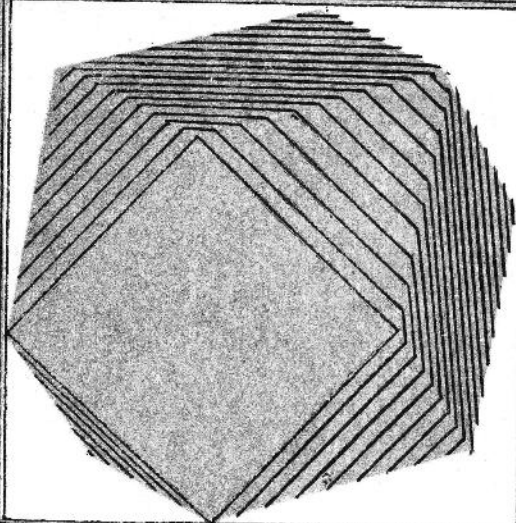


УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск 15



УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
тематический
научный сборник
ВЫПУСК 15

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
«ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
Харьков — 1974

Сборник посвящен геометрии в целом: вопросам существования, строения поверхностей и кривых, внутренним и внешним свойствам кратчайших на поверхности. Ряд статей относится к геометрии обобщенных пространств, в частности пространств физического типа, к линейчатой геометрии и к другим разделам геометрии.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов математических специальностей.

Редакционная коллегия:

акад. АН УССР проф. *А. В. Погорелов* (ответственный редактор), доц. *В. П. Белоусова*, проф. *Я. П. Бланк* (зам. ответственного редактора), доц. *Д. З. Гордеевский*, проф. *Н. И. Кованцов*, доц. *Е. А. Косачевская*, доц. *А. С. Лейбин* (ответственный секретарь), канд. физ.-матем. наук *А. Д. Милка*, доц. *Е. П. Сенькин*, проф. *Н. С. Синюков*, доц. *В. Н. Скрыдлов*, доц. *М. А. Улановский*.

Адрес редакционной коллегии:

Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

Редакция научно-технической литературы
Зав. редакцией *Л. А. Гаврилова*

У 20203—123 349—74
М226(04)—74

© Издательское объединение «Вища школа», 1974 г.

О РАЗЛОЖЕНИИ КВАЗИАФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА k -ГОМОЛОГИЮ И ДВИЖЕНИЕ

Проективное пространство, в котором задан абсолют, состоящий из мнимого конуса Q с $(n-m-1)$ -мерной действительной плоской вершиной U и мнимой $(n-m-2)$ -мерной квадрики на ней, называется квазиэллиптическим S_n^m [1, с. 284].

Назовем базис, в котором конус Q имеет уравнение $x_0^2 = 0$, а квадратика q — уравнения $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 = 0 \end{cases}$ основным, где $x_0 = (x_0, \dots, x_m)$, $x_1 = (x_{m+1}, \dots, x_n)$.

Квазиаффинное преобразование $\tilde{A}$ (невырожденная коллинеация, переводящая плоскость U в себя) в этом базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ \underbrace{A_{21}}_{m+1} & A_{22} \end{pmatrix}_{m+1}$$

Движением $\tilde{D}$ пространства S_n^m называется коллинеация, сохраняющая расстояния между точками в смысле квазиэллиптической метрики. Его матрица в основном базисе имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ \underbrace{D_{21}}_{m+1} & D_{22} \end{pmatrix}_{m+1}$$

где D_{11} и D_{22} — ортогональные матрицы соответственно порядков $m+1$ и $n-m$ [1, с. 290]. k -гомология $\tilde{\Gamma}$ — коллинеация пространства, имеющая два фундаментальных пространства неподвижных точек размерности k и $n-k-1$ [2, с. 375].

Пусть матрица k -гомологии в основном базисе

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \underbrace{\Gamma_{21}}_{m+1} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}_{m+1}$$

Квазиаффинное преобразование можно представить в виде последовательного выполнения k -гомологии и движения в том и только том случае, если одновременно выполняются такие условия:

$$1) A_{11}^T A_{11} = \Gamma_{11}^T \Gamma_{11}, \quad 2) A_{22}^T A_{22} = \Gamma_{22}^T \Gamma_{22},$$

где $\Gamma_{11} = T_{11}^{-1}(\lambda E_1' + \mu E_1'') T_{11};$
 $\Gamma_{22} = T_{22}^{-1}(\lambda E_2' + \mu E_2'') T_{22}.$

Здесь T_{11} и T_{22} — матрицы соответственно порядка $m+1$ и $n-m$

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{b_1}, \quad E_2' = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{b_2},$$

$$E_1'' = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{b_1}, \quad E_2'' = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{b_2}.$$

$$b_1 + b_2 = k + 1 \quad (b_1 + b_2 = n - k).$$

Докажем необходимость. Пусть $\tilde{A} = \tilde{D}\tilde{\Gamma}$, значит $A = D\Gamma$. Воспользуемся переходом к базису, в котором $\tilde{\Gamma}$ принимает каноническую форму

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = D\Gamma =$$

$$= \begin{pmatrix} D_{11}H_{11}^{-1}(\lambda E_1' + \mu E_1'')H_{11} & 0 \\ D_{21}H_{11}^{-1}(\lambda E_1' + \mu E_1'')H_{11} & D_{22}H_{22}^{-1}(\lambda E_2' + \mu E_2'')H_{22} \end{pmatrix}.$$

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ H_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от этого базиса к основному. Отсюда получаем, что

$$A_{11}^T A_{11} = [H_{11}^{-1}(\lambda E_1' + \mu E_1'')H_{11}]^T [H_{11}^{-1}(\lambda E_1' + \mu E_1'')H_{11}],$$

$$A_{22}^T A_{22} = [H_{22}^{-1}(\lambda E_2' + \mu E_2'')H_{22}]^T [H_{22}^{-1}(\lambda E_2' + \mu E_2'')H_{22}].$$

Достаточность будет доказана, если при выполнении условий 1) и 2) найдется гомология такая, что $\tilde{A} = \tilde{D}\tilde{\Gamma}$.

Нетрудно проверить, что гомология, матрица Γ которой в основном базисе равна

$$\begin{pmatrix} H_{11}^{-1} (\lambda E'_1 \oplus \mu E'_1) H_{11} & 0 \\ -H_{22} H_{21} H_{11}^{-1} (\lambda E'_1 \oplus \mu E'_1) H_{11} \oplus H_{22} (\lambda E'_2 \oplus \mu E'_2) H_{21} & H_{22}^{-1} (\lambda E'_2 \oplus \mu E'_2) H_{22} \end{pmatrix},$$

является искомой. Если повторить доказательство, заменив $\tilde{D}\tilde{\Gamma}$ на $\tilde{G}\tilde{D}$, получим следующее утверждение: для того чтобы квази-аффинное преобразование $\tilde{A}$ можно было разложить на движение и k -гомологию, необходимо и достаточно, чтобы

$$1) A_{11} A_{11}^T = \Gamma_{11} \Gamma_{11}^T, \quad 2) A_{22} A_{22}^T = \Gamma_{22} \Gamma_{22}^T.$$

Геометрически это означает, что преобразование A переводит абсолютную quadriку $\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1^2 = 0 \end{cases}$ в мнимую quadriку $\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 A_{22}^T A_{22} x_1 = 0, \end{cases}$ связанную с первой соответствием $(b_2 - 1)$ -гомологии. Значит, между quadriками можно установить коллинеацию, в которой прямая, соединяющая соответственные точки X и Y кривых, пересекает два неподвижных пространства размерности $(b_2 - 1)$ и $(n - m - b_2 - 1)$ в точках M и L таких, что сложное отношение $(XYML)$ есть величина постоянная для любой четверки X, Y, M, L .

Каждой точке quadriки $\begin{cases} x_0^2 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$ (абсолютной quadriки координатной плоскости $x_1 = 0$) поставим в соответствие точку пересечения прямой, в которую переходит пересекающая quadriку образующая конуса $x_0^2 = 0$ при преобразовании $\tilde{A}$, с плоскостью $x_1 = 0$. В плоскости $x_1 = 0$ получаем коллинеацию, при которой quadriка $\begin{cases} x_0^2 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$ переходит в quadriку $\begin{cases} x_0 A_{11}^T A_{11} x_0 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$ Условие 1) теоремы означает, что эти мнимые quadriки связаны между собой соответствием $(b_1 - 1)$ -гомологии.

Рассмотрим некоторые следствия из доказанной теоремы.

1. Воспользуемся теоремой в n -мерном евклидовом пространстве, которое можно рассматривать как частный случай квази-эллиптического при $m = 0$. Матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a' & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как элементы матрицы определены с точностью до постоянного множителя, то далее будем рассматривать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{a'}{a_{11}}, \quad A_{22} = \frac{1}{a_{11}} A'_{22}.$$

Для того чтобы аффинное преобразование евклидова пространства можно было разложить на k -гомологию и движение, необходимо и достаточно, чтобы $A_{22}^T A_{22} = \Gamma_{22}^T \Gamma_{22}$, где

$$\Gamma_{22} = H_{22}^{-1} (E_1 + \mu E_2) H_{22};$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_b, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_b, \quad b = k \quad (b = n - k - 1).$$

Выясним геометрический смысл этого условия.

Абсолют пространства представляет гиперплоскость $x_0 = 0$ и мнимую квадратичную форму на ней $x_1^2 = 0$, где

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Абсолютную гиперплоскость $x_0 = 0$ можно рассматривать как эллиптическое пространство S_{n-1} с абсолютной квадратичной формой $x_1^2 = 0$. Так как преобразование $\tilde{A}$ аффинное, то гиперплоскость $x_0 = 0$ переходит в себя. Поэтому можно рассматривать преобразование $\tilde{A}_1$ с матрицей A_{22} в этой плоскости. Преобразование $\tilde{A}_1$ так же как $\tilde{A}$ переводит квадратичную форму $x_1^2 = 0$ в квадратичную форму $x_1 A_{22}^T A_{22} x_1 = 0$.

Если $A_{22}^T A_{22} = \Gamma_{22}^T \Gamma_{22}$, квадратичная форма $x_1^2 = 0$ переходит в квадратичную форму $x_1 \Gamma_{22}^T \Gamma_{22} x_1 = 0$, связанную с ней соответствием $(k-1)$ - или $(n-k-2)$ -гомологии. Можно показать, что, поскольку при k -гомологии в данном случае абсолютная гиперплоскость переходит в себя, ей принадлежит одна из неподвижных плоскостей k -гомологии. В зависимости от того, какая из неподвижных плоскостей принадлежит абсолютной гиперплоскости, k -гомология является преобразованием k -или $(n-k-1)$ -родства.

Рассмотрим случай, когда неподвижные плоскости родства вполне перпендикулярны, т. е. одна из этих плоскостей и часть другой, находящиеся в абсолютной плоскости, полярно сопряжены относительно абсолютной квадратичной формы. В евклидовом пространстве можно выбрать ортогональный базис, в котором Γ_{22} имеет каноническую форму $E_1 + \mu E_2$. Матрица $\Gamma_{22}^T \Gamma_{22}$, а следовательно, и матрица $A_{22}^T A_{22}$ ортогонально подобны матрице $E_1 + \mu^2 E_2$.

С другой стороны, если $A_{22}^T A_{22}$ ортогонально подобна матрице $E_1 + \mu^2 E_2$, то гомология, матрица которой в этом ортогональном базисе имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_1 + \mu^2 E_2 \end{pmatrix},$$

удовлетворяет условию $\tilde{A} = \tilde{D}\tilde{\Gamma}$.

Значит, для того чтобы аффинное преобразование евклидова пространства разлагалось на произведение родства с вполне перпендикулярными неподвижными плоскостями и движения, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A_{22}^T A_{22}$ имела либо k , либо $n - k - 1$ собственных чисел, равных единице, а остальные, отличные от единицы, собственные числа этой матрицы, были бы равны между собой.

Рассмотрим, как действует на абсолютную квадратичную форму преобразование A , если оно разлагается вышеуказанным способом.

Так как матрица $A_{22}^T A_{22}$ симметрическая, ее собственные числа действительны, поэтому в пространстве S_{n-1} можно выбрать n взаимно полярных центров квадратичной формы, которые являются вершинами общего автополярного симплекса квадратичной формы и абсолютной. Если эти центры принять за базисные точки, уравнение квадратичной формы примет вид

$$\mu^2 \sum_{a=0}^k x_a^2 + \sum_{u=k+1}^{n-1} x_u^2 = 0 \quad \text{при } rE_1 = k + 1.$$

Эта квадратичная форма называется мнимой k -эквидистантой. Базами ее являются плоскости $x_u = 0$ и $x_a = 0$. Если $rE_2 = k$, то уравнение квадратичной формы будет следующим:

$$\mu^2 \sum_{a=0}^{n-k+1} x_a^2 + \sum_{u=n-k}^{n-1} x_u^2 = 0.$$

Эта квадратичная форма — мнимая $(k - 1)$ -эквидистанта.

2. Рассмотрим в евклидовом пространстве 0-гомологию. Могут иметь место два случая: центр гомологии принадлежит абсолютной гиперплоскости или неподвижная гиперплоскость гомологии совпадает с абсолютной гиперплоскостью.

Если центр гомологии несобственный, то линии связи параллельны. Рассмотрим случай, когда линии связи перпендикулярны неподвижной гиперплоскости гомологии. Из п. 1 следует: чтобы аффинное преобразование евклидова пространства можно было разложить на произведение родства с линиями связи, ортогональными неподвижной гиперплоскости гомологии, и движения, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A_{22}^T A_{22}$ имела все собственные числа, кроме одного, равные единице.

Если неподвижная гиперплоскость гомологии совпадает с абсолютной гиперплоскостью, имеет место гомотетия. Из 1 следует, что аффинное преобразование разлагается на гомотетию и движение в том и только том случае, когда $A_{22}^T A_{22} = \mu E$. Если преобразование A разлагается на гомотетию и движение, абсолютная квадрака при этом преобразовании переходит в мнимую сферу в смысле метрики пространства S_{n-1} на абсолютной гиперплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., «Наука», 1969. 547 с.
2. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. 1, ИЛ, 1954. 461 с.

Поступила 28 апреля 1973 г.

О ПОЛНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Черн, Кейпер, Отзуки доказали, что компактное риманово l -мерное пространство неположительной кривизны нельзя изометрично вложить в E^{2l-1} [1, 2]. Ферус, Эйб изучали случай вырождения компактных l -мерных поверхностей в S^n в большие сферы S^n [3—5]. В. А. Топоногов изучал экстремальные свойства полных римановых многообразий [6, 7]. В этой работе рассматриваются полные поверхности неположительной кривизны в E^n и S^n .

Пусть F — l -мерная поверхность в E^n , $A_{is}(n, X) x^i x^s$ — ее вторая квадратичная форма относительно нормали n в точке X ; $A(n, X)$ — матрица коэффициентов этой формы; $T(X)$ — касательная плоскость поверхности F в точке X .

Как известно [1], индекс $\nu(X)$ точки X — это максимальная размерность подпространства $L(X) \subset T(X)$ такого, что для любого $y \in L(X)$ выполняется равенство $A(n, X)y = 0$ для каждой нормали n в точке X . Пусть $r(n, X)$ — ранг $A(n, X)$, $r(X) = \max r(n, X)$ по всем нормальям в точке X , $r_0 = \max r(X)$ по всем точкам поверхности F .

Пусть квадратичная форма $A_{is}(n, X) x^i x^s$ имеет в каноническом виде k положительных и m отрицательных коэффициентов и $j(n, X) = \min(k, m)$. Типом точки X назовем число

$$j(X) = \min j(n, X)$$

по всем нормальям в точке X , для которых $r(n, X) = r(X)$ [8]
 $\nu_0 = \max k$ таких, что $\rho(l-k) \geq k+1$, где $\rho(l)-1$ — максимальное число линейно независимых векторных полей на S^{l-1} .

1. Формулировка теорем

Теорема 1. Пусть F — полная l -мерная поверхность в E^{l+p} , где $p < \frac{l}{2}$, кривизна которой в каждой точке и в каждом двумерном направлении неположительна. Тогда поверхность F содержит подпространство E^{l-2p} .

Теорема 2. Пусть M — компактное l -мерное риманово многообразие, не изометричное S^l , и кривизна M по всем двумерным площадкам ≤ 1 .

Тогда M нельзя изометрично вложить в S^{l+p} , где

$$p < \sqrt{(l-1) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

Теорема 3. Пусть F — односвязное компактное класса C^4 l -мерное риманово многообразие в S^{l+p} , кривизна которого в каждой точке и в каждом двумерном направлении удовлетворяет неравенству $\frac{1}{4} < K \leq 1$. Тогда либо $r_0 = 0$, либо $r_0 = l$.

Теорема 4. Пусть F — компактное класса C^2 l -мерное риманово многообразие в S^{l+p} , кривизна которого в каждой точке и в каждом двумерном направлении удовлетворяет неравенству

$$K \geq 1.$$

Тогда либо $r_0 = 0$, либо $r_0 = l$.

Теорема 5. Пусть F — односвязное, компактное класса C^4 l -мерное риманово многообразие в S^{l+p} , где $p < \frac{1}{2}l$, и его кривизна в каждой точке и в каждом двумерном направлении удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{4} < K \leq 1.$$

Тогда $r_0 = 0$ и F будет большой сферой в S^{l+p} .

Теорема 6. Пусть F — компактная поверхность класса C^2 в S^{l+p} , где $p < l$, F — изометрична S^l .

Тогда F будет большой сферой в S^{l+p} .

2. Доказательства

Лемма 1. Пусть F — l -мерная поверхность неположительной кривизны в E^{l+p} , где $p < l-1$. Тогда ранг

$$r \leq l+p. \quad (1)$$

Так как утверждение носит локальный характер, то, не ограничивая общности, можно рассматривать поверхность F , заданную уравнениями

$$z_k = A_{kis} x^i x^s$$

$$(i, s = 1, \dots, l) \quad (k = 1, \dots, p),$$

где $A_{kis} x^i x^s$ — вторые квадратичные формы для взаимно ортогональных нормалей в фиксированной точке O поверхности F ,

причем ось z_1 направлена по нормали, для которой $r(n, 0) = r(0)$, $j(n, 0) = j(0)$.

