{\partial}{\partial x^i} = \bar{R}_{r/jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

т. е. $R_{r/jk}^i = \bar{R}_{r/jk}^i$; таким образом, координаты тензора кривизны постоянны в N , что и требовалось доказать.

Обратно, пусть на открытом подмножестве U n -мерного евклидова пространства задан тензор R , индуцирующий на касательном расслоении структуру тривиального пучка метабелевых 3-систем. В некоторой системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ компоненты R^i_{jkl} тензора R постоянны. Тогда определим коэффициенты связности следующим образом:

$$\Gamma^r_{sk} = \frac{1}{3} \sum_i (R^r_{sik} + R^r_{kis}) x^i.$$

Непосредственно проверяется, что таким образом на U определяется структура симметрического пространства, причем тензор кривизны этого пространства совпадает с исходным тензором R .

Нетрудно показать, что для всякого n можно построить нетривиальную n -мерную метабелеву 3-систему. Отсюда следует, что для любого n существует n -мерное симметрическое метабелево пространство, тензор кривизны которого отличен от нуля.

В заключение отметим, что задание структуры пучка общих 3-систем на касательном расслоении означает задание некоторой тензорной структуры; в этом случае локальная тривиальность пучка общих 3-систем эквивалентна полной интегрируемости соответствующей тензорной структуры. Таким образом, теорему 2 можно сформулировать так: *Тензорная структура, которую задает тензор кривизны на метабелевом симметрическом пространстве, вполне интегрируема.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Атья М. Лекции по K -теории. М., «Мир», 1967. 260 с.
2. Воднев В. Т. О пространствах Д. В. Веденяпина. — «Изв. АН БССР Сер. физ.-мат. наук», 1968, № 1, с. 61—73.
3. Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М., ИЛ, 1961. 319 с.
4. Синюков Н. С. О геодезических отображениях римановых пространств. — В кн.: Труды III Всесоюз. мат. съезда. (Т. I. М., 1956, с. 167—168.
5. Синюков Н. С. Почти симметрические пространства. — В кн.: Тезисы докл. I Всесоюз. геометр. конф. Киев, 1962, с. 84—85.
6. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., «Мир», 1964. 533 с.
7. Harris B. Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1961, vol. 98, N 1, p. 148—162.
8. Kulkarni R. S. Curvature structures and conformal transformations. — «Bull. Amer. Math. Soc.», 1969, vol. 75, N 1, p. 91—94.
9. Tanno S. A class of Riemannian manifolds satisfying $R(X, Y)R = 0$. — «Nagoya Math. J.», 1971, vol. 42, p. 67—77.
10. Yamaguti K. On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems). — «J. Sci. Hiroshima Univ.», 1957, vol. A 21, N 2, p. 107—113.

Поступила 23 февраля 1973 г.

Н. И. Кованцов, д-р физ.-мат. наук,
Т. В. Носаль

РАССЛОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСА В КОНГРУЭНЦИИ, НОРМАЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В работе [1] записаны дифференциальные уравнения, определяющие расслоение комплекса в конгруэнции, ортогональные поверхностям постоянной кривизны. Эти уравнения приводят к уравнению четвертой степени, корнями которого являются абсциссы точек, описывающих поверхности постоянной кривизны. Указанное алгебраическое уравнение исчезает тогда и только тогда, когда комплекс линейный. Система дифференциальных уравнений, описывающих расслоение, становится вполне интегрируемой. Это значит, что каждый линейный комплекс допускает расслоение в конгруэнции, ортогональные поверхностям постоянной кривизны. В настоящей работе дано построение таких поверхностей для заданного линейного комплекса. Иными словами, получены безынтегральные решения соответствующих систем дифференциальных уравнений.

§ 1. Основные уравнения

Напомним определение нормального трехгранника комплекса: вершина A помещена в центр луча, вектор e_3 направлен по лучу, вектор e_1 — по главной нормали, а вектор e_2 — по би-нормали [2]. В нормальном трехграннике линейный комплекс задается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= k\omega_3^1; \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_3^2; \\ dk &= -2k\beta\omega_3^1; \\ \omega^3 &= k\beta\omega_3^2 - \beta\omega^1; \\ d\beta &= -(1 + \beta^2)\omega_3^1.\end{aligned}\tag{1.1}$$

То, что уравнений в системе пять, соответствует факту, согласно которому линейные комплексы определяются с произволом в пять постоянных. Поскольку

$$D\omega_3^1 = [\omega_3^2 \omega_2^1] = 0,$$

то ω_3^1 — полный дифференциал. Положим

$$\omega_3^1 = du,\tag{1.2}$$

в таком случае из последнего уравнения системы (1.1) получим

$$\beta = -\operatorname{tg} u,$$

а из третьего —

$$k = \frac{1}{\cos^2 u} \quad (1.3)$$

(постоянные интегрирования отбрасываем).

Легко видеть, что

$$d\left(\frac{e_1 - \beta e_3}{\sqrt{1 + \beta^2}}\right) = 0.$$

Это значит, что единичный вектор

$$p = \frac{e_1 - \beta e_3}{\sqrt{1 + \beta^2}}$$

является постоянным для всех лучей комплекса.

Уравнения

$$\omega_3^1 = 0,$$

$$\omega^1 = k \omega_3^2 \quad (1.4)$$

определяют винтовую линию, описываемую вершиной трехгранника А. Трехгранник Френе для такой кривой определен единичными векторами: касательной — $\tau = e_1$, главной нормали — $\nu = e_2$, бинормали — $\beta = e_3$, а формулы Серре—Френе для такой кривой имеют вид

$$\frac{dA}{ds} = e_1, \quad \frac{de_2}{ds} = -\frac{\beta}{k} e_1 - \frac{1}{k} e_3,$$

$$\frac{de_1}{ds} = \frac{\beta}{k} e_2, \quad \frac{de_3}{ds} = \frac{1}{k} e_2.$$

Вдоль этой линии $u = \text{const}$.

Если на каждой главной нормали винтовой линии (1.4) отложить отрезок длиной $\lambda = -\operatorname{tg} u$, то конец отрезка будет описывать прямую, параллельную единичному вектору p . Эта прямая — ось винтовой линии. Вектор e_1 образует с осью p угол u

а вектор e_3 — угол $\frac{\pi}{2} - u$. Отсюда, между прочим, следует, что произвольный линейный комплекс может быть построен так: берется произвольная прямая в пространстве и однопараметрическое семейство круговых цилиндров (σ), имеющих осью эту прямую. На цилиндре, радиус которого равен $\lambda = -\operatorname{tg} u$,

проводим однопараметрическое семейство винтовых линий, наклоненных под углом u к оси. Затем в каждой касательной плоскости цилиндра через каждую его точку проводим прямую, перпендикулярную к той винтовой линии, которая проходит через эту точку. Совокупность таких прямых и определяет линейный комплекс.

§ 2. Построение поверхностей постоянной кривизны

Расслоение комплекса в конгруэнции, ортогональные к поверхностям постоянной кривизны K , определяется системой дифференциальных уравнений [1]

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2, \quad (2.1)$$

$$dt = -\omega^3,$$

где

$$a = -t + \frac{1 + Kk^2}{Kt}. \quad (2.2)$$

Если u, v, w — параметры, от которых зависит положение луча комплекса, то уравнения (2.1) следует рассматривать как два уравнения, где независимыми переменными являются, например, u и v , а искомыми функциями — w и t . При этом коэффициент k есть известная функция от u, v, w , определяемая комплексом. Лишь у линейного комплекса, как уже говорилось выше, система (2.1) вполне интегрируема.

Из (1.1) и (2.1) имеем

$$\omega^3 = k\beta\omega_3^2 - \beta(a\omega_3^1 + k\omega_3^2) = -\beta a\omega_3^1 = -\beta a du,$$

а потому

$$dt = -\omega^3 = \beta a du = -\operatorname{tg} u \left(-t + \frac{1 + \frac{1}{\cos^4 u} K}{Kt} \right) du. \quad (2.3)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно t^2 . Интегрируя его, получаем

$$t^2 = \frac{1}{\cos^2 u} \left[\frac{1}{2K} \cos 2u - \frac{1}{\cos^2 u} + \gamma \right], \quad (2.4)$$

$\gamma = \text{const.}$

Напомним, что точка $M = A + te_3$ в конгруэнции (2.1) описывает поверхность постоянной кривизны. Из равенства (2.5) видим, что при $u = \text{const}$ также и $t = \text{const}$; следовательно, при построении поверхности постоянной кривизны, ортогональной лучам комплекса, мы должны на каждом луче от точки A откладывать

отрезок постоянной длины (для каждой конкретной винтовой линии). Это дает возможность строить точки поверхности постоянной кривизны для точек A , принадлежащих одному цилиндру (σ). Выясним теперь, как выполнить такое же построение для какого-либо направления, не касательного к цилиндру (σ). Таким будет, например, направление, лежащее в плоскости, которая проходит через ось цилиндров. Каждая такая плоскость определяется уравнением

$$\omega_3^2 = 0. \quad (2.5)$$

Легко понять, что это уравнение вполне интегрируемо, так как

$$[D\omega_3^2, \omega_3^2] = 0.$$

Учитывая (2.5), будем иметь

$$dA = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 = [a(1 + \beta^2) \rho k e_3] du,$$

где ρ — единичный вектор оси цилиндров. Принимая ось цилиндров за ось Oz , а прямую, параллельную вектору e_2 (неподвижную при $\omega_3^2 = 0$), — за ось Ox , получим дифференциальные уравнения линий, описываемых точкой A :

$$dz = a\sqrt{1 + \beta^2} du = \frac{1}{\cos u} \left[-t + \frac{1 + \frac{1}{\cos^4 u} K}{Kt} \right] du, \quad (2.6)$$

$$dx = -kdu = -\frac{du}{\cos^2 u} \quad \{$$

(направление оси Ox берем противоположным направлению вектора e_2). Интегрируя (2.6), получаем

$$x = -\operatorname{tg} u = \lambda, \quad (2.7)$$

$$z = \int \frac{1}{\cos u} \left[-t + \frac{1 + \frac{1}{\cos^4 u} K}{Kt} \right] du + \delta,$$

δ — постоянная интегрирования. Постоянную интегрирования для x отбрасываем, что не ограничивает общности наших рассуждений. Под знак интеграла для z следует внести t , определенное равенством (2.4). Изменяя δ , получим однопараметрический

Это семейство плоских кривых, расположенных в плоскости XZ . Каждый цилиндр σ пересекает каждую кривую (2.7) в одной точке, через которую проходит его определенная винтовая линия.

Таким образом, чтобы построить поверхность постоянной кривизны, ортогональную к лучам линейного комплекса, следует через каждую точку A кривой (2.7) провести прямую в направлении вектора e_3 и на ней отложить отрезок, длина которого определяется равенством (2.4). Этот же отрезок следует отложить вдоль всей винтовой линии, определяемой точкой A . Концы всех таких отрезков опишут искомую поверхность постоянной кривизны, если точка A пробежит всю кривую (2.7) (при фиксированном δ). Изменяя δ , получим однопараметрическое семейство поверхностей.

То обстоятельство, что мы взяли кривую (2.7) в плоскости XZ , сути дела не меняет: можно было бы провести какую угодно поверхность Σ . Такая поверхность пересекает каждый цилиндр по некоторой кривой. На каждой из таких кривых мы могли бы получить вершину A подвижного репера аналогично тому, как это сделано выше, т. е. интегрируя некоторое дифференциальное уравнение. Все вершины образовывали бы на Σ некоторую кривую, аналогичную кривой (2.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кованцов Н. И., Носаль Т. В. Расслоение комплексов в трехмерном евклидовом пространстве в нормальные, конгруэнции. — «Укр. геометр. сб.», вып. 14. Харьков, 1973, с. 28—44.
2. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев. Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 292 с.

Поступила 11 февраля 1973 г.

УДК 513

А. Д. Милка, канд. физ.-мат. наук

**КРАТЧАЙШАЯ С НЕСПРЯМЛЯЕМЫМ
СФЕРИЧЕСКИМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ. I.**

Известна гипотеза, согласно которой на выпуклой поверхности в E^3 сферическое изображение кратчайшей линии в окрестности внутренней ее точки спрямляемо [1, дополнение, п. 1]. Обсуждение этого вопроса и примыкающих результатов проводится в [2] (см. также [3]). В данной работе построением соответствующего примера устанавливается, что в общем случае указанное утверждение не выполняется.

Точку кратчайшей линии на поверхности, любая окрестность которой на этой линии имеет неспрямляемое сферическое изо-

бражение, можно назвать особой. В примере, который будет сейчас построен, особая точка кратчайшей является единственной. Оказывается, существуют кратчайшие линии, множества особых точек которых — несчетные и даже положительной линейной меры. Такие кратчайшие будут рассматриваться в продолжении этой работы.

В § 1 предлагаемой работы осуществляется построение и приводится общее описание соответствующей выпуклой поверхности; один из фактов, которые здесь используются, доказывается в § 2; § 3 и 4, как и § 2, — вспомогательные. В § 5 рассматриваемой поверхности строится квазигеодезическая, имеющая в сколь угодно малой окрестности некоторой внутренней ее точки неспрямляемое сферическое изображение; в § устанавливается, что эта линия на этой поверхности в некоторой окрестности указанной точки — кратчайшая.

§ 1. Построение поверхности

В дальнейшем считается, что в пространстве E^3 фиксирована обычная декартова координатная система (x, y, z) .

Пусть R — единичная окружность в плоскости (x, y) с центром в начале отсчета O векторов. Введем выпуклую ломаную L , расположенную в первом квадранте этой плоскости, описанную вокруг R , с бесконечным числом звеньев. Пусть T_n и T — крайние вершины ломаной, а $T_{n+1}, \dots, T_k, \dots$ — последовательные точки касания L с R , так что T — их точка сгущения и T имеет координаты $(1, 0, 0)$. Угол между

вектором $\vec{OT}_k$ и положительным направлением оси (x) будем обозначать α_k ; считаем, что $\alpha_n < \pi/2$. Внутренние вершины ломаной L обозначим соответственно $P_n, P_{n+1}, \dots, P_k, \dots$. Проведем плоскость E_k через отрезок $T_k P_k$, касающийся окружности R , с четным (нечетным) номером k , пересекатьшую положительную (соответственно отрицательную) полуось (z) под малым углом γ_k ($\gamma_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$). Обозначим n_k единичную нормаль к E_k , направленную от точки O . При $k \rightarrow \infty$ имеем $n_k \rightarrow (1, 0, 0)$, так как $n_k(x, y) = \gamma_k$; $E_k \rightarrow E$, где E — плоскость, проходящая через T перпендикулярно к оси (x) . Пусть τ — направление ломаной L в точке T , а l — луч, касающийся R и исходящий из T в направлении $-\tau$. Пусть $T^+(0, D)$ и $T^-(1, 0, -D)$ — фиксированные точки, где $D > 0$ — число, взятое произвольно. Считается, что число n — четное, также фиксированное и достаточно большое. Оно подбирается по ходу изложения (в частности, после задания D), чтобы удовлетворить конечную совокупность условий, необходимых при построении поверхности. Будем полагать далее для упрощения, что нужное n уже подобрано, и употреблять в надлежащих случаях

ных выражения вида «...так как n велико...», «...при большом n ...» и др.

Пересечение полупространств с внешними нормальными $\{n_k\}$, определяемых плоскостями $\{E_k\}$, является выпуклым телом. Границу замыкания этого тела, выпуклую бесконечногранную поверхность, будем обозначать Φ . Точка T — гладкая точка этой поверхности, E — соответствующая касательная плоскость, Φ однозначно проектируется на всю E , и $l \subset \Phi$. Поверхность Φ и есть искомая для определенных значений $\{\alpha_k\}$, $\{\gamma_k\}$. Мы выбираем эти значения следующими:

$$\alpha_k = \frac{1}{(\ln k)^\alpha} \quad \text{и} \quad \text{tg } \gamma_k = \frac{1}{k(\ln k)^\gamma},$$

где $\gamma = (1 + \beta)/2$, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ и α, β — константы.

Основное утверждение. *Через точку T на Φ в направлении l проходит кратчайшая линия, содержащая, в частности, участок луча l , имеющая в сколь угодно малой окрестности T не-прямляемое сферическое изображение.*

Для доказательства достаточно ограничиться частью F поверхности Φ , принадлежащей слою $-D < z < D$.

Выясним строение поверхности F . Для этого введем вспомогательные выпуклые поверхности Φ^+ и Φ^- : поверхность Φ^+ (Φ^-) определяется плоскостями из $\{E_k\}$ с четными (соответственно нечетными) номерами k так же, как это осуществлялось при построении Φ ; таким образом, Φ — граница выпуклого тела, являющегося пересечением замкнутых выпуклых тел, ограниченных поверхностями Φ^+ и Φ^- .

При достаточно большом n поверхности Φ^+ , Φ^- обладают следующими свойствами.

1. Прямолинейный отрезок T^+T^- принадлежит каждой из поверхностей Φ^+ , Φ^- .
2. Кривизна поверхности Φ^+ (Φ^-) сосредоточена на части этой поверхности, расположенной в полупространстве $z \geq D$ ($z \leq -D$); часть поверхности Φ^+ (Φ^-), принадлежащая полупространству $z < D$ ($z > -D$), — разгибающаяся.
3. Часть поверхности Φ^+ (Φ^-), принадлежащая полупространству $z < D$ ($z > -D$), является бесконечногранной выпуклой поверхностью, последовательными ребрами которой служат расположенные в том же полупространстве непересекающиеся лучи, части линий пересечения $E_n \cap E_{n+2}$, $E_{n+2} \cap E_{n+4}$, ..., $E_{2k} \cap E_{2k+2}$, ... (соответственно $E_{n+1} \cap E_{n+3}$, $E_{n+3} \cap E_{n+5}$, ..., $E_{2k+1} \cap E_{2k+3}$, ...). Так как n велико, то указанные ребра Φ^+ и Φ^- почти ортогональны плоскости (x, y) , а их пределы при $k \rightarrow \infty$ содержат прямолинейный отрезок T^+T^- . Каждой из поверхностей Φ^+ , Φ^- принадлежит луч l .

Заметим, что части поверхностей Φ^+ и Φ^- , расположенные в полупространстве $y > 0$, однозначно проектируются на плоскость (x, y) и в направлении оси (y) . Поэтому последнее свойство вытекает из свойств 1, 2 и результата п. 2 § 3. Свойство очевидным образом выводится из следующего утверждения.

Так как n велико, то для каждого трех чисел одинаковой четности p, s, q ($n \leq p < s < q$) точка пересечения плоскостей E_p, E_s, E_q находится в полупространстве $z \geq D$ для четных чисел и в полупространстве $z \leq -D$ для нечетных.

Это утверждение доказывается в § 2.

Установим свойство 1. Докажем следующее предложение очевидно, эквивалентное этому свойству.

Так как n велико, то каждая из точек T^+, T^- принадлежит каждому из замкнутых выпуклых тел, ограниченных поверхностями Φ^+ и Φ^- .

Имеем векторное уравнение плоскости E_k :

$$rn_k - \cos \gamma_k = 0, \quad n_k = \cos \gamma_k (\cos \alpha_k, \sin \alpha_k, (-1)^k \operatorname{tg} \gamma_k).$$

Радиусы-векторы точек T^+, T^- представляются в единой форме $r^\pm = (1, 0, \pm D)$. Тогда ориентированное расстояние соответствующей точки от плоскости E_k будет равным

$$r^\pm n_k - \cos \gamma_k = \cos \gamma_k \left(\delta D \operatorname{tg} \gamma_k - 2 \sin^2 \frac{\alpha_k}{2} \right),$$

где $\delta = \pm 1$ в зависимости от выбранной точки и четности k . Это расстояние — отрицательное при большом n , поскольку тогда $\gamma_k \sim 0$ и

$$D \operatorname{tg} \gamma_k - 2 \sin^2 \frac{\alpha_k}{2} = \frac{D}{k (\ln k)^2} - \frac{\delta(k)}{2 (\ln k)^{2\alpha}} < 0,$$

где $\delta(k) \sim 1$. Таким образом, точки T^+ и T^- располагаются от каждой из плоскостей E_k по ту же сторону, что и начало координат O . Этим высказанное предположение доказано.

Рассмотрим выпуклый трехгранный угол $V_k [k \geq n+1]$, определяемый плоскостями E_{k-1}, E_k, E_{k+1} с внешними нормальными соответственно n_{k-1}, n_k, n_{k+1} . Вершину угла V_k будем обозначать Q_k ; ребрами V_k служат лучи, принадлежащие соответственно линиям пересечения $E_{k-1} \cap E_{k+1}, E_{k+1} \cap E_k, E_k \cap E_{k-1}$. Одна из граней этого угла — определяемая плоскостью E_k — содержит треугольник

$$\Delta_k \equiv \Delta Q_k P_k P_{k-1},$$

которого $Q_k P_k \subset E_{k+1} \cap E_k$, $Q_k P_{k-1} \subset E_k \cap E_{k-1}$ и $P_k P_{k-1} \subset (x, y)$ как звено L . Поскольку n большое, то, как устанавливается в п. 4 § 3, углы при основании Δ_k достаточно малые; эти углы стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что точки $\{Q_k\}$ располагаются в слое $-D < z < D$ и сходятся при $k \rightarrow \infty$ к точке T . Кроме того, очевидно, линии пересечения $E_n \cap E_{n+1}$, $E_{n+1} \cap E_{n+2}$, ..., $E_k \cap E_{k+1}$, ... почти ортогональны оси (z) : при $k \rightarrow \infty$ эти линии имеют предельно прямую, содержащую луч l .

Учитывая способ образования поверхностей Φ , Φ^+ и Φ^- , свойство 3 и свойства углов $\{V_k\}$, находим пересечение $\Phi^+ \cap \Phi^-$ в слое $-D < z < D$. Это пересечение составляют: полуплоскость E_D плоскости E , содержащая луч l , ограниченная отрезком T^+T^- и линиями в этой плоскости $z = -D$; $z = D$; бесконечнозвенная ломаная $Q \equiv Q_{n+1} Q_{n+2} \dots Q_k \dots$, последовательные звенья которой — прямые отрезки $Q_{n+1} Q_{n+2}$, $Q_{n+2} Q_{n+3}$, ..., $Q_k Q_{k+1}$, ..., соединяющие соответствующие вершины углов $\{V_k\}$; участок ребра V_{n+1} на линии пересечения $E_n \cap E_{n+1}$, исходящий из точки Q_{n+1} .

Теперь можно дать описание поверхности F .

Поверхность F — бесконечногранная, гладкая в точке T ; одной из граней этой поверхности является полуплоскость E_D . Вершины F — точки $\{Q_k\}$. Ребра F — соответствующие части ребер $\{V_k\}$, взятые в окрестностях вершин этих углов; заметим, что при каждом $k \geq n+1$ ребро $Q_k Q_{k+1}$ проходит через точку P_k .

Вид части поверхности F в окрестности отрезка T^+T^- в проекции на плоскость E (в тех же обозначениях, что и на поверхности) представлен на рис. 1.

Здесь прямолинейный отрезок, идущий влево от точки T , и прямолинейный отрезок TP_{k-1} соответствуют лучу l и ломаной L , а вертикальная линия — отрезку T^+T^- . Другие сплошные линии — проекции ребер поверхности F . Пунктиром отмечены две ломаные, которые соответствуют вспомогательным бесконечнозвенным ломанным на F , составленным из прямолинейных отрезков в гранях: $Q_{n+1} Q_{n+3} \dots Q_{2k+1} \dots$ и $Q_{n+2} Q_{n+4} \dots Q_{2k} \dots$. Эти ломаные нам понадобятся в § 4.

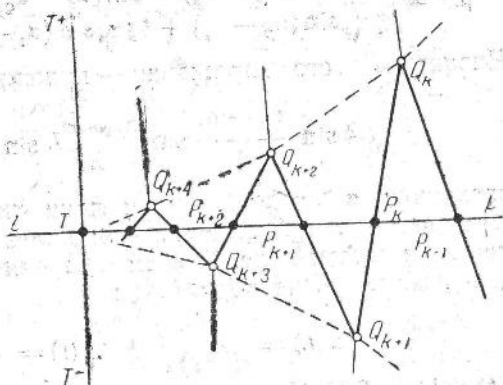


Рис. 1.

§ 2. Распределение кривизны

Пусть $\bar{z} = (z)$ -координата точки пересечения $E_p \cap E_s \cap E_q$, где p, s, q — числа одинаковой четности, причем $n \leq p < s < q$. Докажем, что при большом n справедливо неравенство

$$|\bar{z}| \geq D.$$

Решая систему уравнений

$$x \cos \alpha_q + y \sin \alpha_q + z(-1)^q \operatorname{tg} \gamma_q = 1,$$

$$x \cos \alpha_s + y \sin \alpha_s + z(-1)^s \operatorname{tg} \gamma_s = 1,$$

$$x \cos \alpha_p + y \sin \alpha_p + z(-1)^p \operatorname{tg} \gamma_p = 1,$$

находим

$$|\bar{z}| = \frac{\sin(\alpha_p - \alpha_s) + \sin(\alpha_s - \alpha_q) - \sin(\alpha_p - \alpha_q)}{\operatorname{tg} \gamma_q \sin(\alpha_p - \alpha_s) + \operatorname{tg} \gamma_p \sin(\alpha_s - \alpha_q) - \operatorname{tg} \gamma_s \sin(\alpha_p - \alpha_q)}.$$

Числитель этого выражения — положительный; он равен

$$4 \sin \frac{\alpha_p - \alpha_s}{2} \sin \frac{\alpha_s - \alpha_q}{2} \sin \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2} > 0,$$

поскольку $\alpha_p > \alpha_s > \alpha_q$. Будем пока считать, что в выражении $|\bar{z}|$ положителен и знаменатель; далее убедимся, что это имеет место на самом деле. Введем функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ и $f(t)$, определенные на сегменте $p \leq t \leq q$:

$$\alpha(t) = \frac{1}{(\ln t)^\alpha}, \quad \gamma(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\gamma},$$

$$f(t) = [1 - D\gamma(q)] \sin[\alpha(p) - \alpha(t)] + [1 - D\gamma(p)] \sin[\alpha(t) - \alpha(q)] + [D\gamma(t) - 1] \sin[\alpha(p) - \alpha(q)].$$

Достаточно установить неравенство

$$f(t) \geq 0 \quad (p \leq t \leq q).$$

Это неравенство будет доказано, если мы убедимся, что в точке $\bar{t} (p < \bar{t} < q)$ экстремума $f(t)$ для соответствующих производных

$$f''(\bar{t}) < 0 \sim \alpha'(\bar{t}) f''(\bar{t}) > 0,$$

поскольку $f(p) = f(q) = 0$ и $\alpha'(t) < 0$ при $p \leq t \leq q$. Находим

$$f'(\bar{t}) = \alpha'(\bar{t}) \{ -[1 - D\gamma(q)] \cos[\alpha(p) - \alpha(\bar{t})] + [1 - D\gamma(p)] \times \\ \times \cos[\alpha(\bar{t}) - \alpha(q)] + D\gamma'(\bar{t}) \sin[\alpha(p) - \alpha(q)] \} \equiv \alpha'(\bar{t}) \{ * \} + \dots = 0,$$

$$f''(\bar{t}) = -\alpha'^2(\bar{t}) \{ [1 - D\gamma(q)] \sin[\alpha(p) - \alpha(\bar{t})] + [1 - D\gamma(p)] \times \\ \times \sin[\alpha(\bar{t}) - \alpha(q)] \} + \alpha''(\bar{t}) \{ * \} + D\gamma''(\bar{t}) \sin[\alpha(p) - \alpha(q)];$$

$$\alpha'(\bar{t}) f''(\bar{t}) = -\alpha'^3(\bar{t}) \{ [1 - D\gamma(q)] \sin[\alpha(p) - \alpha(\bar{t})] + [1 - D\gamma(p)] \times \\ \times \sin[\alpha(\bar{t}) - \alpha(q)] \} + D[\alpha'(\bar{t}) \gamma''(\bar{t}) - \alpha''(\bar{t}) \gamma'(\bar{t})] \sin[\alpha(p) - \alpha(q)].$$

Писем

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha}{t(\ln t)^{1+\alpha}}, \quad \gamma'(t) = \frac{2}{t^3(\ln t)^1} + \frac{3\gamma}{t^3(\ln t)^{1+\gamma}} + \frac{\gamma(1+\gamma)}{t^3(\ln t)^{2+\gamma}},$$

$$\alpha''(t) = \frac{\alpha}{t^2(\ln t)^{1+\alpha}} + \frac{\alpha(1+\alpha)}{t^2(\ln t)^{2+\alpha}}, \quad \gamma'(t) = -\frac{1}{t^2(\ln t)^1} - \frac{\gamma}{t^2(\ln t)^{1+\gamma}}.$$

Отсюда, так как n велико и $\bar{t} > n$,

$$\alpha'(\bar{t})\gamma''(\bar{t}) - \alpha''(\bar{t})\gamma'(\bar{t}) = -\frac{\alpha}{t^4(\ln \bar{t})^{1+\alpha+\gamma}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln \bar{t}}\right) \right] < 0.$$

Учитывая неравенство

$$\sin[\alpha(p) - \alpha(q)] < \sin[\alpha(p) - \alpha(\bar{t})] + \sin[\alpha(\bar{t}) - \alpha(q)],$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha'(\bar{t})\gamma''(\bar{t}) &> \{-\alpha'^3(\bar{t})[1 - D\gamma(q)] - D[\alpha'(\bar{t})\gamma''(\bar{t}) - \alpha''(\bar{t})\gamma'(\bar{t})]\} \times \\ &\times \sin[\alpha(p) - \alpha(\bar{t})] + \{-\alpha'^3(\bar{t})[1 - D\gamma(p)] - D[\alpha'(\bar{t})\gamma''(\bar{t}) - \\ &- \alpha''(\bar{t})\gamma'(\bar{t})]\} \sin[\alpha(\bar{t}) - \alpha(q)] = \left\{ \frac{\alpha^3[1 - D\gamma(q)]}{t^3(\ln \bar{t})^{3+3\alpha}} - \right. \\ &- \frac{\alpha D}{t^4(\ln \bar{t})^{1+\alpha+\gamma}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln \bar{t}}\right) \right] \Big\} \sin[\alpha(p) - \alpha(\bar{t})] + \\ &+ \left\{ \frac{\alpha^3[1 - D\gamma(p)]}{t^3(\ln \bar{t})^{3+3\alpha}} - \frac{\alpha D}{t^4(\ln \bar{t})^{1+\alpha+\gamma}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln \bar{t}}\right) \right] \right\} \sin[\alpha(\bar{t}) - \\ &- \alpha(q)] > 0 \end{aligned}$$

При достаточно большом n , поскольку $\gamma(p) \sim 0$, $\gamma(q) \sim 0$ и $\alpha(p) > \alpha(\bar{t}) > \alpha(q)$.