Оси x^i направим по главным направлениям гиперповерхности $z_1 = A_{1is}x^i x^s$ в точке O ; оси $x^{r+1}, \dots, x^l$ — по главным направлениям, соответствующим собственному значению, равному нулю. Тогда поверхность F_0 будет задана уравнениями:

$$z_1 = \sum_{i=1}^{r-1} c_i (x^i)^2 - \sum_{i=1}^j c_{r-1+i} (x^{r-1+i})^2, \quad c_i > 0 \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$z_k = A_{kis}x^i x^s \quad (k = 2, \dots, p).$$

Пусть t, y — взаимно ортогональные единичные векторы, лежащие в касательной плоскости в точке O и $K(t, y)$, $K_k(t, y)$ — кривизна F и гиперповерхностей F_k , определенных уравнениями $z_k = A_{kis}x^i x^s$, в направлении двумерной площадки в точке O , натянутой на t и y . Тогда

$$K(t, y) = K_1(t, y) + \sum_{i=2}^p K_i(t, y).$$

Так как F — неположительной кривизны, то $K(t, y) \leq 0$ для любых t, y . Пусть t, y лежат в подпространстве, натянутом на первые $r-j$ осей x^i . Тогда

$$K_1(t, x) \geq c_0^2 > 0$$

и

$$\sum_{i=2}^p K_i(t, y) = K(t, y) - K_1(t, y) \leq -c_0^2,$$

а значит, поверхность $\bar{F}_0$, заданная уравнениями

$$z_k = A_{kis}x^i x^s,$$

$$k = 2, \dots, p,$$

$$i, s = 1, \dots, r-j,$$

имеет строго отрицательную кривизну в точке O . Это $(r-j)$ -мерная поверхность в $E^{p-1+r-j}$ и, как следует из [9], $2(r-j) - 1 \leq p - 1 + r - j$, $r \leq j + p$.

Следствие:

$$r \leq 2p. \quad (2)$$

Так как $j \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$, то $r - \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \leq p$, $r \leq 2p$.

Для нас интересен случай, когда $r < l$. Это неравенство будет выполняться при $p < \frac{1}{2}l$.

Лемма 2. Пусть F — l -мерная поверхность неположительной кривизны в E^{l+p} , где $p < l - 1$.

Тогда $v \geq l - r - j(p - 1)$.

(3)

В [8] было доказано неравенство

$$v \geq l - r - j(p - 1). \quad (4)$$

Согласно (1), (4)

$$\nu \geq l - p - j - j(p-1),$$

откуда $\nu \geq l - (j+1)p$.

Следствие

$$\nu \geq l - p(p+1). \quad (5)$$

Так как $j \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \leq p$, то

$$j \leq p. \quad (6)$$

Из (3), (6) следует доказываемое неравенство (5).

Для поверхностей нулевой кривизны Черн и Кейпер [2] доказали, что

$$\nu \geq l - p, \quad (7)$$

потому неравенство (5) является обобщением неравенства (7) на поверхности неположительной кривизны.

Для поверхностей неположительной кривизны в E^{l+p} , где $p < \sqrt{l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, всегда $\nu > 0$.

Неравенства, доказанные выше, имеют место и для поверхностей неположительной внешней кривизны в S^{l+p} . Под поверхностями неположительной внешней кривизны будем понимать поверхности, у которых кривизна по двумерным площадкам в каждой точке ≤ 1 .

Пусть F — l -мерная поверхность в E^{l+p} , E^k — k -мерная плоскость в E^{l+p} . Связную область $E^k \cap F$ (в смысле топологии на E^k) будем называть k -мерной образующей F и будем просто обозначать $E^k(X)$.

Лемма 3. Пусть F — l -мерная поверхность в E^{l+p} , ранг которой локально постоянен и равен r_0 . Пусть n — нормаль, для которой $r(n, X_0) = r(X_0)$. Тогда через точку X_0 проходит единственная $(l-r_0)$ -мерная образующая, вдоль которой нормаль n стационарна.

В окрестности точки X_0 поверхность F можно задать в виде $z_k = z_k(x)$, $x = (x_1, \dots, x_l)$, $k = 1, \dots, p$, причем

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad z_k(x_0) = 0.$$

Ось z_1 направлена по нормали n . Тогда, как следует из лемм 1, 2 работы [9], гиперповерхность F_1 $z_1 = z_1(x)$ имеет в окрестности точки X_0 локально постоянный ранг r_0 . Согласно теореме Черна — Лашофа [10], через точку X_0 гиперповерхности F_1 проходит единственная $(l-r_0)$ -мерная образующая, вдоль которой нормаль стационарна. Эта образующая [8] лежит также на поверхности F и вдоль нее стационарна нормаль n .

Лемма 4. Если F — полная поверхность в E^{l+p} и $r_0 < l$, то на F будет лежать подпространство размерности $l - r_0$.

Выберем точку $O \in F$ такую, что $r(O) = r_0$. В окрестности точки O ранг будет локально постоянен. По лемме 3 для нормали n_0 такой, что $r(n_0, O) = r_0$, будет проходить образующая $E^{l-r_0}(O)$, вдоль которой n_0 стационарна. Покажем, что $E^{l-r_0}(O)$ совпадает с подпространством E^{l-r_0} .

Допустим, что это не так. Пусть $X_0 \in E^{l-r_0}(O)$, но $X_0 \notin E^{l-r_0}(O)$. Тогда согласно теореме Черна — Лашофа и леммам 1, 2 из [8]. $r(X_0) = r(X_0, n_0) = r_0$, и, как следует из леммы 3, через X_0 должна проходить единственная $(l - r_0)$ -мерная образующая, вдоль которой n_0 стационарна. Эта образующая лежит также на гиперповерхности F_1 , но на F_1 она совпадает с $E^{l-r_0}(O)$, а значит, и на F точка X_0 будет внутренней точкой $E^{l-r_0}(O)$, и мы пришли к противоречию.

Лемма 5. Пусть F — гладкая l -мерная поверхность в S^{l+p} , лежащая в полусфере $x^0 > 0$, $\tilde{F}$ — поверхность в E^{l+p} , полученная из F при геодезическом отображении полусферы в E^{l+p} . Тогда нормальными к F будут ортогональные проекции нормалей к F на гиперплоскость $x^0 = 1$.

Лемму достаточно доказать для случая, когда F — гиперповерхность. Для общего случая, доказательство аналогично.

Пусть S^{l+p+1} — единичная сфера в E^{l+p+1} с координатами $x^0, x^1, \dots, x^{l+p}$. Тогда касательная гиперплоскость к F задается уравнением

$$\sum_{i=0}^{l+p} x^i n_i = 0,$$

где n_i — компоненты нормали к F в точке X . Так как при геодезическом отображении касательные плоскости переходят в касательные плоскости, то касательная гиперплоскость к $\tilde{F}$ в точке $\tilde{X}$ задается

$$n_0 + \sum_{i=1}^{l+p} x^i n_i = 0,$$

и, значит, нормаль к $\tilde{F}$ имеет компоненты $n_i (i=1, \dots, l+p)$.

Лемма 6. Пусть поверхность F лежит в полусфере $x^0 > 0$; $\tilde{F}$ — геодезический образ F в E^{l+p} ; $a_{ij}(n, x)$ — коэффициенты второй квадратичной формы F для нормали n в точке x ; $\tilde{a}_{ij}(\tilde{n}, \tilde{x})$ — коэффициенты второй квадратичной формы для нормали $\tilde{n}$, в которую переходит n при геодезическом отображении. Тогда

$$\tilde{a}_{ij}(\tilde{n}, \tilde{x}) = \frac{a_{ij}(n, x)}{x^0 \sqrt{1 - n_0^2}}.$$

Лемму будем доказывать для случая, когда F — гиперповерхность. Пусть поверхность F задается уравнениями $x^i = x^i(u)$, где $u = (u_1, \dots, u_l)$, $i = 0, \dots, l+p$.

Обозначим вектор с компонентами $x^i(u)$ ($i = 1, \dots, l+p$) через $r(u)$. Тогда поверхность $\tilde{F}$ в E^{l+p} задается в виде $\tilde{r}(u) = \frac{r(u)}{x^0(u)}$,

единичная нормаль n к $\tilde{F}$ имеет координаты $\left(\frac{n_i}{\sqrt{1-n_0^2}} \right)_{i=1}^{l+p}$.

Вводя обозначения $\frac{\partial r}{\partial u_i} = r_i$, $\frac{\partial x^k}{\partial u_i} = x_i^k$, получаем

$$\tilde{r}_i = \frac{r_i}{x^0} - \frac{r x_i^0}{(x^0)^2},$$

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{r_{ij}}{x^0} - \frac{r_j x_i^0 + r_i x_j^0}{(x^0)^2} - \frac{r x_{ij}^0}{(x^0)^2} + 2 \frac{r x_i^0 x_j^0}{(x^0)^3}.$$

Так как

$$(r, n) = -\frac{x^0 n_0}{\sqrt{1-n_0^2}}, \quad (r_{ij}, \tilde{n}) = \frac{a_{ij}}{\sqrt{1-n_0^2}} - \frac{x_{ij}^0 n_0}{\sqrt{1-n_0^2}},$$

$$(r_i \tilde{n}) = -\frac{x_i^0 n_0}{\sqrt{1-n_0^2}}, \quad \sum_{i=0}^{l+p} n_i^2 = 1,$$

то

$$\tilde{a}_{ij} = (\tilde{r}_{ij}, n) = \frac{a_{ij}}{x^0 \sqrt{1-n_0^2}}.$$

Пусть $n(X)$ — точка S^{l+p} с координатами единичной нормали F в точке X . Нормаль n_0 вдоль множества $Q \subset F$ назовем стационарной, если в каждой точке $X \in Q$ существует нормаль n такая, что $n(X) = n_0 \in S^{l+p}$.

Лемма 7. Пусть F — l -мерная поверхность в S^{l+p} , ранг которой локально постоянен и равен r , то для каждой нормали n такой, что $r(n, X) = r(X)$, через каждую точку X проходит $(l-r)$ -мерная образующая, вдоль которой нормаль n стационарна.

Доказательство леммы 7 следует из лемм 6, 3 и свойств геодезического отображения. Из леммы 7 следует.

Лемма 8. Если F — компактная l -мерная поверхность в S^{l+p} и $r_0 < l$, то на F будет лежать большая сфера S^{l-r_0} .

Лемма 9. Пусть F — гладкая поверхность изометричная S^{l+p} и на F лежит большая окружность S^{l+p} . Тогда F совпадает с большой сферой в S^{l+p} .

Сначала докажем лемму для случая $l = 2$. Пусть S^1 — большая окружность S^{l+p} , которая лежит на F ; точки $O_1, O_2 \in F$, полярные S^1 ; $\rho(x, y)$ — расстояния на поверхности F ; r — расстояние в S^{l+p} .

Возьмем на S^1 две диаметрально противоположные точки X, Y . Тогда

$$\rho(X, O_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \rho(Y, O_1) = \frac{\pi}{2},$$

$$r(X, O_1) = r_1, \quad r(Y, O_1) = r_2,$$

$$r_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad r_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Но $r_1 + r_2 = \pi$, следовательно, $r_1 = \frac{\pi}{2}, r_2 = \frac{\pi}{2}$.

Проведем сферу $S^2(O_1) \in S^{l+p}$, содержащую S^1 и O_1 . Все кратчайшие XO_1 , где $X \in S^1$, сферы $S^2(O_1)$ лежат на поверхности F , а значит, полусфера $S^2(O_1)$, которая содержит O_1 , лежит на F . Часть поверхности F , которая содержит O_2 , будет полусферой. Но так как F — гладкая, то $S^2(O_1) = S^2(O_2)$ и F будет большой сферой S^2 .

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть S^1 — большая окружность S^{l+p} , которая лежит на F ; F_{l-2} — множество поверхности F ; полярное S^1 на F , лежит в сфере S^{l+p-2} , полярной S^1 на S^{l+p} .

Пусть X, Y — произвольные фиксированные диаметрально противоположные точки $S^1, Z \in F_{l-2}$. Полуокружности с концами X, Y на S^{l+p} , проходящие через $Z \in F_{l-2}$, лежат на F и образуют поверхность F_{l-1} , изометричную S^{l-1} . Покажем, что F_{l-1} — гладкая поверхность в точке X .

Поверхность F получается из поверхности F_{l-1} вращением. При этом вращения точки F_{l-2} остаются неподвижными, а точка X движется по S^1 . Из предположения, что F_{l-1} негладкая, следует, что F также негладкая, а это противоречит условию леммы.

Итак, F_{l-1} — гладкая в точке X поверхность будет просто большой сферой S^{l-1} , а значит, F — большой сферой S^l в S^{l+p} .

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Так как $\rho < \frac{l}{2}$, то, как следует из леммы 1, $r_0 < l$ и теорема является непосредственным следствием леммы 4.

Доказательство теоремы 2. Ферус в [3] доказал: если в S^{l+p} для полной l -мерной поверхности F $\nu > \nu_l$, то $\nu = l$ и F будет большой сферой S^l .

ν_l вводится следующим образом. Пусть $\rho(l) — l$ — максимальное число линейно независимых векторных полей на S^{l-1} . Тогда ν_l — максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\rho(l - \nu_l) \geq \nu_l - 1.$$

Известно [3], что

$$\nu_l \leq \frac{l-1}{2}.$$

Если поверхность F в S^{l+p} несет метрику, которая удовлетворяет условию теоремы 2, то, как следует из (3) леммы 2

$$\nu > \nu_1,$$

а значит, и F будет большой сферой S^l в S^{l+p} , что противоречит предположению теоремы.

Доказательство теорем 3, 4. Допустим что $r_0 < l$. Тогда на F , как следует из леммы 8, лежит S^{l-r_0} . Но тогда, как доказал Топоногов [6, 7], поверхности F , удовлетворяющие условиям теорем 3, 4, будут изометричны S^l . А как следует из леммы 9, F будет просто большой сферой в S^{l+p} и, значит, $r_0 = 0$.

Доказательство теоремы 5. Как следует из леммы 1, $r_0 < l$. Применяя теорему 3, получим $r_0 = 0$, чем утверждение теоремы доказано.

Доказательство теоремы 6. Черн и Кейпер [2] доказали: если F — l -мерная регулярная поверхность локально изометричная евклидовой плоскости в E^{l+p} , где $p < l$, то

$$\nu \geq l - p.$$

Это неравенство справедливо для поверхностей нулевой внешней кривизны в S^{l+p} . Так как $p < l$, $\nu > 0$, $r \leq l - \nu$, то $r \leq p$.

По лемме 8 на F будет лежать большая окружность S^1 , а, значит, по лемме 9 F будет большой сферой в S^{l+p} .

Эта теорема обобщает теорему, доказанную Ферусом [4]: если $p < l - \nu_1$, то изометрическое вложение S^l в S^{l+p} тривиально [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Chern S. S., Lashof R. K. The total curvature of immersed manifolds. — «Amer. J. Math», 1957, № 79, p. 308—313.
2. Chern S. S., Kuiper-N. H. Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space. — «Ann. of math», 1952, № 56, p. 422—430.
3. Otsuki T. On the existence of solutions of quadratic equation and its geometrical application. — «Procs. Japan. Acad.», 1953, № 29, p. 99—100.
4. Ferus D. Totally geodesic foliations. Math. Ann. B. 188, № 4, 1970, p. 313—316.
5. Ferus D. On the type number of hypersurfaces of constant curvature. — «Math. Ann.», Bd. 187. H. 4. 1970, S. 310—316.
6. Топоногов В. А. Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. УМН, 1959, XIV, № 1 (85), с. 87—130.
7. Топоногов В. А. Некоторые экстремальные теоремы римановой геометрии. — «Сибирский матем. журнал». 1967, VIII, № 5, с. 58—64.
8. Борисенко А. А. О строении гиперповерхностей с нулевой мерой Хаусдорфа сферического изображения. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 12. Харьков, 1972, с. 36—45.
9. Борисенко А. А. О строении l -мерных поверхностей с вырожденной второй квадратной формой в n -мерном евклидовом пространстве. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 13. Харьков, 1972, с. 18—27.
10. Борисенко А. А. О классе римановых пространств строго отрицательной кривизны. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 13. Харьков, 1972, с. 15—18.
11. Kinetsu Abe. A characterization of totally geodesic submanifolds in S^n and CP^n by an inequality. — «Tohoku Math. J.», 1971, vol. 23, № 2, p. 219—244.

Поступила 5 июня 1972 г.

ОТКРЫТАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ОПЕРАТОРНЫЕ УЗЛЫ

В настоящей работе изучается дифференцируемое многообразие M , наделенное одновременно структурой риманова пространства V_n и структурой пространства аффинной связности L_n , причем не требуется, чтобы параллельный перенос в пространстве L_n сохранял неизменной метрику $g(X, X)$ в V_n . Если осуществлять параллельный перенос вектора X вдоль линии $\gamma(t)$ в L_n , то производная $\frac{dg(X, X)}{dt}$ в каждой точке p линии γ будет квадратичной формой $m_i(X, X)$ в касательном пространстве M_p . Отсюда следует, что пара геометрий (V_n, L_n) определяет в пространстве M_p совокупность «метрик» $m_Z(X, Y)$.

Тождество $V_n = L_n$ равносильно условию $m_Z \equiv 0$. Поэтому коразмерность пересечения ядер (радикалов) метрик m_Z , когда Z пробегает M_p характеризует степень отклонения геометрии L_n от геометрии V_n .

Вместо того, чтобы работать с метриками m_Z в касательных пространствах M_p , зависящих от положения точки p , удобнее ввести фиксированное евклидово пространство E и в нем задать поле метрик $\mu_Z (Z \in M_p)$, зависящих от положения точки p . Метрики же m_Z получаются из метрик μ_Z с помощью заданного поля линейных отображений $\varphi: M_p \rightarrow E$, $\varphi = \varphi_p$ по формуле $m_Z(X, Y) = \mu_Z(\varphi_p X, \varphi_p Y)$. Эта конструкция приводит нас к понятию открытой геометрии, введенному в п. 1. В частности, полагая $m_Z = g \cdot f(Z)$, где $f(Z)$ — линейная дифференциальная форма, получаем геометрию Вейля [8].

В работе устанавливается связь открытой геометрии с операторным узлом — основным понятием теории несамосопряженных операторов [1—3], что позволяет перебросить мост между открытыми пространствами и замкнутыми физическими системами. Основная идея состоит в том, что изменение метрики $g(X, X)$ при параллельном переносе вектора X в L_n обусловлено в каждой точке взаимодействием с пространством, внешним по отношению к пространству V_n . Более того, из внешнего пространства могут поступать импульсы, изменяющие ход параллельного переноса, а сам перенос, в свою очередь, оказывает влияние на состояние внешнего пространства. При этом должен выполняться закон сохранения метрики: изменение метрики при движении во внутреннем пространстве L_n равно потоку метрики из внутреннего во внешнее пространство. Понятие открытой геометрии противопоставлено здесь замкнутой геометрии пространства, изолированного от внешнего мира.

Нам хотелось бы обратить внимание читателя на пример

открытого евклидова пространства, разобранный в п. 2 и на его механическую модель (п. 3), наглядно иллюстрирующих общую теорию.

1. Основные понятия открытой геометрии

Если в векторном пространстве задана симметричная билинейная форма, то с ее помощью можно ввести скалярное произведение и квадрат длины вектора. Метрика, введенная таким образом, не обязательно является дефинитной.

Пусть M — n -мерное дифференцируемое многообразие; M_q — касательное пространство к M в точке q ; E — r -мерное евклидово пространство [4, 5, 6].