Теперь также очевидно, что знаменатель в выражении $|\bar{z}|$ положительный.

Действительно, рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(t)$, определенную на сегменте $p \leq t \leq q$:

$$\gamma(q) \sin[\alpha(p) - \alpha(t)] + \gamma(p) \sin[\alpha(t) - \alpha(q)] - \gamma(t) \sin[\alpha(p) - \alpha(q)].$$

Производные этой функции получаются из соответствующими производных $f(t)$, если в последних осуществить замены

$$1 - D\gamma(q) \rightarrow \gamma(q), \quad 1 - D\gamma(p) \rightarrow \gamma(p), \quad D\gamma(t) \rightarrow -\gamma(t).$$

Как и для функции $f(t)$, имеем $\varphi(p) = \varphi(q) = 0$. Тогда для функции $\varphi(t)$ в экстремальной точке $\bar{t}$ при большом n

$$\alpha'(\bar{t})\bar{\varphi}''(\bar{t}) = -\alpha^3(\bar{t})\{\gamma(q)\sin[\alpha(p) - \alpha(\bar{t})] + \varphi(p)\sin[\alpha(\bar{t}) - \alpha(q)]\} - \\ - [\alpha'(\bar{t})\gamma''(\bar{t}) - \alpha''(\bar{t})\gamma'(\bar{t})]\sin[\alpha(p) - \alpha(q)] > 0.$$

Неравенство $|\bar{z}| \geq D$ установлено полностью.

Для доказательства свойства 2 поверхностей Φ^+ и Φ^- остается заметить, что $\bar{z} > 0$ для четных p, s, q и $\bar{z} < 0$ — для нечетных.

§ 3. Значения вспомогательных величин

Примем следующие обозначения: $\nu_k = \widehat{n_{k+1}n_k}$ — угол между соответствующими нормальными к плоскостям E_{k+1}, E_k ; $\delta'_k, \delta_{k-1}, s_k, h_k^\Delta$ — связанные с треугольником $\Delta_k = \Delta Q_k P_k P_{k-1}$ на поверхности F соответственно: углы при основании $P_k P_{k-1}$ в точках P_k и P_{k-1} , длина основания $|P_k P_{k-1}|$, высота, опущенная из вершины на основание; ω_k — кривизна F в вершине Q_k ; τ_k — поворот линии L на поверхности F в точке P_k с стороны Q_{k+1} .

Далее придется иметь дело с конечным числом функций, зависящих от k , стремящихся к единице при $k \rightarrow \infty$. Для упрощения явное выражение каждой из этих функций, которое не понадобится, заменяется символом $\delta(k)$. Соответствующие операции над функциями $\{\delta(k)\}$ подчиняются, очевидно, правилам

$$\min_k (\text{или } \max_k) \{\delta(m), \delta(m+1), \dots, \delta(k), \dots\} = \delta(m);$$

$$\delta(k)\delta(k) = \delta(k), \quad \delta(k) + \delta(k) = 2\delta(k);$$

$$\delta(k)O[\psi(k)] = O[\psi(k)], \quad \delta(k)O[\psi(k)] = \delta(k),$$

где $\psi(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Дальнейшее изложение для удобства ссылок разбивается на ряд пунктов. В них устанавливаются значения некоторых вспомогательных величин.

1. Нам будут нужны выражения вида $\gamma_p - \gamma_q, \alpha_p - \alpha_q$. Используя теорему о среднем, имеем

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k = \delta(k)(\operatorname{tg} \gamma_{k+1} - \operatorname{tg} \gamma_k) = \delta(k)\gamma'(\bar{t}) = -\frac{\delta(k)}{t^2(\ln t)^7} = \\ = -\frac{\delta(k)}{k^2(\ln k)^7},$$

где $\bar{t} = \bar{t}(k)$ и $k < \bar{t} < k+1$.

Аналогично

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \alpha'(\bar{t}) = - \frac{\alpha}{\bar{t}(\ln \bar{t})^{1+\alpha}} = - \frac{\alpha \delta(k)}{k(\ln k)^{1+\alpha}}.$$

Тогда, в частности, получаем

$$\gamma_{k+2} - \gamma_k = - \frac{2\delta(k)}{k^2(\ln k)^{\gamma}}, \quad \alpha_{k+2} - \alpha_k = - \frac{2\alpha\delta(k)}{k(\ln k)^{1+\alpha}}.$$

2. Найдем угол наклона μ_k линии пересечения $E_{k+2} \cap E_k$, или, эквивалентно, вектора

$$\bar{n}_k = (-1)^k \frac{[n_{k+2} n_k]}{\cos \gamma_{k+2} \cos \gamma_k} \quad (5)$$

к оси (z). Имеем

$$n_{k+2} = \cos \gamma_{k+2} (\cos \alpha_{k+2}, \sin \alpha_{k+2}, (-1)^k \operatorname{tg} \gamma_{k+2});$$

$$n_k = \cos \gamma_k (\cos \alpha_k, \sin \alpha_k, (-1)^k \operatorname{tg} \gamma_k);$$

$$\bar{n}_k = (\sin \alpha_{k+2} \operatorname{tg} \gamma_k - \sin \alpha_k \operatorname{tg} \gamma_{k+2};$$

$$- \cos \alpha_{k+2} \operatorname{tg} \gamma_k + \cos \alpha_k \operatorname{tg} \gamma_{k+2}, (-1)^k \sin(\alpha_k - \alpha_{k+2})).$$

Квадрат составляющей вектора $\bar{n}_k$ в плоскости (x, y):

$$\operatorname{tg}^2 \gamma_{k+2} + \operatorname{tg}^2 \gamma_k - 2 \operatorname{tg} \gamma_{k+2} \operatorname{tg} \gamma_k \cos(\alpha_k - \alpha_{k+2}) = (\operatorname{tg} \gamma_{k+2} - \operatorname{tg} \gamma_k)^2 +$$

$$+ 4 \operatorname{tg} \gamma_{k+2} \operatorname{tg} \gamma_k \sin^2 \frac{\alpha_k - \alpha_{k+2}}{2} = \left[\frac{2\delta(k)}{k^2(\ln k)^{\gamma}} \right]^2 + \frac{\delta(k)}{k^2(\ln k)^{2\gamma}} \times$$

$$\times \left[\frac{2\alpha}{k(\ln k)^{1+\alpha}} \right]^2 = \left[\frac{2\delta(k)}{k^2(\ln k)^{\gamma}} \right]^2.$$

Модуль составляющей вектора $\bar{n}_k$ по оси (z):

$$\sin(\alpha_k - \alpha_{k+2}) = \frac{2\alpha\delta(k)}{k(\ln k)^{1+\alpha}}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \mu_k = \frac{\delta(k)}{\alpha} \frac{(\ln k)^{1+\alpha-\gamma}}{k} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что при большом n линии пересечения $\{E_{k+2} \cap E_k\}$ почти ортогональны плоскости (x, y) и что при $k \rightarrow \infty$ эти линии имеют предельную прямую, параллельную оси (z).

3. Вычислим углы ν_k . Имеем

$$\nu_k = \delta(k) |\tilde{n}_k|,$$

где

$$\tilde{n}_k = (-1)^k \frac{[n_{k+1} n_k]}{\cos \gamma_{k+1} \cos \gamma_k};$$

$$\tilde{n}_k = (\sin \alpha_{k+1} \operatorname{tg} \gamma_k + \sin \alpha_k \operatorname{tg} \gamma_{k+1};$$

$$- \cos \alpha_{k+1} \operatorname{tg} \gamma_k - \cos \alpha_k \operatorname{tg} \gamma_{k+1}, (-1)^k \sin (\alpha_k - \alpha_{k+1}));$$

$$\tilde{n}_k^2 = \operatorname{tg}^2 \gamma_{k+1} + \operatorname{tg}^2 \gamma_k + 2 \operatorname{tg} \gamma_{k+1} \operatorname{tg} \gamma_k \cos (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \sin^2 (\alpha_k - \alpha_{k+1}) =$$

$$= (\operatorname{tg} \gamma_{k+1} + \operatorname{tg} \gamma_k)^2 + \delta(k) \sin^2 (\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \left[\frac{2\delta(k)}{k (\ln k)^{\gamma}} \right]^2 +$$

$$+ \delta(k) \left[\frac{\alpha}{k (\ln k)^{1+\alpha}} \right]^2 = \left[\frac{2\delta(k)}{k (\ln k)^{\gamma}} \right]^2,$$

поскольку $\gamma \leq 1 < 1 + \alpha$.

Таким образом,

$$\gamma_k = \frac{2\delta(k)}{k (\ln k)^{\gamma}}.$$

4. Найдем углы δ'_k и δ''_{k-1} ; это соответственно — углы наклонов вектора $\overrightarrow{P_k Q_k}$ к вектору $\overrightarrow{P_k P_{k-1}}$ и вектора $\overrightarrow{P_{k-1} Q_k}$ к вектору $\overrightarrow{P_{k-1} P_k}$. Направление $\overrightarrow{P_k Q_k}$ совпадает с направлением вектора

$$n'_k = (-1)^{k+1} \frac{[n_{k+1} n_k]}{\cos \gamma_{k+1} \cos \gamma_k},$$

а направление вектора $\overrightarrow{P_{k-1} Q_k}$ — с направлением

$$n''_{k-1} = (-1)^{k+1} \frac{[n_k n_{k-1}]}{\cos \gamma_k \cos \gamma_{k-1}};$$

орт вектора $\overrightarrow{P_k P_{k-1}}$ представляется в виде

$$e_k = (-\sin \alpha_k, \cos \alpha_k, 0).$$

Имеем

$$n'_k = (-\sin \alpha_{k+1} \operatorname{tg} \gamma_k - \sin \alpha_k \operatorname{tg} \gamma_{k+1},$$

$$\cos \alpha_{k+1} \operatorname{tg} \gamma_k + \cos \alpha_k \operatorname{tg} \gamma_{k+1}, (-1)^{k+1} \sin (\alpha_k - \alpha_{k+1})),$$

$$n''_{k-1} = (\sin \alpha_k \operatorname{tg} \gamma_{k-1} + \sin \alpha_{k-1} \operatorname{tg} \gamma_k,$$

$$- \cos \alpha_k \operatorname{tg} \gamma_{k-1} - \cos \alpha_{k-1} \operatorname{tg} \gamma_k, (-1)^{k+1} \sin (\alpha_{k-1} - \alpha_k));$$

$$\cos \delta'_k = (n'_k e_k) / |n'_k| =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{tg} \gamma_{k+1} + \operatorname{tg} \gamma_k \cos(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma_{k+1} + \operatorname{tg}^2 \gamma_k + 2 \operatorname{tg} \gamma_{k+1} \operatorname{tg} \gamma_k \cos(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \sin^2(\alpha_k - \alpha_{k+1})}}, \\ \cos \delta_{k-1}'' &= -(n_{k-1}'' e_k) / |n_{k-1}''| = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \gamma_{k-1} + \operatorname{tg} \gamma_k \cos(\alpha_{k-1} - \alpha_k)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma_{k-1} + \operatorname{tg}^2 \gamma_k + 2 \operatorname{tg} \gamma_{k-1} \operatorname{tg} \gamma_k \cos(\alpha_{k-1} - \alpha_k) + \sin^2(\alpha_{k-1} - \alpha_k)}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_k' &= \frac{\sin(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{\cos \gamma_k [\operatorname{tg} \gamma_{k+1} + \operatorname{tg} \gamma_k \cos(\alpha_k - \alpha_{k+1})]} = \frac{\alpha \delta(k)}{2(\ln k)^{1+\alpha-\gamma}}; \\ \operatorname{tg} \delta_{k-1}'' &= \frac{\sin(\alpha_{k-1} - \alpha_k)}{\cos \gamma_k [\operatorname{tg} \gamma_{k-1} + \operatorname{tg} \gamma_k \cos(\alpha_{k-1} - \alpha_k)]} = \\ &= \frac{\alpha \delta(k)}{2(\ln k)^{1+\alpha-\gamma}}. \end{aligned}$$

Из указанных формул вытекает, что при большом n углы δ_k' и δ_{k-1}'' при основании треугольника Δ_k — достаточно малые, и что при $k \rightarrow \infty$ эти углы стремятся к нулю. Отсюда, в частности, следует, что основание высоты в треугольнике Δ_k , опущенной из вершины Q_k , располагается внутри стороны $P_{k-1}P_k$.

5. Значения s_k и h_k^Δ :

$$\begin{aligned} s_k &= \operatorname{tg} \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{2} = \frac{\alpha \delta(k)}{k(\ln k)^{1+\alpha}}; \\ h_k^\Delta &= \frac{\operatorname{tg} \delta_k' \operatorname{tg} \delta_{k-1}''}{\operatorname{tg} \delta_k' + \operatorname{tg} \delta_{k-1}''} s_k = \frac{\alpha^2 \delta(k)}{4k(\ln k)^{2+2\alpha-\gamma}}. \end{aligned}$$

6. Значение ω_k :

$$\omega_k = \frac{\delta(k)}{2} \nu_{k-1} \nu_k (\delta_k' + \delta_{k-1}'') = \frac{2\alpha \delta(k)}{k^2 (\ln k)^{1+\alpha+\gamma}}.$$

7. Найдем повороты $\{\tau_k\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \tau_k &= \delta_k' - \delta_{k-1}'' = \delta(k) (\operatorname{tg} \delta_k' - \operatorname{tg} \delta_{k-1}''); \operatorname{tg} \delta_k' - \operatorname{tg} \delta_{k-1}'' = \\ &= \frac{\sin(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{\cos \gamma_k [\operatorname{tg} \gamma_{k+1} + \operatorname{tg} \gamma_k \cos(\alpha_k - \alpha_{k+1})]} - \\ &= \frac{\sin(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{\cos \gamma_{k+1} [\operatorname{tg} \gamma_k + \operatorname{tg} \gamma_{k+1} \cos(\alpha_k - \alpha_{k+1})]}; \\ \cos \gamma_{k+1} \operatorname{tg} \gamma_k - \cos \gamma_k \operatorname{tg} \gamma_{k+1} &= (\sin \gamma_k - \sin \gamma_{k+1}) \cos(\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \end{aligned}$$

$$= 2 (\sin \gamma_k - \sin \gamma_{k+1}) \left(\frac{\sin^2 \frac{\gamma_k + \gamma_{k+1}}{2}}{\cos \gamma_k \cos \gamma_{k+1}} + \sin^2 \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{2} \right).$$

Тогда

$$\tau_k = \frac{\delta(k)}{2} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) (\gamma_k - \gamma_{k+1}) = \frac{\alpha \delta(k)}{2k^3 (\ln k)^{1+\alpha+\gamma}}.$$

§ 4. Свойства развертки Δ'

Ломаную L на F можно ориентировать, выбрав на ней положительное направление движения от точки T . Тогда естественно определяются правая и левая стороны этой ломаной: справа (слева) от L располагаются точки $\{Q_k\}$ с четными (нечетными) индексами k ; часть F справа (слева) от L находится в полупространстве $z \leq 0$ ($z \geq 0$).

Пусть Δ — замкнутая область на F , содержащая ломаную $TP_{n+1} \subset L$, ограниченная линиями: ребром $Q_{n+1}Q_{n+2}$, бесконечнозвенной ломаной $Q^+ \equiv Q_{n+2}Q_{n+4} \dots Q_{2k} \dots$, составленной из прямолинейных отрезков в гранях поверхности $Q_{n+2}Q_{n+4}$, $Q_{n+4}Q_{n+6}, \dots, Q_{2k}Q_{2k+2}, \dots$; бесконечнозвенной ломаной $Q^- \equiv Q_{n+1}Q_{n+3} \dots Q_{2k+1} \dots$, составленной из прямолинейных отрезков в гранях поверхности $Q_{n+1}Q_{n+3}$, $Q_{n+3}Q_{n+5}, \dots, Q_{2k+1}Q_{2k+3}, \dots$. Область Δ — развертывающаяся и подразделяется на треугольники $\{\Delta Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}\}$, последовательно примыкающие друг к другу по сторонам $Q_{n+2}Q_{n+3}$, $Q_{n+3}Q_{n+4}, \dots, Q_kQ_{k+1}, \dots$.

Развернем Δ на плоскость E' , как это обычно делается, обозначив Δ' полученную фигуру и $L' \subset \Delta'$ — соответствующий образ ломаной L . Указанное разворачивание возможно, поскольку, как вытекает из п. 7 § 3, ломаная L' в E' — кривая с ограниченной вариацией поворота, равной

$$\sum_{n+2}^{\infty} \tau_i = \sum_{n+2}^{\infty} \frac{\alpha \delta(i)}{2i^3 (\ln i)^{1+\alpha+\gamma}} < \infty.$$

Образы в области Δ' элементов области Δ условимся обозначать теми же символами, что и на поверхности, добавляя к символам индекс ($'$). Тогда, в частности, T' — общая предельная точка последовательностей $\{P'_k\}$, $\{Q'_k\}$; τ' — направление в T' луча g' , полукасательного к L' . При разворачивании мы сохраняем наименования сторон L , относя теперь те же наименования к ломаной L' а вместе — к направлению τ' и, следовательно, к лучу g' . Точки $\{Q'_{i,k}\}$ с четными (нечетными) номерами k и ломаная $Q'^+ \equiv Q'_{n+2}Q'_{n+4} \dots Q'_{2k} \dots$ (соответственно $Q'^- \equiv Q'_{n+1}Q'_{n+3} \dots Q'_{2k+1} \dots$ находятся справа (слева) от ломаной L'). Будет показано, что при большом n точно такое же расположение указанных элементов и по отношению к лучу g' .

На рис. 2 показана часть области Δ' : лучу g' на этом рисунке отвечает горизонтальная линия. Обозначения: $\bar{Q}_k$ — основание перпендикуляра (длины h_k^Δ), опущенного на сторону $P_{k-1}P_k$ из вершины Q_k в треугольнике $\Delta_k \subseteq F$; $\bar{h}_k$, $\tilde{h}_k$ и h_k — длины перпендикуляров в плоскости E' , опущенных на луч g' соответственно из точек P'_k , $\bar{Q}'_k$ и Q'_k , а $\bar{Q}'_k$ и $\bar{Q}'_k$ — принадлежащие g' соответствующие основания последних двух перпендикуляров; ξ_k , η_k — соответственно углы между векторами $\overrightarrow{P'_k P'_{k+1}}$, $\overrightarrow{Q'_{k+1} Q'_k}$ и вектором τ' ; e' — вектор в E' , ортогональный τ' , направленный относительно τ' (и L' и g') влево.

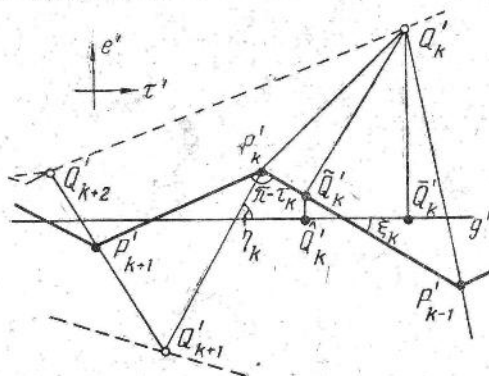


Рис. 2.

Дальнейшее изложение для удобства ссылок разбивается на ряд пунктов. В них устанавливаются основные свойства области Δ' .

1. Имеем (см. п. 5, 7 § 3)

$$\xi_k < \sum_k \tau_i < \frac{\alpha \delta(k)}{2(\ln k)^{1+\alpha+\gamma}} \sum_k \int_{i-1}^i \frac{dt}{t^3} = \frac{\alpha \delta(k)}{4k^2 (\ln k)^{1+\alpha+\gamma}};$$

$$h_{k-1} \leq \sum_k s_i \sin \xi_i < \sum_k \frac{\alpha^2 \delta(i)}{4i^3 (\ln i)^{2+2\alpha+\gamma}} < \frac{\alpha^2 \delta(k)}{8k^2 (\ln k)^{2+2\alpha+\gamma}}.$$

Тогда, в частности,

$$\tilde{h}_k \leq \max(\bar{h}_k, \bar{h}_{k-1}) < \frac{\alpha^2 \delta(k)}{8k^2 (\ln k)^{2+2\alpha+\gamma}},$$

и при большом n

$$\tilde{h}_k = o(h_k^\Delta).$$

2. Рассмотрим скалярные произведения

$$\overrightarrow{Q'_k Q'_k e'} = (\overrightarrow{\hat{Q}'_k \tilde{Q}'_k} + \overrightarrow{\tilde{Q}'_k Q'_k}) e' = \overrightarrow{\hat{Q}'_k \tilde{Q}'_k} e' + \overrightarrow{\tilde{Q}'_k Q'_k} e'.$$

Так как

$$|\overrightarrow{\hat{Q}'_k \tilde{Q}'_k} e'| = \tilde{h}_k \text{ и } \overrightarrow{\tilde{Q}'_k Q'_k} e' = \pm h_k^\Delta \cos \xi_k,$$

где знак «+» («-») соответствует случаю нечетного (четного) k , то при большом n из п. 1 вытекает, что выражения

$$\overrightarrow{Q'_k Q'_k e'} \text{ и } \overrightarrow{\tilde{Q}'_k Q'_k e'} \text{ имеют одинаковые знаки.}$$

Это означает, что при большом n точки $\{Q_k\}$ с четными (нечетными) номерами k и ломаная $Q'^+(Q'^-)$ располагаются относительно луча g' все справа (соответственно — слева). Кроме того, учитывая, что

$$|\overrightarrow{Q'_k Q'_k}| = h_k,$$

имеем

$$h_k = \delta(k) h_k^\Delta = \frac{\alpha^2 \delta(k)}{4k (\ln k)^{2+2\alpha-\gamma}}.$$

3. Так как при $k \rightarrow \infty$ (см. п. 4 § 3)

$$\eta_k = \delta'_k \pm \xi_k \rightarrow 0,$$

то при большом n ломаная $Q' \equiv Q_{n+1} Q_{n+2} \dots Q_k$ и, значит, ломанные Q'^+ и Q'^- однозначно проектируются на луч g' .

Учитывая результат п. 2, получаем, что перпендикуляр $Q'_k \tilde{Q}'_k$ при всех больших k принадлежит области Δ' . Более того, этот перпендикуляр при $k \rightarrow \infty$ образует с примыкающими к точке Q'_k отрезками $Q'_k Q'_{k-2}$ и $Q'_k Q'_{k+2}$ углы, сколь угодно близкие к $\pi/2$.

Последнее вытекает из того факта, что расстояния от концов отрезка $Q'_k Q'_{k+2}$ при $k \rightarrow \infty$ имеют больший порядок малости в сравнении с его длиной. Действительно, учитывая однозначную проектируемость на луч g' ломаной Q' (см. также п. 5 § 3 и п. 2), находим

$$|Q'_k Q'_{k+2}| > |P'_k P'_{k+1}| \cos \xi_{k+1} = \frac{\alpha \delta(k)}{k (\ln k)^{1+\alpha}} \gg$$

$$\gg \frac{\alpha^2 \delta(k)}{4k (\ln k)^{2+2\alpha-\gamma}} = h_k = \delta(k) h_{k+2},$$

поскольку $1+\alpha > \gamma$.

4. Имеет место следующее утверждение.

Ломаная L' однозначно проектируется на луч g' . Если $X' \in L'$ — точка, отстоящая от T' вдоль L' на расстоянии ρ , а $\bar{X}' \in g'$ — проекция X' на g' , то

$$|X' \bar{X}'|/\rho \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow 0$.

Достаточно убедиться в справедливости второго предложения и установить для этого, что если $X' \in P_k P_{k+1}$, то при $k \rightarrow \infty$

$$|X' \bar{X}'|/|T' T_{k+1}| \rightarrow 0,$$

где $T' T_{k+1}$ — дуга L' . Последнее очевидно, поскольку (см. п. 1)

$$|T' T_{k+1}| > \frac{\delta(k)}{(\ln k)^\alpha}, \quad |X' \bar{X}'| \leq \frac{\alpha^2 \delta(k)}{8k^2 (\ln k)^{2+2\alpha+\gamma}}.$$

Напомним, что точка $T_{k+1} \in L$ — точка касания звена $P_k P_{k+1}$ ломаной L с окружностью R (см. § 1).

§ 5. Квазигеодзическая Λ

В дальнейшем символом g' обозначается отрезок, часть луча g' , введенного в предыдущем параграфе, принадлежащая области Δ' .

Отрезок g' при большом n пересекает последовательно во внутренних их точках все звенья ломаной $Q_{n+2} Q_{n+3} \dots Q_k \dots$ (см. п. 2 § 4). На поверхности F ему соответствует по изометрии бесконечнозвенная ломаная g , принадлежащая области Δ , пересекающая последовательно во внутренних их точках ребра поверхности $Q_{n+2} Q_{n+3}, Q_{n+3} Q_{n+4}, \dots, Q_k Q_{k+1}, \dots$. Из п. 4 § 4 вытекает, что в точке T линии L и g имеют в пространстве общую касательную и, значит, образуют на поверхности в T угол нуль. Следовательно на поверхности F линия $\Lambda = lUg$ — квазигеодзическая с нулевым поворотом на обе стороны. Выделим основные свойства этой квазигеодзической.

1. Сферическое изображение Λ в любой окрестности точки T не спрямляемо.

Доказательство. Оно вытекает из неравенства (см. п. 3 § 3)

$$\sum_{n+2}^m v_i = \sum_{n+2}^m \frac{2\delta(i)}{i (\ln i)^\gamma} > 2\delta(n) \sum_{n+2}^m \int_i^{i+1} \frac{dt}{t (\ln t)^\gamma} =$$

$$2\delta(n) \begin{cases} \ln \ln(m+1) - \ln \ln(n+2) & \text{при } \gamma = 1, \\ (1-\gamma)^{-1} [\ln(m+1)]^{1-\gamma} - (1-\gamma)^{-1} [\ln(n+2)]^{1-\gamma} & \text{при } \gamma < 1, \end{cases}$$

показывающего, что

$$\sum_{n+2}^m v_i \rightarrow \infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

2. Высотой точки $X \in F$ над квазигеодезической Λ называется расстояние на поверхности от X до Λ ; кратчайшая на F , реализующая это расстояние, называется перпендикуляром из X на Λ .

При всех больших k перпендикуляру $\overline{Q_k} \subset \Delta'$ соответствует на F геодезическая $Q_k \overline{Q_k} \in \Delta'$ длины h_k , образующая с линией Λ в точке $\overline{Q_k}$ угол $\pi/2$ (см. п. 2 и 3 § 4). Утверждается, что указанная геодезическая является на поверхности перпендикуляром на Λ из точки Q_k .

Доказательство. Перпендикуляр на поверхности из Q_k на Λ при большом k образует в точке Q_k с геодезической $Q_k \overline{Q_k}$ достаточно малый угол. Это легко выводится с помощью формулы Гаусса — Бонне, если учесть, что кривизна F в малой окрестности точки T достаточно малая (см. п. 6 § 3):

$$\sum_m \omega_i = \sum_m \frac{2\alpha\delta(i)}{i^2(\ln i)^{1+\alpha+\gamma}} < \frac{2\alpha\delta(m)}{m(\ln m)^{1+\alpha+\gamma}} \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$.

Следовательно, как вытекает из соответствующего утверждения п. 3 § 4, этот перпендикуляр принадлежит Δ и совпадает с геодезической $Q_k \overline{Q_k}$. Утверждение установлено.

§ 6. Доказательство основного утверждения

Покажем, что для квазигеодезической Λ справедливо основное утверждение, высказанное в § 1. Соответствующее свойство сферического изображения Λ уже установлено в п. 1 § 5. Поэтому достаточно убедиться, что Λ на F обладает свойством:

Линия Λ в окрестности точки T — кратчайшая линия на поверхности.

Доказательство. Допустим противное. Тогда для каждой малой окрестности T на Λ найдутся точки X, Y из этой окрестности, для которых кратчайшая XU на F не совпадает с соответствующей дугой $\overline{XY} \subset \Lambda$. Можно считать дополнительно, что линии XU и XY , кроме концов, не имеют других общих точек и ограничивают на поверхности малое замкнутое множество, луночку H . Тем самым определяется последовательность луночек $\{H\}$, стягивающихся к точке T . Обозначения: d — длина кратчайшей XU ; ω, S, h — соответственно кривизна луночки

H , ее площадь и высота над Λ , т. е. наибольшее из расстояний от точек $X\bar{Y}$ до квазигеодезической.

Легко доказывается, что если $Z \in H$ — произвольная точка и h_Z — ее высота над Λ , то при достаточной близости H к T имеем $h_Z \leq h$, в частности для $Q_k \in H$ (см. п. 2 § 5)

$$h_k \leq h.$$

Легко также устанавливаются неравенства

$$\frac{\delta(H)}{2}hd \leq S \text{ и } S \leq \frac{1}{2}\omega d^2,$$

где $\delta(H) \rightarrow 1$ при стягивании H к T . Второе из этих неравенств — следствие известной формулы (см. [4, гл. X]), дающей оценку площади геодезического двуугольника на выпуклой поверхности. Указанная формула применяется к метрике, построенной из двух экземпляров луночки H , склеенных одна с другой по линиям, соответствующим дуге $X\bar{Y}$. Здесь учитывается, что кривизна на F линии $X\bar{Y}$ как множества равна нулю, поскольку у этой линии нулевые односторонние повороты (см. § 5). Таким образом,

$$\delta(H)h \leq \omega d.$$

Пусть k — наименьший из номеров точек $\{Q_k\}$, принадлежащих луночке H . Тогда, используя значения ω_k из п. 5 § 3, h_k из п. 2 § 5 и п. 2 § 4, получаем

$$\begin{aligned} \omega &\leq \sum_k \omega_k < \frac{2\alpha\delta(k)}{k(\ln k)^{1+\alpha+\gamma}} \leq \frac{8\delta(k)}{\alpha} \frac{\alpha^2}{4k(\ln k)^{2+2\alpha-\gamma}} \\ &= \frac{8\delta(k)}{\alpha} h_k \leq Ch, \end{aligned}$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от выбора луночки H , если она достаточно близка к точке T . Здесь учтено, что $1+\alpha \leq 2\gamma = 1+\beta$, поскольку $\alpha \leq \beta$.

Собирая полученные неравенства, имеем

$$\delta(H)h \leq \omega d < Chd,$$

или

$$\delta(H) < Cd.$$

Последнее неравенство невозможно, поскольку при стягивании H к T

$$d \rightarrow 0, \delta(H) \rightarrow 1.$$

Таким образом приходим к противоречию с исходным допущением.

Высказанное свойство линии Λ , а вместе — и основное утверждение, доказаны.