Будем говорить, что на M введено поле индукторов, если для каждого касательного вектора X задана метрика μ_X в E (т. е. симметричная билинейная форма) и для каждой точки $q \in M$ задано линейное отображение φ_q из M_q в E , причем φ_q гладко зависит от q , μ_X — от X и μ_X линейна по X из M_q , т. е. для X_1, X_2 из M_q и вещественных a_1, a_2

$$\mu_{a_1 X_1 + a_2 X_2} = a_1 \mu_{X_1} + a_2 \mu_{X_2}.$$

Симметричную билинейную форму $\text{Ind } \mu_X$, определяемую равенством

$$\text{Ind } \mu_X(Y, Z) = \mu_X(\varphi Y, \varphi Z),$$

где векторы X, Y, Z из M_q , будем называть индуцированной метрикой в M_q .

Пусть M наделено двумя структурами: риманова пространства V_n с метрическим тензором g и пространства аффинной связности ∇ . Обозначим через $\overset{0}{\nabla}$ единственную связность без кручения такую, что

$$\overset{0}{\nabla} g = 0.$$

Параллельный перенос вектора (относительно ∇) не сохраняет его длины и мерой отклонения ∇ от $\overset{0}{\nabla}$ может служить

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} g)(Y, Z) = \frac{dg(Y, Z)}{dt},$$

где Y, Z — векторные поля на кривой γ , параллельные относительно ∇ , а $\dot{\gamma}$ — касательное поле кривой γ .

Изменение длины вектора при параллельном переносе наблюдатель в пространстве V_n вправе объяснить взаимодействием с внешним миром и моделировать его с помощью поля индукторов на многообразии M .

Дадим основное определение.

Риманову метрику g , аффинную связность ∇ и поле индукторов (M, φ, F, μ) будем называть открытой геометрией на M и обозначать $(\nabla, g, M, \varphi, E, \mu)$, если для каждого касательного к многообразию M вектора X

$$\nabla X g = \text{Ind } \mu_X. \quad (1)$$

В координатной записи условие открытой геометрии примет вид

$$\nabla_i g_{jk} = \mu_i(\varphi e_j, \varphi e_k). \quad (2)$$

Всякую пару (∇, g) на многообразии M можно включить в открытую геометрию [3].

Пусть X, Y — векторные поля на многообразии M .

Рассмотрим $N_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$. Как известно, N образует тензорное поле на M . Оно называется тензором аффинной деформации и в координатах принимает вид $N^k_{ij} = \overset{0}{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$. Поясним геометрический смысл оператора N_X . Пусть $\gamma(t)$ — такая гладкая кривая на многообразии, что $\dot{\gamma}(0) = X$. Операторы параллельного переноса вдоль $\gamma(t)$ относительно $\overset{0}{\nabla}$ и ∇ обозначим через $\overset{0}{T}(t)$ и $T(t)$.

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{T}(t)^{-1} T(t) - I}{t} = N_X. \quad (3)$$

В самом деле, выбрав вектор Y из M_q , построим поле $\tilde{Y}(t) = T(t)Y$ на кривой $\gamma(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{T}(t)^{-1} T(t) - I}{t} Y &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{T}(t)^{-1} \tilde{Y}(t) - Y(0)}{t} = \\ &= \overset{0}{\nabla}_X \tilde{Y}|_0 = \overset{0}{\nabla}_X \tilde{Y}|_0 - \nabla_X Y|_0 = N_X Y. \end{aligned}$$

Замечание. Точно также доказывается, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) \overset{0}{T}(t)^{-1} - I}{t} = N_X. \quad (4)$$

Для краткости вместо выражения $g(Y, Z)$ будем иногда писать (Y, Z) . Оператор N_X такой, что для любых Y, Z из пространства M_q

$$(N_X Y, Z) = (Y, N_X Z),$$

называют сопряженным с N_X .

Предложение 1. Имеет место равенство

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = g((N_X + \overset{0}{N}_X)Y, Z). \quad (5)$$

Доказательство. Пользуясь введенными обозначениями и изометричностью оператора $\overset{0}{T}(t)$, получаем

$$\begin{aligned} (\nabla_X g)(Y, Z) &= \frac{d}{dt} g(T(t)Y, T(t)Z)|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} (\overset{0}{T}(t)^{-1} T(t)Y, \overset{0}{T}(t)^{-1} T(t)Z)|_{t=0} = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{d}{dt} T(t)^{-1} T(t) Y, Z \right)_{t=0} + \left(Y, \frac{d}{dt} T(t)^{-1} T(t) Z \right)_{t=0} = \\ = (N_X Y, Z) + (Y, N_X Z) = ((N_X + N_X^*) Y, Z),$$

что и доказывает предложение 1.

Обозначим через $\varphi_X^\dagger$ линейный оператор из E в M_q такой, что для любых векторов Y из M_q и v из E имеет место равенство

$$\mu_X(\varphi_q Y, v) = (Y, \varphi_X^\dagger v).$$

Существует единственный такой оператор. Чтобы найти $\varphi_X^\dagger$, нужно рассмотреть $\mu_X(\varphi_q Y, v)$ как линейную функцию переменного Y и выделить в пространстве M_q тот единственный вектор, скалярное произведение с которым дает эту линейную функцию.

Теперь условие открытой геометрии

$$\nabla_X g = \text{Ind } \mu$$

можно переписать в виде

$$N_X + N_X^* = \varphi_X^\dagger \varphi. \quad (6)$$

Совокупность (A, H, φ, E, μ) , где оператор A отображает H в себя, φ отображает пространство H в E , а μ — метрика в E , причем $A + A^* = \varphi^\dagger \varphi$ называют локальным операторным узлом [1, 2, 3] (H, E — соответственно внутреннее и внешнее пространства узла). Это одно из основных понятий теории несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Формула (6) показывает, что каждому касательному вектору (из M_q) можно сопоставить локальный операторный узел

$$(N_X, M_q, \varphi_q, E, \mu_X)$$

Таким образом, открытую геометрию $(\nabla, g, M, \varphi, E, \mu)$ можно рассматривать как поле локальных операторных узлов на римановом многообразии M .

На римановом многообразии M существует и единственная аффинная связность ∇ без кручения, для которой $\nabla_g = 0$.

В дальнейшем будет использовано следующее более общее.

Предложение 2. Поле индукторов на римановом многообразии однозначно определяет открытую геометрию, связность ∇ которой имеет нулевое кручение.

Доказательство. В координатах задача сводится к отысканию символов Кристоффеля $\Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n)$, симметричных нижним индексам и таких, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^p g_{jp} - \Gamma_{kj}^p g_{ip} = \mu_{kij},$$

а здесь

$$\mu_{kij} = \text{Ind } \mu_k(e_i, e_j).$$

Циклически переставляем индексы и получаем

$$\Gamma_{kij} = \Gamma_{ij}^p g_{pk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] + \frac{1}{2} (\mu_{kij} - \mu_{jik} - \mu_{ikj}). \quad (7)$$

Получены существование, единственность и явные формулы для аффинной связности ∇ в каждой координатной окрестности. Отсюда следует их совпадение на пересечении окрестностей, а значит, существование и единственность искомого объекта связности на многообразии M в целом.

Совершенно аналогично доказывается, что, если на римановом многообразии M задан тензор K типа $(1, 2)$ и поле индукторов, то существует и единственная аффинная связность ∇ с тензором кручения K и $\nabla Xg = \text{Ind } \mu_X$.

2. Пример. Открытое евклидово пространство

Пусть в евклидовом пространстве R_n задано поле индукторов, тогда в силу предложения 2 оно однозначно определяет открытую геометрию без кручения $K_{ij}^m = 0$.

Рассмотрим простейшее поле индукторов в пространстве R_n (Ему будет соответствовать простейшая открытая геометрия). Внешнее пространство E возьмем одномерным. Кроме того, метрики $\mu_i(q)$ и отображение φ_q будем считать независимыми от точки q , т. е. $\mu_i(q)$ и φ_q можно получить из $\mu_i(0)$ и φ_0 параллельным переносом в исходном пространстве R_n .

Любой элемент в E имеет вид

$$u = (u, a)a,$$

где a — орт в пространстве E . Тогда отображение φ можно записать в виде

$$\varphi X = (X, h)a,$$

где h — некоторый элемент из $R_{na} = R_n$, который мы будем называть каналовым элементом.

Очевидно, метрики μ_i в пространстве E имеют вид

$$\mu_i(u, v) = \sigma_i(u, a)(v, a).$$

Здесь σ_i заданные вещественные числа. Легко проверить, что сопряженные отображения φ_i^+ определяются равенствами

$$\varphi_i^+(u) = (u, a)\sigma_i h.$$

Введем вектор σ в пространстве R_n равенством $\sigma = \sigma_i e_i$, где e_i — ортонормированный базис в прямоугольной системе координат пространства R_n . Так как в дальнейшем используются лишь прямоугольные системы координат, то различие между верхними и нижними индексами не является существенным.

В предложении 2 выведены формулы коэффициентов Кристоффеля связности ∇ . Из них получаем $2\Gamma_{jki} = \sigma_i h_j h_k - \sigma_j h_i h_k - \sigma_k h_i h_j$. Упростим Γ_{jki} , выбрав специальный базис в R_n . Пусть вектор X перпендикулярен h и σ . Тогда из вида коэффициентов Кристоффеля получаем $\Gamma_{ijk} X^k = 0$; из этой же формулы следует, что образ оператора Γ_X при любом X лежит в плоскости, натянутой на векторы h и σ . Таким образом, рассматриваемая открытая геометрия является прямой суммой двумерной открытой

геометрии и замкнутого евклидова пространства. (Геометрию будем называть замкнутой, если $\nabla = \nabla^0$ и $\varphi = 0$).

Замечание. Те же рассуждения позволяют открытую евклидову геометрию с r -мерным внешним пространством представить в виде суммы открытой геометрии, размерности, не превосходящей $r + \frac{r(r+1)}{2}$ и замкнутого евклидова пространства.

Выберем в R_n ортонормированный базис, первые два элемента которого равны

$$e_1 = \frac{h}{|h|}, \quad e_2 = \frac{\sigma - (\sigma, e_1)' e_1'}{|\sigma - (\sigma, e_1)' e_1'|}.$$

В этой системе координат матрицы Γ_i имеют вид

$$\Gamma_1 = \frac{|h|}{2} \begin{pmatrix} -(\sigma, h), & -|\sigma \wedge h| \\ |\sigma \wedge h|, & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \frac{|h|}{2} \begin{pmatrix} -|\sigma \wedge h| & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

(матричные элементы с $\max(i, j) > 2$ равны нулю).

Коэффициенты Кристоффеля зависят лишь от $(\sigma, h) \cdot |h|$ и $\sigma \wedge h \cdot |h|$, т. е. от $(\sigma, h) \cdot |h|$ и $\widehat{\text{ctg}}(\sigma h)$. Следовательно, $(\sigma h) \times |h|$ и $\widehat{\text{ctg}}(\sigma h)$ — есть полная система инвариантов пары (∇, g) относительно любых дифференцируемых преобразований системы координат.

Выпишем вид тензора кривизны

$$R_{1211} = \frac{1}{4} (\sigma \wedge h)^2 \cdot h^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — геодезическая линия рассматриваемой геометрии. Тогда, как легко показать,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{|\sigma \wedge h|}{|h|} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{(\sigma h)}{|h|} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \frac{|\sigma \wedge h|}{|h|} = 0,$$

и при решении этого уравнения выделяются три следующих случая:

$$1. \widehat{\text{ctg}}^2(\sigma h) < 8.$$

При этом условии

$$y = \frac{1}{|\sigma \wedge h| \cdot |h|} \ln |\cos \sqrt{|d|} (c_1 - |\sigma \wedge h| \cdot |h| \cdot x)| - \frac{1}{4} \widehat{\text{ctg}}(\sigma h) x + c_2$$

(здесь d — дискриминант квадратного трехчлена

$$f(z) = z^2 + \frac{1}{2} \widehat{\text{ctg}}(\sigma h) z + \frac{1}{2}).$$

Геодезические в этом случае имеют вертикальные асимптоты, расстояние между которыми равно

$$2\pi : (V|d| \cdot |\sigma \wedge h| \cdot |h|).$$

Следовательно, две точки с разностью абсцисс, большей по модулю чем $2\pi : (V|d| \cdot |\sigma \wedge h| \cdot |h|)$, не могут быть соединены геодезической линией (рис. 1).

$$2. \operatorname{ctg}^2(\sigma \wedge h) > 8.$$

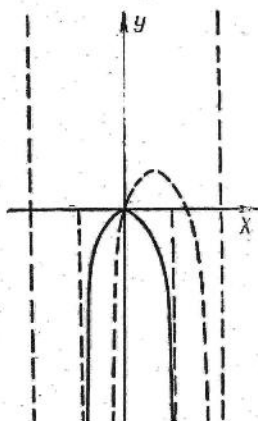


Рис. 1.

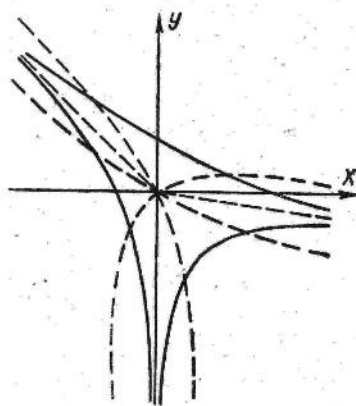


Рис. 2.

Решение в этом случае имеет такой вид:

$$y = \left(-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}(\sigma \wedge h) + V\bar{d} \right) \cdot x + \frac{|h|}{|\sigma \wedge h|} \times \\ \times \ln |1 \pm \exp 2V\bar{d}(c_1 - |\sigma \wedge h| : |h|)| + c_2.$$

Геодезические линии имеют асимптоты трех типов: $x = c$; $y = z_1 x + c$; $y = z_2 x + c$, где z_1 и z_2 — корни уравнения $f = 0$ (рис. 2).

3. $\operatorname{ctg}^2(\sigma \wedge h) = 8$. В этом случае $y = \frac{1}{V^2} x + \ln(c - x) + c_1$. Одна асимптота — вертикальная, а вторая имеет угловой коэффициент $\frac{1}{V^2}$. Во втором и третьем случаях через каждую пару точек плоскости проходит геодезическая линия.

3. Линейные системы, ассоциированные с открытой геометрией

Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая в многообразии M , а γ — ее касательное поле. Уравнения параллельного переноса вектора X (относительно связности ∇) имеют вид

$$\nabla_{\gamma} X = 0; \quad X(0) = X_0.$$

или, по определению тензора N_{γ} ,

$$\nabla_{\gamma}^0 X = N_{\gamma} X, \quad X(0) = X_0.$$

Изменение длины вектора при таком переносе будем изучать с помощью поля локальных узлов на кривой $\gamma(t)$

$$(N_{\gamma}, M_{\gamma(t)}, \varphi_{\gamma(t)}, E, \mu_{\gamma}), \quad (8)$$

а точнее, с помощью ассоциированного с ним объекта иной природы.

Обозначим через $D^1(\gamma)$ пространство полей $X(t)$ (на кривой $\gamma(t)$) с суммируемым квадратом длины вектора, а $L_2(\gamma, E)$ — пространство суммируемых с квадратом функций на γ со значениями в пространстве E .

Определение [2, 3]. Открытой системой $F(\gamma)$, ассоциированной с полем локальных узлов

$$(N_{\gamma}, M_{\gamma}, \varphi_{\gamma}, E, \mu_{\gamma})$$

на кривой γ , называется пара линейных непрерывных отображений

$$M_{\gamma(0)} + L_2(\gamma, E) \xrightarrow{R_{\gamma}} D^1(\gamma),$$

$$M_{\gamma(0)} + L_2(\gamma, E) \xrightarrow{S_{\gamma}} M_{\gamma(1)} + L_2(\gamma, E),$$

определяемых уравнениями

$$\nabla_{\gamma}^+ X(t) = \varphi_{\gamma}^+ u(t), \quad (9)$$

$$X(0) = X_0,$$

$$X(1) = X_1,$$

$$v(t) = u(t) + \varphi X(t).$$

Первые два уравнения позволяют по вектору X_0 из M_0 и по вектор-функции $u(t)$ из $L_2(\gamma, E)$ определить $X(t)$ поле на кривой $\gamma(t)$. Оставшиеся уравнения задают переход к паре (X_1, v) из пространства $M_{\gamma(1)} + L_2(\gamma, E)$.

Оператор S_{γ} называется передаточным оператором системы F_{γ} . Компоненты X_0 и X_1 называются внутренним входом и выходом, а компоненты u и v — внешним входом и выходом системы F_{γ} соответственно; $X(t)$ — внутреннее состояние.

Замечание. Первое из уравнений открытой системы можно записать в виде

$$\nabla_{\gamma}^0 X(t) = N_{\gamma} X(t) + \varphi_{\gamma}^+ u(t). \quad (10)$$

Первым важным следствием этих определений, поясняющим их целесообразность, является закон сохранения метрики.

Теорема 1. Имеет место равенство

$$\int \mu_1(v, v) dx^i - \|X_1\|^2 = \int \mu_1(u, u) dx^i - \|X_0\|^2 \quad (11)$$

(здесь $x^i(t)$ — координатная запись $\gamma(t)$).

Используя условие открытой геометрии и правила ковариантного дифференцирования, докажем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(X(t), X(t)) &= (\nabla_{\dot{t}} g)(X(t), X(t)) + \\ &+ g(\nabla_{\dot{t}} X(t), X(t)) + g(X(t), \nabla_{\dot{t}} X(t)) = \mu_{\dot{t}}(\varphi_{\dot{t}(t)} X(t), \varphi_{\dot{t}(t)} X(t)) + \\ &+ g(\varphi_{\dot{t}}^+ u(t), X(t) + g(h(t), \varphi_{\dot{t}}^+ u(t)) = \mu_{\dot{t}}(u + \varphi X, u + \varphi X) - \\ &- \mu_{\dot{t}}(u, u) = \mu_{\dot{t}}(v, v) - \mu_{\dot{t}}(u, u) \end{aligned}$$

Отсюда закон сохранения метрики получается интегрированием.

Пример. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n_1 свободных материальных точек, и соответствующее ей пространство R_n ($n = 3n_1$) с метрикой

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_1^n a_m dx_m^2$$

($a_1 = a_2 = a_3 \dots; a_{n-2} = a_{n-1} = a_n$ — массы точек) и обычным евклидовым параллельным переносом. Для евклидова пространства R_n все метрики $m_z = 0$, однако это пространство можно нетривиальным образом дополнить до открытой геометрии, тесно связанной с механикой Ньютона. Для этого введем внешнее пространство $E = R_n + R_n$ и зададим в нем метрики

$$\mu_k(u, v) = \frac{1}{2} (u_k^1 v_k^2 + u_k^2 v_k^1),$$

где $u = (u^1, u^2)$, $v = (v^1, v^2)$ — элементы пространства E . Отображение φ возьмем в виде $\varphi X = (X, 0)$. Условие $m_z(X, Y) = \mu_z \times \times (\varphi X, \varphi Y)$ выполнено.

Легко проверить, что отображение $\varphi_k^+(u): E \rightarrow R_n$ имеет вид

$$\varphi_k^+(u) = \frac{1}{m_k} (0, 0, \dots, u_k^2, \dots, 0).$$

Уравнения ассоциированной открытой системы имеют вид

$$a_k \frac{dX_k}{dt} = F_k, \quad v_k^1 = u_k^1 + X_k^t, \quad v_k^2 = u_k^2,$$

где $F_k = u_k^2 \dot{x}_k$. Допустим, что $F_k = F_k(x, \dot{x})$ — функция от координат и скоростей, и будем искать те линии, для которых $X(t) = \dot{\gamma}(t)$. Тогда получим уравнения движения $a_k \ddot{x}_k = F_k(x, \dot{x})$. Легко проверить, что закон сохранения метрики (теорема I) в рассматриваемом случае превращается в закон сохранения механической энергии: $K_1 - K_0 = A$, где $K = \frac{1}{2} \sum a_m \dot{x}_m^2$ — кинетическая энергия; $A = \int F_k dx_k$ — работа сил.

Две аффинные связности ∇ и $\tilde{\nabla}$ на римановом многообразии M назовем двойственными, если их тензоры аффинной деформации связаны соотношением

$$\tilde{N}_X = -N_X^* \quad (12)$$

для любого касательного вектора X .

Определение аффинных связностей в терминах тензоров аффинной деформации оправдано, так как формулой

$$\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y - N_X Y$$

между ними устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Дадим геометрическое описание двойственных связностей с помощью операторов $T(t)$ и $\tilde{T}(t)$ параллельного переноса вектора по кривой $\gamma(t)$ [относительно этих связностей].

Предложение 3. Операторы $T(t)$ и $\tilde{T}(t)$ удовлетворяют соотношению

$$\tilde{T}(t) = [T(t)^*]^{-1}. \quad (13)$$

В самом деле, достаточно доказать соотношение

$$\overset{0}{T}(t)^{-1} \tilde{T}(t) = \overset{0}{T}(t)^{-1} [T(t)^*]^{-1}.$$

Оператор-функции в обеих частях равенства при $t=0$ равны единице. Продифференцируем их

$$\frac{d}{dt} [\overset{0}{T}(t)^{-1} \tilde{T}(t)] = \overset{0}{T}(t)^{-1} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{T}(t, t+\tau)^{-1} \tilde{T}(t, t+\tau) - I}{\tau} \tilde{T}(t).$$

Здесь $\overset{0}{T}(t, t+\tau)$ и $\tilde{T}(t, t+\tau)$ операторы параллельного переноса вектора из $M_{\gamma(t)}$ в $M_{\gamma(t+\tau)}$. Вычисляя предел по формуле (3), получаем

$$\frac{d}{dt} [\overset{0}{T}(t)^{-1} \tilde{T}(t)] = \overset{0}{T}(t)^{-1} \tilde{N}_\gamma \tilde{T}(t) = -\overset{0}{T}(t)^{-1} N_\gamma^* \tilde{T}(t).$$

Аналогично производная правой части равенства равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\overset{0}{T}(t)^{-1} [T(t)^*]^{-1}] &= -\overset{0}{T}(t)^{-1} [T(t)^*]^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} T(t)^* \overset{0}{T}(t) \right\} \times \\ &\times \overset{0}{T}(t)^{-1} [T(t)^*]^{-1} = -\overset{0}{T}(t)^{-1} [T(t)^*]^{-1} \{ T(t)^* N_\gamma^* \overset{0}{T}(t) \} \times \\ &\times \overset{0}{T}(t)^{-1} [T(t)^*]^{-1} = -\overset{0}{T}(t)^{-1} N_\gamma [T(t)^*]^{-1} \end{aligned}$$

Итак, левая и правая части доказываемого равенства удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} W(t) = -\overset{0}{T}(t)^{-1} N_\gamma^* \overset{0}{T}(t) W(t)$$

и совпадают при $t=0$. Значит, они совпадают при любом t , и предложение 3 доказано.

Если пара $(\tilde{\gamma}, g)$ включена в открытую геометрию

$$(\gamma, g, M, \varphi, E, \mu), \text{ т. е. } N_X + N_X^* = \varphi_X^+ \varphi,$$

то двойственная пара $(\tilde{\gamma}, g)$ оказывается включенной в геометрию $(\tilde{\gamma}, g, M, \varphi, E, -\mu)$. В самом деле

$$\tilde{N}_X + \tilde{N}_X^* = -(N_X + N_X^*) = \varphi_X^+ \varphi.$$

Рассмотренные открытые геометрии будем называть двойственными, как и открытые системы $F(\gamma)$ и $\tilde{F}(\tilde{\gamma})$, определяемые ими на каждой кривой многообразия M .

Следующее предложение [3] устанавливает связь между входами, выходами и внутренними состояниями двойственных открытых систем $F(\gamma)$ и $\tilde{F}(\tilde{\gamma})$, где $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. Кривые отличаются лишь направлением обхода.

Предложение 4. Если вход системы $\tilde{F}(\tilde{\gamma})$ задан равенствами

$$\tilde{X}_0 = -\overset{0}{T}(1)^{-1} X_1, \quad \tilde{u}(t) = v(t),$$

где X_1, v — внутренний и внешний выход системы $F(\gamma)$, то выход системы $\tilde{F}(\tilde{\gamma})$ и ее внутреннее состояние определяется равенствами

$$\tilde{X}_1 = -\overset{0}{T} X_0, \quad \tilde{v}(t) = u(t), \quad \tilde{X}(t) = -X(t).$$

Это предложение показывает, что вход и выход исходной открытой системы $F(\gamma)$ становятся выходом и входом двойственной системы $\tilde{F}(\tilde{\gamma})$.

Доказательство см. в [3].

Первые из уравнений открытой системы $F(\gamma)$ имеют вид

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X(t) = \varphi_{\dot{\gamma}}^+ u(t); \quad X(0) = X_0$$

и при нулевом внешнем входе ($u(t) = 0$) совпадают с уравнениями параллельного переноса. Однако внешний выход $v(t) \neq 0$, т. е. даже в этих случаях информация о переносе поступает во внешнее пространство, позволяя следить за изменением $|h(t)|$ в пути.

В предположении $u(t) = 0$ закон сохранения метрики дает

$$\int \mu_i(v, v) dx^i = |X_1|^2 - |T(1)^{-1} X_1|^2,$$

а аналогичное равенство для двойственной открытой системы силу предложения 4 следующее:

$$-\int \mu_i(v, v) dx^i = |X_1|^2 - |T^*(1) X_1|^2.$$

Таким образом,

$$(T(1)^* T(1) X_1, X_1) - (X_1, X_1) = \int \mu_i(v, v) dx^i.$$

Здесь

$$v(t) = u(t) + \varphi X(t) = \varphi X(t) = \varphi T(t, 1)^{-1} X_1 = \varphi T(t, 1)^* X_1.$$

Остается ввести отображение Φ пространства $M_{\gamma(1)}$ в $L_2(\gamma, E)$ формулой

$$[\Phi X](t) = \varphi_{\gamma(t)} T(t, 1)^* X_1.$$

Закон сохранения метрики в случае нулевого внешнего входа принимает вид

$$T(1) T(1)^* - I = \Phi + \Phi, \quad (14)$$

где Φ^+ — оператор, сопряженный с Φ относительно интегрально-метрики $\int \mu_i dx^i$ в $L_2(\gamma, E)$; $T(t, 1)$ — оператор параллельного переноса из $\gamma(t)$ в $\gamma(1)$ относительно связности ∇ .

Покажем, что

$$\Phi^+ u = \int T(t, 1) \varphi_i^+ u dx^i.$$

Действительно,

$$\mu(\Phi X, u) = \int \mu_i(\varphi T(t, 1)^* X, u) dx^i = (X, \int T(t, 1) \varphi_i^+ u dx^i).$$

Здесь вектор u из E , X из $M_{\gamma(1)}$.

Итак, оператор $T(1)$ параллельного переноса из $M_{\gamma(0)}$ в $M_{\gamma(1)}$ относительно связности ∇ связан с описанным выше оператором Φ из $M_{\gamma(0)}$ в $M_{\gamma(1)}$ и метрикой $\mu = \int \mu_i dx^i$ в $L_2(\gamma, E)$ соотношением

$$T(1) T(1)^* - I = \Phi + \Phi. \quad (15)$$

Дадим общее определение: совокупность

$$(H_0, T, H_1, \Phi, E, \mu),$$

где T — оператор из H_0 в H_1 ; Φ — линейно отображает H_1 в E ; μ — метрика в E , называется метрическим узлом, если

$$TT^* - I = \Phi + \Phi. \quad (16)$$

Понятие, к которому мы пришли, рассматривая изменение длины вектора при параллельном переносе, т. е. отклонение T от изометричности, является одним из основных понятий теории унитарных операторов [3].

Каждому фиксированному элементу u внешнего пространства метрического узла сопоставим отображение H_0 в H_1 по формуле

$$h_1 = T_1 h_0 + \Phi^+ u$$

и назовем его движением. Пусть $(H_1, T_1, H_2, \Phi_1, E_1, \mu_1)$ — другой метрический узел; u_1 — элемент его внешнего пространства E_1 . Тогда сопоставленное ему отображение H_1 в H_2 имеет вид

$$h_2 = T_1 h_1 + \Phi_1^+ u_1.$$

Рассмотрим композицию обоих движений:

$$h_2 = T_1 h_1 + \Phi_1^+ u_1 = T_1 (T h_0 + \Phi^+ u) + \Phi_1^+ u_1 = T_1 T h_0 + T_1 \Phi^+ u + \Phi_1^+ u_1$$

С другой стороны, это отображение H_0 в H_2 можно получить с помощью совокупности

$$(H_0, T_1 T, H_1, \Phi_2 = \Phi T_1^* + \Phi_1, E + E_1, \mu + \mu_1) \quad (1)$$

и элемента $u + u_1$ ее внешнего пространства.

Покажем, что для этого набора пространств и операторов выполнено условие (16) метрического узла и назовем полученный узел произведением двух исходных

$$\begin{aligned} T_1 T (T_1 T)^* - I &= T_1 (T T^*) T_1^* - I = T_1 (\Phi^+ \Phi + I) T_1^* - I = \\ &= T_1 \Phi^+ \Phi T_1 + (T_1 T_1^* - I) = T_1 \Phi^+ \Phi T_1 - \Phi_1^+ \Phi_1, \end{aligned}$$

а это и есть оператор $\Phi_2^+ \Phi_2$. Условие узла выполнено. Равенство

$$T(1) T(1)^* - I = \Phi + \Phi,$$

полученное ранее (15), означает, что параллельный перенос вектора вдоль кривой $\gamma(t)$ удалось включить в метрический узел

$$(M_{\gamma(0)}, T(1), M_{\gamma(1)}, \Phi, L_2(\gamma, E), \int \mu_i dx^i). \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что разбиению кривой γ на две связанные части γ_1 и γ_2 соответствует разложение метрического узла на произведение (определенное выше) метрических узлов на γ_1 и γ_2 . Поэтому говорят о мультипликативном семействе метрических узлов на каждой кривой многообразия M [3].

Вернемся к примеру открытого евклидова пространства, рассмотренному во втором параграфе, и сопоставим каждому вектору X локальный узел с внутренним оператором

$$\Gamma_X = \Gamma_i X_i$$

(в данном случае $N_X = -\Gamma_X$, так как $\overset{0}{\Gamma}_X = 0$). Уравнения открытой системы принимают вид

$$\frac{d}{dt} Y + \Gamma_X Y = \Phi_X^+ Y(t), \quad (1)$$

$$Y(0) = Y_0,$$

$$Y(1) = Y_1,$$

$$v(t) = u(t) + \varphi Y(t).$$

Подадим на внешний вход открытой системы сигнал

$$u(t) = u e^{\lambda t}.$$

Будем искать решения уравнений (19) того же вида

$$Y(t) = Y e^{\lambda t}, \quad v(t) = v e^{\lambda t}.$$

Из уравнений

$$\lambda Y e^{\lambda t} + \Gamma_X Y e^{\lambda t} = \varphi_X^\dagger u e^{\lambda t},$$

$$v e^{\lambda t} = u e^{\lambda t} + \varphi Y e^{\lambda t}$$

находим

$$Y = (\lambda I + \Gamma_X)^{-1},$$

$$v = [I + \varphi (\lambda I + \Gamma_X)^{-1} \varphi_X^\dagger] u.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае передаточный оператор следующий:

$$S(x, \lambda) = I + \varphi (\lambda I + \Gamma_X)^{-1} \varphi_X^\dagger.$$

Он называется характеристической функцией исходного логического узла [2, 3].

В случае одномерного внешнего пространства значения $S(x, \lambda)$ — числа. Используя вид Γ_X , вычисляем характеристическую функцию открытого евклидова R_n с одномерным внешним пространством.

Чтобы обратить матрицу $\Gamma_X + \lambda I$, найдем ее детерминант.

Имеем

$$\Gamma_X + \lambda I = \frac{|h|}{2} \begin{vmatrix} -(\sigma, h) X_1 - |\sigma \wedge h| X_2 + \lambda, & -|\sigma \wedge h| X_1 \\ |\sigma \wedge h| X_1, & \lambda \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Отсюда, заменяя

$$|h| \cdot X_1 = (h, X),$$

$$-(\sigma, h) |h| X_1 - |\sigma \wedge h| X_2 |h| = -(\sigma, X) |h|^2,$$

находим

$$\det (\Gamma_X + \lambda I) = \lambda^2 - \frac{\lambda}{2} h^2 (\sigma, X) + \frac{1}{4} |\sigma \wedge h|^2 (X, h)^2.$$

Следовательно,

$$((\Gamma_X + \lambda I)^{-1} e_1', e_1') = \frac{\lambda}{\lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda h^2 (\sigma, h) + \frac{1}{4} |\sigma \wedge h|^2 (X, h)^2}$$

и, наконец,

$$S(X, \lambda) = \frac{\lambda^2 + \frac{1}{2} h^2 (\sigma, X) \lambda + \frac{1}{4} |\sigma \wedge h|^2 (X, h)^2}{\lambda^2 - \frac{1}{2} h^2 (\sigma, X) \lambda + \frac{1}{4} |\sigma \wedge h|^2 (X, h)^2}. \quad (21)$$

Механическая аналогия. Простейшим примером замкнутой механической системы (осциллятор) может служить вертикальная пружина, на верхнем конце которой находится тело массы m , а нижний конец закреплен.

Присоединяем к одной из точек тела горизонтальную полубесконечную струну и допустим, что по этой струне движется волна от источника по направлению к телу (падающая волна).

Когда волна достигнет тела, оно начнет перемещаться по вертикали, что, в свою очередь, вызовет в струне отраженную волну, движущуюся в противоположном направлении. Такая система, состоящая из осциллятора, соединенного со струной, является примером открытой системы, в которой струна играет роль канала связи с внешними по отношению к осциллятору телами.

Уравнение малых колебаний тела m имеет вид

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial y}{\partial x} - ky \quad (2)$$

(T — натяжение струны, k — жесткость пружины). Ограничиваясь гармоническими колебаниями, движение струны можно представить в виде суммы падающей и отраженной волн.

$$y(x, t) = A \left(e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} - S(\omega) e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \right),$$

где $S(\omega)$ — коэффициент отражения.

Подставляя $y(x, t)$ в уравнение (22), находим выражение для $S(\omega)$:

$$S = \frac{\omega^2 + iTc^{-1}\omega - km^{-1}}{\omega^2 - iTc^{-1}\omega - km^{-1}}. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (21) и (23), убеждаемся в том, что характеристическая функция открытой евклидовой плоскости совпадает с коэффициентом отражения механической модели при условии, что параметры системы связаны с параметрами открытой плоскости соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{k}{m} &= \frac{1}{4} (h, \xi)^2 (\sigma \wedge h)^2, \\ \frac{T}{c} &= -\frac{1}{2} (\sigma, \xi) h^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Указанная аналогия легко распространяется и на неустановившееся движение. Оказывается, что при этом на входе должна задаваться падающая волна, а на выходе ищется отраженная волна. Если внутреннее состояние системы рассматривать в двумерном фазовом пространстве $x_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \dot{y}$, $x_2 = \sqrt{\frac{k}{2}} y$, то полная механическая энергия осциллятора

$$\frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y^2 = x_1^2 + x_2^2$$

совпадает с евклидовой метрикой этого пространства. Параллельному переносу вектора вдоль прямой линии будет соответствовать движение открытого осциллятора при условии, что отсутствует падающая волна. Энергия при этом излучается в струну и, следовательно, длина соответствующего вектора при параллельном переносе убывает.

4. Узел кривизны

Как известно, при параллельном переносе вектора по замкнутому бесконечно малому контуру его отклонение от начального положения определяется тензором кривизны.

Но параллельный перенос вектора был включен в метрический узел

$$(M_{\gamma(0)}, T_{\gamma}, M_{\gamma(1)}, \Phi, L_2(\gamma, E), \int \mu_i dx^i).$$

Что будет соответствовать этому узлу, когда контур стянется в точку?

В левой части условия метрического узла (16) стоит оператор $TT^* - I$. Пусть $T(\varepsilon)$ — гладкая оператор-функция параметра ε и оператор $T(0) = I$. Тогда, дифференцируя выражение

$$T(\varepsilon)T(\varepsilon)^* - I$$

при $\varepsilon = 0$, получаем $R + R^*$, где оператор $R = T'(0)$.

Естественно ожидать, что дифференцирование семейства метрических узлов даст локальный узел, в случае параллельного переноса по бесконечно малому контуру тензор кривизны окажется включенным в локальный операторный узел.

Перейдем от наводящих соображений к построению узла кривизны.

Рассмотрим открытую геометрию $(\nabla, g, M, \varphi, E, \mu)$ на многообразии M . Пусть p — точка из M ; M' — ориентированное двумерное подмногообразие, проходящее через p в направлении b (координатная запись нормированного бивектора $b = b^i j$).

Пусть $\gamma_\varepsilon(t)$ — система замкнутых контуров ($\gamma_\varepsilon(0) = \gamma_\varepsilon(1) = p$) на подмногообразии M' , непрерывно стягивающихся к точке p ($\gamma_0(t) \equiv 1$) и зацветающих область D' в M' . Потребуем, чтобы функции $\varepsilon(q)$ и $t(q)$, где $0 < \varepsilon < 1$, $0 < t < 1$, были дифференцируемы и образовывали систему координат в M' . Кроме того, будем считать, что длина контура γ_ε есть малая порядка ε , а его площадь $\sigma(\varepsilon)$ убывает (при $\varepsilon \rightarrow 0$) как ε^2 .

Введем $T_\varepsilon(t_1, t_2)$ — оператор параллельного переноса по γ_ε из $\gamma_\varepsilon(t_1) = q_1$ в $\gamma_\varepsilon(t_2) = q_2$ (направление движения по замкнутому контуру выбираем согласно ориентации M').

Оператор $T_\varepsilon(t_1, t_2)$ был включен в метрический узел (18).