Замечание. Попутно по существу нами установлен следующий достаточный признак геодезической линии на выпуклой поверх-

ности, отмечавшийся в [5] (там же находится как следствие более общего свойства кратчайшей необходимость этого признака).

Пусть Λ — открытая квазигеодезическая на выпуклой поверхности F , имеющая нулевые повороты на обе стороны. Предположим, что для каждой точки $X \in \Lambda$ существует константа $C(X) > 0$ такая, что для любой последовательности борелевских множеств $\{B_k\}$ на F , стягивающихся в точке X , при достаточно больших k для кривизны B_k и высоты B_k над Λ справедливо неравенство

$$\omega(B_k) \leq C(X) h(B_k).$$

Тогда линия Λ — геодезическая, т. е. является на поверхности локально кратчайшей.

Итак, найдена важная особенность — неспрямляемость сферического изображения, которой может обладать кратчайшая в окрестности внутренней точки. Другие возможные тривиальные особенности сферического изображения кратчайшей на выпуклой поверхности выясняются на примерах в [3]. Нахождение этих примеров, а также примера данной работы основывалось на применении специальных оценок для кривизны области на поверхности вблизи кратчайшей; вывод этих оценок содержится в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М. «Наука», 1969. 759 с.
2. Залгаллер В. А. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. — «Укр. геометр. сб.», вып. 10. Харьков, 1971, с. 12—18.
3. Милка А. Д. Особенность у конца кратчайшей на выпуклой поверхности. I. — «Укр. геометр. сб.», вып. 14. Харьков, 1973, с. 48—55; II. — «Укр. геометр. сб.», 1974, вып. 15, с. 62—70.
4. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.—Л., Гостехиздат, 1948. 387 с.
5. Милка А. Д. Оценки для кривизны множества, примыкающего к кратчайшей. — «Укр. геометр. сб.», вып. 15. Харьков, 1973, с. 70—80.

Поступила 7 июня 1973

УДК 513

Л. Т. Моторный, канд. физ.-мат. наук,
Т. Н. Трыкова

**О ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕНОСА
В КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Поверхности переноса евклидова пространства допускают два определения. С одной стороны, это поверхности, несущие два сопряженных семейства кривых переноса, с другой, — по

поверхности, несущие сопряженную цилиндрическую сеть. Первое определение допускает обобщение на эллиптическое пространство, в котором также существует группа переносов, но в отличие от евклидова случая здесь имеются две такие трехчленные группы (правые и левые переносы). На таких обобщенных поверхностях переноса эллиптического пространства касательные к кривым одного семейства вдоль кривой второго семейства являются правыми параллелями Клиффорда, а касательные к кривым второго семейства вдоль кривых первого семейства — левыми параллелями Клиффорда.

Отсутствие вещественных групп переносов в гиперболическом пространстве, но наличие в нем цилиндрических поверхностей, образующие которых являются параллелями Лобачевского, позволяет рассматривать в гиперболическом пространстве поверхности, несущие сопряженную цилиндрическую сеть в указанном смысле (образующие цилиндров — параллели Лобачевского). Такие поверхности представляют собой частный случай поверхностей Петерсона, у которых вершины конусов расположены на абсолюте пространства Лобачевского. Такого рода аналог поверхностей переноса для гиперболического пространства рассмотрен в работе Я. П. Бланка [1].

На квазиэллиптическое пространство поверхности переноса обобщаются аналогично тому, как это делается и на эллиптическое пространство. В квазигиперболическом пространстве возможны оба обобщения. В первом смысле это обобщение рассмотрено в работе [2].

В настоящей работе рассматривается обобщение поверхностей переноса для квазигиперболического пространства во втором смысле, т. е. исследуются поверхности, несущие коническую сеть, вершины которых расположены на абсолюте.

§ 1. Условия, характеризующие сеть переноса

Пусть x_i — вейерштрассовы координаты точки в квазигиперболическом пространстве, пронормированные так, что

$$x_0^2 - x_1^2 = 1. \quad (1)$$

Тогда уравнение абсолюта квазигиперболического пространства будет

$$x_0^2 - x_1^2 = 0.$$

По аналогии с тем, как это было сделано в работе Я. П. Бланка [1] для геометрии Лобачевского, будем называть поверхность переноса поверхность в квазигиперболическом пространстве с конической сетью, у которой вершины конусов сети расположены на абсолюте. Таковую коническую сеть назовем сетью переноса.

Каноническое уравнение поверхности, несущей коническую сеть, может быть записано в виде

$$\lambda(u, v) x_i = U_i(u) + V_i(v), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

При этом координатные линии служат линиями конической сети.

Найдем необходимое и достаточное условие того, чтобы сеть кривых на поверхности квазигиперболического пространства была сетью переноса.

Вершины конусов, касающихся поверхности вдоль линий конической сети, расположены на линиях

$$x_i = \frac{\partial U_i}{\partial u}, \quad x_i = \frac{\partial V_i}{\partial v}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Эти линии, по определению, должны принадлежать абсолютному поэтому

$$\begin{aligned} (dU_0)^2 - (dU_1)^2 &= 0, \\ (dV_0)^2 - (dV_1)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Продифференцировав (2) по u или v и учитывая (3), получим

$$\begin{aligned} (\lambda_u x_0 + \lambda x_{0u})^2 - (\lambda_u x_1 + \lambda x_{1u})^2 &= 0, \\ (\lambda_v x_0 + \lambda x_{0v})^2 - (\lambda_v x_1 + \lambda x_{1v})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) следует

$$g_{11} = \left(\frac{\lambda_u}{\lambda} \right)^2, \quad g_{22} = \left(\frac{\lambda_v}{\lambda} \right)^2, \quad (5)$$

где g_{ik} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности:

$$g_{ik} = \frac{\partial x_1}{\partial u^i} \frac{\partial x_1}{\partial u^k} - \frac{\partial x_0}{\partial u^i} \frac{\partial x_0}{\partial u^k}, \quad u^1 = u, \quad u^2 = v.$$

Таким образом, чтобы поверхность (2) была поверхностью переноса, необходимо, чтобы λ удовлетворяла (5).

Если отнести поверхность к тетраэдру $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, X$, где $X(0, 0, \xi_2 - \xi_3)$ — полюс касательной плоскости относительно абсолюта, то деривационные формулы поверхности запишутся так [3]:

$$\frac{\partial^2 x_a}{\partial u^i \partial u^k} = G_{ik}^m \frac{\partial x_a}{\partial u^m} + g_{ik} x_a + b_{ik} X^2, \quad i, k = 1, 2. \quad (6)$$

В (6) b_{ik} — коэффициенты второй квадратичной формы, G_{ik}^m — символы Кристоффеля.

Подставляя значения x_i по (2) в уравнения (6), непосредственно убеждаемся, что

$$G_{12}^1 = -\frac{\lambda_v}{\lambda}, \quad G_{12}^1 = -\frac{\lambda_u}{\lambda}, \quad b_{12} = 0,$$

откуда в силу (5)

$$G_{12}^1 = -\sqrt{g_{22}}, \quad G_{12}^2 = -\sqrt{g_{11}}, \quad b_{12} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, чтобы координатная сеть на поверхности квазигиперболическом пространстве была сетью переноса, необходимо выполнение условий (7).

Докажем, что условия (7) являются также достаточными для того, чтобы координатная сеть была сетью переноса.

Действительно, из (1) вытекает, что

$$x_0 = \text{ch } \varphi(u, v), \quad x_1 = \text{ch } \varphi(u, v), \quad (8)$$

откуда следует

$$g_{11} = \varphi_u, \quad b_{12} = \tau_u \varphi_v, \quad g_{22} = \varphi_v^2. \quad (9)$$

Из (7)–(9) и дериwационных формул (6) (при $\alpha=0, i=1, k=2$) следует

$$\varphi_{uv} = -2\varphi_u \varphi_v. \quad (10)$$

Полагая в (9), (10) $\varphi = \ln \lambda$, получаем

$$g_{12} = -\frac{\lambda_{uv}}{\lambda}, \quad \sqrt{g_{11}} = \frac{\lambda_u}{\lambda}, \quad \sqrt{g_{22}} = \frac{\lambda_v}{\lambda}. \quad (11)$$

Из условий (7), (11) и дериwационных формул (6) (при $i=1, k=2$) следует

$$\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u \partial v} = -\frac{\lambda_u}{\lambda} \frac{\partial x_\alpha}{\partial v} - \frac{\lambda_v}{\lambda} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u} - \frac{\lambda_{uv}}{\lambda} x_\alpha$$

или

$$\frac{\partial^2 (\lambda x_\alpha)}{\partial u \partial v} = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

следовательно,

$$\lambda x_\alpha = U_\alpha(u) + V_\alpha(v), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (12)$$

Таким образом, если условия (7) выполняются, то координатная сеть — коническая. Покажем, что вершины конусов принадлежат абсолюту. Действительно, продифференцировав (1) и (2) по u , получим

$$U'_\alpha(u) = \lambda_u x_\alpha + \lambda \frac{\partial x_\alpha}{\partial u},$$

$$x_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} - x_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (13)$$

Легко видеть, что из (13) следует

$$(U_0')^2 - (U_1')^2 = 0. \quad (14)$$

Аналогично имеем

$$(V_0')^2 - (V_1')^2 = 0.$$

Условия (13), (14) означают, что вершины конусов, касающихся поверхности (12) вдоль линий координатной сети, лежат на абсолюте, что и требовалось доказать.

При переходе к новым криволинейным координатам v_1, v_2 коэффициенты q_{ik} и G_{ik}^m преобразуются по формулам [4]

$$g_{ik}^* = g_{\alpha\beta} \frac{\partial v^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial u^\beta},$$

$$G_{ik}^* = G_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^k} \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^\gamma} \frac{\partial^2 v^\gamma}{\partial u^i \partial u^k}.$$

В силу этого условия (7) после некоторых преобразований и сокращения на $\frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^2}$ для произвольного выбора криволинейных координат v^1, v^2 по поверхности можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v^1}{\partial u^1 \partial u^2} + G_{11}^1 \frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^1}{\partial u^2} + G_{12}^1 \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^2} + \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \right) + G_{22}^1 \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^2} = \\ & = \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \sqrt{g_{11} \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1} \right)^2 + 2g_{12} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^1} + g_{22} \left(\frac{\partial v^2}{\partial u^1} \right)^2} - \\ & - \frac{\partial v^1}{\partial u^1} \sqrt{g_{11} \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^2} \right)^2 + 2g_{12} \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \frac{\partial v^2}{\partial u^2} + g_{22} \left(\frac{\partial v^2}{\partial u^2} \right)^2}; \\ & \frac{\partial^2 v^2}{\partial u^1 \partial u^2} + G_{11}^2 \frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^1}{\partial u^2} + G_{12}^2 \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^2} + \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \right) + G_{22}^2 \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^2} = \\ & = \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \sqrt{g_{11} \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1} \right)^2 + 2g_{12} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^1} + g_{22} \left(\frac{\partial v^2}{\partial u^1} \right)^2} - \\ & - \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \sqrt{g_{11} \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^2} \right)^2 + 2g_{12} \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \frac{\partial v^2}{\partial u^2} + g_{22} \left(\frac{\partial v^2}{\partial u^2} \right)^2}; \\ & b_{11} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^1}{\partial u^2} + b_{12} \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^2} + \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \right) + b_{22} \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \frac{\partial v^2}{\partial u^2} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где v^1, v^2 — параметры сети переноса, u^1, u^2 — параметры координатной сети.

Пусть на поверхности в квазигиперболическом пространстве задана сеть кривых

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \psi(u, v). \quad (16)$$

Чтобы эта сеть была сетью переноса, необходимо, чтобы для нее выполнялись условия (15). Из (16) следует

$$\frac{\partial v^2}{\partial u^1} = \varphi \frac{\partial v^1}{\partial u^1}, \quad \frac{\partial v^2}{\partial u^2} = \psi \frac{\partial v^1}{\partial u^2}. \quad (17)$$

Дифференцируя равенства (17) соответственно по u^2 и u^1 и подставляя в (15) полученные значения $\frac{\partial^2 v^1}{\partial u^1 \partial u^2}$, $\frac{\partial^2 v^2}{\partial u^1 \partial u^2}$, а также учитывая (17), после преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \varphi [G_{11}^1 + G_{12}^1 (\varphi + \psi) + G_{22}^1 \varphi \psi] - [G_{11}^2 + G_{12}^2 (\varphi + \psi) + \\ &+ G_{22}^2 \varphi \psi] + (\psi - \varphi) (\sqrt{g_{11}} + \varphi \sqrt{g_{22}}); \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial v} &= \psi [G_{11}^1 + G_{12}^1 (\varphi + \psi) + G_{22}^1 \varphi \psi] - [G_{11}^2 + G_{12}^2 (\varphi + \psi) + \\ &+ G_{22}^2 \varphi \psi] + (\psi - \varphi) (\sqrt{g_{11}} + \psi \sqrt{g_{22}}); \\ b_{11} + b_{12} (\varphi + \psi) + b_{22} \varphi \psi &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Итак, справедлива

Теорема. Чтобы сеть кривых (16) на поверхности квазигиперболического пространства была сетью переноса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (18).

Из условий (18) легко видеть, что поверхность переноса не может одновременно быть и поверхностью квазипереноса [2].

§ 2. Поверхности вращения, являющиеся поверхностями переноса

В качестве примера поверхностей переноса в квазигиперболическом пространстве рассмотрим поверхности вращения, являющиеся одновременно поверхностями переноса.

В работе [2] показано, что поверхность вращения в квазигиперболическом пространстве может быть задана уравнениями

$$\begin{aligned} x_0 &= \operatorname{ch} u, \\ x_1 &= \operatorname{sh} u, \\ x_2 &= p(u) \operatorname{ch} v, \\ x_3 &= p(u) \operatorname{sh} v. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом $g_{11}=1$, $g_{12}=g_{22}=0$, $b_{11}=p''-p$, $b_{12}=0$, $b_{22}=p$; $G^2_{12} = \frac{p'}{p}$, $G^2_{11} = G^2_{22} = G^1_{ik} = 0$, $i=1, 2$; $k=1, 2$.

Пусть сеть кривых

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{\delta v}{\delta u} = \psi(u, v)$$

на поверхности (19) является сетью переноса. Тогда для этой сети выполняются условия (18), которые теперь принимают вид

$$\varphi_u + \psi \varphi_v = -\frac{p'}{p}(\varphi + \psi) + \psi - \varphi, \quad (20)$$

$$\psi_u + \varphi \psi_v = -\frac{p'}{p}(\varphi + \psi) + \psi - \varphi,$$

$$p'' - p + p\varphi\psi = 0.$$

Выражая ψ через φ из последнего уравнения (20) и подставляя в первые два, получим систему двух уравнений в частных производных первого порядка на одну неизвестную функцию φ . Разрешая эту систему относительно φ_u , φ_v , будем иметь

$$(p\varphi^2 + p'' - p)\varphi_u = -\frac{2p'}{p}\varphi(p\varphi^2 + p - p'') + 2\varphi(p - p'' - p\varphi^2) + \left(\frac{p''}{p}\right)'p\varphi, \quad (21)$$

$$(p'' - p)(p\varphi^2 + p'' - p)\varphi_v = -\frac{p'}{p}(p\varphi^2 + p - p'') + (p - p'')^2 - p^2\varphi^4 + \left(\frac{p''}{p}\right)'p^2\varphi^2.$$

Запишем условие совместности этой системы. Для этого продифференцируем первое из уравнений (21) по v , а второе — по u . Приравняв φ_{uv} и φ_{vu} и учитывая (21), получим алгебраическое уравнение на φ с коэффициентами, зависящими только от u :

$$\text{где} \quad A\varphi^6 + B\varphi^4 + C\varphi^2 + D = 0, \quad (22)$$

$$A = p^2[(p'' - p)(p' + p)' - (p'' - p)'(p' + p)] - 2p(p' + p)^2(p'' - p)$$

$$B = (p'' - p)^2(p'^2 - pp'' - 6pp' - 6p^2) + (p'' - p)\left[2p(p' + p) \times \right. \\ \left. \times (p'' - p)' - \left(\frac{p''}{p}\right)'(3p + 4p')p^2 - p^3\left(\frac{p''}{p}\right)''\right] + p^3\left(\frac{p''}{p}\right)'(p'' - p)'$$

$$C = (p'' - p)^3 \left(4 \frac{p'^2}{p} - 6p + p' - p'' \right) + (p'' - p)^2 \{ (p'' - p)' (3p - p') - \\ - p^2 \left[2 \left(\frac{p''}{p} \right)' + \left(\frac{p''}{p} \right)'' \right] \} + p^3 (p'' - p) \left(\frac{p''}{p} \right)^2; \\ D = (p'' - p)^3 \left[\left(1 - \frac{p'}{p} \right) \left(\frac{p' p''}{p} - 2p' + 2p + p''' \right) + \right. \\ \left. + (p'' - p) \left(1 - \frac{p'}{p} \right)' \right].$$

Если условие совместности (22) выполняется тождественно относительно φ , то система (21) вполне интегрируема и поверхность (19) несет ∞ сетей переноса. Эти поверхности будут определены в следующем параграфе.

В случае, когда условие совместности (22) системы (21) не является тождеством относительно φ , число сетей переноса на поверхности (19) конечно. Решая уравнение (22), находим φ как функцию одной лишь переменной u , т. е.

$$\varphi_\sigma = \psi_\sigma = 0.$$

Система (20) при этом принимает вид

$$\varphi' = -\frac{p'}{p}(\varphi + \psi) + \psi - \varphi = \psi', \quad (23)$$

$$p'' - p + p\varphi\psi = 0,$$

откуда

$$\psi = \varphi + 2a, \quad (24)$$

где $a = \text{const}$.

Обозначим $t = \varphi + a$, тогда

$$\varphi = t - a, \quad \psi = t + a. \quad (25)$$

Система (23) при этом принимает вид

$$t' = -\frac{2p'}{p}t + 2a,$$

$$p'' - p + p(t^2 - a^2) = 0,$$

или

$$z' = 2ap^2, \quad p''p^3 - p^4(1 + a^2) + z^2 = 0, \\ z = p^2t. \quad (26)$$

Из (26) следует

$$2z'z''' - z''^2 - 4z'^2(1 + a^2) + 16a^2z^2 = 0. \quad (27)$$

Продифференцировав (27), получим

$$2z'[z^{(4)} - 4z''(1 + a^2) + 16a^2z] = 0. \quad (28)$$

В (28) $z' \neq 0$, так как в противном случае было бы $p=0$ и поверхность (19) вырождалась бы в прямую.

Уравнение (28) легко интегрируется, и его общее решение (при $a^2 \neq 1$, $a \neq 0$)

$$z = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} + C_3 e^{2au} + C_4 e^{-2au}. \quad (29)$$

Если $a=0$, то из (25) следует, что $\varphi = \psi$, т. е. семейства сет совпадают. Следовательно, $a \neq 0$.

В случае $a^2=1$ общее решение уравнения (29) имеет вид

$$z = (C_1 + C_2 u) e^{2u} + (C_3 + C_4 u) e^{-2u}. \quad (30)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что (29) будет решением (27) при $C_1 C_2 = a^2 C_3 C_4$, а в случае (30) — при $C_1 C_4 - C_2 C_3 + C_2 C_4 = 0$.

В случае $a^2 \neq 1$ из (26) определяется меридиан поверхности

$$p^2 = \frac{z'}{2a} = \frac{1}{a} (C_1 e^{2u} - C_2 e^{-2u}) + C_3 e^{2au} - C_4 e^{-2au}. \quad (31)$$

Сети переноса определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dv}{du} = t - a = \frac{2C_2 e^{-2u} + C_3(1-a)e^{2au} + C_4(1+a)e^{-2au}}{\frac{1}{a}(C_1 e^{2u} - C_2 e^{-2u}) + C_3 e^{2au} - C_4 e^{-2au}}, \quad (32)$$

$$\frac{\delta v}{\delta u} = t + a = \frac{2C_1 e^{2u} + C_3(1+a)e^{2au} + C_4(1-a)e^{-2au}}{\frac{1}{a}(C_1 e^{2u} - C_2 e^{-2u}) + C_3 e^{2au} - C_4 e^{-2au}}.$$

Интегрируя (32), получаем

$$v = \lambda - au - \frac{1}{2} \ln \frac{aC_4 e^{2u} + C_2 e^{2au}}{-aC_4 + C_1 e^{2(a+1)u}}, \quad (33)$$

$$v = \mu + au - \frac{1}{2} \ln \frac{aC_4 e^{2u} + C_2 e^{2au}}{-aC_4 + C_1 e^{2(a+1)u}},$$

где λ, μ — параметры сети переноса.

Определив из (33) u, v как функции λ, μ и подставив в уравнение поверхности вращения (19), получим ее каноническое представление как поверхности переноса:

$$2e^{\frac{\lambda+\mu}{2a}} x_0 = e^{\frac{\lambda}{a}} + e^{\frac{\mu}{a}},$$

$$2e^{\frac{\lambda+\mu}{a}} x_1 = -e^{\frac{\lambda}{a}} + e^{\frac{\mu}{a}}, \quad (34)$$

$$e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} x_2 = \sqrt{C_4} e^{\frac{1-a}{a}\mu} + \frac{C_1}{a\sqrt{C_4}} e^{\frac{1+a}{a}\mu} + \frac{C_3}{a\sqrt{C_4}} e^{\frac{1-a}{a}\lambda} - \sqrt{C_4} e^{\frac{1+a}{a}\lambda},$$

$$e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} x_3 = \sqrt{C_4} e^{\frac{1-a}{a}\mu} - \frac{C_1}{a\sqrt{C_4}} e^{\frac{1+a}{a}\mu} + \frac{C_2}{a\sqrt{C_4}} e^{\frac{1-a}{a}\lambda} + \sqrt{C_4} e^{\frac{1+a}{a}\lambda}.$$

В случае, когда $a=1$, меридиан поверхности определяется уравнением

$$p^2 = \left(C_1 + C_2 + \frac{C_2}{2} u \right) e^{2u} - \left(C_3 + C_4 + \frac{C_4}{2} u \right) e^{-2u}, \quad (35)$$

а сети переноса

$$v = \lambda - au + \frac{1}{2} \ln \frac{(2C_1 + C_2)^2 e^{2u} + (C_4 - 2C_3)(2C_1 + C_2) e^{-2u}}{2C_2 + 4C_1 + 4C_2 u},$$

$$v = \mu + au + \frac{1}{2} \ln \frac{(2C_1 + C_2)^2 e^{2u} + (C_4 - 2C_3)(2C_1 + C_2) e^{-2u}}{2C_2 + 4C_1 + 4C_2 u}.$$

При этом каноническое уравнение поверхности переноса имеет вид

$$2e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} x_0 = e^{\frac{\lambda}{2}} + e^{\frac{\mu}{2}},$$

$$2e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} x_1 = e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{\frac{\mu}{2}},$$

$$2e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} x_2 = \left(C_1 + \frac{C_2}{2} \right) e^{2\mu} + \frac{C_2 \mu}{C_2 + 2C_1} + 1 + \left(\frac{C_4}{2} - C_3 \right) e^{2\lambda} - \frac{C_2 \lambda}{C_2 + 2C_1}, \quad (36)$$

$$2e^{\frac{\lambda+\mu}{2}} x_3 = \left(C_1 + \frac{C_2}{2} \right) e^{2\mu} - \frac{C_2 \mu}{C_2 + 2C_1} - 1 + \left(\frac{C_4}{2} - C_3 \right) e^{2\lambda} + \frac{C_2 \lambda}{C_2 + 2C_1}.$$

При $a=-1$ имеем ту же поверхность, что и при $a=1$. Подставив значение ψ из (24) в последнее из уравнений (23), получим квадратное уравнение для определения функции ϕ . Это означает, что если поверхность несет конечное число сетей переноса, то их не более двух (при фиксированном p). Легко видеть, что если меридиан не меняется, то a может только менять знак, однако из (25) следует, что при этом семейства сети переставляются местами.

Таким образом, найденные поверхности несут две сети, причем вторая получается из первой заменой t на $-t$, т. е.

$$\varphi_2 = -\varphi_1, \quad \psi_2 = -\varphi_1.$$

§ 3. Поверхности вращения, несущие континуум сетей переноса

Как отмечалось выше, поверхность вращения (19) несет сети переноса, если условие совместности (22) выполняется тождественно относительно φ . Определим эти поверхности.

Приравняв нулю коэффициенты A, B, C, D в уравнении (22) получим четыре обыкновенных дифференциальных уравнения на одну функцию p .

Легко видеть, что если $p'' = p$, то все коэффициенты A, B, C, D обращаются в нуль. Тогда из последнего уравнения (20) следует, что $\varphi\psi = 0$.

Если $\varphi = 0$, то из первых двух уравнений (20) следует

$$p = p', \quad \psi_u = 0.$$

Если $\psi = 0$, то из первых двух уравнений (20) следует

$$p = -p', \quad \varphi_u = 0.$$

В обоих случаях поверхность есть цилиндр — линейчатая поверхность с образующими параллелями в смысле Лобачевского

$$c^2(x_0 + x_1)^2 = x_2^2 - x_3^2. \quad (37)$$

При этом одним из семейств сети переноса служат координатные линии ($u = \text{const}$ либо $v = \text{const}$). Второе семейство составляют произвольные линии поверхности: $u = \alpha(v)$.

В случае, когда $p'' \neq p$, интегрируя уравнения $A = 0, D = 0$ получим

$$\frac{p'' - p}{p' + p} = C_1 e^{2u}; \quad \frac{p'' - p}{p - p'} \cdot p^2 = C_2 e^{-2u},$$

откуда

$$p = C_3 \sqrt{e^{-2u} + \frac{C_1}{C_2} e^{2u}}, \quad (38)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные интегрирования.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что решение (38) не удовлетворяет решениям $B = C = 0$ ни при каких C_1, C_2, C_3 .

Таким образом, не существует поверхностей вращения (кроме цилиндров), несущих бесконечное множество сетей переноса.

Итак, справедлива

Теорема. Если поверхность вращения является поверхностью переноса, то ее меридиан определяется по (31) или (35). Все эти поверхности несут две сети переноса.

Вершины конусов, касающихся найденных нами поверхностей переноса (34) вдоль линий конической сети, расположены на линиях, лежащих в разных плоскостях абсолюта:

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= \frac{\partial U_0}{\partial u} = \frac{1}{a} e^{\frac{\lambda}{a}}, \quad \rho x_1 = \frac{\partial U_1}{\partial u} = -\frac{1}{a} e^{\frac{\lambda}{a}}, \\ \rho x_2 &= \frac{\partial U_2}{\partial u} = \frac{C_2(1-a)}{a^2 \sqrt{C_4}} e^{\frac{1-a}{a}\lambda} - \sqrt{C_4} \frac{1+a}{a} e^{\frac{1+a}{a}\lambda}, \\ \rho x_3 &= \frac{\partial U_3}{\partial u} = \frac{C_2(1-a)}{a^2 \sqrt{C_4}} e^{\frac{1-a}{a}\lambda} + \sqrt{C_4} \frac{1+a}{a} e^{\frac{1+a}{a}\lambda}, \end{aligned}$$

$$x_0 = -x_1, \quad x_3^2 - x_2^2 = 4 \frac{C_2}{a} (1-a^2) x_0^2 \quad (39)$$

для линий $\lambda = \text{const}$ и аналогично для линий $\mu = \text{const}$:

$$x_0 = x_1, \quad x_2^2 - x_3^2 = 4 \frac{C_1}{a} (1-a^2) x_0^2. \quad (40)$$

Для поверхностей (36) кривые (39), (40) имеют уравнения $x_0 = -x_1, (x_3 - x_2)^3 (x_3 + x_2) (C_2 + 2C_1)^3 = 256 C_2^3 (C_4 - 2C_3) x_0^4$

для $\lambda = \text{const}$, а для $\mu = \text{const}$

$$x_0 = x_1, \quad (x_2 - x_3)^3 (x_3 + x_2) (C_2 + 2C_1)^2 = 256 C_2^3 x_0^4.$$

В случае цилиндра (37) одна из кривых абсолюта, на которой лежат вершины конусов, совпадает с осью абсолюта $x_0 = x_1 = 0$, а вторая вырождается в точку ($x_0 = x_1, x_2 = x_3 = 0$ или $x_0 = -x_1, x_2 = x_3 = 0$).

Авторы выражают благодарность проф. Я. П. Бланку за советы и замечания при обсуждении статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- Бланк Я. П. Аналог поверхностей переноса в геометрии Лобачевского. — В кн.: Записки мат. отд. физ.-мат. фак. Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва. Т. XXV. Харьков, 1957, с. 35—44.
- Моторный Л. Т. Об обобщенных поверхностях переноса. — «Укр. геометр. сб.», вып. 2. Харьков, 1966, с. 77—85.
- Хатилов А. Э.-А. Теория поверхностей пространства с вырожденным распавшимся абсолютом. — В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. X. М., 1956, с. 285—308.
- Каган В. Ф. Основы геометрии поверхностей. Т. 1. М., Гостехиздат, 1947. 512 с.; Т. 2, 1948. 407 с.

Поступила 14 мая 1973 г.

ДВАЖДЫ РАССЛАИВАЕМЫЕ КОМПЛЕКСЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрению комплексов, содержащих семейства конгруэнций того или иного частного вида, посвящены работы С. П. Феникова [1], Н. И. Кованцова [2, 3], Р. Н. Щербакова [4]. Там в работе [2] Н. И. Кованцов рассматривает расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции, представляющие собой совокупность нормалей к поверхностям постоянной кривизны. Интересным является тот факт, что точка, описывающая поверхность, ортогональную лучам конгруэнции, принадлежит комплексу, имеет абсциссу, удовлетворяющую алгебраическому уравнению той или иной степени.

Предметом настоящей статьи является расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции, представляющие собой совокупности нормалей к минимальным поверхностям. Если конгруэнции, расслаивающие комплекс, имеют в качестве базисных минимальные поверхности, то упомянутое выше алгебраическое уравнение оказывается квадратным; следовательно, на каждом луче комплекса выделяются две точки, описывающие минимальные поверхности, для которых нормальные к ним конгруэнции расслаивают комплекс. Уже давно [2] (1958) возникла проблема отыскания комплексов, для которых существует двойное расслоение в нормальные конгруэнции. Все попытки решить эту проблему наталкивались на большие технические затруднения, обойти которые не удавалось.

В настоящей работе выполняются все выкладки. Так, для приведения системы дифференциальных уравнений, решающей задачу, в инволюцию приходится выполнять целый ряд ее продолжений вплоть до четвертой дифференциальной окрестности луча комплекса.

Полученный результат может быть сформулирован в виде теоремы.

Теорема. *В трехмерном евклидовом пространстве с широтой в шесть функций одного аргумента существуют комплексы, каждый из которых дважды расслаивается в однопараметрическое семейство нормальных конгруэнций с базисными минимальными поверхностями.*

Приведем в ряде случаев лишь окончательные результаты выкладок, опустив промежуточные.

§ 1. Основные уравнения

Пусть дан некоторый комплекс, отнесенный к своему нормальному реперу (вершина A сопровождающего трехгранника помещена в центр луча комплекса, e_3 — лежит на луче, e_1, e_2 — соответственно единичные векторы главной нормали и бинормального комплекса); уравнение такого комплекса:

$$\omega^2 = k\omega_3^1. \quad (1)$$

Инфинитезимальные смещения трехгранника имеют вид

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i e_i, \\ de_i &= \omega_i^k e_k, \\ \omega_i^k &= -\omega_k^i. \end{aligned} \quad (2)$$

Продифференцировав внешним образом (1) и алгебраически разрешая полученное квадратичное уравнение по лемме Картана, имеем

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\ dk &= \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) определяет вторую дифференциальную окрестность луча комплекса. Продолжив ее по лемме Картана, получим систему дифференциальных уравнений, характеризующих третью дифференциальную окрестность луча комплекса:

$$\begin{aligned} dp &= x_1\omega^1 + x_2\omega_3^1 + x_3\omega_3^2, \\ d\alpha &= (x_2 - 2kp^2 + 2p\beta)\omega^1 + (x_4 - 2kp\alpha + \alpha\beta + p\gamma)\omega_3^1 + \\ &\quad + (x_5 - 2kp\beta + \beta^2 + pr + 1)\omega_3^2, \\ d\beta &= (x_3 - \alpha p)\omega^1 + (x_5 - \alpha^2)\omega_3^1 + (x_6 - \alpha\beta)\omega_3^2, \\ dq &= (x_4 - 4kp\alpha + 2\alpha\beta + 2p\gamma)\omega^1 + (y_4 + 2\alpha\gamma - 2\alpha^2k)\omega_3^1 + \\ &\quad + (y_5 - 2k\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha r)\omega_3^2, \\ dr &= (x_5 + 1 - 2kp\beta + \beta^2 + pr - pq)\omega^1 + (y_5 - \alpha q)\omega_3^1 + (y_6 - q\beta)\omega_3^2, \\ d\gamma &= (x_6 - 2\gamma p)\omega^1 + (y_6 - 2\alpha\gamma + 2k\beta^2 - 2r\beta)\omega_3^1 + (kx_6 - z_6)\omega_3^2. \end{aligned} \quad (4)$$

§ 2. Уравнение, определяющее точки, которые описывают минимальные поверхности

Назовем точки луча комплекса, которые описывают поверхности, ортогональные конгруэнциям комплекса, точками орто-

гональности нулевой средней кривизны. Такие точки лишь у частного вида комплексов описывают однопараметрическое семейство минимальных поверхностей. Найдем уравнения, определяющие точки ортогональности нулевой средней кривизны.

Пусть комплекс (1) расслаивается в нормальные конгруэнции — двухпараметрические семейства прямых

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + k\omega_3^2. \quad (5)$$

Как было показано в [2], произвольный комплекс допускает расслаивание в нормальные конгруэнции с произволом в одну функцию одного аргумента.

Возьмем точку

$$M = A + te_3, \quad (6)$$

которая описывает поверхность, ортогональную лучу комплекса. Тогда

$$\omega^3 + dt = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя (6), получаем

$$dM = (\omega^1 + t\omega_3^1)e_1 + (\omega^2 + t\omega_3^2)e_2.$$

Вводим обозначения

$$\tilde{\omega}^1 = \omega^1 + t\omega_3^1,$$

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2 + t\omega_3^2.$$

С учетом (1) и (5) предыдущее равенство можно переписать следующим образом:

$$\tilde{\omega}^2 - t\omega_3^2 - k\omega_3^1 = 0,$$

$$\tilde{\omega}^1 - t\omega_3^1 - a\omega_3^1 - k\omega_3^2 = 0.$$

Решая относительно ω_3^1 и ω_3^2 , получаем

$$\omega_3^1 = \frac{t\tilde{\omega}^1 - k\tilde{\omega}^2}{\Delta},$$

$$\omega_3^2 = \frac{-k\tilde{\omega}^1 + (a+t)\tilde{\omega}^2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = (a+t)t - k^2.$$

Средняя кривизна H поверхности определяется равенством

$$H = \frac{1}{2}[t + (a+t)].$$

Поскольку рассматриваемая поверхность является минимальной, то

$$a = -2t. \quad (8)$$

Дифференцируя (5) внешним образом, принимая во внимание (8) и раскрывая полученные квадратичные уравнения по лемме Картана, будем иметь

$$(4pt^2 - 4at + k^2p + 2k\beta + r + q)[\omega_3^2 \omega_3^1] = 0.$$

Формы ω_3^1 и ω_3^2 являются независимыми; после сокращения на $[\omega_3^2, \omega_3^1]$ получим

$$4t^2p - 4at + k^2p + 2k\beta + r + q = 0. \quad (9)$$

Это и есть искомое уравнение.

§ 3. Исследование широты класса комплексов, дважды расслаивающихся в нормальные конгруэнции с базисными минимальными поверхностями

Из (9) определяем

$$t_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - p(2k\beta + k^2p + r + q)}}{2p}. \quad (10)$$

Дифференцируя (10), приходим к следующему:

$$dt_{1,2} = \frac{1}{4p^2\sqrt{A}} \{ [2\sqrt{A}(px_2 - 2kp^3 + 2p^2\beta - \alpha x_1) \pm (2kp\beta + pr + pq - 2\alpha^2)x_1 \pm 2\alpha px_2 \mp p^2(2kx_3 + x_4 + x_6)]\omega^1 + [2\sqrt{A}(px_4 - 2kp^2\alpha + \alpha p\beta + p^2\gamma - \alpha px_2) \mp [2\alpha^2 - p(2k\beta + r + q)]x_2 \pm 2\alpha px_4] \mp [2kp^2x_5 + p^2y_4 + p^2y_6] \pm 2\alpha p(\alpha\beta + p\gamma) \mp 2p^2\{q(kp - \beta) + k\beta^2 - r\beta\}]\omega_3^1 + [2\sqrt{A}(px_6 - 2kp^2\beta + p\beta^2 + p^2r + p - \alpha x_3) \mp [2\alpha^2 - p(2k\beta + r + q)]x_3 \pm 2\alpha px_5 \mp p^2(3kx_6 + y_5 - z_6 + 2kp\gamma + 3\beta\gamma) \pm \alpha p(2\beta^2 + pr + 2)]\omega_3^2 \}, \quad (11)$$

где

$$A = \alpha^2 - p(2k\beta + k^2p + r + q).$$

Подставляя полученное выражение в (7), получаем четыре соотношения на параметры третьей дифференциальной окрестности, из которых найдем x_2 , x_5 , y_6 , z_6 и внесем их в систему (4). Дифференцируя ее внешним образом и применяя лемму Картана, придем к уравнениям, определяющим четвертую диффе-

рещиальную окрестность луча дважды расслаиваемого комплекса:

$$dx_1 = B_1 \omega^1 + B_2 \omega_3^1 + B_3 \omega_3^2,$$

$$dx_3 = C_1 \omega^1 + C_2 \omega^1 + C_3 \omega_3^2,$$

$$dx_4 = E_1 \omega^1 + E_2 \omega_3^1 + E_3 \omega_3^2,$$

$$dx_6 = F_1 \omega^1 + F_2 \omega_3^1 + F_3 \omega_3^2,$$

$$dy_4 = L_1 \omega^1 + L_2 \omega_3^1 + L_3 \omega_3^2,$$

$$dy_5 = M_1 \omega^1 + M_2 \omega_3^1 + M_3 \omega_3^2,$$

где $B_1, \dots, B_3, C_1, \dots, C_3, E_1, \dots, E_3, F_1, \dots, F_3, L_1, \dots, L_3, M_1, \dots, M_3$ — некоторые функции от параметров $\epsilon_1, \psi_1, \nu_1, \mu_4, \lambda_2, \lambda_4, \alpha, \dots, \gamma, x_1, x_3, x_4, x_6, y_4, y_5$ (так как значения являются достаточно громоздкими, мы их опускаем).

Таким образом, продолжение пфафовой системы из шести уравнений (5) с внесенными в них значениями x_2, x_5, y_6, z_6 есть система, состоящая из шести уравнений. Параметров продолжения также оказывается шесть: $\epsilon_1, \psi_1, \nu_1, \mu_4, \lambda_2, \lambda_4$. В соответствии с теорией совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах заключаем, что решение системы, состоящей из уравнений (1), (4), (5) (в последние внесены значения параметров x_2, x_5, y_6, z_6), существует с произволом шесть функций одного аргумента.

Этим дается положительный ответ на вопрос, поставленный в [2], о существовании комплексов с двойным расслоением в нормальные конгруэнции с базисными минимальными поверхностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Геометрия комплекса прямых. — «Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. В. П. Потемкина», 1940, т. I, вып. 1, с. 1—26.
2. Кованцов Н. И. О векторных полях, присоединенных к линейчатому комплексу. — «Укр. мат. журнал», 1958, т. X, № 1, с. 37—58.
3. Кованцов Н. И. Линейчатые многообразия комплекса прямых. — «Науч. зап. Запорожск. пед. ин-та. Сер. физ.-мат.», 1966, т. 2.
4. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатая дифференциальная геометрия. Томск, изд-во Томск. ун-та, 1973, 341 с.

Поступила 19 апреля 1973 г.

НАИМЕНЬШАЯ ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА ДВУХ ОВАЛОВ¹

Как бы ни были расположены в одной плоскости два (ограниченные) овала, они имеют выпуклую оболочку, т. е. существует наименьшая выпуклая область, в которой содержатся оба овала. Каково должно быть их взаимное расположение, чтобы длина контура этой выпуклой оболочки была наименьшей? Такова задача, решением которой мы намерены здесь заняться.

§ 1. Каждому положению двух овалов O_1, O_2 в одной плоскости соответствует вполне определенная выпуклая оболочка O , имеющая вполне определенную длину контура L . Очевидно, что $L \geq L_1, L \geq L_2$, где L_1, L_2 — длины контуров овалов соответственно O_1, O_2 . С непрерывным изменением параметров, определяющих взаимное положение O_1 и O_2 в плоскости, непрерывно изменяется и L . Так как, кроме того, множество значений L в силу предыдущих неравенств ограничено снизу, L достигает своего наименьшего значения L_0 .

После всех замечаний вернемся к овалам O_1, O_2 . Отнесем первый из них к неподвижной декартовой системе координатных осей, а второй — к жестко связанной с ним подвижной системе. Выберем начала этих координатных систем за полюсы соответствующих полярно-тангенциальных систем координат, а полуоси этих систем $+x$ и $+x^*$ — за положительные направления соответствующих полярных осей. Пусть в этих координатных системах уравнения будут соответственно

$$p = p(\alpha), \quad p^* = p^*(\alpha^*).$$

Если декартовы координаты начала подвижной системы относительно неподвижной суть (a, b) , а угол полярной оси подвижной системы с неподвижной есть φ , то уравнение овала O_2 относительно неподвижной системы полярно-тангенциальных координат будет

$$\rho(\alpha, \beta, a, b) = a \sin \alpha - b \cos \alpha + p^*(\alpha - \varphi). \quad (1)$$

¹ Настоящая статья проф. П. А. Соловьева (о нем см. «Укр. геометр. сб.», вып. 3, 1966, с. 112) была подготовлена автором к печати еще в августе 1944 г. После смерти П. А. Соловьева (октябрь 1945 г.) сохранилась машинописная копия статьи без формул. Недавно по черновым рукописям автора удалось восстановить всю работу. Хотя поставленная задача решена в ней не полностью (найжены только необходимые условия минимума, достаточные лишь намечаются), сама задача, метод подхода к ней и полученные автором результаты, несомненно, интересны. Язык статьи сохранен полностью. Замечен лишь неприжившийся термин «конвексный» термином «выпуклый», сделано несколько незначительных, но необходимых исправлений.

Каждой системе значений параметров a, b, φ положения одного овала относительно другого соответствует вполне определенная выпуклая их оболочка O .

Наложим следующие ограничения на два наших исходных овала: *овалы регулярны и их относительный вещественный порядок есть конечное число N* . Это значит, что при любом их взаимном положении число общих точек не превосходит этого числа N , достигая его хотя один раз. При этом точки прикосновения засчитываются за число точек соответственно порядку прикосновения в них овалов.

Чтобы сразу же исключить тривиальные случаи, будем предполагать всюду в дальнейшем, что ни один из овалов O_1, O_2 не может быть расположен внутри другого — не может быть вложен в другой.

Из конечности относительного вещественного порядка двух данных овалов O_1 и O_2 вытекает, что число их общих опорных прямых также не превосходит числа N , а потому и число n тех отрезков общих опорных прямых, которые входят в состав контура выпуклой оболочки, будет числом конечным, не превосходящим числа $N, n \leq N$.

Пусть углы этих отрезков с положительным направлением полярной оси неподвижной системы координат соответственно будут $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Один конец каждого из этих отрезков, по самому их определению, лежит на одном овале, другой — на другом. Следовательно, при обходе контура выпуклой оболочки в одном определенном направлении принадлежность этих концов будет последовательно альтернировать от одного овала к другому. Заметим также, что $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суть корни уравнения

$$p(\alpha) = \rho(\alpha, \varphi, a, b) \quad (2)$$

при данных φ, a, b и, следовательно,

$$p(\alpha_i) = \rho(\alpha_i, \varphi, a, b), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Длина L контура выпуклой оболочки двух овалов для данного значения параметров a, b, φ их взаимного расположения определяется формулой

$$L = \int_0^{2\pi} P(\alpha) d\alpha,$$

где $P(\alpha)$ есть попеременно то $\rho(\alpha)$, то $\rho(\alpha, \varphi, a, b)$ между каждыми двумя последовательными корнями уравнения (3). Следовательно,

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \rho(\alpha, \varphi, a, b) d\alpha + \dots + \int_{\alpha_n}^{\alpha_1} \rho(\alpha, \varphi, a, b) d\alpha,$$

или

$$L = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} P_i(\alpha) d\alpha,$$

$$P_{2t} = p(\alpha, \varphi, a, b), \quad P_{2t+1} = p(\alpha), \quad t = 1, 2, \dots$$

Необходимые условия экстремальности L , рассматриваемого как функция параметров движения a, b, φ , согласно (1), (3), дают

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (-1)^i \cos \alpha_i = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = - \sum_{i=1}^n (-1)^i \sin \alpha_i = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^n (-1)^i P(\alpha_i) = 0. \quad (6)$$

Эти условия имеют, как легко видеть, следующий простой геометрический смысл:

1. Для того чтобы длина контура выпуклой оболочки двух овалов была наименьшей, необходимо, чтобы многоугольник со сторонами единичной длины, внутренние углы которого равны внешним углам многоугольника, составленного общими опорными двух овалов, был замкнут.

2. Знакопеременная сумма полярных расстояний сторон описанного многоугольника от одной из точек плоскости этого многоугольника должна быть равна нулю.

§ 2. Исследуем ближе природу и строение многоугольников, описанных вокруг двух овалов, расположенных так, что длина контура их выпуклой оболочки является наименьшей. Назовем такие многоугольники многоугольниками Π_n , где n есть число его сторон (и вершин). Равносторонний многоугольник, внутренние углы которого равны соответствующим внешним углам многоугольника Π_n , назовем индекс-многоугольником Π'_n . Очевидно, что

3. Всякий многоугольник Π_n есть многоугольник выпуклый. Отсюда сразу же следует, что

4. Всякий многоугольник Π_n огибается прямой, последовательно поворачивающейся вокруг его вершин на величину, равную внутренним углам многоугольника Π_n , в одном и том же направлении (монотонно);

5. Сумма внутренних углов всякого индекс-многоугольника Π'_n равна 2π .

Из последних двух положений явствует, что

6. Всякий многоугольник Π_n либо имеет четное число вершин, либо, если он имеет нечетное их число $(2k+1)$, то должен считаться дважды обойденным многоугольником с $2(2k+1)$

числом вершин, причем вершины с номерами t и $t+2k+1$ будут совпадать.

В противном случае, если бы многоугольник Π_n имел нечетное число вершин, то соответствующий ему индекс-многоугольник Π'_n , имея также нечетное число вершин и допуская monotонное огибание прямой (теорема 4), имел бы сумму внутренних углов, равную только π , по общему свойству таких многоугольников. Из теорем 5 и 6 следует, что индекс-многоугольники Π_n имеют форму звездчатых многоугольников.

Всякий многоугольник Π_n обладает свойством, указанным в п. 2 § 1. Относительно этого свойства многоугольников Π_n легко доказываются следующие теоремы.

7. Если знакопеременная сумма полярных расстояний сторон некоторого многоугольника равна нулю для одной из точек плоскости, а соответствующий ему индекс-многоугольник замкнут, то эта сумма равна нулю и для всякой точки плоскости.

В самом деле, легко убедиться, что полярные расстояния всяких двух точек плоскости от одной и той же прямой, образующей угол α с полярной осью, связаны соотношением

$$\bar{p} = p - a \sin \alpha + b \cos \alpha, \quad (7)$$

где a, b — разности соответственно абсцисс и ординат рассматриваемых точек плоскости. Следовательно,

$$\sum \pm \bar{p}_i = \sum \pm p_i - a \sum \pm \sin \alpha_i + b \sum \pm \cos \alpha_i,$$

и если $\sum \pm p_i = 0$ для одной точки плоскости, а $\sum \pm \sin \alpha_i = \sum \pm \cos \alpha_i = 0$ в силу замкнутости индекс-многоугольника, то и для всякой другой точки плоскости $\sum \pm \bar{p}_i = 0$.

8. Если знакопеременная сумма полярных расстояний сторон некоторого многоугольника равна нулю для двух различных точек плоскости этого многоугольника, то она равна нулю и для всех точек прямой, определяемой этими двумя различными точками.

В самом деле, если полярные расстояния двух различных точек плоскости A', A'' от одной из сторон многоугольника есть соответственно p', p'' , то полярное расстояние p точки A , расположенной на прямой $A'A''$ и делящей отрезок $A'A''$ в отношении $m:n$, от той же стороны многоугольника выражается формулой

$$p = \frac{np' + mp''}{n + m}.$$

Отсюда

$$\sum \pm p_i = \frac{n \sum \pm p'_i + m \sum \pm p''_i}{n + m}. \quad (8)$$

Так как, по условию, $\Sigma \pm p_i = \Sigma \pm p_i' = 0$, имеем как следствие $p_i = 0$, что и доказывает теорему. Из (8) также следует, что

9. На всякой прямой, взятой в плоскости какого-нибудь многоугольника, всегда существует или только одна точка, для которой знакопеременная сумма ее расстояний от сторон данного многоугольника равна нулю, или эта знакопеременная сумма равна нулю для всех точек этой прямой, ибо на всякой прямой всегда существует точка (включая и бесконечно удаленную точку прямой), делящая в любом заданном отношении $m:n = \Sigma \pm p_i' : \Sigma \pm p_i'$ какой-либо из отрезков этой прямой.

Из последней теоремы непосредственно следует

10. В плоскости всякого многоугольника всегда существует или только одна такая прямая, для каждой из точек которой знакопеременная сумма расстояний этой точки от сторон многоугольника равна нулю, или все прямые плоскости обладают этим свойством.

Иначе:

11. Если три различные и неколлинеарные точки плоскости многоугольника обладают тем свойством, что знакопеременная сумма расстояний каждой из них от сторон этого многоугольника равна нулю, то этим свойством обладают и все точки плоскости данного многоугольника.

Легко убедиться, что при осуществлении условия теоремы 1 индекс-многоугольник, соответствующий данному, будет замкнутым. В самом деле, для трех неколлинеарных точек (a^k , b^k), $k=1, 2, 3$, плоскости на основании формулы (7) имеем

$$\bar{p}^k = p - a^k \sin \alpha + b^k \cos \alpha,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \bar{p}_i^k = \sum_{i=1}^n (-1)^i p_i - a^k \sum_{i=1}^n (-1)^i \sin \alpha_i + b^k \sum_{i=1}^n (-1)^i \cos \alpha_i,$$

$$k = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Согласно условию, определитель $(1, a^k, b^k) \neq 0$ и

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \bar{p}_i^k = 0.$$

Следовательно, система трех однородных линейных относительно $1, a^k$ и b^k уравнений (9) может быть совместна только при условии

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \sin \alpha_i = \sum_{i=1}^n (-1)^i \cos \alpha_i = 0,$$

а это и значит, что соответствующий индекс-многоугольник замкнут.

Последнее замечание связывает содержание теорем 10 и 11 с теоремой 7, как теорем взаимно обратных. Эти теоремы дают возможность по всякому замкнутому звездчатому многоугольнику Π'_n построить такой многоугольник Π_n , для которого данный Π'_n будет индекс-многоугольником. Для этого, очевидно, достаточно построить многоугольник Π_n^0 , описанный вокруг некоторой произвольного радиуса окружности, стороны которого были бы

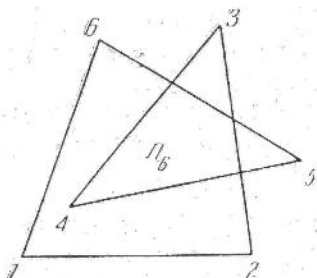


Рис. 1.

параллельны соответственно сторонам данного Π'_n , а направлены попеременно то одинаково, то противоположно сторонам многоугольника Π'_n . Так построенный многоугольник Π_n^0 будет обязательно выпуклым и будет обладать свойством $\sum \pm p_i = 0$, ибо все p_i равны между собой относительно центра окружности; число n , по условию (теорема 6) должно быть четным.

Все иные многоугольники Π_n , имеющие данный Π'_n своим индекс-многоугольником, могут быть получены всевозможным параллельным сдвигами сторон многоугольника Π_n^0 при одном условии:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta p_i = 0,$$

где Δp_i — величина сдвига i -й стороны.

Рассмотрим теперь многоугольники Π_n для различных значений $n=2, 4, \dots$. При $n=2$ имеем двуугольник, т. е. дважды взятый отрезок. Здесь $\Pi_2' = \Pi_2$. Если $n=4$, то Π_4' может быть только ромбом, ибо при $n=4$ форма звездчатых многоугольников совпадает с формой выпуклых; кроме того, все стороны этого четырехугольника Π_4' , по условию, должны быть равны. Следовательно, четырехугольник Π_4^0 должен быть также ромбом, а потому и всякий Π_4 должен быть ромбом, так как условие $\sum \pm p_i = p_1 + p_3 - (p_2 + p_4) = 0$ равносильно равенству расстояний между парами противоположных сторон параллелограмма, что осуществляется только для ромба.

Если $n=6$, то общий вид индекс-многоугольника будет иметь вид, показанный на рис. 1. Так как для соответствующего шестиугольника Π_6' должно выполняться условие $\sum \pm p_i = 0$ хотя бы для одной точки его плоскости, а следовательно, в силу теоремы 7, и для всякой точки этой плоскости, поэтому биссектрисы

сы углов при каждой тройке взаимно-непротивоположных вершин этого шестиугольника должны пересекаться (по три) в одной точке *. В остальном шестиугольник P_6 может быть произвольным.

Особо интересен тот частный случай, когда P_6' обращается в дважды взятый правильный треугольник. Тогда шестиугольник P_6^0 будет правильным, а все шестиугольники P_6 могут быть получены из P_6^0 сдвигами пар сторон, сходящихся, например, в одной вершине P_6^0 при скольжении этой вершины вдоль биссектрисы этого угла. Этими примерами здесь и ограничимся.

§ 3. Вернемся теперь к основной задаче статьи. Пользуясь введенным нами понятием многоугольника Π_n , указанные в теоремах 1 и 2 § 1 необходимые условия такого взаимного расположения двух овалов, при котором длина контура их выпуклой оболочки будет наименьшей (индекс n при букве Π опускаем), можно сформулировать так:

12. Для того, чтобы длина контура выпуклой оболочки двух непересекающихся овалов была наименьшей, необходимо, чтобы многоугольник, составленный общими их опорными прямыми, был многоугольником Π .

Следующее ниже простое замечание позволит значительно усилить только что указанные необходимые условия. Пусть два овала O_1 и O_2 приведены в такое взаимное расположение, при котором длина контура их выпуклой оболочки L будет наименьшей. Мы утверждаем, что при том же их расположении выпуклая оболочка L' и всяких иных двух овалов O_1' и O_2' , которые жестко связаны соответственно с O_1 и с O_2 и вписаны в многоугольник Π , будет также наименьшей. В самом деле, если бы L' не была наименьшей, то, осуществив такое взаимное расположение овалов O_1' и O_2' , при котором длина L' достигнет своего наименьшего значения $L_0' < L_0$, — а она существует, — мы смогли бы укоротить и L_0 (ибо по крайней мере одна из точек прикосновения овала O_1 или овала O_2 к соответствующей опорной прямой при первом их взаимном расположении оказалась бы внутри нового опорного многоугольника Π), что невозможно. Итак:

13. Если два овала O_1 и O_2 приведены в такое взаимное расположение, при котором длина контура их выпуклой оболочки является наименьшей, то в том же расположении находятся и любые два овала O_1' и O_2' , соответственно описанные вокруг овалов O_1 и O_2 и вписанные в многоугольник Π , составленный общими к овалам O_1 и O_2 опорными прямыми.

* Для любого шестиугольника правильна теорема: Если одна тройка биссектрис углов при взаимно-непротивоположных вершинах шестиугольника пересекается в одной точке, то биссектрисы и остальных трех углов также пересекаются в одной точке.

Но многоугольник Π , характеризующий указанное взаимное расположение овалов, сам является овалом, описанным около O_1 , так и около O_2 , и вписанным в себя. Следовательно:

14. Для того чтобы длина контура выпуклой оболочки двух невмещающих один в другой овалов была наименьшей, необходимо, чтобы многоугольник, составленный общими их опорными прямыми, был многоугольником Π наименьшего периметра.

Так как для всяких двух невмещающих один в другой овалов контур их выпуклой оболочки достигает хоть один раз своей наименьшей длины, следовательно:

15. Вокруг одного и вокруг другого из всяких двух невмещающих один в другой овалов всегда можно описать хотя бы одну пару конгруэнтных между собой многоугольников Π .

Из теорем 14, 15 следует, что:

16. Для определения того взаимного расположения двух овалов O_1 и O_2 , при котором длина контура их выпуклой оболочки была бы наименьшей, следует найти ту пару описанных — одну вокруг O_1 , другой вокруг O_2 — конгруэнтных между собою многоугольников Π , которые имеют наименьшую длину периметра. Если такая пара единственна, то при одном из возможных совмещений этих конгруэнтных многоугольников Π и получим искомого взаимного расположения овалов O_1 и O_2 .

Наконец, отметим, что:

17. Если два овала допускают только единственную пару конгруэнтных между собой многоугольников Π , описанных один вокруг одного, другой вокруг другого и имеющих среди всех возможных пар наименьшую длину периметра, и если при этом каждый из этих многоугольников имеет единственное расположение относительно соответствующего овала, а многоугольники могут быть совмещены* между собой только единственным способом, то совмещение этих многоугольников является условием не только необходимым, но и достаточным для такого расположения овалов, при котором длина контура их выпуклой оболочки является наименьшей.

Уравнения (4), (5), (6), игравшие роль основных при том методе решения задачи, которому мы следовали, допускают очень простую механическую интерпретацию. Чтобы показать это, рассмотрим следующую задачу.

В координатной плоскости (xy) даны неподвижный овал O_1 и подвижный O_2 . С помощью нити, охватывающей оба овала, их стягивают до наступления равновесия (рис. 2). Необходимо найти условия, при которых это равновесие наступает. Пред-

* Многоугольники могут быть совмещены между собой непрерывным движением в плоскости.

полагается, что овалы O_1 и O_2 не вмещаются один в другой и что между нитью и контурами овалов трения нет.

Заметим прежде всего, что некоторые части нити, охватывающей овалы, расположатся вдоль дуг овалов, другие — вдоль общих к обоим овалам опорных прямых. Обозначим через $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ углы, которые образуют положительные направления этих общих опорных

прямых с положительным направлением оси x ; те дуги подвижного овала, к которым прилегает нить, заключены последовательно между опорными точками прямых с углами α_i и α_{i+1} , α_{i+2} и α_{i+3} , $i=1, 2, \dots, n$. Если натяжение нити есть T , то давление ее элемента ds с углом α на соответствующий элемент контура овала O_2

равно Tda и направлено по нормали к этому элементу. Проекции этого давления на координатные оси x и y соответственно будут $T \sin \alpha da$ и $T \cos \alpha da$; следовательно, проекции X и Y результирующей всех этих элементарных давлений нити на дуги $N_i M_{i+1}$, $i=1, 2, \dots, n$ подвижного овала O_2 выразятся следующими формулами:

$$X = T \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \sin \alpha d\alpha = T \sum_{i=1}^n (-1)^i \cos \alpha_i; \quad (10)$$

$$Y = T \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \cos \alpha d\alpha = -T \sum_{i=1}^n (-1)^i \sin \alpha_i. \quad (11)$$

Что касается давлений нити на дуги неподвижного овала O_1 , то все они уничтожаются реакциями опоры.

Обозначим через $p(\alpha)$ полярное расстояние от начала координат той направленной опорной прямой к овалу O_2 , которая образует с положительным направлением оси x угол α . Легко убедиться, что момент относительно начала координат элементарного давления Tda нити на соответствующий элемент дуги овала O_2 в окрестности опорной точки будет равен $Tda \cdot p'(\alpha) = Tdp$. Следовательно, результирующий момент всех элементарных давлений нити на дуги $N_i M_{i+1}$ овала O_2 выразится следующей формулой:

$$M_0 = T \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} dp = \pm T \sum_{i=1}^n (-1)^i p(\alpha_i). \quad (12)$$

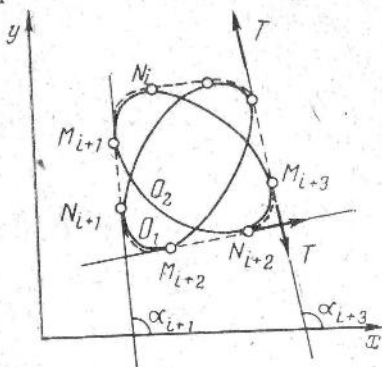


Рис. 2.