Удобнее перейти к новому однопараметрическому семейству метрических узлов

$$(M_p, T_\varepsilon(0, 1), M_p, \Phi_1, C(E), \mu_{1\varepsilon}). \quad (25)$$

В качестве $C(E)$ возьмем пространство непрерывных в замыкании D' функций $f(q)$ со значениями в E , удовлетворяющих в точке p условию типа гладкости:

$$|f(q) - \bar{f}(q)| \leq M_{f, \bar{f}} \sigma(\varepsilon(q)). \quad (26)$$

Здесь $\bar{f}(q)$ — гладкая функция в окрестности D точки p в многообразии M . Класс функций $\bar{f}(p)$, удовлетворяющих

равенству (36), обозначим $J(f)$. Его удобно характеризовать общим значением $\bar{f}(p)$ функций в точке p и их производными $X_1 \bar{f}, X_2 \bar{f}$ по направлениям X_1, X_2 , образующим базис M_p .

Метрику $\mu_{1\epsilon}$ в пространстве $C(E)$ введем формулой

$$\mu_{1\epsilon}(f_1, f_2) = \int_{\gamma(\epsilon)} \mu_i(f_1, f_2) dx^i. \quad (2)$$

Для фиксированных f_1 и f_2 из $C(E)$ вычислим

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_{1\epsilon}(f_1, f_2)}{\sigma(\epsilon)}.$$

Для этого введем гладкие в области D функции $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$, аппроксимирующие f_1 и f_2 .

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{1\epsilon}(f_1, f_2) &= \mu_{1\epsilon}(\bar{f}_1, \bar{f}_2) + \mu_{1\epsilon}(f_1 - \bar{f}_1, f_2) + \mu_{1\epsilon}(f_1, f_2 - \bar{f}_2) + \\ &+ \mu_{1\epsilon}(f_1 - \bar{f}_1, f_2 - \bar{f}_2). \end{aligned}$$

В каждом из трех последних слагаемых участвует либо $f_1 - \bar{f}_1$, либо $f_2 - \bar{f}_2$, которые убывают как $\sigma(\epsilon(q))$.

Следовательно,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int \mu_i(f_1 - \bar{f}_1, f_2) dx^i}{\sigma(\epsilon)} = 0. \quad (28)$$

Значит,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int \mu_i(f_1, f_2) dx^i}{\sigma(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int \mu_i(\bar{f}_1, \bar{f}_2) dx^i}{\sigma(\epsilon)}.$$

Преобразуя правую часть равенства по формуле Стокса переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_{1\epsilon}(f_1, f_2)}{\sigma(\epsilon)} = [d\mu(\bar{f}_1, \bar{f}_2)]_{ij} b_{1p}^{ij}. \quad (29)$$

Здесь $f_1, f_2, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ фиксированы и $d\mu(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ — внешняя производная дифференциальной формы $\mu_i(\bar{f}_1, \bar{f}_2) dx^i$.

Оператор Φ_1 , отображающий M_p в E , определим формулой

$$[\Phi_1 X]_q = \varphi_q T_\epsilon(t, 1)^* X. \quad (30)$$

Нужно лишь убедиться, что функция, во-первых, непрерывна и во-вторых, удовлетворяет условию типа гладкости в точке p .

Пусть T_γ — оператор параллельного переноса вдоль геодезической линии, соединяющей $q_2 = \gamma_{\epsilon_2}(t_2)$ и $q_1 = \gamma_{\epsilon_1}(t_1)$. Заметим, что

$$T_{\epsilon_2}(t_2, 1)^* = T_\gamma^* T_{\epsilon_1}(t_1, 1)^* + O(\sigma(\epsilon_1, \epsilon_2)),$$

где $\sigma(\epsilon_1, \epsilon_2)$ — площадь луночки. Но

$$[\Phi_1 X]_{q_2} - [\Phi_1 X]_{q_1} = [\varphi_{q_2} T_{\epsilon_2}(t_2, 1)^* - \varphi_{q_1} T_{\epsilon_1}(t_1, 1)^*] X,$$

а оператор φ_q непрерывен по q . Следовательно, функция $[\Phi_1 X]_q$ непрерывна.

Для построения гладкой функции, аппроксимирующей $\varphi_q T_*(t, 1)^* X$, разнесем вектор X из точки p по геодезическим с помощью параллельного переноса относительно связности $\tilde{\nabla}$.

Получено поле $X_q = \tilde{T}(p, q) X$. Покажем, что $\varphi_q X_q$ — иско-
мая гладкая функция;

$$|\varphi_q T_*(t, 1)^* X - \varphi_q \tilde{T}(p, q) X| \leq \|\varphi_q\| \cdot \|T_*(t, 1)^* - \tilde{T}(p, q)\| \cdot |X|.$$

Но $\|\varphi_q\|$ ограничена, а

$$\|T_*(t, 1)^* - \tilde{T}(p, q)\| \leq \|T_0 - I\| \cdot \|T(q, p)^*\|.$$

Здесь T_0 — оператор параллельного переноса из q в q по замкнутому контуру, образованному кривой γ_* и геодезической — из p в q .

Площадь этого контура не превосходит $\sigma(\varepsilon(q))$ — площади, охваченной контуром γ_* . Следовательно, $\|T_0 - I\|$ не превосходит $M\sigma(\varepsilon(q))$ и

$$|\Phi_1 X - \varphi_q \tilde{T}(p, q) X| \leq M_1 \sigma(\varepsilon(q)).$$

Итак, корректность определения оператора Φ_1 доказана. Получим теперь вид класса $J(\Phi_1 X)$. Нужно отобрать значение $\Phi_1 X$ в точке p и производные в направлениях X_1 и X_2 :

$$[\Phi_1 X]_q = \varphi_q X_q;$$

$$X_1(\varphi_q X_q) = (\tilde{\nabla}_{X_1} \varphi_q) \cdot X + \varphi_p \tilde{\nabla}_{X_1} X_q = (\tilde{\nabla}_{X_1} \varphi_p) X;$$

$$X_2(\varphi_q X_q) = (\tilde{\nabla}_{X_2} \varphi_p) X.$$

Итак,

$$J(\Phi_1 X) = (\varphi_p X, \tilde{\nabla}_{X_1} \varphi_p X, \tilde{\nabla}_{X_2} \varphi_p X),$$

т. е.

$$J(\Phi_1) = (\varphi_p, \tilde{\nabla}_{X_1} \varphi_p, \tilde{\nabla}_{X_2} \varphi_p) \quad (31)$$

Отметим, что

$$\mu_{1*}(\Phi_1 X, \Phi_1 X) = \mu_*(\Phi_* X, \Phi_* X)$$

по построению μ_{1*} и Φ_1 . Другими словами

$$\Phi_{1*}^+ \Phi_1 = \Phi_*^+ \Phi_*$$

и, следовательно,

$$T_*(0, 1) \cdot T_*(0, 1)^* - I = \Phi_{1*}^+ \Phi_1.$$

Значит,

$$(M_p, T_*(0, 1), M_p, \Phi_1, C(E), \mu_{1*})$$

образуют однопараметрическое семейство метрических узлов, причем от ε зависит лишь оператор во внутреннем пространстве и метрика $\mu_{1\varepsilon}$.

Хорошо известно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T_\varepsilon(0, 1) - T_0(0, 1)}{\sigma(\varepsilon)} = [R_{ij}^m b^{ij}] = R_{ij} b^{ij}.$$

Но ранее мы показали, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_{1\varepsilon}(\bar{f}_1, \bar{f}_2) - \mu_{10}(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\sigma(\varepsilon)} = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_{1\varepsilon}(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\sigma(\varepsilon)} = [d\mu(\bar{f}_1, \bar{f}_2)]_{ij} b^{ij}. \end{aligned}$$

Следовательно, как было отмечено в начале параграфа, совокупность

$$(R_{ij} b^{ij}, M_p, \Phi_1, C(E), [d\mu(\bar{f}_1, \bar{f}_2)]_{ij} b^{ij}) \quad (32)$$

является локальным узлом.

Но во внешнем пространстве этого узла много лишних функций. Пусть $\bar{f}_1$ принадлежит $C(E)$ и $J(\bar{f}_1) = 0$, т. е.

$$\bar{f}_1(p) = 0, X_1 \bar{f}_1(q) = 0, X_2 \bar{f}_1(q) = 0.$$

Тогда, как легко видеть, для любой функции $\bar{f}_2$ из $C(E)$

$$[d\mu(\bar{f}_1, \bar{f}_2)]_{ij} b^{ij} = 0,$$

т. е. подпространство функций $\bar{f}$ из $C(E)$, для которых $J(\bar{f}) = 0$ лежит в радикале внешней метрики.

Профакторизуем $C(E)$ по этому подпространству [не будем различать $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ из $C(E)$, если $J(\bar{f}_1) = J(\bar{f}_2)$]. Фактор-пространство естественно отождествляется с пространством классов $J(\bar{f})$ гладких функций, совпадающих в точке p вместе с производными по направлениям из M'_p ; обозначим его

$$J^1(M'_p, E),$$

$$J(\bar{f}) = (\bar{f}(p), X_1 \bar{f}, X_2 \bar{f}).$$

Результат домножения Φ_1 на оператор факторизации обозначим Φ_R . Теперь элемент $\Phi_R X$ уже принадлежит пространству $J^1(M'_p, E)$, и из (31)

$$\Phi_R X = (\varphi_p X, \tilde{\nabla}_{X_1} \varphi_p X, \tilde{\nabla}_{X_2} \varphi_p X).$$

Локальный узел

$$(R_{ij} b^{ij}, M_p, \Phi_R, J(M'_p, E), \mu_R), \quad (33)$$

где μ_R — факорметрика, назовем узлом кривизны.

Внешнее пространство этого узла жестко связано с двумерным направлением b^{ij} подмногообразия M' в точке p . Вид оператора Φ_R и метрики μ_R помогает устранить этот недостаток

Назовем две гладкие функции в D со значениями в E эквивалентными, если они совпадают в точке p вместе со всеми частными производными первого порядка. Элементы получаемого факторпространства $J(M_p, E)$ будем записывать в виде

$$(\bar{f}, d\bar{f}) = \left(\bar{f}(p), \frac{\partial \bar{f}(p)}{\partial x^1}, \frac{\partial \bar{f}(p)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial \bar{f}(p)}{\partial x^n} \right).$$

Оператор Φ_{1R} введем формулой

$$\Phi_{1R} = (\varphi_p, \tilde{\nabla}_1 \varphi_p, \tilde{\nabla}_2 \varphi_p, \dots, \tilde{\nabla}_n \varphi_p),$$

а метрику μ_I — формулой

$$\mu_I(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = [d\mu(\bar{f}_1, \bar{f}_2)]_{|p|I},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \mu_I(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = & \left(\frac{\partial \mu_I}{\partial x^j} - \frac{\partial \mu_I}{\partial x^i} \right) (\bar{f}_1(p), \bar{f}_2(p)) + \mu_I(\bar{f}_1(p), \frac{\partial \bar{f}_2(p)}{\partial x^j}) + \\ & + \mu_I\left(\frac{\partial \bar{f}_1(p)}{\partial x^i}, \bar{f}_2(p)\right) - \mu_I(\bar{f}_1(p), \frac{\partial \bar{f}_2(p)}{\partial x^i}) - \\ & - \mu_I\left(\frac{\partial \bar{f}_1(p)}{\partial x^i}, \bar{f}_2(p)\right). \end{aligned}$$

Отождествив $J^1(M_p, E)$ с пространством пар $(f(p), d\bar{f}(p))$ и обозначив это пространство через

$$E + L(M_p, E),$$

получаем для каждого бивектора b локальный операторный узел

$$(R_{ij}b^{ij}, M_p, \varphi_p + \tilde{\nabla}\varphi_p, E + L(M_p, E), \mu_{ij}b^{ij}).$$

Назовем и его узлом кривизны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 288 с.
2. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. М., «Наука», 1966. 300 с.
3. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков, Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 160 с.
4. Постников М. М. Введение в теорию Морса. М., «Наука», 1971. 568 с.
5. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. «Наука», М., 1967. 664 с.
6. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., «Мир», 1964. 533 с.
7. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия. Г.И.Ф.М.Л., М., 1963. 538 с.
8. Эддингтон А. С. Теория относительности. Л.—М., ГТТИ, 1934. 508 с.

Поступила 19 мая 1972 г.

ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ГЛАДКИХ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе [1] показана однозначная определенность замкнутых выпуклых изометричных гиперповерхностей n -мерного эллиптического пространства в классе C^∞ . Целью настоящей работы является доказательство однозначной определенности замкнутых выпуклых изометричных гиперповерхностей n -мерного эллиптического пространства в классе C^1 методом, предложенным А. В. Погореловым [2]. Частично этот метод использован в работе [1].

Имеет место

Теорема. *Гладкие замкнутые выпуклые изометричные гиперповерхности n -мерного эллиптического пространства, целиком лежащие в открытой полугиперсфере, равны.*

Доказательство основано на сопоставлении паре замкнутых гладких выпуклых изометричных гиперповерхностей F_1 и F_2 эллиптического пространства R_n пары замкнутых выпуклых изометричных гладких гиперповерхностей Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства E_n , находящегося с R_n в геодезическом соответствии.

Будем рассматривать сферическую модель эллиптического пространства, подчинив вейерштрассовы координаты x^i ($i = 0 \dots n$) условию $x^0 > 0$. Обозначим эту часть пространства R_n^0 .

Пусть x_1^i и x_2^i — координаты точек, соответствующих по изометрии на F_1 и F_2 . Обозначим Φ_1 и Φ_2 гиперповерхности евклидова пространства E_n^0 ($x_0 = 0$), задаваемые уравнениями

$$y_1 = \frac{x_1 - e_0(x_1 e_0)}{e_0(x_1 + x_2)}, \quad (1)$$

$$y_2 = \frac{x_2 - e_0(x_2 e_0)}{e_0(x_1 + x_2)},$$

где e_0 — единичный вектор по оси x^0 евклидова пространства E_{n+1} .

Будет показано, что паре замкнутых гладких выпуклых изометричных гиперповерхностей F_1 и F_2 эллиптического пространства можно сопоставить пару Φ_1 и Φ_2 замкнутых изометричных гладких выпуклых гиперповерхностей евклидова пространства. А так как изометричные замкнутые выпуклые гладкие гиперповерхности евклидова пространства конгруэнтны [3], то конгруэнтность гиперповерхностей F_1 и F_2 эллиптического пространства следует из леммы 1.

Пусть Φ_1 и Φ_2 — конгруэнтные фигуры в E_n^0 , B — движение этого пространства, переводящее Φ_1 в Φ_2 . Пусть задано отображение S , ставящее в соответствие каждой точке y_1 фигуры Φ_1 точку Sy_1 эллиптического пространства

$$Sy_1 = \rho(2y_1 + e_0(1 + (By_1)^2 - y_1^2)) \quad (2)$$

(ρ — нормирующий множитель) и отображение S' фигуры Φ_2

$$S'y_2 = \rho(2y_2 + e_0(1 + (B^{-1}y_2)^2 - y_2^2)). \quad (3)$$

Тогда отображения S и S' являются геодезическими отображениями; отображение Ω фигуры $S\Phi_1$ на фигуру $S'\Phi_2$ в эллиптическом пространстве, при котором сопоставляются точки Sy и $S'By$ этих фигур, является движением, а, следовательно, сами фигуры $S\Phi_1$ и $S'\Phi_2$ конгруэнтны; соответствия пар изометричных фигур в эллиптическом и евклидовом пространствах, устанавливаемые формулами (1), (2), (3) взаимно обратны.

Эта лемма для трехмерного случая доказана А. В. Погореловым [2], а для случая n измерений — в [1].

Теперь покажем, что паре замкнутых гладких выпуклых изометрических гиперповерхностей F_1 и F_2 эллиптического пространства можно сопоставить пару Φ_1 и Φ_2 замкнутых изометричных гладких выпуклых гиперповерхностей евклидова пространства. Выпуклые гиперповерхности F_1 и F_2 с помощью движения расположим в области R_n^0 , точку $e_0(1 \dots 0)$ поместим внутрь этих гиперповерхностей. Зеркальным отображением поверхности можно одинаково ориентировать. Таким образом, будем считать, что гиперповерхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы и видны из точки $e_0(1 \dots 0)$ изнутри. Пусть A_1 и A_2 — точки, соответствующие по изометрии на гиперповерхностях F_1 и F_2 , задаваемые векторами x_1 и x_2 . На гиперповерхностях Φ_1 и Φ_2 им соответствуют гладкие точки B_1 и B_2 .

Будем говорить, что гиперповерхность Φ_i слабо выпукла в точке B_i и обращена к точке $O(0 \dots 0)$ внутренней стороной, если через точку B_i можно провести гиперплоскость β такую, что любая гиперсфера, касающаяся β в B_i и расположенная по другую от точки O сторону гиперплоскости, является локально опорной, т. е. достаточно малая окрестность точки B_i поверхности лежит вне сферы.

Для продолжения доказательства понадобится лемма 2:

Гиперповерхность Φ_i является слабо выпуклой в точке B_i , обращена внутренней стороной к O и Φ_i однозначно проектируется из начала координат.

Эта лемма доказывается на основании леммы 3:

Пусть α' и α'' — две гиперплоскости эллиптического пространства R_n , поставленные в изометрическое соответствие. β' и β'' — соответствующие в силу (1) две гиперплоскости евклидова пространства E_n^0 . Обозначим a_0 и b_0 две соответствующие точки плоскостей α' и α'' , a_n и b_n — соответствующие единичные нормали в этих точках; c_0 и c_n — соответствующие точку и нормаль плоскости β' .

Если обе плоскости α' и α'' в R_n обращены к точке e_0 одной и той же стороной, то выражения

$$A = c_n(- (e_0 a_n) c_0 + a_n),$$

$$B = - (e_0 b_n) (c_0 c_n)$$

одного знака. При движении плоскостей α' и α'' знаки этих выражений не изменяются.

Доказательства лемм 2, 3 аналогичны соответствующим доказательствам для случая трехмерного пространства [2] и приводятся в конце статьи.

Отобразим теперь область R_n^0 эллиптического пространства на евклидово пространство E_n^0 , сопоставляя точке x с вейерштрассовыми координатами $x^0, x^1, \dots, x^n$ точку с декартовыми координатами $\frac{x^1}{x^0}, \frac{x^2}{x^0}, \dots, \frac{x^n}{x^0}$. В евклидовом пространстве E_n^0 гиперповерхности F_1 и F_2 изображаются поверхностями, однозначными проектируемыми из начала координат и обращенными к нему внутренней стороной. Соответствие между точками поверхностей F_1 и Φ_1 , F_2 и Φ_2 , определяемое формулами (1), здесь осуществляется простым проектированием из начала координат.

Используя лемму 2, доказываем, как и в работе [2], что из каждой поверхности Φ_1 и Φ_2 выпуклый конус V с вершиной в точке O вырезает выпуклую гиперповерхность. Аналогично можно показать, что гиперповерхности изометричны. А так как из каждой гиперповерхности Φ_1 и Φ_2 выпуклый конус V вырезает выпуклую поверхность, то Φ_1 и Φ_2 суть замкнутые выпуклые гиперповерхности. Таким образом, гиперповерхностям F_1 и F_2 поставлены в соответствие изометричные замкнутые выпуклые гладкие гиперповерхности Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства. Теорема доказана. Докажем лемму 3.

Обозначим $a_1 \dots a_{n-1}$ единичные перпендикулярные векторы в точке a_0 плоскости α' ; $b_1 \dots b_{n-1}$ — соответствующие единичные векторы в плоскости α'' ; $c_1 \dots c_{n-1}$ — соответствующие векторы в плоскости β' . Тогда

$$a_n = [a_0 a_1 \dots a_{n-1}],$$

$$b_n = [b_0 b_1 \dots b_{n-1}],$$

$$c_n = [c_0 c_1 \dots c_{n-1}],$$

где квадратные скобки означают векторное произведение n векторов $n+1$ -мерного евклидова пространства.

Найдем выражения для векторов $c_1, c_2 \dots c_{n-1} \in E_n^0$. Имеем

$$y = \frac{x_1 - e_0 (x_1 e_0)}{e_0 (x_1 + x_2)},$$

где x_1, x_2 — соответствующие по изометрии точки плоскостей α' и α'' . Продифференцировав y по направлениям, соответствующим $c_1 \dots c_{n-1}$ в точке c_0 , получим

$$c_k = \frac{1}{\lambda_0^2} (a_k \lambda_0 - a_0 \lambda_k) \mp e_0 \quad (\dots)$$

$$(k = 1 \dots n-1),$$

$$\lambda_k = e_0 (a_k + b_k) \\ (k = 0 \dots n-1).$$

Подставляя эти выражения в c_n , находим

$$c_n = \frac{1}{\lambda_0^n} (e_0, a_1 \lambda_0 - a_0 \lambda_1, \dots, a_k \lambda_0 - a_0 \lambda_k, \dots, a_{n-1} \lambda_0 - a_0 \lambda_{n-1}) = \\ = \frac{1}{\lambda_0^n} \{ \lambda_0 [e_0 a_1 \dots a_{n-1}] - \dots - \lambda_k [e_0 a_1 \dots a_0 \dots a_{n-1}] - \\ - \dots - \lambda_{n-1} [e_0 a_1 \dots a_{n-2} a_0] \}.$$

Для B имеем

$$(e_0 b_n) = \{ b_0 b_1 \dots b_{n-1} b_n \}$$

(фигурные скобки означают смешанное произведение $n+1$ векторов $n+1$ -мерного евклидова пространства).

Так как

$$c_0 = \frac{a_0}{\lambda_0} - e_0 (\dots),$$

$$(c_0 c_n) = - \frac{1}{\lambda_0^n} \{ e_0 a_0 \dots a_{n-1} \}.$$

По условию леммы обе плоскости α' и α'' из точки e_0 видны одной стороны. Аналитически это означает, что выражения

$$\{ e_0 b_0 \dots b_{n-1} \} \text{ и } \{ e_0 a_0 \dots a_{n-1} \}$$

одного и того же знака, откуда

$$B = - (e_0 b_n) (c_0 c_n) = \\ = \frac{1}{\lambda_0^n} \{ e_0 a_0 \dots a_{n-1} \} \{ e_0 b_0 \dots b_{n-1} \} > 0.$$

Рассмотрим

$$A = c_n (a_n - (e_0 a_n) c_0).$$

Имеем

$$- (e_0 a_n) (c_0 c_n) = \frac{1}{\lambda_0^n} \{ e_0 a_0 \dots a_{n-1} \}^2.$$

Далее

$$(c_n a_n) = \frac{1}{\lambda_0^n} \{ \lambda_0 [e_0 a_1 \dots a_{n-1}] [a_0 \dots a_{n-1}] - \\ - \dots - \lambda_k [e_0 a_1 \dots a_0 \dots a_{n-1}] [a_0 \dots a_{n-1}] - \\ - \dots - \lambda_{n-1} [e_0 a_1 \dots a_{n-2} a_0] [a_0 \dots a_{n-1}] \}.$$

Далее имеем

$$[a_0 \dots a_{n-1}] [e_0 a_1 \dots a_{n-1}] = (e_0 a_0),$$

$$[a_0 \dots a_{n-1}] [e_0 a_1 \dots a_0 \dots a_{n-1}] = -(e_0 a_k) \\ (k = 1 \dots n-1).$$

Таким образом,

$$(c_n a_n) = \frac{1}{\lambda_0^n} (\lambda_0 (e_0 a_0) + \lambda_1 (e_0 a_1) + \dots + \lambda_{n-1} (e_0 a_{n-1})).$$

Вводя сюда выражения для $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$, получим

$$(c_n a_n) = \frac{1}{\lambda_0^n} ((e_0 a_0)^2 + \dots + (e_0 a_{n-1})^2 + (e_0 a_0) (e_0 b_0) + \\ + \dots + (e_0 a_{n-1}) (e_0 b_{n-1})).$$

Из соотношений

$$2|(e_0 a_i) (e_0 b_i)| \leq (e_0 a_i)^2 + (e_0 b_i)^2$$

следует

$$(c_n a_n) \geq \frac{1}{2\lambda_0^n} ((e_0 a_0)^2 + \dots + (e_0 a_{n-1})^2 - (e_0 b_0)^2 - \dots - (e_0 b_{n-1})^2).$$

Так как

$$(e_0 a_0)^2 + \dots + (e_0 a_n)^2 = (e_0 b_0)^2 + \dots + (e_0 b_n)^2,$$

то

$$(c_n a_n) \geq \frac{1}{2\lambda_0^n} [(e_0 b_n)^2 - (e_0 a_n)^2] = \\ = \frac{1}{2\lambda_0^n} [\{e_0 b_0 \dots b_{n-1}\}^2 - \{e_0 a_0 \dots a_{n-1}\}^2].$$

Отсюда

$$A = -(c_n c_0) (e_0 a_n) + (c_n a_n) \geq \\ \geq \frac{1}{2\lambda_0^n} [\{e_0 b_0 \dots b_{n-1}\}^2 + \{e_0 a_0 \dots a_{n-1}\}^2] > 0.$$

Лемма 3 доказана.

Докажем лемму 2.

Покажем сначала, что гиперповерхность Φ_1 слабо выпукла в точке B_1 . Возьмем на поверхности F_1 точку $x_1 + \Delta x_1$, близкую к x_1 , а на поверхности F_2 — соответствующую по изометрии точку $x_2 + \Delta x_2$. Соединим точки x_1 и $x_1 + \Delta x_1$ кратчайшей γ_1 на гиперповерхности F_1 , а точки x_2 и $x_2 + \Delta x_2$ — соответствующей кратчайшей γ_2 на F_2 . В силу свойств кратчайшей на выпуклой гиперповерхности [4] напишем разложение для радиусов-векторов $x_1 + \Delta x_1$ и $x_2 + \Delta x_2$:

$$x_1 + \Delta x_1 = \rho \left(\left(1 - \frac{\Delta s^2}{2} \right) x_1 + \Delta s \tau_1 + \delta_1 v_1 + \varepsilon_1 \right),$$

$$x_2 + \Delta x_2 = \rho \left(\left(1 - \frac{\Delta s^2}{2} \right) x_2 + \Delta s \tau_2 + \delta_2 v_2 + \varepsilon_2 \right).$$

где τ_1 и τ_2 — единичные касательные векторы геодезических в точках x_1 и x_2 ; v_1 и v_2 — единичные нормали гиперповерхностей F_1 и F_2 в этих точках; δ_1 и δ_2 — расстояние точек $x_1 + \Delta x_1$ и $x_2 + \Delta x_2$ от касательных гиперплоскостей поверхностей F_1 и F_2 в точках x_1 и x_2 , а $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ и $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2}$ стремятся к нулю вместе с Δs — длиной кратчайших γ_1 и γ_2 .

Подставляя это в (1), получаем

$$\begin{aligned} \Delta y_1 = & \frac{\Delta s}{e_0(x_1 + x_2)} \{-y_1(e_0\tau_1 + e\tau_2) + \tau_1 - e_0(e_0\tau_1)\} + \\ & + \frac{\Delta s^2(\tau_1 + \tau_2)}{[e_0(x_1 + x_2)]^2} \{y_1(e_0\tau_1 + e_0\tau_2) - \tau_1 + e_0(e_0\tau_1) + \\ & + \frac{\Delta s^2}{2[e_0(x_1 + x_2)]} \{-y_1(\delta_1 e_0 v_1 + \delta_2 e_0 v_2) + \\ & + \delta_1 v_1 - \delta_2 e_0(e_0 v_1)\} + \varepsilon' \delta_1 + \varepsilon'' \delta_2 + \varepsilon \Delta s^2, \end{aligned}$$

где ε' , ε'' , ε стремятся к нулю вместе с Δs . Умножим Δy_1 на единичный вектор нормали к гиперповерхности Φ_1 в точке B_1 . Мы должны получить величину более высокого порядка малости, чем Δs . Отсюда

$$\begin{aligned} (\Delta y_1 n_1) = & \frac{\delta_1}{e_0(x_1 + x_2)} (-y_1(e_0 v_1) + v_1) n_1 - \\ & - \frac{\delta_2}{e_0(x_1 + x_2)} (e_0 v_2) (y_1 n_1) + \varepsilon \Delta s^2. \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в том, что поверхность Φ_1 слабо выпукла в точке B_1 , достаточно показать, что выражения

$$\begin{aligned} A = & (-y_1(e_0 v_1) + v_1) n_1, \\ B = & -(e_0 v_2) (y_1 n_1) \end{aligned}$$

отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. Изометрическое соответствие поверхностей F_1 и F_2 индуцирует изометрическое соответствие в их касательных гиперплоскостях α' и α'' в точках x_1 и x_2 , из леммы 3 следует, что выражения A и B имеют одинаковые знаки и отличны от нуля.

Для гиперповерхности Φ_2 слабая выпуклость в точке B_2 устанавливается аналогично.

Теперь покажем, что каждая из поверхностей Φ_1 и Φ_2 в точках B_1 и B_2 обращена к точке O внутренней стороной, т. е. видна изнутри из этой точки. В наших обозначениях a_0 — произвольная точка гиперповерхности F_1 ; $a_1 \dots a_{n-1}$ — единичные касательные векторы в этой точке; a_n — единичная внешняя нормаль. Соответствующие векторы для гиперповерхностей F_2 и Φ_2 обозначим $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ и $c_0, \dots, c_{n-1}$.

Имеем

$$(c_0 c_n) = -\frac{1}{\lambda_n^2} [e_0 a_1 \dots a_{n-1}] = -\frac{1}{\lambda_n^2} (e_0 a_n).$$

Так как из точки e_0 гиперповерхность F_1 видна изнутри, $(e_0 a_n) < 0$ и, следовательно, $(c_0 c_n) > 0$, т. е. гиперповерхность F_1 видна изнутри из точки O . Аналогично и для гиперповерхности F_2 .

Легко показать, что гиперповерхность проектируется однозначно из начала координат.

Лемма 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Do Carmo M. P., Warner F. W. Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres. — «J. Differential Geometry», June, 1970, vol. 4, № 2, p. 133—141.
2. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: «Наука», 1969, 760 с.
3. Сенькин Е. П. Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 12. Харьков, 1972, с. 131—152.
4. Милка А. Д. О внутренней метрике выпуклых гиперповерхностей. «Укр. геометр. сб». Вып. 2. Харьков, 1966, с. 59—69.

Поступила 10 января 1973 г.

О РЕГУЛЯРНОСТИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КРАТЧАЙШЕЙ I

В работе изучаются свойства достаточно узкой окрестности кратчайшей на выпуклой поверхности. Известно [1, 2], что кривизна достаточно узкой полосы на выпуклой поверхности вдоль продолжаемой в оба конца кратчайшей мала вместе с шириной этой полосы. Автором была высказана теорема, что кривизна множества, удаленного достаточно далеко от концов кратчайшей содержащегося в узкой полосе вдоль кратчайшей, имеет порядок ширины этой полосы при сужении ее к кратчайшей. Доказательство этой теоремы составляет содержание первого пункта. Аналогичная оценка, а также другие оценки кривизны множеств, примыкающих к кратчайшей, получены иным способом А. Д. Милкой [3].

Во втором пункте, используя оценку кривизны окрестности ребристой точки А. Д. Александрова [2] и полученный в первом пункте результат, исследуем форму выпуклой поверхности во внутренних точках кратчайших. Доказано, что внутренняя точка кратчайшей γ на выпуклой поверхности гладкая, если она гладкая на кривой γ , не являющейся отрезком прямой в ее окрестности. Этим самым решен вопрос о направлении кратчайшей при ее прохождении через ребристую точку в E_3 , ставившийся в работах [5—6]. Аналогичный результат получен также А. Д. Милкой [7].

1. Оценка кривизны множества в h -полуокрестности кратчайшей на выпуклой поверхности

Пусть γ — простая дуга на выпуклой поверхности с ограниченной вариацией поворота; U — ее полуокрестность из поверхности, ограниченная простыми дугами l_A и l_B , исходящими из концов A, B дуги γ и образующими с γ углы α и β , меньшие π . Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого $h \leq \delta$ часть h -экви-
дистанты дуги γ , содержащаяся в U , есть простая дуга с концами на l_A, l_B , имеющая поворот ограниченной вариации [8]. В дальнейшем под h -полуокрестностью кривой γ на поверхности будем понимать область $G(h)$ в U , ограниченную γ , и ее h -экви-
дистантой — простой дугой.

Пусть D — область на выпуклой поверхности. Следуя [1], назовем область D выпуклой в себе, если любые ее точки P, Q можно соединить в D кратчайшей. Для этого необходимо и достаточно, чтобы край области D имел на любой его дуге неотрицательный поворот со стороны D . Назовем область D выпуклой на поверхности, если для любых ее точек P, Q каждая кратчайшая PQ на поверхности расположена в D .

Лемма 1. Пусть D — выпуклая в себе область на выпуклой поверхности, ограниченная кривыми γ_1 и γ_2 . Пусть углы, образованные γ_1 и γ_2 в их концах, меньше $\pi/2$. Тогда при достаточно малом h область $D(h)$, ограниченная γ_2 и h -экви-
дистантой γ_1 , выпуклая на поверхности D .

Доказательство. Утверждение леммы достаточно доказать для выпуклого многогранника, на котором выпуклая в себе область D ограничена геодезическими ломаными γ_1 и γ_2 . Покажем сначала, что при любом $h_0 \leq h$ и h достаточно малом h_0 -экви-
дистанта ломаной γ_1 в области D на многограннике является геодезической ломаной с неотрицательным поворотом для каждой ее дуги со стороны $D(h_0)$ и образует с γ_2 углы, мень-
шие $\pi/2$. Для удобства обозначим h_0 -экви-
дистанту через $\tilde{\gamma}$. Так как h достаточно мало и углы, образованные ломаными γ_1 и γ_2 , меньше $\pi/2$, то расстояния концов кривой $\tilde{\gamma}$ до ломаной γ_1 до-
стигаются на перпендикулярах, опущенных из концов $\tilde{\gamma}$ на внут-
ренние точки геодезических отрезков ломаной γ_1 . Рассмотрим
любую внутреннюю точку кривой $\tilde{\gamma}$ и перпендикуляр, опущен-
ный из этой точки на ломаную γ_1 .

Тогда возможны три случая: перпендикуляр — единственный и продолжается кратчайшей за точку, лежащую на $\tilde{\gamma}$; перпендикуляр — единственный и не продолжается за точку, лежащую на $\tilde{\gamma}$; перпендикуляр — не единственный.

В первом случае из свойства изометричности плоскости до-
статочно малой окрестности перпендикуляра [9] заключаем, что

внутренняя точка $\tilde{\gamma}$ есть внутренняя точка некоторого геодезического отрезка на поверхности.

Во втором и третьем случаях из изометричности плоскостной окрестности перпендикуляра [9] заключаем, что доста

точно малая окрестность рассматриваемой точки на $\tilde{\gamma}$ состоит из отрезков геодезических, образующих с перпендикуляром углы, не меньшие $\pi/2$. Отсюда видно, что поворот со стороны $D(h_0)$ в этой точке больше нуля. Число таких точек, ка

легко убедиться, конечно. Таким образом $\tilde{\gamma}$ — геодезическая линия, не имеющая неотрицательного поворота для любой ее дуги. Далее

рассматривая концевые точки $\tilde{\gamma}$, убеждаемся, что при доста

точно малом h углы, образованные γ_2 и $\tilde{\gamma}$ со стороны области $D(h_0)$, меньше $\pi/2$. Отсюда заключаем, что при любом $h_0 < h$ область $D(h_0)$ выпуклая в себе.

Докажем теперь, что область $D(h)$ выпуклая в области D .

Допустим, что область $D(h)$ не выпуклая. Пусть $P, Q \in D(h)$ и внутренняя часть P_1Q_1 кратчайшей PQ не принадлежит $D(h)$. Тогда можно указать такую точку $M \in P_1Q_1$, что ее расстояние от P будет равно $h_0 \leq h$. Построим h_0 -эквидистанту и рассмотрим внутреннюю выпуклую область $D(h_0)$, которая содержит кратчайшую PQ . Пусть PP_2 и QQ_2 — отрезки кратчайшей PQ , расположенные вне $D(h_0)$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — дуга кратчайшей PQ , лежащая в $D(h_0)$. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B}$ — концы $\tilde{\gamma}$; P_2, Q_2 — точки внутри углов $P P_2 \tilde{A}$ и $Q Q_2 \tilde{B}$. Точки P_2, Q_2 достаточно близкие к P и Q по сравнению с величиной отрезков PP_2 и QQ_2 . Тогда кратчайшая P_2Q_2 в области $D(h_0)$ должна иметь общие точки с кратчайшей PQ , что противоречит условию непересекаемости кратчайших [1]. Итак, $D(h)$ — выпуклая область на поверхности D .

Лемма 2. Пусть ACB — выпуклый в себе треугольник на выпуклой поверхности. Тогда, если $AC = AB$ и K, N — любые точки на сторонах AB и AC такие, что $AK \geq AN > KN/2$, то

$$BC \leq KN \cdot 2AB / (AK + KN) \leq KN \cdot AB / (AK - KN/2);$$

если $AC > AB$ и K — любая точка стороны AB , то $BC < KC$.

Неравенства получаются элементарно из условия выпуклости [1].

Лемма 3. Пусть D — выпуклая в себе область на выпуклой поверхности, содержащая непересекающиеся и изометричные плоские треугольники AA_1A_2 и BB_1B_2 . Пусть стороны треугольников AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 лежат на краю области D , а стороны A_1A_2, B_1B_2 с остальной частью края ограничивают область D_0 . Тогда $\omega(D_0) \leq \varphi_A + \varphi_B$, где $\omega(D_0)$ — кривизна D_0 ; φ_A, φ_B — углы при вершинах A и B в треугольниках AA_1A_2 и BB_1B_2 .

Утверждение леммы получается непосредственно из теоремы Гаусса-Бонне, примененной к области D .

Лемма 4. Пусть D — двуугольник на выпуклой поверхности, ограниченный кратчайшими γ_1 и γ_2 длины $2L$, образующими углы при вершинах двуугольника, меньше $\pi/2$. Пусть E — область в D , точки которой содержатся в h -полукрестности кратчайшей γ_1 и удалены от середины γ_1 менее чем на d , $h \ll d \ll L$. Тогда $\rho(E) < 4h(1 + \varepsilon)/L$, где $\varepsilon = cd/L$, $c = \text{const}$.