Сравнение формул (4), (5), (6) с формулами (10), (11), (12) показывает, что первые три формулы есть не что иное, как условия равновесия овалов, стягиваемых охватывающей их нитью. Три уравнения (4), (5) и (6) вместе с уравнением (2), вообще говоря, достаточны для определения из них тех значений a , b , φ , α_1 , ..., α_n , для которых овалы будут находиться в равновесии, а длина L той части нити, которая охватывает овалы, будет достигать некоторого стационарного значения или минимума. Дополнительным исследованием остается выяснить, какое из минимальных значений будет и наименьшим.

Работа закончена 16 августа 1944 г.

УДК 513.733

В. В. Стрельцов, канд. физ.-мат. наук

ВПОЛНЕ ДОПУСТИМЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ МОНОТОННОЙ КРИВОЙ

В работе вводится понятие линейного растяжения кривой как операции, заключающейся в замене точки кривой прямолинейным отрезком или в обратной замене. С помощью этой операции устанавливается зависимость между числом пересечений кривой с плоскостью и числом пересечений сферической индикатрисы касательных этой кривой плоскостью, параллельной данной. Затем вводится понятие вполне допустимых пар (κ, τ) как значений интегральных кривизны и кручения локально монотонных кривых, которые монотонны в целом, и даются оценки величин κ и τ вполне допустимых пар.

При этом основные понятия и факты, касающиеся монотонных кривых, употребляются здесь в смысле определений и доказательств, данных в [1]. Кроме того, последовательно используются понятия и результаты работ [2—5].

Напомним некоторые определения, введенные в [1].

Под кривой понимается непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в трехмерное евклидово пространство E_3 , рассматриваемое с точностью до монотонных преобразований параметра $t \in [a, b]$ (см. [2]). Тем самым точки кривой упорядочены в соответствии с возрастанием параметра.

Пусть $X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, где $t \in [a, b]$, — какая-либо параметризация кривой K в E_3 . Кривая K называется *монотонной*, если для любых значений t_0, t_1, t_2, t_3 таких, что $a \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \leq b$, определитель

$$\Delta = \Delta(X_0, X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1(t_0) & x_1(t_1) & x_1(t_2) & x_1(t_3) \\ x_2(t_0) & x_2(t_1) & x_2(t_2) & x_2(t_3) \\ x_3(t_0) & x_3(t_1) & x_3(t_2) & x_3(t_3) \end{vmatrix}$$

либо всегда неотрицателен, либо всегда неположителен, причем имеется система значений t_0, t_1, t_2, t_3 , для которой он отличен от нуля.

Кривая K будет локально монотонна в E_3 , если у каждой точки имеется на кривой K окрестность U , которая является монотонной кривой в E_3 .

§ 1. Линейное растяжение кривой

1°. Определение. *Линейным растяжением кривой K в точке M будем называть операцию, состоящую в замене точки M каким-либо прямолинейным отрезком M_1M_2 , направленным по любой из касательных к кривой K в точке M , а также обратную операцию: замену любого прямолинейного отрезка M_1M_2 кривой K одной точкой M при условии, что у вновь полученной кривой среди касательных в точке M имеется параллельная отрезку M_1M_2 ; в противном случае отрезок M_1M_2 заменяем параллельным ему сколь угодно малым отрезком $M_1'M_2'$. При этом предполагается, что все точки кривой K , предшествующие точке M , остались на месте, а все точки, следующие за M , подпадают под параллельному переносу на отрезок M_1M_2 , т. е. предполагается, что у исходной кривой K и полученной из нее кривой K' множество сопровождающих трехвекторников одинаково.*

Приведем несколько примеров.

Пусть точка M — обыкновенная точка кривой K , тогда ей соответствует единственный сопровождающий трехвекторник. После линейного растяжения во всех точках отрезка M_1M_2 сопровождающий трехвекторник будет один и тот же.

Пусть в точке M орты $\hat{t}_1$ и $\hat{t}_2$ совпадают, а орты $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$ составляют угол Θ . Тогда после линейного растяжения в точках отрезка M_1M_2 сопровождающий трехвекторник будет неизменным, а точка M_2 будет особенной и исчерпает все трехгранники, присущие исходной точке M . Если, наконец, линейное растяжение производится в угловой точке M по направлению касательной, лежащей внутри угла $\hat{t}_1\hat{t}_2$, то и в этом случае интегральные кривизны и кручения кривой K в точке M будут равны соответствующим величинам на отрезке M_1M_2 , так как при этом только поворот трехвекторника $(\hat{t}_1, \hat{n}, \hat{b})$ вокруг перпендикуляра к плоскости $(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ на угол $\hat{t}_1\hat{t}_2$ разобьется на два поворота в той же плоскости от $\hat{t}_1$ до $\hat{t}$ и от $\hat{t}$ до $\hat{t}_2$. Остальные повороты останутся без изменений.

Эти примеры точно так же можно истолковать и при обратных преобразованиях, т. е. при замене прямолинейных отрезков M_1M_2 кривой K одной точкой M .

2°. Из определения линейного растяжения видно, что оно не меняет интегральных кривизны и кручения кривой K . Вместе с тем легко видеть, что для некоторых монотонных кривых можно подобрать такие линейные растяжения, что они перестанут быть монотонными, и обратно: некоторые немонотонные кривые можно преобразовать в монотонные. Например, если монотонная кривая содержит плоскую дугу MN , поворот которой больше π , то линейные растяжения кривой в точках M и N приведут к самопересечению этой дуги, и тем самым она перестанет быть выпуклой, что невозможно для монотонной кривой [1, лемма 2].

Теорема 1. *Локально монотонная кривая под воздействием любых линейных растяжений остается локально монотонной.*

Доказательство. Действительно, при линейных растяжениях все соприкасающиеся плоскости остаются неизменными. Также не изменяется расположение точек достаточно малых окрестностей $U(M)$ точки M и $U(M_1M_2)$ отрезка M_1M_2 относительно соприкасающихся плоскостей $P_l(M)$, $P_r(M)$ и $P_m(M)$. Следовательно, не меняется расположение точек из указанных окрестностей относительно сходящихся к ним плоскостей, проходящих через соответствующие тройки точек кривой K и полученной из нее кривой K' . Поэтому из определения локально монотонной кривой и леммы 1 работы [1] следует утверждение теоремы.

Кривую K будем называть *вполне монотонной*, если и любая кривая, полученная из нее линейными растяжениями, монотонна.

§ 2. Число пересечений кривой с плоскостью

1°. Будем называть *кратностью существенных пересечений* сферической кривой K с окружностью C большого круга этой сферы наибольшее из чисел N , для которых на K можно указать такую последовательность точек $X_0 < X_1 < \dots < X_N$, что точки X_{i-1} и X_i при каждом $i=1, 2, \dots, N$ лежат по разные стороны от окружности C . Если таких точек сколько угодно, то $N = \infty$.

2°. **Теорема 2.** *Пусть кривая K в E_3 имеет в каждой точке касательные слева и справа и пусть P — плоскость. Обозначим через N число существенных пересечений индикатрисы касательных K'_l кривой K с окружностью C того большого круга единичной сферы, содержащей K'_l , который параллелен плоскости P . Тогда K пересекается с P не более чем $(N+1)$ -кратно и линейными растяжениями не более чем в $N+1$ точках кривую K можно преобразовать в кривую, пересекающуюся с P $(N+1)$ -кратно, причем все эти пересечения будут существенными.*

Доказательство. Доказательство будем вести методом полной индукции по числу N . Пусть окружность S и индикатриса касательных K'_i имеют 0 существенных пересечений, т. е. вся индикатриса касательных K'_i лежит на одной полусфере, определяемой S (соответствующий конус касательных K'_i будет лежать по одну сторону от плоскости P' , содержащей S).

Возьмем произвольную точку M на кривой K и проведем через нее плоскость P , параллельную плоскости P' . Тогда единичные касательные векторы во всех точках кривой будут направлены в одну сторону от плоскости P — для определенности будем считать, что они направлены в сторону, содержащую конец кривой K . Это значит, что при движении вдоль кривой от точки M к точке B последующие после M точки сначала могут лежать на плоскости P (тогда они вместе с M принадлежат дуге, лежащей на P), а затем удаляются все дальше от плоскости P , и поэтому ветвь MB кривой K с плоскостью P не может иметь больше общих точек. Совершенно аналогично доказывается, что ветвь MA кривой K лежит вся с другой стороны от P .

Итак, при $N=0$ плоскость P пересекает кривую K лишь по одной связной компоненте, содержащей точку M . В силу принципа в выборе точки M на кривой K доказано, что всякая плоскость P , параллельная S , пересекает кривую K не более чем 1-кратно (для компактной кривой можно провести плоскость, не пересекающую этой кривой).

3°. Допустим, что утверждение теоремы справедливо для N , равного любому целому неотрицательному числу, не превосходящему n , и докажем справедливость этого утверждения для $N=n+1$. Итак, пусть кратность существенных пересечений N индикатрисы касательной K'_i некоторой кривой K с окружностью S равна $n+1$. Это значит, что K'_i и S имеют $n+1 \geq 1$ общих компонент, по которым они пересекаются существенно. В любой одной из этих компонент возьмем точку M' . Точка M , которой соответствует M' , разобьет кривую K на две ветви K_1 и K_2 .

Обозначим через N_1 и N_2 кратности существенных пересечений индикатрис касательных K'_{1i} и K'_{2i} ветвей K_1 и K_2 с той же окружностью S . В связной компоненте общей части K'_i и S , содержащей M , было существенное пересечение, а после разбиения K на ветви K_1 и K_2 эта компонента стала примыкать к концам индикатрис касательных K'_{1i} и K'_{2i} и тем самым для них она не может быть компонентой с существенным пересечением. Остальные компоненты, по которым происходят существенные пересечения окружности S с K'_i , K'_{1i} и K'_{2i} , остались без изменения. Поэтому $N_1 + N_2 = N - 1 = (n+1) - 1 = n$. Следовательно, $N_1 \leq n$ и $N_2 \leq n$ и, как было допущено, для таких кривых K_1 и K_2

кратности пересечения с плоскостью P не превосходят соответственно N_1+1 и N_2+1 .

Ветви K_1 и K_2 составляют кривую K , поэтому кратность пересечения K с плоскостью P не будет превосходить $N_1+1+N_2+1=N_1+N_2+2$.

Как уже отмечалось, $N_1+N_2=N-1$. Поэтому из последнего равенства следует, что кратность пересечения K с P будет больше $N+1$.

Этим доказательство первого утверждения теоремы закончено.

4°. Доказательство второго утверждения

Пусть K'_i и C пересекаются существенно по N компонентам, которые обозначим в порядке обхода K'_i через $A'_1B'_1, A'_2B'_2, \dots, A'_NB'_N$, причем некоторые из них вырождаются в точки, поэтому для них A'_i совпадает с B'_i . Перечисленные N компоненты K'_i отделяют $N+1$ дуг $A'A'_1, B'_1A'_2, \dots, B'_{N-1}A'_N, B'_NA'_1$ в каждой из которых есть точки, не принадлежащие C .

Пусть дуги $AA_1, B_1A_2, \dots, B_{j-1}A_j$ кривой K , которым соответствуют первые j из указанных $N+1$ дуг индикатрисы K'_i , пересекают плоскость P , а дуга B_jA_{j+1} , которой соответствует дуга $B'_jA'_{j+1}$, не пересекает плоскости P . Покажем, что одним линейным растяжением можно добиться их пересечения.

Обозначим точку пересечения дуги $B_{j-1}A_j$ с плоскостью P через D_j . Пусть соответствующая ей точка D'_j на K'_i не принадлежит существенной компоненте $A'_jB'_j$. (Из последующего будет ясно, что этого всегда можно добиться предыдущим линейным растяжением). Это значит, что точка D'_j индикатрисы K'_i лежит по одну сторону от C , а все точки дуги $B'_jA'_{j+1}$, не принадлежащие окружности C , лежат по другую сторону от C . Одну из них обозначим через D'_{j+1} . Геометрически это значит, что при движении от D_j к A_j по дуге D_jA_j кривой K ее точки сначала удаляются от плоскости P , а затем на участке от A_j до B_j , соответствующем компоненте $A'_jB'_j$, точки кривой K остаются на равном расстоянии от P . Наконец, при движении от точки B_j до A_{j+1} они приближаются к P и, в частности, в точке D_{j+1} касательный орт направлен к плоскости P . Следовательно, если в направлении этого орта произвести линейное растяжение на достаточно большое расстояние, то вся оставшаяся часть кривой K может быть перенесена за плоскость P (при этом подразумевается, что точки кривой K , предшествующие точке D_{j+1} , остаются на месте). Поэтому вновь полученная дуга B_jA_{j+1} будет уже пересекать плоскость P , и это пересечение существенно.

Кратность пересечения K'_i и C при линейных растяжениях не меняется, так как K'_i остается неизменным.

Аналогично рассуждая поочередно относительно остальных дуг кривой K , убедимся в справедливости второго утверждения теоремы. Теорема 2 доказана.

§ 3. Достаточный признак монотонности кривой

1°. В теореме 4 работы [1] показано, что всякая плоскость пересекается с монотонной кривой не более чем трехкратно. Покажем, что это условие и достаточно.

Теорема 3. Если пространственная кривая K пересекается любой плоскостью не более чем трехкратно, то кривая K монотонна.

Доказательство. Допустим, что кривая K не монотонна, т. е. на ней имеются по крайней мере две четверки упорядоченных точек X_1, X_2, X_3, X_4 и Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , для которых определители $\Delta(X_1, X_2, X_3, X_4)$ и $\Delta(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ имеют противоположные знаки. Покажем, что в этом случае кривая K и некоторая плоскость P имеют не менее чем четырехкратное пересечение. Для определенности будем считать, что $\Delta(X_1, X_2, X_3, X_4) > 0$, а $\Delta(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) < 0$.

2°. Сначала покажем, что из восьми точек $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ можно выбрать пять таких, что для всевозможных упорядоченных четверок точек из этих пяти существуют определители Δ противоположных знаков.

Действительно, рассмотрим определители Δ для всех упорядоченных четверок точек, содержащих точку Y_1 , и три точки из четверки точек X_1, X_2, X_3, X_4 . Эти определители не все равны нулю, так как $\Delta(X_1, X_2, X_3, X_4) > 0$, т. е. $\neq 0$, и поэтому точка Y_1 не может лежать на всех плоскостях $X_i X_j X_k$. Для определенности будем считать $\Delta(X_1, Y_1, X_2, X_4) \neq 0$.

Если $\Delta(X_1, Y_1, X_2, X_4) < 0$, то искомой пятеркой точек будет X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1 ; если же $\Delta(X_1, Y_1, X_2, X_4) > 0$, то по аналогии с предыдущим рассматриваем определители Δ для всех упорядоченных четверок точек, содержащих точки Y_1 и Y_2 и две точки из оставшихся трех X_1, X_2, X_4 . Тогда хоть один из таких определителей не равен 0, так как плоскости $X_1 X_2 Y_1, X_2 X_4 Y_1$ и $X_1 X_4 Y_1$ имеют только одну общую точку Y_1 и $Y_1 \neq Y_2$. Следовательно, Y_2 не может лежать одновременно на всех трех указанных плоскостях. Для определенности будем считать $\Delta(X_1, Y_1, Y_2, X_4) \neq 0$.

Если $\Delta(X_1, Y_1, Y_2, X_4) < 0$, то искомыми пятью точками будут X_1, X_2, X_4, Y_1, Y_2 . Если же $\Delta(X_1, Y_1, Y_2, X_4) > 0$, то рассматриваем определители Δ для упорядоченных четверок точек, содержащих точки Y_1, Y_2, Y_3 и одну из точек X_1 и X_4 . Хоть один из них отличен от нуля, так как плоскости $X_1 Y_1 Y_2$ и $X_4 Y_1 Y_2$ имеют общими только одну прямую Y_1, Y_2 , которой Y_3 не принадлежит, ибо $\Delta(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \neq 0$.

Для определенности будем считать $\Delta(X_1, Y_1, Y_2, Y_3) \neq 0$. Тогда, если $\Delta(X_1, Y_1, Y_2, Y_3) < 0$, то искомые пять точек — это X_1, Y_1, Y_2, Y_3 . Если же $\Delta(X_1, Y_1, Y_2, Y_3) > 0$, то искомые пять точек — X_1, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 .

Последнее утверждение доказано.

3°. Итак, существуют пять различных точек — обозначим их номерами 1, 2, 3, 4, 5 в порядке следования на кривой K — таких, что среди пяти четверок, которые можно из них составить, сохраняя их порядок, есть две четверки с определителями разных знаков. Пусть i и j — номера тех точек ($i < j$), которыми отличаются эти две четверки, остальные три точки у них общие и пусть $s = j - i - 1$ — число общих точек, лежащих между точками i и j .

Три общие точки этих двух четверок определяют плоскость Q . В силу того что определители этих четверок имеют разные знаки, точки i и j лежат по одну сторону от Q , если $s = 1$ или 3, и по разные стороны, если $s = 0$ или 2.

4°. Если некоторая плоскость P пересекает отрезок MN с концами M и N на кривой K , то, очевидно, эта плоскость имеет по крайней мере одну общую компоненту с дугой MN кривой K . Поэтому достаточно доказать, что существует плоскость P , пересекающая все четыре звена ломаной 12345, вписанной в K .

Пусть $s = 3$. Тогда $i = 1, j = 5$. Проведем плоскость H , перпендикулярную к хорде 24, и пусть h' — проекция точки h на плоскость H в направлении этой хорды. Ломаная спроецируется в три отрезка, исходящих из одной точки $2' = 4'$. Так как точки 1 и 5 лежат по одну сторону от плоскости Q (2, 3, 4), то отрезки $1'2'$ и $4'5'$ лежат по одну сторону от прямой — проекции Q на H , на которой лежат слившиеся отрезки $2'3'$ и $3'4'$. Ясно, что существует плоскость P , перпендикулярная к H и пересекающая все четыре звена ломаной 12345.

Аналогично получается тот же результат при $s = 0, 1, 2$. Теорема 3 доказана полностью.

5°. Объединив утверждение доказанной теоремы 3 с основным утверждением теоремы 4 из [1], получим следующую теорему.

Теорема 3'. Для того чтобы непрерывная пространственная кривая была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы она пересекалась с любой плоскостью не более чем 3-кратно.

§ 4. Вполне монотонные кривые. Вполне допустимые пары (κ, τ)

1°. Для вполне монотонных кривых, определенных в конце § 1, из инвариантности индикатрисы касательных относительно линейных растяжений и из теорем 2 и 3' следует:

Теорема 4. Для того чтобы пространственная кривая была вполне монотонной, необходимо и достаточно, чтобы ее индикатриса касательной была выпуклой кривой на сфере.

Точно так же для локально монотонных кривых следует

Теорема 4'. Для того чтобы кривая была локально монотонной, необходимо и достаточно, чтобы ее индикатриса касательных была локально выпуклой кривой на сфере.

2°. Определение. Пара чисел (κ, τ) называется вполне допустимой, если всякая локально монотонная кривая K , такая, что $\kappa(K) = \kappa$ и $\tau(K) = \tau$, монотонна.

Из этого определения очевидна

Лемма 1. Если пара (κ, τ) вполне допустима, то всякая локально монотонная кривая K такая, что $\kappa(K) = \kappa$, $\tau(K) = \tau$, вполне монотонна.

Действительно, если пара (κ, τ) вполне допустима, то всякая локально монотонная кривая K такая, что $\kappa(K) = \kappa$ и $\tau(K) = \tau$, монотонна. Это значит, что кривая K и все кривые, полученные из нее линейным растяжением, будут тоже монотонными, т. е. K вполне монотонна.

3°. Утверждение, обратное высказанному в лемме 1, неверно, а именно: если кривая вполне монотонна, то интегральные кривизна $\kappa(K)$ и кручение $\tau(K)$ могут и не быть вполне допустимыми. Это видно на примере винтовой линии K с большим, но не полным шагом. Ее индикатрисой касательных является неполная окружность достаточно малого радиуса на единичной сфере. Поэтому K можно взять такой, что будут выполняться неравенства $0 < \kappa(K) < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < \tau(K) < 2\pi$ и индикатриса ее

касательных будет выпуклой. Тогда, согласно теореме 4, K вполне монотонна, а в § 5 будет доказано (теорема 6), что пара $(\kappa(K), \tau(K))$ не будет вполне допустимой.

Из теорем 4 и 4' вытекает

Теорема 5. Для того чтобы пара (κ, τ) была вполне допустимой, необходимо и достаточно, чтобы на единичной сфере всякая локально выпуклая кривая, имеющая длину κ и поворот τ , была выпуклой.

4°. В дальнейшем будет определено множество всех вполне допустимых пар. Именно, будет указана область G на плоскости переменных (κ, τ) такая, что если точка (κ, τ) принадлежит G , то всякая локально монотонная кривая K , для которой $\kappa(K) = \kappa$ и $\tau(K) = \tau$, монотонна (тем самым и вполне монотонна).

К рассмотренным задачам и понятиям можно подойти несколько иначе. Именно, пусть даны две величины κ и τ . На единичной сфере рассматриваем все локально выпуклые кривые (за исключением совпадающих дуг), у которых длина равна κ , а поворот — τ . Тогда для этих кривых могут быть следующие

возможности: а) все они не выпуклы; б) одни из них выпуклы, а другие нет; в) все выпуклы.

Если имеет место случай а), то, согласно теоремам 2 и 4, все кривые в пространстве, для которых кривые типа а) являются индикатрисами касательных, будут локально монотонными, иногда будут даже монотонными, но вполне монотонных среди них нет.

В случае б) для невыпуклых все аналогично случаю а), а для выпуклых все кривые, для которых они являются индикатрисами касательных, будут вполне монотонными. Но пары значений в этом случае не будут вполне допустимыми.

Наконец, в случае в), т. е. когда на единичной сфере все локально выпуклые кривые K_i длины κ и поворота τ выпуклы, согласно теореме 5 пара (κ, τ) будет вполне допустимой.

В [1, теоремы 12, 17] даны оценки κ и τ , собственно для случая а), когда соответственные кривые K остаются монотонными.

Совсем очевидны оценки κ и τ для вполне монотонных кривых. Они могут быть получены из рассмотрения случая б). Именно, всякая выпуклая (не вырожденная) кривая на единичной сфере имеет длину κ не больше 2π и поворот τ меньше 2π . Кроме того, при любом $\kappa (0 < \kappa \leq 2\pi)$ величину τ можно взять любой из промежутка $[0, 2\pi)$; обратно, для любого $\tau (0 < \tau < 2\pi)$ можно взять любое κ из промежутка $(0, 2\pi]$.

Наконец, решая задачу об отыскании наибольших значений κ или τ вполне допустимых пар (κ, τ) , т. е. отыскивая граничные точки области G изменения κ и τ вполне допустимых пар (κ, τ) , нам придется рассматривать пары (κ, τ) , отделяющие случай б) от случая в). Именно, необходимо будет среди максимальных пар (κ, τ) , соответствующих случаю б), выделить минимальные, когда уже случай б) переходит в в). Тем самым будут решаться задачи на своеобразный *minimax*.

5°. Пару (κ, τ) будем называть *граничной* для вполне допустимых, если хотя бы одна из величин пары имеет наибольшее допустимое значение при фиксированном значении другой.

Лемма 2. Если пара (κ, τ) гранична для вполне допустимых пар, то на единичной сфере среди локально выпуклых кривых длины κ и поворота τ имеется такая K_i , что один из углов, образованных K_i и кратчайшей AB , соединяющей ее концы A и B , равен π .

Доказательство. На единичной сфере всякую локально выпуклую K_i длины κ и поворота τ будем называть кривой, соответствующей паре (κ, τ) . Пусть A и B — концы какой-либо из таких кривых. Фигуру, образованную кривой K_i и кратчайшей AB , соединяющей концы A и B , на этой сфере будем называть «двуугольником» AB , соответствующим той же паре. Углы в вершинах A и B между кривой K_i и кратчайшей AB будем обозначать соответственно через α и β , при-

чем будем всегда считать обозначение выбранным так, что $\alpha \leq \beta$.

В том случае, когда концы A и B кривой K совпадают, будем считать, что кратчайшая AB имеет длину, равную нулю, угол α равен углу между ветвями кривой K , сходящимися к их общему концу. Наконец, угол β будем считать равным π . Тем самым в этом случае лемму 2 будем считать доказанной.

Пусть у всех «двуугольников» AB , соответствующих какой-либо вполне допустимой паре (κ, τ) (они в силу теоремы 5 выпуклы), углы α и β меньше π . Покажем, что в этом случае можно увеличить κ и τ , притом так, что вновь полученная пара будет вполне допустимой, т. е. исходная пара в этом случае не была граничной.

Возьмем какую-либо кривую K_i из соответствующих паре (κ, τ) и через ее концы A и B проведем дуги больших кругов, касающиеся кривой K_i до пересечения их в точках S_1 и S_2 (точка S_1 лежит со стороны кратчайшей AB , а S_2 — со стороны K_i).

Очевидно, что кривая K_i будет внутри двуугольника S_1S_2 , и если рассматривать кривую, составленную из исходной кривой K_i и дуги S_1A , то она будет выпуклой, угол в вершине B стал равен π . При этом τ не изменилось, а κ возросло на длину дуги AS_1 .

Теперь покажем, как можно увеличить τ не изменяя κ . На кривой K_i берем точку C такую, чтобы длина дуги AC кривой K_i была больше расстояния от C до B и меньше расстояния от C до S_1 . (Здесь расстояние рассматривается в смысле внутренней метрики на сфере). На дуге S_1B берем такую точку A_1 , чтобы кратчайшая A_1C равнялась длине дуги AC кривой K_i и соединяем A_1 с кратчайшей C . Тогда кривая, состоящая из кратчайшей A_1C и дуги CB кривой K_i , будет иметь длину κ , ее поворот τ' будет больше τ и угол β' будет равен π .

Также легко показать, что можно увеличить κ и τ , сделав угол β равным π . Для этого достаточно в описанном построении вместо точки A_1 взять точку A^* , лежащую на дуге S_1A_1 , так, чтобы расстояние от C до A^* было больше расстояния от C до A_1 .

Итак, показано, что если пара (κ, τ) вполне допустима и если одну из величин κ или τ оставлять без изменения, а вторую увеличивать до тех пор, пока соответствующие им локально выпуклые кривые на сфере остаются выпуклыми, то эта вторая величина достигает наибольшего значения тогда, когда хотя один из углов на концах кривой K_i становится равным π . То же самое будет и при увеличении обеих величин κ и τ .

Как уже отмечалось, парам (κ, τ) , у которых хотя бы одна из величин κ и τ имеет наибольшее значение и которым на единичной сфере соответствуют выпуклые кривые K_i , в пространстве соответствуют вполне монотонные кривые. Теперь среди

последних пар нужно выбрать те, которые являются вполне допустимыми. Из предыдущего следует, что это будут те пары (κ, τ) , которым, во-первых, соответствуют выпуклые «двуугольники» AB хотя с одним из углов α и β равным π (тогда кривая K будет вполне монотонной — случай б)), и, во-вторых, из таких пар надо выбрать те, которые содержат наименьшее хотя одно из κ и τ (чтобы отделить кривые типа б) от кривых типа в)), т. е. найти граничные пары (κ, τ) .

Этим доказательством леммы 2 закончено.

§ 5. Оценки значений κ и τ вполне допустимых пар

1°. Величины $\kappa(K)$ и $\tau(K)$ равны соответственно длинам сферических индикатрис касательных K'_i и бинормалей K'_b кривой K , поэтому в дальнейшем, как и прежде, будут оцениваться длины указанных индикатрис.

Согласно предыдущему, для каждой вполне допустимой пары (κ, τ) соответствующим «двуугольником» AB на единичной сфере будет всякая выпуклая кривая K'_i длины κ и поворота τ , концы которой соединены кратчайшей AB . Будем обозначать длину кратчайшей AB через l , а площадь «двуугольника» AB — через S .

Конус $\bar{K}_i$ с вершиной в центре O сферы, опирающейся на «двуугольник» AB , очевидно, будет выпуклым. Построим конус $\bar{K}_b$, ортогонально сопряженный с конусом $\bar{K}_i$ и с общей вершиной в точке O . Конус $\bar{K}_b$ будет выпуклым, и на сфере он опирается на некоторую выпуклую кривую $FLMNF$, ограничивающую площадь S^* (рис. 1). Ввиду взаимной ортогональной сопряженности конусов $\bar{K}_i$ и $\bar{K}_b$ кривые, на которые они опираются («двуугольник» AB и кривую $FLMNF$), будем также называть ортогонально сопряженными.

Из ортогональной сопряженности $\bar{K}_i$ и $\bar{K}_b$ следует, что фигура, ограниченная кривой $FLMNF$, является сферическим изображением вершины конуса $\bar{K}_i$, а «двуугольник» AB вместе с внутренними точками является сферическим изображением вершины конуса $\bar{K}_b$ [2].

Поэтому если деформировать «двуугольник» AB так, чтобы он оставался выпуклым и длина его сторон, равная $\kappa+l$, оставалась постоянной, то площадь S^* также останется постоянной (равной площади сферического изображения вершины конуса $\bar{K}_b$, т. е. равной $2\pi - (\kappa+l)$ [2]).

Аналогично, если длина выпуклой кривой $FLMNF$ остается постоянной, то площадь S соответствующего «двуугольника» AB также остается постоянной.

Из приведенных построений очевидно, что длины кривых $K'_1 = ACB$, AB , $K'_2 = LMNF$, FL равны соответственно κ , l , τ , α . При этом если угол $\beta \neq \pi$, то длина LM будет равна $\pi - \beta$, а LM с LF составляют в точке L угол $\pi - l$.

Этим задача о нахождении граничных вполне допустимых пар (κ, τ) сводится к нахождению таких выпуклых «двуугольников» AB на единичной сфере, удовлетворяющих условиям леммы 2, для которых одна из κ и τ фиксирована, а вторая имеет наименьшую величину.

2°. Теорема 6. Если пара (κ, τ) вполне допустима, то $\kappa \leq \pi$ и $\tau \leq \pi$.

При этом если $\kappa \leq \frac{\pi}{2}$, то для гра-

ничной пары $\tau = \pi$; если же $\tau \leq \frac{\pi}{2}$,

то для граничной пары $\kappa = \pi$.

Доказательство. а) Покажем, что у вполне допустимой пары (κ, τ) не может быть $\kappa > \pi$, т. е. что среди локально монотонных кривых с $\kappa = \pi + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) существуют немонотонные кривые (здесь рассмотрен случай, когда $\varepsilon < 2\pi$. Если же $\varepsilon > 2\pi$, то доказательство аналогично, только число плоских дуг надо соответственно увеличить). Действительно, возьмем кривую ABC , состоящую из двух локально выпуклых плоских дуг AB и BC , плоскости которых пересекаются лишь по общей касательной к этим кривым. При этом дуги AB и BC возьмем такие, что $\kappa(AB) = \pi + \frac{\varepsilon}{2}$ и $\kappa(BC) = \frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что кривая ABC локально монотонна и $\kappa(ABC) = \pi + \varepsilon$.