Доказательство. Рассмотрим область $G(h_1)$ в D , ограниченную кривой γ_1 и ее h_1 -эквидистантой, которую обозначим $\tilde{\gamma}$.

Положим $h_1 = h(L + 2d)/(L - 3d) < 2h$. Пусть $\tilde{A_1B_1}$ — дуга на $\tilde{\gamma}$ с концами A_1 и B_1 , удаленными от O на $d_1 = d + 2h$, содержит точку $O_1 \in \tilde{\gamma}$, удаленную от O менее чем на $4h$. Пусть A_0, B_0 — основания h_1 -перпендикуляров, опущенных из A_1 и B_1 на γ_1 .

Тогда по построению область E_1 , ограниченная $\tilde{\gamma}$ и геодезической ломаной $A_1A_0B_0B_1$, содержит данную область E . При этом каждая кратчайшая AP, BP , где P принадлежит замкнутой дуге $\tilde{A_1B_1}$, не пересекает области E . Действительно, пусть M — любая

точка кратчайшей AP , удаленная от O менее чем на d_1 и от γ_1 менее чем на h_1 . Проведем MM_0 перпендикуляр на γ_1 . По условию $AP \leq L + d_1$, $OM < d_1$, $AM > L - d_1$, $MM_0 < h_1$. Построим треугольник AP_1P , $P_1 \in \gamma_1$ и $AP_1 = AP$, если $AM_0 \leq AP_1$, и треугольник AM_0P , если $AM_0 > AP_1$. Из тех треугольников при достаточно малом h и лемме 2 получаем, что $MM_0 > h$. Следовательно, кратчайшая AP не пересекает множества E . Аналогично доказывается это свойство и для кратчайшей BP . В дальнейшем будем

считать h настолько малым, чтобы область $D(h_1) = D\tilde{G}(h_1)$ была выпуклой на поверхности D . Это возможно по лемме 1.

Рассмотрим множество кратчайших, соединяющих точки замкнутой дуги $\tilde{A_1B_1}$ эквидистанты $\tilde{\gamma}$ с точками A и B — вершинами двуугольника D .

Возможны два случая их расположения относительно выпуклой области $D(h_1)$: одна из кратчайших AB_1 или A_1B полностью содержится в $\tilde{G}(h_1)$; все кратчайшие AB_1 и все кратчайшие A_1B не содержатся полностью в $\tilde{G}(h_1)$, т. е. имеют с областью $D(h)$ общие дуги.

Докажем сначала утверждение леммы для второго случая. Тогда в силу выпуклости области $D(h)$ все кратчайшие B_1A образуют кривую $\tilde{\gamma}$ углы $\vartheta \geq \vartheta_A > 0$. Следовательно, можно указать такую дугу $\tilde{MB_1} \subset \tilde{A_1B_1}$, что любая точка $P \in \tilde{MB_1}$ соединяется с A кратчайшими PA , каждая из которых образует с дугой эквидистанты $\tilde{PA_1}$ угол $\vartheta_P \geq 0$, а каждую точку замкнутой дуги

$\widetilde{MA_1}$ можно соединить с A кратчайшей в $G(h_1)$. Аналогично указывается дуга $\widetilde{A_1N} \subset A_1B_1$ такая, что все кратчайшие Q $Q \in A_1N$ образуют с дугой эквидистанты $\widetilde{QB_1}$ углы $\vartheta_Q \geq 0$, каждую точку замкнутой дуги $N_1\widetilde{B_1}$ эквидистанты можно соединить с B кратчайшей в $\widetilde{G}(h_1)$.

Рассмотрим сначала ту возможность, когда дуги $\widetilde{A_1N}$ и $\widetilde{MB_1}$ эквидистанты $\widetilde{\gamma}$ имеют общую дугу $\widetilde{MN}$, совпадающую со всей дугой $\widetilde{A_1B_1}$. Тогда, если M не совпадает с A_1 , то одна из кратчайших AM пересекает перпендикуляр A_1A_0 в некоторой точке A_2 ; если же M совпадает с A_1 , то полагаем $A_2 = A_1$. Аналогично, если N не совпадает с B_1 , то одна из кратчайших NB пересекает перпендикуляр B_1B_0 в некоторой точке B_2 ; если же N совпадает с B_1 , то полагаем $B_2 = B_1$. Далее в дугу $\widetilde{MN}$ эквидистанты $\widetilde{\gamma}$ впишем геодезическую ломаную $\widetilde{\gamma}(M, N) = MM_1 \dots CN_1 \dots N$ с настолько малыми звеньями, чтобы расстояния точек ломаной до γ_1 было меньше $h_1(1 + \varepsilon_1)$, а до точки O — меньше $d_1(1 + \varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 > 0$ — наперед данное малое число. Так как область $D(h)$ выпуклая и кратчайшие AM и NB не пересекают L , то область E содержится в области G_0 , ограниченной ломаным $\widetilde{\gamma}(M, N)$ и $MA_2A_0B_0B_2N$. Оценим кривизну G_0 .

По лемме 3 для этого достаточно рассмотреть многообразие L которое получено из D подклеиванием к G_0 изометричной плоскости области D_0 , составленной из плоских треугольников AA_2A_0 , AMN , ACB , BCN , $\dots$, BB_2B_0 , и оценить в D_0 углы φ_A и φ_B при вершинах A и B . Для частей φ'_A и φ'_B этих углов, заключенных в треугольниках AA_2A_0 и BB_2B_0 , очевидно, $\text{tg } \varphi'_A < h(1 + \varepsilon)/L$, $\text{tg } \varphi'_B < h(1 + \varepsilon)/L$, где $\varepsilon = cd/L$, $c = \text{const}$.

Поэтому для доказательства леммы достаточно получить аналогичные оценки для углов $\varphi_A = \varphi_A - \varphi'_A$ и $\varphi_B = \varphi_B - \varphi'_B$ в области D_0 . Для этого сначала найдем отрезок на прямой AB , на который проектируется ломаная $\widetilde{\gamma}(A_0, B_0) = A_0A_2MM_1 \dots CN_1 \dots NB_2B_0$ области D_0 . По построению ломаная $\widetilde{\gamma}(M, N)$ — выпуклая и каждая ее хорда в D_0 , являясь кратчайшей в $\widetilde{D}$, не превосходит $2d_1(1 + \varepsilon)$.

Каждый из отрезков кратчайших A_2M и B_2N в области $\widetilde{D}$ также не превосходит $2d_1$. Отсюда в силу выпуклости области D_1 , ограниченной ломаной $\widetilde{\gamma}(A, B) = AA_2MM_1 \dots CN_1 \dots NB_2B$ и прямой AB , заключаем, что ломаная $\widetilde{\gamma}(A_0, B_0)$ при достаточно малом ε и h проектируется в отрезок A_3B_3 прямой AB (здесь AA_3

$L - 8d_1, B_3B = L - 8d_1$). В выпуклой плоской области D_1 из точек A_3 и B_3 восставим перпендикуляры $A_3A'_2$ и $B_3B'_2$ до пересечения с прямыми AA_2 и BB_2 . Очевидно, что для оценки углов φ_A и φ_B достаточно теперь оценить $A_3A'_2$ и $B_3B'_2$. Для этого многообразию $\tilde{D}$ реализуем изометрично выпуклой шапочкой F в пространстве. Это возможно, поскольку многообразие $\tilde{D}$ неотрицательной кривизны и с краем неотрицательного поворота на каждой его дуге [1]. Далее будем использовать одинаковые обозначения для элементов F и соответствующих по изометрии элементов $\tilde{D}$.

Рассмотрим на шапочке F изометричную плоскости область D_0 . Сторона AB треугольника ACB будет геодезической на F . Поэтому некоторая окрестность AB на шапочке F есть цилиндрическая поверхность V , образующая которой перпендикулярна основанию шапочки. Покажем, что граница ∂V на поверхности F имеет по крайней мере одну общую точку с $\bar{G}_0$. Действительно, пусть $R \in D_0 \cap \partial V$. Тогда через точку R проходит отрезок прямой, принадлежащий ∂V , у которого по крайней мере одна концевая точка расположена в $\bar{G}_0$. Пусть $P \in \bar{G}_0 \cap \partial V$; PQ — перпендикуляр на AB , т. е. PQ — образующая V ; PP_0 — перпендикуляр на A_0B_0 в области G_0 . Тогда $PQ \leq h_1(1 + \varepsilon_1) = PP_0$. Так как $P \in A_3B_3$, то точка пересечения PQ с выпуклой ломаной $\bar{\gamma}(A, B)$ принадлежит дуге $A_2^1B_2^1$ этой ломаной. Отсюда и из выпуклой области D_1 заключаем, что

$$A_2^1A_3 \leq h(1 + \varepsilon_2),$$

$$B_2^1B_3 \leq h(1 + \varepsilon_2),$$

где $\varepsilon_2 = c_2d/L$, $c_2 = \text{const}$.

Учитывая оценки для сторон треугольников $AA_3A_2^1$ и $BB_3B_2^1$, получаем для углов φ_A и φ_B при вершинах A и B в этих треугольниках следующие неравенства:

$$\text{tg } \varphi_A'' \leq \frac{h}{L}(1 + \varepsilon_3),$$

$$\text{tg } \varphi_B'' \leq \frac{h}{L}(1 + \varepsilon_3),$$

где $\varepsilon_3 = c_3d/L$, $c_3 = \text{const}$.

По лемме 3 $\omega(\tilde{D}) \leq \varphi_A + \varphi_B$, где $\varphi_A = \varphi_A' + \varphi_A''$, $\varphi_B = \varphi_B' + \varphi_B''$. В силу найденных оценок для тангенсов этих углов, получаем утверждаемую леммой формулу

$$\omega(E) \leq \omega(\tilde{D}) \leq 4 \frac{h}{L}(1 + \varepsilon), \text{ где } \varepsilon = cd/L, c = \text{const}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда открытые дуги A_1N и B_1M не имеют общей дуги. Тогда можно указать такую точку T на замкнутом отрезке NM , который может выродиться и в точку T так, что кратчайшие AT и TB содержатся в $G(h)$. Так как кратчайшие AT и TB не пересекают множества E , то оно содержится в области G_0 , ограниченной A_0B_0 и ломаной $A_0A_2TB_2B_0$, где $A_2 = A_1A_0 \cap AT$, $B_2 = B_1B_0 \cap BT$.

Пусть угол, образованный кратчайшими AT и TB со стороны области E , больше π . Тогда оценка кривизны области G_0 производится аналогично предыдущей оценке. Нужно только подклеить к G_0 плоские треугольники AA_0A_2 , ATB и BB_2B_0 . Если же угол при вершине T со стороны E не больше π , то оценка кривизны области G_0 получается из леммы 3, если подклеить к G_0 плоские треугольники AA_1A_0 и BB_1B_0 . В этом случае $\omega(E) \leq \omega(G_0)$, $\omega(G_0) \leq \varphi'_A + \varphi'_B \leq 2\frac{h}{L}(1 + \varepsilon)$.

Также получается оценка для кривизны области E и в первом случае, когда одна из кратчайших AB_1 или A_1B , например AB_1 , содержится в $\bar{G}(h)$. Здесь нужно только рассматривать угол при вершине B_1 между кратчайшими AB_1 , B_1B и подклеивать соответствующие треугольники к области G_0 , ограниченной A_0B_0 и ломаной $A_0B_2B_1B_0$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть AC — кратчайшая длины $2L$ на выпуклой поверхности, продолжаемая за оба конца. E — область на поверхности, точки которой содержатся в h -полуокрестности кратчайшей и удалены от середины AC менее чем на d ; $h \ll d \ll L$. Тогда $\omega(E) \leq 4\frac{h}{L}(1 + \varepsilon)$, где $\varepsilon = cd/L$, $c = \text{const}$.

Доказательство. Проведем из точек A и C кратчайшие l_A и l_C так, что они образуют с AC углы, большие $\pi/2$ и меньшие π , а ограниченная ими и кратчайшей AC полуокрестность содержит область E . Пусть $\tilde{\gamma} - 2h_1$ — эквидистанта кратчайшей AC в I , где $h_1 = hL/(L - 2d)$; $\tilde{A}, \tilde{C}$ — концы эквидистанты, расположенные на l_A и l_C . Тогда, если h достаточно мало, кратчайшая AC принадлежит области I и $\tilde{A}\tilde{C} > AC$. Возьмем на AC точку K , так что $AK = AC$. Будем считать h настолько малым, чтобы треугольник AKC был выпуклым в себе и чтобы для любого $\varepsilon_1 > 0$ $KC \leq KK_0(1 + \varepsilon_1)$, где KK_0 — перпендикуляр на AC , продолженную за точку C . Так как $KC \geq KK_0 = 2h_1$, то в силу леммы 2 кратчайшая AK не пересекает область E и, следовательно, E содержится в ACK . Пусть $B \in CK$ и треугольник ABV наименьший в ACK , содержащий область E . Тогда возможны два случая:

кратчайшая AB содержит точки границы области E ; кратчайшая AB является стороной двуугольника D , не содержит точек границы области E , а двуугольник D содержит точки области E .

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть сторона AB содержит точку $M \in \bar{E}$, а область E содержится в треугольнике ABC . Возьмем на стороне AB точки P и Q , а на стороне AC — точки P_1 и Q_1 так, чтобы $PC = P_1C = AQ = AQ_1 = L + 2d$. В треугольнике ABC $AM < L + d < AQ$, $MB + BC < L + 2d$ при $h \ll d$, поэтому $Q \in MB$, а $P \in AM$. Пусть MM_0 — перпендикуляр на сторону AC . Поскольку отрезки OP , OP_1 , OQ , OQ_1 не меньше $2d$, а отрезки OM и OM_0 не больше d и $d + h < 2d$, то перпендикуляр $MM_0 = h$ расположен внутри четырехугольника $G_0 = PP_1Q_1Q$. Оценим его стороны PP_1 и QQ_1 . По лемме 2 из треугольников AQQ_1 и AMM_0 находим $QQ_1 \leq h(1 + \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 = c_2 d/L$, $c_2 = \text{const}$; аналогично из треугольников PP_1C и CM_1M_0 , где $M_1 = MM_0 \cap PC$, получим $PP_1 \leq h(1 + \varepsilon_2)$.

Из оценок для сторон PP_1 , QQ_1 и расстояний их концов до точки O следует, что область E содержится в области G_0 . Подключим к области G_0 плоские треугольники APP_1 и CQQ_1 . Пусть φ_A и φ_B — углы при вершинах A и C в этих треугольниках.

Имеем

$$\operatorname{tg} \varphi_A \leq h(1 + \varepsilon_3)/L,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_B \leq h(1 + \varepsilon_3)/L,$$

где $\varepsilon_3 = c_3 d/L$, $c_3 = \text{const}$.

По лемме 3

$$\omega(E) \leq \omega(G_0) \leq \varphi_A + \varphi_B.$$

Следовательно, в первом случае

$$\omega(E) \leq 2h(1 + \varepsilon)/L,$$

$$\varepsilon = cd/L, \quad c = \text{const}.$$

Рассмотрим второй случай. Пусть D — двуугольник с вершинами A и B , ограниченный кратчайшими γ_1 , γ_2 и содержащий область $E_1 = E \cap D$. Обозначим область $E_2 = E \setminus \bar{E}_1$. При этом кратчайшая γ_2 не имеет общих точек с границей ∂E_2 . Оценим кривизны областей E_1 и E_2 . Обозначим через h точную верхнюю грань расстояний точек области E_2 до кратчайшей γ_1 , а через h_1 — эквидистанту γ_1 . Тогда найдется точка $N \in \bar{E}_2 \cap \gamma_1$. Пусть NN_0 — перпендикуляр на γ_1 ; NM_0 — перпендикуляр на кратчайшую AC ; M — точка пересечения NN_0 и γ_1 . Заметив, что $OM < d + h$, $MM_0 < M_0N \leq h$ и E_2 содержится в треугольнике ABC ($AB = \gamma_1$), как и в первом случае, получим

$$\omega(E_2) < 2MM_0(1 + \varepsilon)/L,$$

$$\varepsilon = cd/L, \quad c = \text{const}.$$

Оценим кривизну области E_1 . Пусть $P \in E_1$, Q_1 — середина γ_1 и PP_0 — перпендикуляр на γ_1 . Покажем, что точки P области E

содержатся в h -окрестности кратчайшей γ_1 , $h \leq NM$ и удалены от ее середины O_1 менее чем на $2d$. Действительно, так как

$$\left| AO_1 - \frac{1}{2} AC \right| \leq \frac{1}{2} BC \leq h_1 (1 + \varepsilon_1),$$

$$OP \leq d, PP_0 \leq NM < h,$$

$$|AP_0 - AO| < d + h,$$

то $Q_1P < d + 2h_1(1 + \varepsilon_1) < 2d$.

Отсюда по лемме 4 имеем

$$\omega(E_1) < 4MN(1 + \varepsilon)/L,$$

где $\varepsilon = cd/L$, $c = \text{const}$.

Учитывая оценки для кривизны областей E_1 и E_2 , получаем

$$\omega(E) < 4 \frac{h}{L} (1 + \varepsilon),$$

где $\varepsilon = cd/L$, $c = \text{const}$; c — абсолютная константа.

Теорема доказана

2. О гладкости выпуклой поверхности во внутренних точках кратчайшей

Пусть O — внутренняя точка кратчайшей на выпуклой поверхности. Известно [1, 2, 4], что точка не может быть конической. Тогда она либо гладкая, либо ребристая. Если точка ребристая на поверхности, то на самой кратчайшей она может быть либо гладкой, либо не гладкой.

Если точка O не гладкая на самой кратчайшей, то кратчайшая пересекает ребро поверхности в точке O под некоторым, не равным нулю углом, и поэтому нарушение гладкости в точке O на поверхности можно рассматривать как следствие нарушения гладкости на самой кривой.

Пусть теперь ребристая точка O поверхности является гладкой точкой кратчайшей. Тогда, как доказано здесь, вся кратчайшая на поверхности есть прямолинейный отрезок, проходящий через O и являющийся ребром поверхности. Другими словами, если кратчайшая, не являясь прямолинейным отрезком, проходит через ребристую точку, то она не касается направления ребра. Этот факт резюмируем следующим утверждением: если O — гладкая внутренняя точка на кратчайшей, которая в окрестности O не вырождается в отрезок прямой, то точка O — гладкая на поверхности.

Для доказательства этого утверждения понадобится оценка А. Д. Александрова кривизны шапочки, содержащей ребристую точку и две леммы о свойствах кратчайших и малых шапочек на выпуклых поверхностях.

Пусть точка O ребристая и не является точкой прямолинейного ребра на поверхности; α_1, α_2 — грани двугранного угла —

касательного конуса в точке O ; 2ϑ — величина двугранного угла; g — его ребро; σ — плоскость, параллельная ребру g и пересекающая грани α_1 и α_2 под равными углами и отстоящая от точки O на расстоянии z . Будем считать z настолько малым, что шапочка E , которую отсекает σ от поверхности, проектируется на плоскость σ однозначно.