Локально выпуклая плоская дуга AB с $\kappa(AB) > \pi$, если она выпукла, легко (линейным растяжением в одной точке) переводится в невыпуклую. Поэтому вновь полученная кривая, согласно лемме 2 работы [1], не будет монотонной. Утверждение а) доказано.

б) Покажем, что у вполне допустимой пары (κ, τ) не может быть $\tau > \pi$.

Согласно доказанному в а), будем считать, что $\kappa \leq \pi$. Пусть $\tau = \pi + \varepsilon$. Возьмем на единичной сфере два больших круга, пересекающихся в точке A под достаточно малым углом α . На этих кругах возьмем по точке B и C на расстоянии $\frac{1}{2}\varepsilon$ от A и соединим их кратчайшей BC . Посередине дуги AB возьмем точку D . Затем на большом круге AC за точкой A возьмем точку F та-

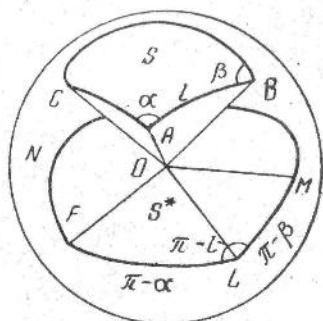


Рис. 11.

кую, что длина ломаной $DBCAF$ будет равна x (это можно сказать, так как при малом α длина BC будет меньше $\frac{1}{4}x$).

Если теперь за индикатрису касательных K'_t принять ломаную $DBCAF$, то она будет локально выпуклой, но не выпуклой, так как большой круг, проходящий через любую внутреннюю точку M дуги DB и любую внутреннюю точку N дуги AF , пересекает еще и дугу BC . Ломаная $DBCAF$ в вершинах B и C образует углы $\leq \frac{\pi}{2}$, ибо $AC = AB = \frac{1}{2}x \leq \frac{\pi}{2}$.

Длина индикатрисы K'_b равна повороту кривой K'_t , который равен ее повороту в точках B и C , т. е. равен $\pi - \angle B + \pi - \angle C \geq \pi$, и поэтому $\tau \geq \pi$. При уменьшении угла α углы B и C стремятся к $\frac{\pi}{2}$. Поэтому при $\tau \rightarrow \pi + 0$ можно построить не монотонную кривую, если же τ существенно отличается от нуля, то его избыток можно исчерпать возле точки F .

Следовательно, вполне допустимое $\tau \leq \pi$. Этим закончено доказательство утверждения б).

в) Если граничная пара (x, τ) вполне допустима и $x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\tau = \pi$.

Выпуклый «двуугольник» AB лежит внутри двуугольника AA' , образованного двумя большими полуокружностями, касющимися кривой K'_t в точках A и B .

По теореме Гаусса—Бонне $2\pi = S + (\pi - \alpha) + \tau$, где S — площадь «двуугольника» AB , $\pi - \alpha$ — поворот его границы в точках A и B — поворот K'_t . Отсюда

$$\tau = \pi + \alpha - S. \quad (*)$$

Длина $K'_t = x \leq \frac{\pi}{2}$, а длина кратчайшей AB , равная l , тем более $\leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому длина границы «двуугольника» $AB < \pi$. Следовательно, он составляет меньше чем половину двуугольника AA' , площадь которого равна 2α , т. е. $S \leq \alpha$. Из (*) видно, что $\tau \geq \pi$. Но в б) выяснено, что $\tau \leq \pi$. Следовательно, $\tau = \pi$.

г) Если пара (x, τ) вполне допустима и $\tau \leq \frac{\pi}{2}$, то $x = \pi$.

Из (*) при $\tau \leq \frac{\pi}{2}$ получаем $S \geq \frac{\pi}{2} + \alpha$. Это возможно лишь при $\alpha > \frac{\pi}{2}$, т. е. когда $S \geq \pi$. Кривая K'_t и кратчайшая ограничивают площадь $S \geq \pi$ лишь тогда, когда K'_t имеет длину $x \geq \pi$; но в а) доказано, что $x \leq \pi$. Поэтому $x = \pi$.

Теорема 6 доказана.

3°. **Теорема 7.** Если у вполне допустимой пары (κ, τ) одно из чисел больше $\frac{\pi}{2}$, то $\left(\kappa - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

Доказательство. Зафиксируем значение κ в пределах

$0 < \kappa \leq \pi$ и найдем такое значение τ , что пара (κ, τ) будет граничной для области G вполне допустимых пар. С этой целью

рассмотрим подробно основные элементы «двуугольника» AB , соответствующего паре (κ, τ) (рис. 2, а), и ортогонально сопряженной с ним фигуры $LMNFL$ (рис. 2, б — здесь эта фигура показана извне сферы, тогда как на рис. 1 она видна изнутри сферы).

Дуга ACB имеет длину, равную κ . Пусть ее часть AC — кратчайшая с длиной κ' , длину оставшейся части обозначим через κ'' , $\kappa' + \kappa'' = \kappa$. Углы «двуугольника» AB в точках A, B и C обозначим соответственно через α, β и γ .

Согласно лемме 2, для граничной вполне допустимой пары (κ, τ) угол β должен быть равен π . Поэтому если взять $\beta' < \pi$, то поворот праницы «двуугольника» AB в вершине B , равный $\pi - \beta'$, надо причислять к τ , как если бы в точке B угол β был равен π , а угол $\beta' \neq \pi$ имела бы в точке B кривая, сколь угодно близкая к кривой $ACBA$.

С «двуугольником» AB на единичной сфере ортогонально сопряжен четырехугольник $FLMN$, у которого «стороны» FL, LM и FN есть дуги больших кругов, соответствующие вершинам A, B и C , и потому они равны соответственно $\pi - \alpha, \pi - \beta'$ и $\pi - \gamma$. (Если $l = 0$ или $\kappa'' = 0$, то вершина B либо C или обе вместе исчезают, и, следовательно, соответствующие дуги LM или FN также исчезают). Дуга NM ортогонально сопряжена с дугой CB «двуугольника» AB , поэтому длина NM равна повороту дуги CB . Углы в вершинах F и L равны соответственно $\pi - l$ и $\pi - \kappa'$, углы в вершинах M и N нас пока не интересуют (в интересующем нас случае углы там будут равны π).

Величина τ равна повороту границы «двуугольника» AB , за исключением поворота в его вершине A , т. е. равна сумме длин сторон LM, MN и FN четырехугольника $LMNF$. Поэтому, согласно лемме 2, при заданном $\kappa = \kappa' + \kappa''$ надо подобрать такую форму кривой ACB и тем самым такие $\kappa'', \alpha, \beta, \gamma$ и l , чтобы

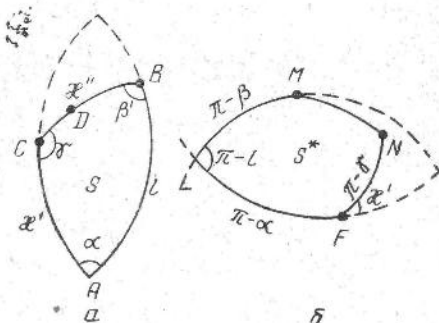


Рис. 2.

длина кривой $LMNF$ была наименьшей, т. е. такой величины τ , что для всякого $\tau_1 > \tau$ пара (κ, τ_1) была бы недопустимой.

Прежде всего отметим, что τ при заданном κ зависит в конечном счете от одного l , которое определено на замкнутом отрезке $[0, \kappa]$, и потому минимум τ существует.

4°. Установим зависимость τ от l и κ' .

1. У «двуугольника» AB , соответствующего граничной вполне допустимой паре (κ, τ) , величина l не меньше $\frac{\pi}{2}$.

Для доказательства этого утверждения сначала покажем, что если вполне допустимая пара (κ, τ) гранична, т. е. при данном κ у соответствующего «двуугольника» AB величина τ минимальна, то величина l не может быть такой, что $\kappa + l < \pi$. Действительно, в этом случае площадь S «двуугольника» AB меньше α (см. п. в) доказательства теоремы 6). Из (*) получим $\pi < \tau$, что противоречит теореме 6. Следовательно, l должно быть таким, что $\kappa + l > \pi$.

Итак, пусть теперь $l < \frac{\pi}{2}$, но $\kappa + l > \pi$. Тогда площадь $S^* = 2\pi - (l + \kappa) < \pi$. Длина кривой LMF , охватывающей вместе с кратчайшей LF данную площадь S^* , будет, как известно, наименьшей, если кривая LMF является полуокружностью, опирающейся на дугу LF большого круга, причем углы между ними в точках L и F будут равны $\frac{\pi}{2}$. Фигура $LMFL$ ортогонально сопряжена с «двуугольником» AB в том случае, когда он имеет, как легко видеть, следующее строение: часть AC , идущая от A до точки C вдоль дуги большого круга, равна $\frac{\pi}{2}$; часть BD идет также по большому кругу, на котором лежит отрезок l , и равна $\frac{\pi}{2} - l$; наконец, дуга CD имеет длину:

$$\kappa - \kappa' - BD = \kappa - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - l \right) = \kappa + l - \pi > 0.$$

У построенного так «двуугольника» AB углы в точках B , C и D равны π , а угол α в вершине A определяется однозначно указанным построением.

Теперь увеличим l до $\frac{\pi}{2}$. Тогда у рассмотренного «двуугольника» AB отрезок BD станет равным нулю, ибо точки B и D сольются, а дуга CD увеличится и станет равной $\kappa - \kappa' = \kappa - \frac{\pi}{2}$. Соответственно возрастет и угол α . Строение сферического изображения S^* вновь полученного «двуугольника» останется «подобным» прежнему, только площадь его уменьшится и станет

равной $2\pi - \left(\kappa + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \kappa$. Следовательно, длина дуги LMF , равная τ , уменьшится. Таким образом, допущение, что $l < \frac{\pi}{2}$ при данном $\kappa > \frac{\pi}{2}$, ведет к тому, что τ может быть уменьшено.

Утверждение I доказано.

5°. II. У «двуугольника» AB , реализующего минимум τ , величина κ' равна $\frac{\pi}{2}$.

Действительно, пусть минимум τ достигается при некотором l , которое на основании утверждения I не меньше $\frac{\pi}{2}$. Это зна-

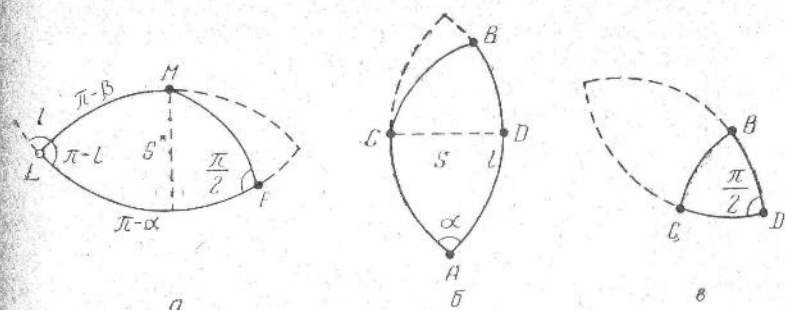


Рис. 3.

чит, что площадь S^* , охватываемая кривой LMF и кратчайшей LF , равна постоянной $2\pi - (\kappa + l) < \pi$, угол в вершине L равен $\pi - l < \frac{\pi}{2}$ (рис. 3).

Для единичной сферы аналогично такой же задаче на плоскости нетрудно убедиться в том, что кривая LMF (равная τ), идущая из вершины угла L (он $< \frac{\pi}{2}$) и отсекающая от этого угла данную площадь $S^* (< \pi)$, имеет наименьшую длину в том случае, когда она от точки L идет по дуге большого круга (составляющей с LF угол $\pi - l$) до некоторой точки M , затем по дуге MF окружности с центром в точке пересечения LF с большим кругом, проходящим через M перпендикулярно к LF . При этом точка M выбирается так, чтобы площадь, ограниченная построенной описанным способом кривой LMF и кратчайшей LF , была равна $S^* = 2\pi - (\kappa + l)$ (когда $l = \frac{\pi}{2}$, точка M совпадает с L).

Таким образом показано, что в точке F дуги MF и LF для минимального τ пересекаются под углом $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, у соответствующего «двуугольника» AB дуга κ' будет равна $\frac{\pi}{2}$. Тем самым доказательство утверждения II закончено.

Из приведенного построения также очевидно, что для максимального τ в точке M дуги LM и MF образуют угол, равный π .

6°. В дальнейшем построенную нами фигуру, реализующую минимальное τ при данном $l \geq \frac{\pi}{2}$, будем называть минимальным «треугольником» LMF с данным l (рис. 3, а).

Отметим основные характеристики «двуугольника» AB , которому соответствует минимальный «треугольник» LMF с данным l . Из свойств ортогональной сопряженности «двуугольника» AB (рис. 3, б) и «треугольника» LMF (рис. 3, а) следует: углы α и β в вершинах A и B равны дополнениям до π соответственно длин дуг LF и LM ; угол в точке C равен π , длина дуги AC (равная κ') равна $\frac{\pi}{2}$; длина дуги BC равна $\kappa - \kappa' = \kappa - \frac{\pi}{2}$; дуга CB ортогонально сопряжена с дугой окружности MF , поэтому дуга CB является также окружностью.

Теперь для нахождения вполне допустимого τ надо найти наименьшее из минимальных τ , соответствующих различным величинам l , т. е. надо указать то значение l и, следовательно, тот «двуугольник» AB описанного только что строения, для которого ортогонально сопряженный «треугольник» LMF имеет наименьшую длину кривой LMF .

На кратчайшей l отложим от точки A отрезок AD , равный $\frac{\pi}{2}$, и соединим точки C и D кратчайшей CD . Часть «двуугольника» AB , ограниченную кратчайшими CD и BD и дугой BC , будем называть «треугольником» (рис. 3, б и в). В его строении для нас существенно следующее:

1) углы «треугольника» CDB в вершинах C и D , по построению, равны $\frac{\pi}{2}$ (угол в вершине B и поворот дуги BC существенно зависят от величины кратчайшей BD , равной $l - \frac{\pi}{2}$, т. е. от l);

2) длина дуги BC постоянна и равна $\kappa - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$.

Кривая LMF «треугольника» LMF ортогонально сопряжена дуге BC в вершине B «двуугольника» AB , и, следовательно, длина кривой LMF (равная τ) равна повороту с внешней стороны дуги BC и повороту в вершине B границы «двуугольника» AB . У «двуугольника» AB и «треугольника» CDB повороты дуги BC и повороты в вершине B одинаковы. Поэтому если мы найдем наименьшую длину кривой LMF в зависимости от указанных поворотов на «треугольнике» CDB , сохраняя его строение, то тем самым будет найдена ее наименьшая длина и для «двуугольника» AB .

Площадь фигуры на единичной сфере равна $2\pi - \varphi$, где φ — поворот границы фигуры со стороны этой фигуры. У «треугольника» CDB «стороны» CD и DB являются кратчайшими, и потому их повороты равны нулю. Поэтому поворот границы «треугольника» CDB состоит из поворота дуги BC и поворотов в вершинах B, C и D .

Углы в вершинах C и D равны $\frac{\pi}{2}$ и остаются при всех деформациях «треугольника» BCD , сохраняющих его строение, неизменными. При этом повороты границы в вершинах C и D остаются неизменными. Следовательно, площадь «треугольника» BCD будет зависеть от поворота границы в вершине B и на дуге BC и будет наибольшей, когда сумма этих поворотов наименьшая; или иначе: поворот границы «треугольника» BCD со стороны этого «треугольника» на дуге BC и в вершине B будет наименьшим в том случае, когда площадь «треугольника» BCD будет наибольшей.

Теперь укажем «треугольник» BCD с наибольшей площадью, который получается отсечением площади от прямого угла D

кривой BC постоянной длины $\kappa - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$.

Если $\kappa = \pi$, то длину l можно принять равной π , тогда «двуугольник» AB будет большим кругом сферы с вершинами A и B в диаметрально противоположных точках этого круга. В этом случае указанные повороты равны нулю, $\tau = 0$, и интересующий нас вопрос исчерпан.

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать $\kappa < \pi$. В этом случае $l < \kappa$, так как только при этом условии существует «двуугольник» AB . При этом длина $BC = \kappa - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, а длина $BD = l - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ и меньше длины BC . Отсюда легко видеть, что длина стороны CD прямоугольного и «треугольника» CDB также меньше $\frac{\pi}{2}$. При этих ограничениях, наложенных на длины сторон «треугольника» CDB , как известно, он имеет наибольшую площадь в том случае, когда дуга BC является дугой окружно-

сти с центром в вершине прямого угла D , стороны DB и DC являются радиусами этой окружности. При этом у полученного «треугольника» CDB углы в вершинах B , C и D равны $\frac{\pi}{2}$ и он имеет требуемое строение. Длина дуги BC постоянна (равна $\kappa - \frac{\pi}{2}$) и является четвертью окружности радиуса $BD (=CD)$. Поэтому однозначно находится длина BD , а следовательно, и длина l , равная $BD + \frac{\pi}{2}$.

Проведем на сфере из вершин C и D полученного максимального «треугольника» CDB дуги больших кругов CA и DA перпендикулярно к стороне CD до пересечения их в точке A . Их длины будут очевидно равны $\frac{\pi}{2}$. Построенная фигура $ADBCA$ — фигура типа «двуугольника» AB , для которой кратчайшая ADB равна l , кривая ACB — линия длины κ . При этом, по построению, поворот границы «двуугольника» AB вдоль линии ACB и в вершине B будет наименьшим.

Правда, наши рассуждения велись относительно поворота границы с внутренней стороны, но на сфере (как и на всех поверхностях постоянной кривизны) повороты линии с обеих сторон равны по модулю, а нас интересует модуль поворота с внешней стороны «двуугольника», так как он равен τ .

Из предыдущего следует, что для полученного двуугольника с данным κ ($\frac{\pi}{2} < \kappa < \pi$) соответствующее τ будет наименьшим из тех его значений, которые являются недопустимыми.

7°. Теперь осталось вычислить для данного κ соответствующее ему граничное вполне допустимое τ . Величина τ равна длине линии LMF , которая состоит из кратчайшей LM и дуги MF . Длина кратчайшей LM равна $\frac{\pi}{2}$, так как равна повороту границы «двуугольника» AB в его вершине B , который равен $\frac{\pi}{2}$.

Дуга MF ортогонально сопряжена с дугой BC «двуугольника» AB . Последняя является четвертью окружности, следовательно, и дуга MF является четвертью окружности, ортогонально сопряженной с первой и расположенной на той же единичной сфере. Радиусы r_1 и r_2 этих окружностей связаны соотношением $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Длина BC равна $\kappa - \frac{\pi}{2}$ и составляет $\frac{1}{4}$ длины окружности радиуса r_1 . Поэтому $2\pi r_1 = 4\left(\kappa - \frac{\pi}{2}\right)$, отсюда $r_1 = \frac{2\kappa - \pi}{\pi}$.

В свою очередь,

$$r_2 = \sqrt{1 - r_1^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\kappa(\pi - \kappa)},$$

Длина MF равна четверти окружности радиуса r_2 , поэтому она равна $\frac{1}{2}\pi r_2 = \sqrt{x(\pi-x)}$. Итак, $\tau = \frac{\pi}{2} + \sqrt{x(\pi-x)}$. Отсюда $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

Этим доказательство теоремы 7 закончено.

8°. В декартовых прямоугольных координатах x, y на плоскости последнее равенство определяет окружность радиуса $\frac{\pi}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Из теорем 6 и 7 следует

Теорема 8. *Всякая локально монотонная кривая монотонна, если значения ее интегральных кривизны κ и кручения $\tau > 0$ не выходят из области G , ограниченной прямыми $x=0, y=0, x=\pi, y=\pi$ и четвертью окружности $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$. При $\tau < 0$ вместо G надо взять область G' , симметричную G относительно оси x .*

Автор благодарит Ю. Г. Решетняка за постановку основных задач, рассмотренных в этой работе, и за указание на ряд недочетов при первом их решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрельцов В. В. О монотонных кривых в трехмерном пространстве. — «Укр. геометр. сб.», вып. 15. Харьков, 1973, с. 112—140.
2. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М., ОГИЗ, 1948. 387 с.
3. Александров А. Д. Теория кривых на основе приближения ломаными. — «Успехи мат. наук», 1947, т. II, вып. 3 (19), с. 182—184.
4. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. — «Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР», 1962, т. 63, с. 1—262.
5. Стрельцов В. В. Некоторые оценки для монотонных кривых в трехмерном пространстве. — «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 1, с. 44—47.

Поступила 26 мая 1972 г.

УДК 513

М. А. Улановский, канд. физ.-мат. наук

**ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ
В ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
ФИЗИЧЕСКОГО ТИПА**

В работе изучаются псевдоримановы V_n с сигнатурой $(+ - \dots -)$ фундаментальной формы ds^2 . При $n=4$ именно такие V_n описывают пространство-время в общей теории отно-

сительности. Поэтому мы называем их «пространствами физического типа».

Пусть O — произвольная точка псевдориманова V_n ; T_0 — касательное векторное пространство многообразия V_n в точке O . На T_0 можно определить две структуры. Одна из них — естественно определенная структура плоского (псевдоевклидова) пространства: фундаментальная форма ds^2 , заданная на V_n , автоматически определяет скалярное произведение в векторном T_0 . Другая может быть определена с помощью экспоненциального отображения: как известно, метрика ds^2 ведет себя «ковариантно» при дифференцируемых отображениях, и в силу $\exp_0: T_0 \rightarrow V_n$ фундаментальной форме ds^2 , заданной на V_n , соответствует некоторая форма $\hat{ds}^2$ (вообще говоря, вырожденная)

в касательном T_0 . Векторное T_0 с метрикой $\hat{ds}^2$ можно рассматривать как «упрощенную модель» псевдориманова V_n (вообще говоря, лишь некоторая окрестность нуля изоморфна в $\exp_0$ соответствующей окрестности точки $O \in V_n$). Предлагаемая работа в основном посвящена именно изучению указанной модели; как правило, если не оговорено противное, «местом действия» будет касательное T_0 . Заметим, что заданное V_n не предполагается геодезически полным; поэтому $\exp_0$ определено, вообще говоря, в некоторой «звездной» относительно нуля области касательного T_0 . Ниже эта область будет обозначаться буквой M .

Обозначения: $K, \bar{K}$ — замыкание и граница множества K ; если φ — отображение дифференцируемого X_n , то $d\varphi$ — соответствующее отображение касательного пространства T_x .

§1. Рассмотрим предварительно следующую ситуацию. Пусть X_m — дифференцируемое многообразие, φ — дифференцируемое отображение X_m в главное расслоенное пространство над псевдоримановым V_n — пучок базисов. $(e_1, \dots, e_n)$ в векторных T_p , $p \in V_n$. Другими словами, каждой точке x из X_m поставлен в соответствие базис $\varphi(x') = (e_1, \dots, e_n)$ из некоторого T_p (при этом не исключается, например, тот случай, когда всем x из X_m соответствуют базисы одного T_p). Отображение φ , в свою очередь, определяет отображение $\varphi^*: X_m \rightarrow V_n$: $\varphi^* = \pi \circ \varphi$, где π — каноническая проекция главного расслоенного пространства над V_n (если точке $x \in V_n$ соответствует базис $\varphi(x)$ и T_p , то $\varphi^*(x) = p$).

Пусть x — фиксированная точка из X_m , T'_x — касательное к X_m пространство в точке x . Отображение $d\varphi^*: T'_x \rightarrow T_{\varphi^*(x)}$ ставит в соответствие каждому вектору $dx \in T'_x$ вектор $d\varphi^*(dx) \in T_{\varphi^*(x)}$, компоненты которого в базисе $\varphi(x) = (e_1, \dots, e_n)$ суть $\omega^1, \dots, \omega^n$. Легко видеть, что $\omega^1, \dots, \omega^n$ — линейные формы от dx :

$$\omega^i = \Gamma^i_j dx^j \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m).$$

Разумеется, эти формы не обязаны быть линейно независимыми; например, если $\varphi^* = \text{const}$, то $\omega^i = 0$. Далее, каждому dx из T'_x соответствует $d\varphi(dx)$ — вектор касательного пространства главного пучка над V_n . В силу канонической аффинной вязкости на V_n этот вектор определяет абсолютный дифференциал базиса $\varphi(x) = (De_1, \dots, De_n)$, где $De_i = \omega_j^i e_j$ ($i, j = 1, \dots, n$). Очевидно, ω_j^i — также линейные формы:

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m.$$

Мы получили набор линейных дифференциальных форм ω_j^i , определенных на X_m . Из структурных уравнений Картана (написанных для V_n) нетрудно получить

$$d\omega^i(\delta) - \delta\omega^i(d) - \omega^l(d)\omega_j^i(\delta) + \omega^j(\delta)\omega_l^i(d) = 0, \quad (1)$$

$$d\omega_j^i(\delta) - \delta\omega_j^i(d) - \omega_k^j(d)\omega_l^i(\delta) + \omega_l^j(\delta)\omega_k^i(d) = \Omega_j^i,$$

где d, δ — произвольные коммутирующие ($d\delta = \delta d$) дифференциальные операторы (векторные поля);

$$\Omega_j^i = S_{j,kl}^i (dx^k \delta x^l - \delta x^k dx^l), \quad i, j = 1, \dots, n; \quad k, l = 1, \dots, m.$$

При этом, как легко видеть,

$$S_{j,kl}^i = R_{j,\alpha\beta}^i \Gamma_k^\alpha \Gamma_l^\beta, \quad (2)$$

где $R_{j\alpha\beta}^i$ — компоненты тензора кривизны (в базисе $\varphi(x)$) в связности Леви-Чивита на V_n .

Указанное отображение φ (по существу, подобные рассуждения встречаются неоднократно уже в классических работах Э. Картана) рассмотрено потому, что именно такая ситуация возникает при изучении экспоненциального отображения $\text{exp}_0: M \rightarrow V_n$. При этом следует помнить, что exp_0 не обязано быть всюду регулярным; но приведенные выше соображения показывают, что это обстоятельство не является помехой для определения на M форм $\omega^i \Gamma_k^i dx^k, \omega_j^i \Gamma_{jk}^i dx^k$ (теперь уже $i, j, k = 1, \dots, n$), если определить достаточно естественным способом отображение φ области M в множество базисов касательных $T_p, p \in V_n$. Именно: для любого вектора x из M определим базис $\varphi(x)$ как результат параллельного переноса фиксированного в M базиса $(e_1^{(0)}, \dots, e_n^{(0)})$ вдоль геодезической $\text{exp}_0(t_x), 0 \leq t \leq 1$. Вообще говоря, в самой точке $\text{exp}_0 x = p \in V$ (точнее, в T_p) базис $\varphi(x)$ определен неоднозначно: возможно, существуют x и y в $M, x \neq y$ такие, что $\text{exp}_0 x = \text{exp}_0 y = p$, и параллельный перенос вдоль геодезических $\text{exp}_0(tx), \text{exp}_0(ty)$, соединяющих O и P , переводит базис $\{e_i^{(0)}\}$ в различные базисы. Важно лишь то, что для каж-

ного x из M базис $\varphi(x)$ определен однозначно (дифференцируемость отображения φ очевидна).

Подобные построения в принципе не новы; известно [1, 3], что формы ω^i , ω_j^i удовлетворяют соотношениям:

если $x = x^i e_i^{(0)}$, $d = \frac{\partial}{\partial x^i} x^i (dx^i = x^i)$, то

$$\omega^i(d) = x^i, \quad (3)$$

$$\omega_j^i(d) = 0$$

или

$$\Gamma_j^i(x^1, \dots, x^n) x^j = x^i,$$

$$\Gamma_{jk}^i(x^1, \dots, x^n) x^k = 0 \quad (3')$$

(второе из соотношений (3) свидетельствует о том, что базис $\varphi(x)$ вдоль геодезической $\exp_0(tx_0)$ переносится параллельно; первое — что касательный вектор этой геодезической, соответствующий каноническому параметру, также переносится параллельно). Здесь подчеркнем лишь, что формы ω^i , ω_j^i определены на всей области $M \subset T_0$, в том числе и там, где $\exp_0$ не регулярно (якобиан отображения равен нулю); соотношения (3) также справедливы всюду на M . Более того, легко видеть, что особые точки $\exp_0$ — те и только те точки, в которых формы ω^i линейно зависимы.

Условимся теперь, что «начальный» базис $(e_1^{(0)}, \dots, e_n^{(0)})$ в M — ортонормированный $((e_i, e_j) = 0, i \neq j; (e_i, e_i) = \varepsilon_i, \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n-1} = -1, \varepsilon_n = 1)$. Определим на M квадратичную форму $\hat{ds}^2$, соответствующую фундаментальной форме ds^2 пространства V_n в $\exp_0$. Мы рассматриваем M как дифференцируемое многообразие с системой координат $(x^1, \dots, x^n)$, где x_i — компоненты вектора x в определенном выше «начальном» базисе $(e_1^{(0)}, \dots, e_n^{(0)})$. В касательном пространстве любой точки $x \in M$ скалярное произведение векторов ξ, η определим формулой

$$(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} (d \exp_0 \xi, d \exp_0 \eta)$$

(скалярное произведение векторов ξ и η из M в метрике $\hat{ds}^2$ равно, по определению, скалярному произведению их экспоненциальных образов в метрике ds^2). Легко видеть, что

$$\hat{ds}^2 = (dx, dx) = - \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i{}^2 + \omega^n{}^2. \quad (4)$$

Очевидно также, что форма ds^2 выражена в особых точках ex_0 и только в них. Естественную метрику T_0 как плоского пространства

$$ds_0^2 = - \sum_{i=1}^{n-1} dx^{i^2} + dx^{n^2} \quad (4')$$

далее будем обозначать через ds_0^2 . Из соотношений (1) — (3) легко получить тождество

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \omega^i(\delta) x^i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x^i \delta x^i, \quad (5)$$

где δ — произвольный оператор дифференцирования.

Равенства (5) можно интерпретировать следующим образом: если один из двух векторов (в M) — радиальный ($dx^i = x^i$, или $dx^i = \lambda x^i$), то скалярные произведения этих векторов в метриках ds^2 и ds_0^2 одинаковы. Это утверждение (в литературе, посвященной собственно римановым пространствам) известно под названием «леммы Гаусса».

Рассмотрим операторы дифференцирования (векторные поля) d и δ :

$$d = \frac{\partial}{\partial x^i} x^i; \quad \delta = \frac{\partial}{\partial x^i} a_j^i x^i,$$

где $\{a_j^i\}$ — произвольная постоянная матрица (d — «радиальный» вектор, касательный к лучу $x^i = tx_0^i$, $dx^i = x^i$, $\delta x^i = a_j^i x^j$).

Из соотношений (1) и (3) легко получить

$$d^2 \omega^i(\delta) = -S_{j,kl}^i x^k \delta x^l + dx^i(\delta).$$

Положим $x^i = at$. Заметив, что

$$d = t \frac{d}{dt}, \quad d^2 = t^2 \frac{d^2}{dt^2} + d,$$

получим

$$t^2 \frac{d^2 \omega^i(\delta)}{dt^2} = S_{j,kl}^i x^k \delta x^l$$

или с учетом формул (2), (3)

$$\frac{d^2 \omega^i(\delta)}{dt^2} = -R_{j,kl}^i a^j a^k \omega^l(\delta), \quad (6)$$

где $R_{j,kl}^i$ — компоненты тензора кривизны V_n в точке $ex_0 x_0$ и в базисе, соответствующем точке $x_0 \in M$, $x_0 = at_0$. Очевидно, (6) — уравнения Якоби [2]. Если $x_0 = at_0$ — произвольная точка из M , то для того чтобы существовал нетривиальный оператор δ , удовлетворяющий условиям $\omega^1(\delta) = \omega^n(\delta) = 0$ (в точке x_0), необходимо и достаточно, чтобы формы ω^i были линейно зависимы ($\det\{\Gamma_j^i\} = 0$). Таким образом, получено следующее

утверждение (см., например, [2]): точка $x_0 \in M$ тогда и только тогда является особой точкой экспоненциального отображения, когда она сопряжена с точкой $O(0, \dots, 0)$ вдоль отрезка $x = t x_0$, т. е. уравнения (6) имеют нетривиальное решение, обращающееся в нуль при $t=0$ и $t=1$ (очевидно, $\omega^i(\delta) = \Gamma^i_{jk} x^j = 0$ при $t=0$). Более того, очевидно, что порядок сопряженной точки (размерность пространства таких решений) равен дефекту матрицы $\{\Gamma^i_{jk}\}$, соответственно — дефекту формы ds^2 .

§ 2. Изучим более подробно свойства метрик ds^2 и ds^2_0 в области $M \subset T_0$. В этом параграфе, как и в предыдущем, $x^1, \dots, x^n$ — координаты точки $x \in M$, совпадающие с проекциями ее «радиус-вектора» x в ортонормированном базисе $e^{(0)}_1, \dots, e^{(0)}_n$. Условимся, что открытый конус K_0 , определяющий в T_0 направления «в будущее», соответствует неравенствам

$$-\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 > 0, \quad x_n > 0$$

(об определении «отношений порядка» $<, -<$, в частности конуса K_0 «направлений в будущее», см. [3]). Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. В каждой точке $x_0 \neq O(0, \dots, 0)$ границы K_0 конуса K_0 форма ds^2 имеет тип $(+; \underbrace{- \dots -}_p; \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1-p})$, где $1 \leq p \leq n-1$. Ядро отображения $\exp_0$ в точке x_0 (совпадающее с нулевым пространством формы ds^2) принадлежит гиперплоскости, касательной к границе K_0 конуса K_0 (ядро отображения $d \exp_0$ — совокупность векторов ξ , для которых $d \exp_0 \xi = 0$).

Доказательство. Легко видеть, что метрика ds^2 в различных точках M может иметь сигнатуру $(+; \underbrace{- \dots -}_k; \underbrace{0, \dots, 0}_k)$ либо $(- \dots -; \underbrace{0, \dots, 0}_k)$, где $k \geq 0$. Если α — касательная гиперплоскость к K_0 в точке x_0 , $dx = x_0$ — «радиальный» вектор и ξ — произвольный вектор в точке x_0 , не принадлежащий α , то в метрике $dx^2_{(0)}$ $(\xi, dx)_{(0)} \neq 0$. В силу леммы Гаусса, это же утверждение справедливо относительно ds^2 : $(\xi^\wedge, dx) \neq 0$. Отсюда немедленно следует, что ds^2 может иметь сигнатуру лишь вида $(+; \underbrace{- \dots -}_k; \underbrace{0, \dots, 0}_k)$, где $0 \leq k \leq n-2$. Таким образом, максимально возможная степень вырождения $d \exp_0$ на $\hat{K}_0$ (или максимально возможный порядок сопряженной с $O(0, \dots, 0)$ точки вдоль изотропного луча) равна $n-2$. Далее, пусть $d \exp_0 \eta = 0$, следовательно, $(\eta^\wedge, dx) = 0$; поскольку α есть множество всех векторов, ортогональных «радиальному» вектору $dx = x_0$ в метрике ds^2_0 , это же справедливо и для ds^2 , а потому $\eta \in \alpha$.

Замечание. Легко видеть, что векторы гиперплоскости α относительно $\hat{ds}^2$ либо изотропны $((\xi, \hat{\xi})=0)$, либо пространственноподобны $((\xi, \hat{\xi})<0)$; в частности, если x_0 — неособенная точка exr_0 , то α — изотропная гиперплоскость.

Предположим теперь, что в V_n определены отношения $\prec, \leq$; в каждом $T_p, p \in V_n$ отмечен полуконус K_p конуса $\hat{ds}^2 > 0$, определяющий «направления в будущее» и т. д. Наша ближайшая задача — определить отношения $\prec, \leq$ в M и указать соответствующее этим отношениям «будущее» точки $O(0, \dots, 0)$. Ограничимся определением отношений $\prec, \leq$ лишь в некоторой односвязной области $M^*, \bar{K} \subset M^* \subset M$, в каждой точке которой неравенство $\hat{ds}^2 > 0$ определяет ненулевой конус направлений (не исключено, что в каких-либо точках M $\hat{ds}^2 \leq 0$). Покажем, что такая область существует. Действительно, в каждой точке $x_0 \in K_0$ $\hat{ds}^2 > 0$ в «радиальном» направлении; в каждой точке границы K_0 конус $\hat{ds}^2 > 0$ нетривиален согласно доказанной лемме. После этих замечаний доказательство существования M^* легко получить с помощью «соображений непрерывности».

Определим теперь в каждой точке области M^* полуконус «направлений в будущее». Сделать это можно различными способами, приводящими к одному и тому же результату. Так, достаточно условиться, что вектор ξ $((\xi, \hat{\xi}) > 0)$ направлен в «будущее», если направлен в «будущее» $d \text{exr}_0 \xi$ (предполагается, что в V_n отмечены «полуконусы будущего»), или, отправляясь от конуса K_0 , рассматриваемого как полуконус конуса $\hat{ds}^2 > 0$ в точке $O(0, \dots, 0)$, продолжить определение по непрерывности. Отметим также, что в особой точке exr_0 граница полуконуса направлений в «будущее» содержит плоское подпространство — ядро отображения $d \text{exr}_0$; отделить направления в «будущее» и «прошлое» в этом подпространстве невозможно. Тем не менее примем следующее определение: кусочно-гладкая дуга $\varphi[0, 1] \rightarrow M^*$ упорядочена и направлена в «будущее», если в каждой ее точке касательный (полукасательный) вектор d/dt принадлежит замыканию полуконуса направлений в «будущее». Оправданием этого определения может служить следующее соображение: если кусочно-гладкая дуга $\varphi(t) \subset V_n$ имеет «подъем» $\psi(t) \subset M^*$ ($\text{exr}_0 \psi(t) = \varphi(t)$), то $\varphi(t)$ упорядочена тогда и только тогда, когда упорядочена в указанном выше смысле $\psi(t)$. Наконец, $a \prec b(a, b \in M^*)$, если a и b можно соединить упорядоченной дугой (направленной в будущее от a к b) и т. д.

Обозначим через $\hat{F}_0$ «будущее» точки $O(0, \dots, 0)$ в смысле принятого определения ($\hat{F}_0 \in x, O(0, \dots, 0) \prec x$). Имеет место

Теорема 1. Будущее точки $O(0, \dots, 0) — \hat{F}_0$ — совпадает с конусом $\bar{K}_0$:

$$x^n \geq 0, \quad - \sum_{l=1}^{n-1} x^l{}^2 + x^n{}^2 \geq 0.$$

Конус $\bar{K}_0$ не содержит точки $x \neq O(0, \dots, 0)$, предшествующей $O(0, \dots, 0)$ в смысле определенного выше отношения $<-$.

Заметим, что конус K_0 может содержать точки a и b , $a \neq b$, $a <- b$, $b <- a$; в этом случае еще нельзя утверждать, что V_n содержит «машину времени».

Доказательство. Сначала докажем утверждение: если x_0 — внутренняя точка конуса K_0 ($x_0 \in K_0$), то любая упорядоченная дуга с началом в x_0 (направленная в будущее от x_0) целиком лежит внутри K_0 . Это утверждение также представляет собой следствие леммы Гаусса. Действительно, пусть

$$f \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2;$$

одна из компонент квадрики $f=c>0$ лежит внутри K_0 . Очевидно, для любого векторного поля δ (оператора δ)

$$\frac{1}{2} \delta f = (dx, \delta x)_0 = (dx \wedge \delta x),$$

где $dx = x$ — радиальный вектор; $(\cdot)_0$ и $(\wedge)$ — скалярные произведения относительно ds_0^2 и $\hat{ds}^2$. Поскольку dx направлен в будущее (относительно ds_0^2 и ds^2), когда $x_0 \in \bar{K}_0$, то, как легко видеть, $(dx \wedge \delta x) \geq 0$, если и δx направлен в будущее (относительно $\hat{ds}^2$), и $\delta f \geq 0$. Из этого неравенства очевидным образом следует справедливость утверждения: если $x \in \bar{K}_0$, $\varphi: [0, 1] \rightarrow M$ — упорядоченная дуга, $\varphi(0) = x_0$ и $\varphi(t)$ не лежит целиком в $\bar{K}_0$, то для некоторого α , $0 < \alpha \leq 1$, $\varphi(t) \in K_0$ ($t < \alpha$) и $\varphi(\alpha) \in \dot{K}_0$; это невозможно, так как $f(x_0) > 0$, $f(\varphi(\alpha)) = 0$ и f не убывает вдоль $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq \alpha$.

Для завершения доказательства первого утверждения теоремы, очевидно, достаточно показать невозможность следующей ситуации: $\varphi: [0, 1] \rightarrow M^*$ — упорядоченная гладкая дуга, $\varphi(0) \in K_0$ и $\varphi(t)$ лежит вне $\bar{K}_0$ при $t > 0$; при этом, очевидно, можно ограничиться рассмотрением сколь угодно малой части $\varphi(t)$.

Предположим, что в некоторой окрестности дуги $\varphi(t)$ построено дифференцируемое векторное поле $\delta x = \xi(x)$, ограничение которого на $\varphi(t)$ совпадает с полем касательных векторов d/dt , направленных в будущее. Если $\{x_m\}$ $m=1, \dots, \infty$ — последовательность точек, сходящихся к $\varphi(0)$, то последовательность линий тока поля $\xi(x)$ с началами в точках x_m сходится к $\varphi(t)$. Это заведомо невозможно, если точки x_m выбраны внутри K_0 . Полученное противоречие и завершило бы доказательство, но, видимо, следует показать возможность построения поля $\xi(x)$. Приведем один из вариантов такого построения.

Не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что в некоторой окрестности U дуги $\varphi(t)$ ($U \subset M^*$) введены координаты $u^1, \dots, u^{n-1}, t$, в которых $\varphi(t)$ — координатная линия $u^i = 0$. Касательный к $\varphi(t)$ вектор τ (направленный в будущее) будет иметь в естественных базисах постоянные вдоль $\varphi(t)$ компоненты $(0, \dots, 0, 1)$. Пусть η — направленный в будущее вектор в точке $\varphi(0)$, для которого $(\eta \wedge \eta) > 0$, причем $\eta \neq \tau$ (такой вектор заведомо существует). Также не ограничивая общности, можно предположить, что векторные поля η и τ^* $(0, \dots, 0, 1)$, определенные в U и имеющие в естественных базисах постоянные компоненты, нигде в U не совпадают, причем всюду $(\eta \wedge \eta) > 0$. Очевидно, поля η и τ^* определяют в U дифференцируемое 2-распределение; в каждой 2-плоскости распределения корректно определен полуконус будущего конуса $ds^2 > 0$ — «угол» α , $0 < \alpha \leq \pi$ со сторонами — лучами λ и μ . Определим теперь поле $\delta x = \xi(x)$ следующим образом: для каждого $t_0 = \text{const}$ ξ направлен в будущее и составляет постоянный угол (например, в метрике $d\sigma^2 = \sum du^{i^2} + dt^2$) с лучом λ , будучи расположенным в 2-плоскости распределения, построенного выше. Легко видеть, что построенное таким образом поле ξ дифференцируемо и на дуге $\varphi(t)$ ($u^i = 0$) совпадает с полем касательных векторов.

Для доказательства второго утверждения теоремы ($\bar{K}_0$ не содержит точки, предшествующей точке $O(0, \dots, 0)$) достаточно отметить, что в точке $O(0, \dots, 0)$ для всех направленных в будущее векторов $\delta x = \{\delta x^i\}$ $\delta x^n > 0$. Это же справедливо для всех точек $(x^1, \dots, x^n)$ конуса $\bar{K}_0$, если $0 \leq x^n \leq \varepsilon$ и ε достаточно мало; следовательно, в части $\bar{K}_0$, отрезанной «плоскостью» $x^n = \varepsilon$, x^n монотонно растет на всякой упорядоченной дуге.

Рассмотрим теперь некоторую часть K_0^* границы K_0 конуса K_0 , звездную относительно $O(0, \dots, 0)$ и не содержащую особых точек ex_0 . Легко видеть, что в каждой точке K_0^* радиальный вектор $dx = x$ определяет единственное направление в будущее, касательное к K_0^* ; очевидно, прямолинейные отрезки $x = tx_0$, $0 \leq t \leq 1$ исчерпывают все упорядоченные дуги, расположенные на K_0^* . Другими словами, имеет место

Теорема 2. Если K_0^* — звездная относительно $O(0, \dots, 0)$ часть границы K_0 , в каждой точке которой экспоненциальное отображение регулярно, то отрезок $x = tx_0$, $0 \leq t \leq 1$ — единственная упорядоченная дуга, соединяющая $O(0, \dots, 0)$ с данной точкой $x_0 \in K_0^*$.

Если L — некоторая звездная окрестность точки $O(0, \dots, 0)$ и $\text{ex}_0 L \rightarrow V_n$ — диффеоморфизм, то L (с метрикой ds^2) и $\text{ex}_0 L$ изоморфны; доказанные выше утверждения переносятся, очевидно, на $\text{ex}_0 L$ [3].

Рассмотрим теперь некоторые метрические соотношения

в $M \subset T_0$. Пусть $\rho = \sqrt{-\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2}$; ρ — длина прямолинейного отрезка Ox в метриках ds_0^2 и $\hat{ds}^2$. Пусть далее $u^1, \dots, u^{n-1}$ — любые параметры, определяющие направление луча в конусе K_0 (допустимые координаты в $K_0 \cap S$, где S — сфера $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$). Очевидно, $u^1, \dots, u^{n-1}, \rho$ образуют допустимую систему координат в открытом конусе K_0 , причем

$$d\hat{s}^2 = \lambda d\rho^2 - d\sigma^2,$$

где $d\sigma^2$ — неотрицательная (возможно, вырожденная) форма от $du^1, \dots, du^{n-1}$ (коэффициенты $d\sigma^2$ могут зависеть от $u^1, \dots, u^{n-1}, \rho$). Действительно, в метрике $\hat{ds}^2$ радиальный вектор $du^i = 0$ ортогонален поверхности $\rho = \text{const}$. Но поскольку вдоль луча $u^i = \text{const}$ $\hat{ds} = d\rho$, то $\lambda^2 = 1$ и $\hat{ds}^2 = d\rho^2 - d\sigma^2$.

Пусть $\varphi: [0, 1] \rightarrow K_0$, $\varphi(0) = O(0, \dots, 0)$, $\varphi(1) = x_0$ — упорядоченная дуга, причем $\varphi(t) \in K_0$ при $t > 0$; обозначим через s длину $\varphi(t)$ в метрике $\hat{ds}^2$. Имеем

$$\hat{s} = \int_0^1 \sqrt{d\rho^2 - d\sigma^2} = \int_0^1 d\rho = \rho(x_0), \quad d\rho \geq 0.$$

Пусть далее $x_0 \in \bar{K}_0$; упорядоченная дуга $\varphi(t)$, соединяющая $O(0, \dots, 0)$ и x_0 , лежит целиком на $\bar{K}_0$; касательный (полукасательный) вектор к ней во всех ее точках изотропный ($(d/dt \wedge d/dt) = 0$), следовательно, и $\hat{s} = 0 = \rho(x_0)$. Наконец, если $x_0 \in K_0$ и часть $\varphi(t)$ лежит на границе $\bar{K}_0$ (возможен лишь случай $\varphi(t) \in \bar{K}_0$ при $0 \leq t \leq \alpha$, $\varphi(t) \in K_0$ при $\alpha < t \leq 1$), то длина участка $\varphi: [0, \alpha] \rightarrow \bar{K}_0$ равна нулю, а для $\alpha < t \leq 1$ снова имеем

$$\hat{s} \leq \int_{\alpha}^1 d\rho = \rho(x_0).$$

Итак, имеет место

Теорема 3. Для каждой точки $x \in \bar{K}_0$ верхняя грань длин упорядоченных дуг (в метрике $\hat{ds}^2$), соединяющих $O(0, \dots, 0)$ с x_0 , достигается отрезком $x = tx_0$, $0 \leq t \leq 1$.

§ 3. Перенесем на некоторое время «место действия» в V_n . Свойства отношений $<, -<$ в V_n , вообще говоря, намного

сложнее, чем в касательном T_0 . В частности, $\exp_0 \bar{K}$ не совпадает, вообще говоря, с будущим F_0 точки O ; $\exp_0 \bar{K}_0$ не всегда является границей этого будущего; $\exp_0(tx_0)$, $0 \leq t \leq 1$ не всегда осуществляет верхнюю грань длин упорядоченных дуг, соединяющих O и $\exp_0 x_0$ и т. п.

Как и в собственно римановом случае, важную роль при изучении подобных вопросов играют точки, сопряженные вдоль геодезических. При этом представляется, что особенно важное значение должны иметь сопряженные точки изотропных геодезических. Это подсказывает следующий факт. Отношения $<$, $\leq$ в V_n определены не метрикой ds^2 , а копусами $ds^2 \geq 0$ и поэтому конформно инвариантны. Геодезические же метрики V_n , вообще говоря, конформно не инвариантны; исключением в этом смысле служат лишь изотропные геодезические. Более того, если точки a и b сопряжены вдоль изотропной геодезической l относительно метрики ds^2 , то это утверждение справедливо и для метрики λds^2 , $\lambda > 0$. Его доказательство можно привести различными способами; в частности, оно следует из геометрической интерпретации сопряженных точек: если последовательность изотропных геодезических $\varphi_m: [0, 1] \rightarrow V_n$ ($\varphi_m(0) = a$) сходится к изотропной геодезической $\varphi: [0, 1] \rightarrow V_n$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, то расстояние (в произвольной римановой метрике $d\sigma^2$) от точки b до $\varphi_m(1)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем угол между $\varphi(t)$ и $\varphi_m(t)$ в точке a . Таким образом, условие любого утверждения конформно инвариантно, если оно сформулировано в терминах «изотропные геодезические и сопряженные точки на них».

Прежде всего докажем теорему (см. также [5]).

Теорема 4. Если на изотропной геодезической $\varphi(t)$ точка $\varphi(t_0)$ сопряжена с точкой $\varphi(0)$ ($0 < t_0$, $\varphi(0) \neq \varphi(t_0)$), то каждая точка $\varphi(t)$, $t > t_0$, является внутренней точкой будущего $F_{\varphi(0)}$ точки $\varphi(0)$.

Заметим, что для доказательства теоремы недостаточно показать, что вторая вариация «действия» («энергии») E ($E = \int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt$) может принимать положительные значения, так как из условия $E(\gamma) > E(\varphi) = 0$ не следует, что γ — упорядоченная дуга. Наша цель — доказать существование упорядоченной (и отличной от отрезка изотропной геодезической) дуги $\gamma(t)$, соединяющей точки $\varphi(0)$ и $\varphi(t)$. При этом мы воспользуемся простым утверждением [3]: если точки a и b из V_n можно соединить упорядоченной дугой, не являющейся отрезком изотропной геодезической, то их можно соединить и строго упорядоченной дугой, $a < b$ и b — внутренняя точка F_a .

Итак, пусть $\varphi: [0, 1] \rightarrow V_n$ — изотропная геодезическая, $\xi(t)$ — нетривиальное векторное поле Якоби на $\varphi(t)$, $\xi(0) = \xi(t_0) = 0$ и $0 < t_0 < 1$. Пусть также $\varphi(t) = \exp_{\varphi(0)}(tx_1)$ (т. е.

t — канонический параметр $\varphi(t)$). Из формул (6) легко видеть, что $\xi(t) = d \exp_{\varphi(0)} \delta x$, где $\delta x = \{\delta x^i\} = \{a_j^i x^j\}$. Далее, векторное поле δx вдоль луча $x = tx_1$, касательного к $T_{\varphi(0)}$, можно интерпретировать следующим образом: пусть $x = x(t, u) \subset T_{\varphi(0)}$, $0 \leq t \leq 1$, $-\varepsilon < u < \varepsilon$, причем при $u = \text{const}$ $x(t, u)$ есть прямолинейный отрезок ($x(0, u) = 0$) с каноническим параметром t , в частности $x(t, 0) = tx_1$; тогда $\delta|_{u=0} = \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{u=0}$, т. е.

δ — векторное поле «прямолинейной» вариации $x(t, u)$ отрезка $x = tx_1$; $d \exp_{\varphi(0)} \delta = \xi$ — векторное поле «геодезической» вариации $\varphi(t)$ в V_n : при этом легко видеть, что для любого $\delta x = \{a_j^i x^j\}$ можно подобрать соответствующую вариацию $x(t, u)$ данного отрезка $x = tx_1$.

Итак, $\xi = d \exp_{\varphi(0)} \delta$; при этом в точке $x_0 = t_0 x_1 \in T_{\varphi(0)}$ δ принадлежит ядру $d \exp_{\varphi(0)}$. Согласно доказанной выше лемме, в точке $x_0 = t_0 x_1$ δ лежит в «изотропной» гиперплоскости, касательной к конусу $K_{\varphi(0)}$; поскольку векторы поля δ вдоль отрезка $x = tx_1$ параллельны, каждый из них также принадлежит изотропной гиперплоскости. Но это означает, что в каждой точке $\varphi(t) \in V_n$ вектор $\xi(t)$ также принадлежит изотропной гиперплоскости векторного $T_{\varphi(t)}$, содержащей касательный вектор геодезической $\varphi(t)$. Следовательно, прямолинейная вариация $x(t, u)$, соответствующая δ , может быть выбрана так, что каждому $u = \text{const}$ будет соответствовать изотропный отрезок $x(t, u)$; при переходе в V_n с помощью $\exp_{\varphi(0)}$ получим, что $\xi(t)$ есть векторное поле вариации $\psi: [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V_n$, в которой каждому $u = \text{const}$ соответствует изотропная геодезическая с каноническим параметром (аффинной дугой) t .

Выберем теперь настолько малые $\alpha > 0$, $\beta > 0$, чтобы $\varphi(t_0 - \alpha)$ и $\varphi(t_0 + \beta)$ — точки, лежащие на нашей изотропной геодезической «слева» и «справа» от точки $\varphi(t_0)$, которая сопряжена с $\varphi(0)$, — принадлежали выпуклой геодезической окрестности точки $\varphi(t_0)$. Если u достаточно мало, то точки $\psi(t_0 - \alpha, u)$ при любом u ; $|u| < u_0$ будут лежать в той же окрестности, и поэтому их можно соединить (единственными в этой окрестности) геодезическими отрезками с точкой $\psi(t_0 + \beta)$. Мы получили геодезические ломаные из двух звеньев: первое — отрезок изотропной геодезической, который соединяет начало данной геодезической $\varphi(0)$ с точкой $\psi(t_0 - \alpha, u)$, второе — отрезок геодезической (тип которой заранее не известен), соединяющий $\psi(t_0 - \alpha, u)$ с точкой $\psi(t_0 + \beta, u)$, лежащей на данной геодезической «за» сопряженной с $\varphi(0)$ точкой $\varphi(t_0)$. Покажем, что при достаточно малых u , α последний отрезок $[\psi(t_0 - \alpha, u), \psi(t_0 + \beta, u)]$ есть отрезок строго времениподобной геодезической, что и завершит доказательство теоремы.

Семейство описанных выше геодезических ломаных определяет «ломаное» якобиево поле $\eta(t)$, $0 \leq t \leq t_0 + \beta$, причем для

$0 \leq t \leq t_0 - \alpha$ $\eta(t) = \xi(t)$. Приведем известную формулу для второй вариации «действия» $E = \int \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt$ (см., например, [2]: вывод этой формулы не связан с сигнатурой фундаментальной формы ds^2):

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 E}{du^2} = - \Sigma \left(\eta, \Delta \frac{d\eta}{dt} \right) + \int \left(\eta, \frac{d^2 \eta}{dt^2} + R \left(\frac{d}{dt}, \eta \right) \frac{d}{dt} \right) dt,$$

где $R = \{R^i_{j,kl}\}$ — тензор кривизны; $\frac{d}{dt}$ — касательный вектор геодезической $\varphi(t)$; η — векторное поле рассматриваемой вариации; $\Delta \frac{d\eta}{dt}$ — скачок производной поля η . В рассматриваемом случае скачок $\Delta \frac{d\eta}{dt}$ отличен от нуля в точке $\varphi(t_0 - \alpha)$; интеграл же в правой части формулы равен нулю, поскольку на отрезках $(0, t_0 - \alpha)$ и $(t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$ η совпадает с якобиевыми полями. Итак, в нашем случае

$$\text{sign} \frac{d^2 E}{du^2} = - \text{sign} \left(\eta, \Delta \frac{d\eta}{dt} \right) \Big|_{t=t_0 - \alpha}.$$

Покажем, что при достаточно малом $\alpha > 0$ $\frac{d^2 E}{du^2} > 0$. Рассмотрим ломаное поле η , соответствующее различным значениям $\alpha \geq 0$. В частности, при $\alpha = 0$ $\eta(t) = \xi(t)$ для $0 \leq t \leq t_0$ и $\eta(t) = 0$ для $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta$;

$$\Delta \frac{d\eta}{dt} = - \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0}.$$

При этом легко видеть, что: 1) $\frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0} \neq \lambda \frac{d}{dt}$ (т. е. вектор $\frac{d\xi}{dt}$ не совпадает по направлению с касательным вектором $\frac{d}{dt}$ геодезической $\varphi(t)$); 2) $\frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0}$ принадлежит изотропной гиперплоскости касательного $T_{\varphi(t_0)} \left(\frac{d\xi}{dt} \right.$ — ковариантная производная); не будучи коллинеарным единственному изотропному вектору $\frac{d}{dt}$ этой гиперплоскости, $\frac{d\xi}{dt}$ пространственноподобен.

Имеем

$$\Delta \frac{d\eta}{dt} \Big|_{\alpha > 0} = - \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0} + O(\alpha),$$

$$\eta \Big|_{\alpha > 0} = - \alpha \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0} + O(\alpha^2),$$

откуда

$$- \left(\eta, \Delta \frac{d\eta}{dt} \right) = - \alpha \left(\frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0}, \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) + O(\alpha^2).$$

Поскольку $\frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0}$ пространственноподобен, $\left(\frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0}, \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) < 0$ и при достаточно малом $\alpha > 0$

$$\text{sign} \frac{d^2 F}{du^2} = - \text{sign} \left(\frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0}, \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) = +1.$$

Очевидно, для нашей изотропной геодезической $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq t_0 + \beta$

$$E(\varphi) = \int \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt = 0,$$

поскольку $\frac{d^2 E}{du^2} > 0$ (при достаточно малом $\alpha > 0$), действие E на описанной выше геодезической ломаной, соответствующей малому $u = \text{const}$, положительно. Но на первом звене (изотропная геодезическая) $E_1 = 0$; на втором же звене знак действия E_2 соответствует типу геодезической. Поскольку $E_2 > 0$, второй отрезок — времениподобная геодезическая. Теорема 4 доказана.

Подобным же образом можно доказать утверждение: времениподобная геодезическая $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, на которой $\varphi(t_0)$, $t_0 < 1$, сопряжено с $\varphi(0)$, не достигает верхней грани длин упорядоченных дуг, соединяющих $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ (см. также [10]).

Важно отметить следующее обстоятельство. Пусть изотропный отрезок $Ox_1 \subset T_0$ ($x = tx_1$, $0 \leq t \leq 1$) содержит особую точку $\text{exp}_0 x_0 = t_0 x_1$, $0 < t_0 < 1$. Тогда, как это следует из теоремы 4, точки $O \in V_n$ и $\text{exp}_0(x_1)$ могут быть соединены времениподобной дугой $\psi(t)$. Из теоремы 1 теперь следует, что дуга $\psi(t)$ не имеет «подъема» (прообраза в exp_0) в виде кусочно-гладкой дуги, соединяющей $O(0, \dots, 0)$ и x_0 .

Предположим теперь, что во всех точках отрезка Ox_1 (включая x_1) exp_0 регулярно. Пусть $\varphi(t) = \text{exp}_0(tx_1)$, $0 \leq t \leq 1$, $\psi(t)$ — произвольная дуга в V_n , соединяющая точки $O \in V_n$ и $\text{exp}_0 x_1$: $\psi(0) = \varphi(0) = 0$, $\psi(1) = \varphi(1) = \text{exp}_0 x_1$. Легко показать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ при выполнении условия $r(\varphi(t), \psi(t)) < \varepsilon$ (r — расстояние в римановой метрике, произвольным образом определенной

в некоторой окрестности $\varphi(t)$ $\varphi(t)$, имеет «подъем» в T_0 в виде дуги, соединяющей $O(0, \dots, 0)$ и x_1 . Действительно, отрезок $Ox_1 \subset T_0$ может быть покрыт конечным числом областей $U_1, \dots, U_p$, для которых $\exp_0$ — диффеоморфизм. Очевидно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\varphi(t) \subset \bigcup_i \exp_0 U_i$; подъем $\varphi(t) \cap \exp_0 U_1$ однозначно определен в U_1 и может быть продолжен последовательно на $U_2, \dots, U_p$.

Из последних рассуждений следует справедливость теоремы 5.

Теорема 5. Пусть $\varphi(t) \subset V_n, 0 \leq t \leq 1$ — отрезок изотропной геодезической. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует упорядоченная дуга $\psi(t)$ с положительным действием $E(\psi)$, соединяющая концы $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ дуги $\varphi(t)$, причем $r(\varphi, \psi) < \varepsilon$, то $\varphi(t)$ содержит точку $\varphi(t_0)$ ($0 < t_0 \leq 1$), сопряженную с $\varphi(0)$.

В геометрии псевдоримановых V_n физического типа, как и в римановой геометрии, заметную роль играет геометрическое место точек, сопряженных с данной точкой $O \in V_n$ вдоль различных геодезических, исходящих из O . Изучим свойства геометрического места Q_0 особых точек $\exp_0$, расположенных на изотропных лучах и «ближайших» к $O(0, \dots, 0) \in T_0$. Итак, Q_0 есть множество точек $x_0 \in M \subset T_0$, удовлетворяющих условиям:

- 1) x_0 — особенная точка $\exp_0$, расположенная на изотропном луче Ox_0 ;
- 2) отрезок Ox_0 не содержит особых точек $\exp_0$, отличных от x_0 .

Имеет место

Теорема 6. Множество Q_0 замкнуто; множество лучей конуса $\hat{K}_0$, пересекающих Q_0 , открыто в пространстве всех изотропных лучей границы $\hat{K}_0$ (гомеоморфном сфере S_{n-2}).

Доказательство. Для краткости назовем «сферой» радиуса $r = S_{n-2}(r)$ ($n-2$)-поверхность в T_0 , определенную уравнениями

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2, - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 = 0$$

($S_{n-2}(r) = S_{n-1}(r) \cap \hat{K}_0$, где $S_{n-1}(r)$ — «сфера» $\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$).

Пусть l — изотропный луч $x = tx_0$ границы конуса $\hat{K}_0$ в T_0 , пересекающий сферу $S_{n-2}(r_0)$ в особой точке x_0 экспоненциального отображения; при этом предполагается, что $x_0 \in Q_0$, т. е. отрезок Ox_0 не содержит особых точек $\exp_0$, отличных от x_0 . При доказательстве теоремы 4 мы видели, что вдоль экспоненциального образа отрезка l , содержащего x_0 , можно построить «ломаное якобиево поле», соответствующее «ломаной геодезической вариации»; при этом было показано, что соответствующая ва-

риация действия $\frac{d^2 E}{du^2}$ положительна. Произведем аналогичное построение для некоторых отрезков каждого изотропного луча, пересекающего $S_{n-2}(r_0)$ в некоторой окрестности U_{n-2} точки x_0 . Из соображений непрерывности будет следовать, что $\frac{d^2 E}{du^2} > 0$ для каждого луча l , «близкого» к l_0 . Это означает, что для каждого такого луча l можно будет указать, как в теореме 4, сколь угодно близкую геодезическую ломаную из двух звеньев с положительным действием. На основании теоремы 5 можно заключить, что все лучи l , достаточно близкие к l_0 , содержат особые точки $\exp_0$. Будет также показано, что единственной предельной точкой множества Q_0 , расположенной на l_0 , является x_0 .

Почти очевидно, как произвести соответствующие построения. Пусть $\delta x = \{\delta x^i\}$ — поле «прямолинейной» вариации вдоль l_0 , причем в точке x_0 δx принадлежит ядру экспоненциального отображения. Определим дифференцируемое отображение

$$\begin{aligned} f: [0, \infty) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_{n-2} &\rightarrow T_0, \\ (f(t, u, p) \in T_0, t \in [0, \infty), -\varepsilon < u < \varepsilon, \\ p \in U_{n-2} \subset S_{n-2}(r_0)) \end{aligned}$$

так, чтобы для любых фиксированных u и p ($|u| < \varepsilon$, $p \in U_{n-2}$) $f(t, u, p)$ представляла собой изотропный луч, причем были выполнены следующие условия:

1) $f(t, 0, p) \cap S_{n-2}(r_0) = p$ (p — точка пересечения луча $f(t, 0, p)$ с $S_{n-2}(r_0)$);

2) $\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0, p=p_0} = \delta x$, т. е. векторное поле $\frac{\partial}{\partial u}$ вдоль луча l_0 совпадает с указанным выше полем δx . Мы опускаем совершенно тривиальное описание построения f .

Рассмотрим сферы $S_{n-2}(r_0 - \alpha)$ и $S_{n-2}(r_0 + \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. На каждой изотропной геодезической $\exp_0 f(t, 0, p)$ рассмотрим отрезок от точки O до экспоненциального образа точки пересечения луча $f(t, 0, p)$ со сферой $S_{n-2}(r_0 + \beta)$. Для каждого такого отрезка определим так же, как в доказательстве теоремы 4, ломаное якобиево поле $\xi(t, p)$ с единственной «точкой излома»

$$\exp_0[f(t, 0, p) \cap S_{n-2}(r_0 - \alpha)].$$

При этом на отрезке от точки O до точки излома $\xi(t, p)$ должно совпадать с $d \exp_0 \left(\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} \right)$, т. е. с экспоненциальным образом векторного поля геодезической вариации $f(t, u, p)$. Если

экспоненциальные образы точек пересечения $l_0 = f(t, 0, x_0)$ со сферами $S_{n-2}(r_0 - \alpha)$, $S_{n-2}(r_0 + \beta)$ лежат в выпуклой геодезической окрестности точки $\exp_0 x_0$, то, как и в доказательстве теоремы 4, второй отрезок «ломаного якобиева поля» $\xi(t, p)$ однозначно определен для всех p , близких к x_0 . Как и в этом же доказательстве, $\xi(t, p)$ интерпретируется как векторное поле ломаной геодезической вариации: первое звено — отрезок изотропной геодезической $\exp_0 f(t, u, p)$, второе — отрезок геодезической, соединяющей

$\exp_0 [f(t, u, p) \cap S_{n-2}(r_0 - \alpha)]$ с $\exp_0 [f(t, 0, p) \cap S_{n-2}(r_0 + \beta)]$.

В доказательстве теоремы 4 мы видели, что (при достаточно малом $\alpha > 0$)

$$\left. \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \right|_{u=0, p=x_0} > 0,$$

где $E(u, p)$ — действие вдоль только что описанной геодезической ломаной. Очевидно, $\left. \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \right|_{u=0} > 0$ есть дифференцируемая

функция от p ; поэтому $\left. \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \right|_{u=0}$ для всех p из некоторой окрестности точки $x_0 \in S_{n-2}(r_0)$. С другой стороны, если для

некоторого $p \in U_{n-2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \right|_{u=0} > 0$, то это означает, что действие на описанной выше геодезической ломаной с первым звеном $\exp_0 f(t, u, p)$ положительно для всех достаточно малых u ; согласно теореме 5, отрезок $f(t, 0, p)$ от точки $O(0, \dots, 0)$ до точки пересечения $f(t, 0, p)$ со сферой $S_{n-2}(r_0 + \beta)$ содержит особую точку $\exp_0$.

Итак, доказана справедливость утверждения: если l_0 содержит особую точку $\exp_0$ на сфере $S_{n-2}(r_0)$ (ближайшую к $O(0, \dots, 0)$ вдоль l_0), то для любого $\beta > 0$ все изотропные лучи некоторой окрестности l содержат особые точки на отрезках от $O(0, \dots, 0)$ до сферы $S_{n-2}(r_0 + \beta)$. Тем самым доказано, что множество изотропных лучей, содержащих особые точки $\exp_0$, открыто. Далее, пусть x_1 — предельная точка множества Q_0 , расположенная на l_0 . Так как $\beta > 0$ произвольно, то x_1 расположена на сфере $S_{n-2}(r)$ радиуса $r \leq r_0$. С другой стороны, x_1 — особая точка $\exp_0$, поскольку множество всех особых точек замкнуто; так как x_0 — «ближайшая» к $O(0, \dots, 0)$ особая точка, $x_1 = x_0$, т. е. множество Q_0 замкнуто. Теорема 6 доказана.

Докажем теперь, что (как и в римановых V_n) множество особых точек $\exp_0$ данного изотропного луча $l \in T_0$ содержит лишь изолированные точки; соответственно этому множество Q_0 не содержит предельных точек своего дополнения в множестве всех особых точек. В действительности, здесь речь идет об об-

щем свойстве системы линейных уравнений второго порядка; однако, по-видимому, проще свести доказательство для изотропных геодезических псевдориманова V_n к собственно риманову случаю.

В евклидовом E_m с декартовыми координатами $x^1, \dots, x^m$ рассмотрим ось x^1 ($x^2 = \dots = x^m = 0$). В некоторой окрестности этой оси введем метрику $d\sigma^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, $i, j = 1, \dots, m$, где $g_{ij} = \varepsilon_{ij} + a_{ij\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \varepsilon_{ij} = 0$ для $i \neq j$; $\varepsilon_{ii} = 1$; $i = j = 1, \dots, m$; $\alpha, \beta = 2, \dots, m$. Легко видеть, что ось x^1 — геодезическая метрики $d\sigma^2$, а уравнения Якоби вдоль оси имеют вид

$$\ddot{\xi}^1 = 0, \quad \ddot{\xi}^\alpha = A_\beta^\alpha \xi^\beta, \quad (7)$$

где $A_\beta^\alpha = a_{11, \alpha\beta}(x^1)$, $\alpha, \beta = 2, \dots, m$.

Очевидно, для нетривиального решения уравнений Якоби, обращающегося в нуль в точках $x^1 = 0$ и $x^1 = x_0^1$, $\xi^1 = 0$; для того чтобы точка x_0^1 была сопряжена с $x^1 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало нетривиальное решение уравнения

$$\ddot{\xi}^\alpha = A_\beta^\alpha \xi^\beta, \quad \alpha, \beta = 2, \dots, m,$$

обращающегося в нуль в этих точках. При этом функции A_β^α составляют совершенно произвольную симметрическую матрицу $\{A_\beta^\alpha(x^1)\} = \{a_{11, \alpha\beta}\}$.

Рассмотрим теперь изотропную геодезическую $\varphi(t)$ пространства V_n физического типа. Как было показано выше (см. доказательство теоремы 4), векторы якобиева поля $\xi(t)$, обращающегося в нуль в точках $\varphi(0)$ и $\varphi(t_0)$, $t_0 > 0$, лежат в изотропных гиперплоскостях, содержащих касательный вектор d/dt геодезической $\varphi(t)$. Пусть $e_i(t)$ — базис векторного $T_{\varphi(t)}$, параллельно переносимый вдоль $\varphi(t)$; выберем его так, чтобы $e_1(t)$ совпадало с касательным вектором d/dt , а $e_2(t), \dots, e_{n-1}(t)$ определяли изотропную гиперплоскость; сверх того, пусть имеют место соотношения

$$(e_\alpha, e_\beta) = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$(e_\alpha, e_\alpha) = -1,$$

$$(e_1, e_n) = 1,$$

$$(e_1, e_1) = (e_n, e_n) = (e_1, e_\alpha) = (e_n, e_\alpha) = 0,$$

$$(\alpha, \beta = 2, \dots, n-1).$$

Тогда для интересующего нас якобиева поля $\xi(t)$ $\xi^n(t) = 0$. Очевидно, $\xi(t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^1 &= -R_{1, 1\alpha}^1 \xi^\alpha, \\ \ddot{\xi}^\alpha &= -K_{1, 1\beta}^\alpha \xi^\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha, \beta = 2, \dots, n-1$. Но легко видеть, что система (8) имеет решение $\xi(t)$ такое, что $\xi(0) = \xi(t_0) = 0$ ($t_0 > 0$) тогда и только тогда, когда аналогичное решение имеет «укороченная» система

$$\ddot{\xi}^\alpha = -R_{1,1\beta}^\alpha \xi^\beta, \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n-1. \quad (8')$$

Очевидно, $R_{1,1\beta}^\alpha = -R_{\alpha,1,1\beta} = -R_{\beta,1,1\alpha} = R_{1,1\alpha}^\beta$, и система (8') является частным случаем системы (7). Поскольку изолированность сопряженных точек на геодезической риманова V_n доказана [2], это же утверждение справедливо и для изотропных геодезических V_n физического типа.

Итак, имеет место

Теорема 7. Множество точек, сопряженных вдоль изотропной геодезической $\varphi: [0, \infty) \rightarrow V_n$ с точкой $\varphi(0)$, содержит лишь изолированные точки.

Из теорем 6, 7 следует, что Q_0 суть компоненты множества всех особых точек $\exp_0 T_0 \rightarrow V_n$, причем каждая компонента Q_0 — непрерывное подмногообразие касательного T_0 размерности $(n-2)$: если в $\dot{K}_0$ выбрать локальные координаты $r, u^1, \dots, u^{n-2}$ так, чтобы $u^1, \dots, u^{n-2}$ были локальными координатами на сфере S_{n-2} (1) и уравнения $u^i = \text{const}$ определяли изотропный луч, то компонента Q_0 может быть определена уравнением $r = r(u^1, \dots, u^{n-2})$, где $r(u^1, \dots, u^{n-2})$ — непрерывная функция.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий значение особых точек $\exp_0$ конуса $\dot{K}_0$. Этот пример заимствован из дипломной работы студента Харьковского университета Тимошенко. Им рассмотрена трехчленная группа Ли G_3 , соответствующая алгебре Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$$

(e_i — левоинвариантные векторные поля на G_3). В касательном пространстве T_0 единицы группы выбран конус K_0 :

$$z^2 - x^2 - y^2 > 0, \quad z > 0$$

(x, y, z — компоненты вектора в базисе $e_i(0)$). Соответствующая «структура порядка» на G_3 определяется полем конусов K_x , полученных из K левыми сдвигами; она соответствует метрике

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 + (dz - ydx)^2,$$

определенной на евклидовом E_3 ($-\infty < x, y, z < \infty$). Уравнения геодезических этой метрики легко интегрируются. При этом обнаруживается следующая картина. В касательном T_0 множество Q_0 — гладкая замкнутая линия $\dot{K}_0$, в каждой точке которой ядро $\exp_0$ не совпадает с касательной к Q_0 ; естественно, что $\exp_0 Q_0$ есть замкнутая изотропная линия в G_3 , т. е. «машина времени». Конус $\exp_0 \dot{K}_0$ в G_3 есть поверхность с особой

линией (ребром) $\text{exr}_0 Q_0$; заметим также, что изотропные геодезические, исходящие в будущее из единицы группы, пройдя через ребро $\text{exr}_0 Q_0$, далее сходятся в некоторой точке.

Алгебра Ли $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$ допускает внешние автоморфизмы вида

$$e'_1 = ae_1, e'_2 = be_2, e'_3 = abe_3.$$

Легко видеть, что с помощью таких автоморфизмов любой открытый конус K_0^* , содержащий вектор e_3 , может быть преобразован в конус, содержащий K_0 . Из этого факта немедленно следует утверждение: для любой левоинвариантной метрики на G_3 существует машина времени, если конус будущего содержит вектор e_3 . Заметим, что это утверждение может быть получено также другим путем: любой конус K_0^* , содержащий e_3 , указанными автоморфизмами может быть деформирован в конус, сколь угодно близкий к плоскости (e_1, e_2) ; в то же время плоскость (e_1, e_2) определяет неинтегрируемое распределение на G_3 , из чего следует, что единица группы может быть соединена с любой другой точкой кусочно-гладкой дугой, полукасательные векторы которой принадлежат плоскостям (e_1, e_2) и т. д.

В общем случае можно утверждать следующее. Предположим, что компоненты множества Q_0 — дифференцируемые $(n-2)$ -подмногообразия касательного T_0 . Если их экспоненциальные образы также представляют собой дифференцируемые подмногообразия (в частности, они могут быть точками: это заведомо имеет место, если степень вырождения точек Q_0 максимальна и ядра экспоненциального отображения совпадают с касательными плоскостями Q_0), то эти подмногообразия, как легко видеть, изотропны. В частности, если Q_0 пересекает все изотропные лучи конуса K_0 , то в $\dot{V}$ получим замкнутую изотропную поверхность — $\text{exr}_0 Q_0$. Однако все сказанное не дает оснований для какого-либо общего утверждения, поскольку $\text{exr}_0 Q_0$ в общем случае не обязано быть дифференцируемым подмногообразием пространства V_n . Впрочем, имеет место.

Теорема 8. Если для каждой точки $O \in V_n$ множество Q_0 пересекает все изотропные лучи конуса K_0 , то либо $V_n = U_{n-1} \times R$, где U_{n-1} — компактное многообразие, R — вещественная ось ($-\infty < t < \infty$) и слои $t = \text{const}$ пространственноподобны, либо V_n содержит машину времени.

Заметим, что обе возможности, предусмотренные теоремой, действительно осуществляются. Пример $V_n = U_{n-1} \times R$: $U_{n-1} = S_{n-1}$ — сфера с естественной метрикой $d\sigma^2$; метрика на V_n — $ds^2 = dt^2 - d\sigma^2$ (легко видеть, что V_n «наследует» сопряженные точки U_{n-1} ; в частности, точка изотропного луча $\varphi(t) \in T_0(V_n)$ есть особая точка exr_0 , если ее естественная проекция на $T_0(U_{n-1})$ — особая точка exr_0 для U_{n-1}). Пример V_n с машиной времени был разобран выше.

Доказательство теоремы 8 основано на следующем утверждении. Пусть данное V_n упорядочено (т. е. отношение $\prec$ есть отношение порядка), но не удовлетворяет некоторой гипотезе, названной в [4] «гипотезой А» (эта гипотеза требует, чтобы множество упорядоченных дуг, соединяющих любые две заданные точки a и b , было компактно в некоторой естественной топологии). Тогда в V_n существуют точки $a, b, a \prec b$, причем из точки a исходит непродолжаемая в будущее упорядоченная дуга $\varphi: [0, \infty \rightarrow) V_n$ ($\varphi(0)=a$), целиком принадлежащая замыканию «прошлого» точки $b - P_b$. Проведем через a и b упорядоченную дугу $\psi(t)$ ($\psi(0)=a, \psi(1)=b$). Пусть t_0 — верхняя грань таких значений t , что из $\psi(t)$ также исходит в будущее непродолжаемый упорядоченный луч, лежащий в P_b . Легко видеть, что из $\psi(t_0)$ также можно провести подобный луч — $\varphi_0(t)$ (пусть $t_m < (t_0)$ и $t_m \rightarrow t_0, m \rightarrow \infty$; тогда из последовательности $\varphi_m(t)$ лучей, исходящих из $\psi(t_m)$, можно выбрать в определенном смысле сходящуюся последовательность с предельной непродолжаемой упорядоченной дугой $\varphi_0(t) \subseteq P_b$ (см. [3])). Пусть $\varphi_0(0)=\psi(t_0) < \varphi_0(t_1)$ для некоторого $t_1 > 0$, т. е. $\varphi(t_1)$ есть внутренняя точка будущего точки $\varphi_0(0)=\psi(t_0)$. В силу того что множество точек x таких, что $x < a$, открыто, для некоторого $\alpha > 0$ имеем $\psi(t_0 + \alpha) < \varphi_0(t_1)$, т. е. некоторая упорядоченная дуга γ соединяет точки $\psi(t_0 + \alpha)$ и $\varphi_0(t_1)$. Очевидно, кусочно-гладкая дуга, состоящая из γ и части $t \geq t_1$ дуги $\varphi_0(t)$, есть упорядоченная, непродолжаемая в будущее дуга, целиком принадлежащая $\bar{P}_b$, что противоречит выбору точки t_0 . Итак, $\varphi_0(t_0)$ не содержит точки $\varphi_0(t_1)$, лежащей строго внутри будущего точки $\varphi_0(0)$, а потому $\varphi_0(t)$ — луч изотропной геодезической, не содержащий (согласно теореме 5) точку, сопряженную с $\varphi_0(0)$. Итак, имеет место

Лемма 2. Если упорядоченное V_n не удовлетворяет гипотезе А, то V_n содержит непродолжаемый в будущее луч $\varphi: [0, \infty) \rightarrow V_n$ изотропной геодезической, каждая точка $\varphi(t)$ ($t > 0$) которого принадлежит границе $F_{\varphi(0)}$ будущего своего начала $\varphi(0)$. В частности, $\varphi(t)$ не содержит точек, сопряженных с $\varphi(0)$.

Доказательство теоремы 8. Если V_n не содержит машины времени, то, согласно условиям теоремы и доказанной лемме, V_n удовлетворяет гипотезе А. В этом случае (см. [4]) $V_n = U_{n-1} \times R$, где слои U_{n-1} пространственноподобны, а одномерные слои R времениподобны. Пусть $O(u_0, t_0) \in V_n$ ($t_0 \in R, u_0 \in U_{n-1}$). В силу условий теоремы граница $\dot{F}_0$ будущего точки O компактна (если V_n удовлетворяет гипотезе А, то $\dot{F}_0$ есть объединение отрезков изотропных геодезических, исходящих из O). Рассмотрим ее проекцию на U_{n-1} — $\text{пр}_u \dot{F}_0$. Если $\text{пр}_u \dot{F}_0$ — собственное подмножество U_{n-1} , то существует его граничная точка $p \in U_{n-1}$. В силу компактно-

сти $\dot{F}_0 \not\subset \text{pr}_a \dot{F}_0$; таким образом, существует точка (p, t_1) , лежащая строго внутри будущей точки $O(u_0, t_0)$ (поскольку слой (p, t) , $-\infty < t < \infty$ времениподобен). Но тогда p не может быть граничной точкой при $\dot{F}_0$: любой слой (p', t) , достаточно близкий к (p, t) , содержит точки будущей F_0 и точки, не принадлежащие F_0 (достаточно рассмотреть (p', t^*) с $t^* < t_0$), а потому и точку границы $\dot{F}_0$. Очевидно, $U_{n-1} = \text{pr}_a \dot{F}_0$, и теорема 8 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Улановский М. А. О стационарных группах движений пространств линейной проективной и аффинной связности. — «Доклады АН СССР», 1950, № 4, с. 629—631.
2. Милнор Д. Теория Морса. М., «Мир», 1965. 176 с.
3. Улановский М. А. Упорядоченные псевдоримановы пространства. I. — «Укр. геометр. сб.», вып. 7, Харьков, 1969, с. 153—165.
4. Улановский М. А. Упорядоченные псевдоримановы пространства. II. — «Укр. геометр. сб.», вып. 9, Харьков, 1970, с. 96—110.
5. Hawking S. W. The occurrence of singularities in cosmology. I. — «Proceedings of the Royal Society», ser. A, 1966, vol. 294, p. 511—521.
6. Hawking S. W. The occurrence of singularities in cosmology. II — «Proceedings of the Royal Society», ser. A, 1967, vol. 295, p. 490—493.
7. Hawking S. W. The occurrence of singularities in cosmology. III. — «Proceedings of the Royal Society», ser. A, 1967, vol. 300, p. 187—201.
8. Seifert H. J. Global connectivity by timelike geodesics. — «Zeitschrift für Naturforschung», 1967, Bd 22a, H9, S. 1356—1360.
9. Hawking S. W., Penrose R. — «Proceedings of the Royal Society», ser. A, 1970, vol 314, p. 529—548.
10. Козлов С. Е. Применение вариационной теории геодезических к исследованию псевдоримановых пространств кинематического типа. — «Укр. геометр. сб.», вып. 13, Харьков, 1973, с. 101—106.

Поступила 17 апреля 1973 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. Алгебраические поверхности с симметрией правильного m -мерного симплекса	3
Карпенко В. Л. Свойства инварианта второй дифференциальной окрестности комплекса прямых	8
Киотина Г. В. Бифлаговые пространства	14
Ковалев П. И. Об одном обобщении «структуры кривизны»	22
Кованцов Н. И., Носаль Т. В. Расслоение линейного комплекса в конгруэнции, нормальные к поверхностям постоянной кривизны	31
Милка А. Д. Кратчайшая с неспрямляемым сферическим изображением	35
Моторный Л. Т., Трыкова Т. Н. О поверхностях переноса в квазигиперболическом пространстве	52
Носаль Т. В. Дважды расслаиваемые комплексы в трехмерном евклидовом пространстве	64
Соловьев П. А. Наименьшая выпуклая оболочка двух овалов	69
Стрельцов В. В. Вполне допустимые интегральные кривизна и кручение монотонной кривой	78
Улановский М. А. Экспоненциальное отображение в псевдоримановых пространствах физического типа	97

Украинский геометрический сборник
Выпуск 16

*Республиканский межведомственный
тематический научный сборник*

Редактор *Э. В. Ганичева*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Технический редактор *Л. Т. Момот*
Корректор *М. Ф. Христенко*

Сдано в набор 20/II 1974 г. Подписано в печать
17/IX 1974 г. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская
№ 3. Усл. печ. л. 7,75. Уч.-изд. л. 7,7. Тираж 500.
Заказ 353. БЦ 50245. Цена 77 коп.

Издательство издательского объединения «Вища школа»
при Харьковском государственном университете, 310003,
Харьков, 3, Университетская, 16.

Харьковская городская типография № 16 Областного
управления по делам издательств, полиграфии и книж-
ной торговли. Харьков, 3, Университетская, 16.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Алгебраические поверхности с симметрией правильного m -мерного симплекса. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 3—8.

Дан способ построения минимального базиса алгебры полиномиальных инвариантов относительно группы симметрий правильного m -мерного симплекса в евклидовом пространстве E^m . Тем самым получен общий вид уравнения алгебраической поверхности, имеющей симметрию правильного m -симплекса. Базисными инвариантами являются степенные суммы (степеней от 2 до $m+1$) однородных частей нормированных уравнений $(m-1)$ -граней симплекса, центр которого находится в начале координат.

Библиогр. 5.

УДК 513

Свойства инварианта второй дифференциальной окрестности комплекса прямых. Карпенко В. Л. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 8—14.

Методом внешних дифференциальных форм Картана рассматриваются некоторые свойства инварианта второй дифференциальной окрестности комплекса прямых в трехмерном проективном пространстве. Найдена формула, выражающая инвариант через величину сложного отношения четверки инфлекционных центров. Рассмотрена связь инварианта с главными поверхностями комплекса прямых.

Библиогр. 2.

УДК 513

Бифлаговые пространства. Кнотина Г. В. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 14—21.

Определяется класс пространств с проективной метрикой, в которых абсолют составлен из двух определенным образом соединенных флагов. Метрика в пучках плоскостей всех размерностей является гиперболической. Найдены группы движений этих пространств. Как подгруппы флаговых подобий, они являются разрешимыми группами Ли и зависят от того же числа параметров, что и группы движений максимально подвижных римановых пространств. Выяснено, что в P_n существует $2n-2$ проективно неэквивалентных бифлаговых пространств.

Библиогр. 8.

УДК 513

Об одном обобщении «структуры кривизны». Ковалев П. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 22—30.

Рассматриваются векторные расслоения, каждый слой которых снабжен дополнительной структурой общей тройной системы Ли. Такие объекты являются естественным обобщением структуры, которую тензор кривизны индуцирует на касательном расслоении пространства аффинной связности. В частности, изучаются свойства векторных расслоений, каждый слой которых снабжен структурой тройной системы Ли или метабелевой системой Ли, которые естественно ассоциируются с так называемыми полусимметрическими (соответственно метабелевыми) пространствами аффинной связности.

Библиогр. 10.

УДК 513

Расслоение линейного комплекса в конгруэнции, нормальные к поверхностям постоянной кривизны. Кованцов Н. И., Носаль Т. В. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 31—35.

Дифференциальные уравнения, определяющие расслоение комплекса в конгруэнции, ортогональные поверхностям постоянной кривизны, приводят к алгебраическому уравнению четвертой степени, корни которого представляют абсциссы точек, описывающих поверхности постоянной кривизны. Указанное алгебраическое уравнение исчезает тогда и только тогда, когда комплекс линейный. Система дифференциальных уравнений, описывающих расслоение, становится вполне интегрируемой. Это значит, что каждый линейный комплекс допускает расслоение в конгруэнции, ортогональные поверхностям постоянной кривизны.

В настоящей работе дается построение поверхностей постоянной кривизны, отправляясь от заданного линейного комплекса, т. е. дано безынтегральное представление решения соответствующих систем дифференциальных уравнений.

Библиогр. 2.

УДК 513

Кратчайшая с непрямым сферическим изображением. Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 35—52.

Известна гипотеза, согласно которой на выпуклой поверхности в E^3 сферическое изображение кратчайшей линии в окрестности ее внутренней точки прямолинейно. Построением соответствующего примера устанавливается, что эта гипотеза неверна.

Ил. 2. Библиогр. 5.

УДК 513

О поверхностях переноса в квазигиперболическом пространстве. Моторный Л. Т., Трыкова Т. Н. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 52—64.

Вводится аналог поверхности переноса в квазигиперболическом пространстве как поверхности, несущей коническую сеть, вершины конусов которой расположены на абсолюте. Вводится понятие сети переноса. Выводятся необходимое и достаточное условие того, чтобы сеть кривых на поверхности в квазигиперболическом пространстве была сетью переноса. Найдены все поверхности вращения, являющиеся поверхностями переноса. Уравнения этих поверхностей, а также сетей переноса получены в конечном виде.

Библиогр. 4.

УДК 513.7А

Дважды расслаиваемые комплексы в трехмерном евклидовом пространстве. Носаль Т. В. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 64—68.

Рассматривается расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции, представляющие совокупности нормалей к минимальным поверхностям. Доказывается следующая теорема: в трехмерном евклидовом пространстве с широтой в шесть функций одного аргумента существуют комплексы, каждый из которых дважды расслаивается в однопараметрическое семейство нормальных конгруэнций с базисными минимальными поверхностями.

Библиогр. 4.

УДК 513

Наименьшая выпуклая оболочка двух овалов. Соловьев П. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 69—78.

Два овала лежат в плоскости и могут свободно перемещаться в ней, однако никаким движением не могут быть вложены один в другой; при этом овалы регулярны и пересекаются в ограниченном числе точек. Автор находит необходимые условия минимума длины границы общей выпуклой оболочки овалов. Условия сформулированы в ряде теорем при помощи многоугольников Π , составленных из опорных к обоим овалам прямых, и индекс-многоугольников с единичными сторонами и внутренними углами, равными углам поворота многоугольника Π в его вершинах.

А. С. Лейбин

Ил. 2.

УДК 513.733

Вполне допустимые интегральные кривизна и кручение монотонной кривой. Стрельцов В. В. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 78—97.

Вводятся понятия линейного растяжения кривой и вполне допустимых значений интегральных кривизны и кручения локально монотонной кривой, при которых она является монотонной в целом. Затем устанавливаются оценки для этих величин.

Ил. 3. Библиогр. 6.

УДК 513

Экспоненциальное отображение в псевдоримановых пространствах физического типа. Улановский М. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 16, 1974, с. 97—118.

Изучаются свойства экспоненциального отображения в псевдоримановых V_n с фундаментальной формой сигнатуры $(+ - \dots -)$.

Библиогр. 9.