Пусть β_1, β_2 — плоскости, перпендикулярные g и упирающиеся в край шапочки; x_1, x_2 — расстояния плоскостей β_1, β_2 от точки O .

Тогда для кривизны шапочки E имеет место оценка [2]

$$\omega(E) > m(\pi - 2\vartheta)(z/x_1 + z/x_2), \quad (1)$$

где $m = \text{const} > 0$.

В случае, когда O является концом прямолинейного ребра g , для получения шапочки плоскость σ проводим через точку M ребра g , которая находится на расстоянии x от O и на малом расстоянии z от точки O , $z \ll x$.

Тогда имеем

$$\omega(E) > m(\pi - 2\vartheta)z/x. \quad (2)$$

Лемма 5. Пусть O — ребристая точка на выпуклой поверхности F , не являющаяся внутренней точкой прямолинейного отрезка. Пусть из точки O в направлении OR -луча ребра g проведена кратчайшая γ . Тогда найдется такая последовательность шапочек $E_n \subset F$, стягивающихся к точке O , что

$$l(\gamma_n) > x_n(1 - \varepsilon)/2,$$

где $l(\gamma_n)$ — длина кратчайшей $\gamma_n = F \cap \gamma$; x_n — расстояние точки O в направлении луча OR до плоскости $\beta_n \perp OR$, упирающейся в край шапочки E_n , $\varepsilon < 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$ при стягивании шапочек к точке O .

Доказательство. В случае, когда кратчайшая γ является отрезком прямолинейного ребра, имеющего точку O своим концом, очевидно, $l(\gamma_n) = x_n$ для шапочек, отсекаемых от поверхности плоскостями, параллельными σ_n , как при получении оценки (2). Поэтому будем считать, что точка O не является точкой прямолинейного отрезка на поверхности F . Тогда плоскостью $\sigma \parallel g$ на малом расстоянии z от точки O ототрежем шапочку E так, как при получении оценки (1).

Пусть α — биссектральная плоскость двугранного угла; кривая ξ — пересечение поверхности шапочки E плоскостью α ; V — цилиндр с направляющей ξ и образующей, перпендикулярной α ; W — множество точек на поверхности шапочки E , расположенных или на цилиндре V , или вне тела, ограниченного цилиндром V .

Докажем теперь, что точка O является точкой сгущения для множества $W \cap \gamma$. Допустим противное. Тогда найдется такая точка $B \in \gamma$, что дуга OB кратчайшей не имеет с V общих точек, кроме O , и проектируется на одну из полуплоскостей σ_1 и σ_2 , на которые разбивается плоскость σ плоскостью α .

Пусть она проектируется на полуплоскость σ_1 . Проведем через дугу OB цилиндр с образующей, перпендикулярной плоскости σ_1 . Развернем этот цилиндр на плоскость, образованную ребром g и его образующей, проходящей через O . По теореме Либермана на этой плоскости развертка дуги OB кратчайшей γ есть выпуклая кривая $\bar{\gamma}$, касающаяся g и обращенная выпуклостью к g . Отсюда заключаем, что проекция OB должна содержаться в σ_1 . Мы пришли к противоречию. Таким образом, точка O является точкой сгущения множества $W \cap \gamma$, т. е. существует последовательность точек множества $A_n \rightarrow O$. Через точки A_n проведем плоскости $\sigma_n \parallel \sigma$, которые отрежут шапочки E_n .

Пусть O_0 — проекция O на основание шапочки E_n . Тогда силу выпуклости оснований шапочек E_n для отрезка $A_n O_0$ имеем

$$A_n O_0 \geq x_n (1 - \varepsilon)/2,$$

где x_n — расстояние точки O до плоскости $\beta_n \parallel \beta$, упирающейся в край шапочки и расположенной по одну сторону γ от плоскости β , $\varepsilon \ll 1$ при $x_n \ll 1$.

Так как $l(\gamma_n) > A_n O_0$, то утверждение леммы доказано.

Лемма 6. Пусть AC — кратчайшая на выпуклой поверхности длины $2L$; E — шапочка на поверхности, точки которой удалены от середины O кратчайшей AC менее чем на d , $d \ll L$; MN — отрезок кратчайшей γ длины l на шапочке E . Пусть граница шапочки E содержит дуги $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ по разные стороны от γ заключенные в h -окрестности γ , причем $M_1 M$, $M_2 M$, $N_1 N$, $N_2 N \leq h$, $h \ll l$. Тогда вся шапочка E содержится в $\bar{h}$ -окрестности кратчайшей, где $\bar{h} = 2h(1 + \varepsilon)d/l$, $\varepsilon = ch/l$, $c = \text{const}$.

Доказательство. Кратчайшая γ разбивает шапочку E на две выпуклые на поверхности области E_1 и E_2 [1, 2]. Докажем, что каждая область содержится в $\bar{h}$ -полуокрестности кратчайшей. Обозначим P и Q точки пересечения γ с ∂E . Тогда достаточно показать, что каждая дуга $\bar{P}M_1$, $\bar{N}_1 Q$, $\bar{P}M_2$, $\bar{Q}N_2$ содержится в $\bar{h}$ -полуокрестности кратчайшей γ .

Пусть $K_1 \in \bar{N}_1 Q$, $K \in \gamma$ и $MK = MK_1 < 2d$, $N_0 = MK_1 \cap N_1 M$. При малом d треугольник $MK_1 K$ выпуклый. Из треугольников $MK_1 K$ и $MN_0 N$ по лемме 2 получаем

$$K_1 K \leq 2h(1 + \varepsilon)d/l$$

$$(\varepsilon = ch/l, c = \text{const}).$$

Отсюда следует, что точка K_1 содержится в $\bar{h}$ -полуокрестности кратчайшей. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть F — выпуклая поверхность и O — ее точка, через которую проходит кратчайшая γ , не являющаяся в окрестности O отрезком прямой.

Тогда, если O — гладкая точка на кривой γ , то O — гладкая точка на поверхности.

Доказательство. Допустим противное. Пусть O — гладкая точка на кривой γ ; g — касательная к ней прямая в точке O , не совпадающая с γ в окрестности O , но на поверхности F точка O не гладкая. Тогда точка O либо ребристая и не является концом прямолинейного ребра, либо O — конец прямолинейного ребра на поверхности.

Рассмотрим первый случай. Пусть касательный конус поверхности в точке O — двугранный угол величины 2ϑ , $0 < 2\vartheta < \pi$ с ребром g . По предположению кратчайшая γ касается ребра g . Пусть OR — луч прямой g с началом в точке O ; OA — отрезок кратчайшей γ , исходящей из точки O в направлении луча OR .

Тогда по лемме 5 существует последовательность шапочек E_n , содержащих отрезки кратчайшей $\gamma_n = OA_n < OA$, для длин которых имеет место оценка

$$l(\gamma_n) > x_n(1 - \varepsilon_1)/2,$$

где x_n — расстояние точки O до плоскости β_n , проходящей через точку луча OR перпендикулярно ему и упирающейся в край шапочки E_n ; $\varepsilon_1 = \text{const} < \frac{1}{2}$, малая вместе с x_n .

Проведем через концы O и A_n отрезка кратчайшей γ_n плоскости $\tilde{\beta}_n$ и β перпендикулярно лучу OR . Обозначим через M_n и N_n точки пересечения плоскости β с краем шапочки E_n , а через B_n — точку пересечения края шапочки с плоскостью $\tilde{\beta}_n$. При этом точки N_n , B_n и M_n лежат по разные стороны от кратчайшей γ , точка B_n может совпадать с A_n .

Пусть P — любая точка кратчайшей OA_n . Проведем через точку P плоскость $\beta_p \parallel \beta$, которая пересечет поверхность шапочки E_n по выпуклой кривой η_p . Длина кривой η_p , очевидно, не превосходит $2h_n$, где $h_n = z_n/\cos \vartheta$, а поэтому все точки дуг M_nA_n и N_nB_n находятся в $2h_n$ -окрестности кратчайшей γ и длина кратчайших M_nO , N_nO и B_nA_n не превосходит $2h_n$. По разные стороны от точки O на кратчайшей γ возьмем точки A и C , так что $AO = OC = L$. Пусть d_n — диаметр шапочки E_n , $d_n \ll L$, $d_n \rightarrow 0$, $B_n \rightarrow O$.

Тогда по лемме 6 вся шапочка E_n содержится в $\bar{h}$ -окрестности кратчайшей γ , где

$$\bar{h} = 8h_nd_n(1 + \varepsilon_2)/x_n, \quad \varepsilon_2 = \text{const} < 1 \text{ при } d_n \ll L.$$

По теореме 1 для кривизны шапочки E_n имеет место оценка

$$\omega(E_n) < c_0 h_n d_n / x_n, \quad (3)$$

где $c_0 = c(L) = \text{const} < \infty$.

С другой стороны, из формулы (1)

$$\omega(E_n) > c_1 h_n / x_n, \quad (4)$$

где $c_1 = c_1(\nu) = \text{const} > 0$.

Неравенства (3) и (4) противоречивы при $d_n \ll L$.
Аналогично получается противоречие, если предположить, что O — конец прямолинейного ребра. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М., ОГИЗ, 1948. 387 с.
2. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М. «Наука», 1969. 759 с.
3. Милка А. Д. Оценка кривизны множества, примыкающего к кратчайшей. Смори статью в настоящем сборнике.
4. Буземан Г. Выпуклые поверхности. М., «Наука», 1964. 238 с.
5. Милка А. Д. Об одном признаке сферы. — «Укр. геометр. сб.». Вып. Харьков, 1970, с. 78—84.
6. Залгаллер В. А. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 10. Харьков, 1971, с. 12—18.
7. Милка А. Д. Теорема о гладкой точке. Смори статью в настоящем сборнике.
8. Борисов Ю. Ф. Полуокрестность и вариация длины кривой на поверхности. — «Тр. матем. ин-та», 1965, т. 76 с. 26—48.
9. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М., ОГИЗ, М., 1954. 428 с.

Поступила 30 января 1973 г.

О ДИАМЕТРАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ
ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ E^m

Пусть F_n есть $(m-1)$ -мерная алгебраическая поверхность порядка n в евклидовом m -мерном пространстве E^m с координатным базисом $e_1, \dots, e_m$; D_u — диаметральной плоскости поверхности F_n , сопряженная вектору $u = \{u_1, \dots, u_m\}$. В настоящей заметке рассматривается структура множества $\{D_u\}$, причем дается обобщение некоторых результатов работ [1, 2].

1°. Зададим поверхность F_n уравнением

$$\sum_{j=0}^n \varphi_j = 0,$$

где $\varphi_j(x)$ — однородные формы степени j относительно координат вектора $x = \{x_1, \dots, x_m\}$. Уравнение плоскости D_u имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right)_{x=u} x_i + \varphi_{n-1}(u) = 0. \quad (1)$$

Если вектор u имеет асимптотическое направление поверхности F_n , то D_u касается F_n в несобственной точке $U_\infty(u_1; \dots$

$u_m = 0$; асимптотическая плоскость поверхности F_n есть ее диаметрально плоскость, параллельная сопряженному вектору.

Уравнение (1) показывает, что множество $\{D_u\}$ совпадает с множеством диаметральных плоскостей моноида

$$\varphi_n(x) + \varphi_{n-1}(x) = 0,$$

имеющего $(n-1)$ -кратную точку в начале координат. Члены φ_n и φ_{n-1} могут иметь общий множитель $\chi(x)$ степени ρ , входящий в них, вообще говоря, в разных степенях σ и τ :

$$\varphi_n = \chi^\sigma \psi, \quad \varphi_{n-1} = \chi^\tau \omega,$$

где ψ и ω — формы от x степеней $n - \rho\sigma$ и $n - \rho\tau - 1$ соответственно. Множитель $\chi(x)$ выделим только тогда, когда $\sigma > 1$ и $\tau > 1$; в этом случае, если положить $\mu = \min(\sigma - 1, \tau)$, уравнение (1) запишется так:

$$\chi^\mu(u) \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\sigma \chi^{\sigma-\mu-1} \psi \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \chi^{\sigma-\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)_{x=u} x_i + \chi^{\tau-\mu}(u) \omega(u) \right\} = 0 \quad (1')$$

(очевидно, здесь равно нулю хотя бы одно из чисел $\sigma - \mu - 1$, $\tau - \mu$).

Отбрасывая в (1') множитель $\chi(u)$, получаем уравнение плоскости

$$\alpha: \sum_{i=1}^m A_i(u) x_i + C(u) = 0; \quad (2)$$

обозначения $A_i(u)$ и $C(u)$ ясны из сравнения (2) с (1').

2°. Пусть $\chi(u) \neq 0$, тогда плоскость α является диаметральной. Рассмотрим множество R векторов u , для которых все

$$A_i(u) = 0. \quad (3)$$

Оно распадается на два множества $R = R_A + R_{AC}$: $u \in R_A$, если $C(u) \neq 0$, и $u \in R_{AC}$, если $C(u) = 0$; при этом все коллинеарные векторы заменяются одним их представителем [3, стр. 328].

Если $u \in R_{AC}$, то поверхность F_n не имеет определенной диаметральной плоскости, сопряженной вектору u ; вектор u имеет кратное асимптотическое направление поверхности F_n .

Если же $u \in R_A$, уравнение (2) в однородных координатах $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ принимает вид

$$x_{m+1} = 0,$$

т. е. плоскость α есть несобственная плоскость P_{∞}^{m-1} пространства E^m ; поверхность F_n пересекает эту плоскость в простой точке U_{∞} . Согласно обобщенной теореме Безу [3, стр. 268], из (3), с учетом того, что $\mu \geq 0$, следует, что число таких точек, если оно конечно, не превышает числа

$$r = (n-1)^{m-1}.$$

В качестве примера рассмотрим в E^3 поверхность F_4 :

$$x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 + a = 0. \quad (4)$$

Здесь $\chi(x) = x_1$, $\sigma = 2$, $\rho = \tau = \mu = 1$. Множество R_{AC} состоит из одного вектора e_1 (e_3 сюда не входит, так как $\chi(e_3) = 0$). Простых точек касания с Π_∞^2 эта поверхность не имеет, $R_A \neq \emptyset$.

3°. Пусть $\chi(u) = 0$, но $u \notin R_{AC}$. Уравнение (2) определяет плоскость α , но она уже не удовлетворяет определению диаметральной плоскости, сопряженной вектору u . Будем полагать $\chi^0 = 1$ также и для асимптотических векторов конуса $\chi(x) = 0$.

Плоскость β , касательная к конусу $\chi(x) = 0$ в точке U_∞ , имеет уравнение

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right)_{x=u} x_i = 0. \quad (5)$$

Если $\tau < \sigma - 1$, то $\mu = \tau$, и все $A_i(u) = 0$. Если же $\omega(u) \neq 0$, то $C(u) \neq 0$, и плоскость $\alpha = \Pi_\infty^{m-1}$.

Если $\tau > \sigma - 1 = \mu$ и $\psi(u) \neq 0$, уравнение (2) отличается от уравнения (5) только постоянным множителем; плоскость α совпадает с плоскостью β и является асимптотической для F_n .

Наконец, если $\tau = \sigma - 1 = \mu$, уравнение (2) имеет вид

$$\sigma \psi(u) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right)_{x=u} x_i + \omega(u) = 0;$$

при $\psi(u) \neq 0$ и $\omega(u) \neq 0$ плоскость α параллельна плоскости β и смещена от нее на вектор с координатами

$$-\frac{\omega(u) \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right)_{x=u}}{\sigma \psi(u) \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right)_{x=u}^2}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Случай $\psi(u) = 0$ и $\omega(u) = 0$ не вносят ничего нового.

Рассмотрим, например, поверхность (4) при $a = 0$. Она приводима, состоит из плоскостей $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и гиперболического параболоида $x_1 x_3 + x_2 = 0$. Для вектора $u = \{0, 1, 1\}$ находим

$$\alpha: 2x_1 + 1 = 0;$$

$$\beta: x_1 = 0.$$

Отметим, что плоскость α рассматривается в [1] при $m = 3$, но ее геометрическая интерпретация не приводится; предположение, высказанное в [4], не подтверждается.

4°. Вектор $u = \{u_1, \dots, u_m\}$ называется сопряженным вектору $v = \{v_1, \dots, v_m\}$ относительно поверхности F_n , если

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right)_{x=v} u_i = 0. \quad (6)$$

Таким образом, вектор u сопряжен каждому асимптотическому вектору конуса

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_i} u_i = 0.$$

Векторы u и v называются взаимно сопряженными, если условие (6) симметрично относительно них.

Пусть асимптотический конус K_n поверхности F_n является цилиндром с h -образующими, параллельными координатной h -плоскости $\Pi^h(e_1, \dots, e_h)$. Его уравнение будет

$$\varphi_n(x_{h+1}, \dots, x_m) = 0.$$

При этом каждый вектор $u \in \Pi^h$ сопряжен любому вектору пространства E^m [5], в частности, u — самосопряженный вектор.

И наоборот, если при подходящем выборе индексов будет $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \equiv 0$,

$j = 1, \dots, h$; $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k} \neq 0$, $k = h+1, \dots, m$, то каждому вектору E^m сопряжен любой вектор $u | u_h = 0$. В этом случае φ_n не содержит переменных x_j , т. е. конус K_n есть цилиндр с h -образующими. Таким образом, существование h -плоскости Π^h такой, что каждый принадлежащий ей вектор сопряжен относительно F_n любому вектору пространства E^m , необходимо и достаточно для того, чтобы асимптотический конус K_n поверхности был цилиндром с h -образующими, параллельными Π^h .

5°. Рассмотрим s линейно независимых векторов $v^\lambda \in R$; $v^\lambda = (v_1^\lambda, \dots, v_m^\lambda)$, $\lambda = 1, \dots, s$ ($s \leq m-1$). Запишем систему

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_{x=u} v_i^\lambda = 0; \quad \lambda = 1, \dots, s. \quad (7)$$

Если $s < m-1$, то, вообще, каждый вектор u , принадлежащий s -плоскости $\Pi^s(v^1, \dots, v^s)$, сопряжен любому асимптотическому вектору w $(m-s)$ -поверхности, определяемой уравнениями (7) при $u = x$. Так как диаметральной плоскости D_w параллельна Π^s , множество всех диаметральных плоскостей $\{D_u\}$ поверхности F_n можно рассматривать как объединение бесконечных множеств, состоящих из s -параллельных плоскостей.

В случае $s = m-1$ система (7) относительно переменных $u_1, \dots, u_m$ имеет вообще r (п. 2°) различных ненулевых решений w^i ($i = 1, \dots, r$) [пропорциональные решения системы (7) принимаются за одно]. Любая из диаметральных плоскостей D_{w^i} параллельна плоскости $\Pi^{m-1}(v^1, \dots, v^{m-1})$, поэтому $\{D_u\}$ в общем есть также объединение конечных множеств, каждое из которых состоит из r параллельных плоскостей.

Отметим, что если коэффициенты формы φ_n вещественны, то при четном n одно ненулевое решение системы (7) вещественно

[3, с. 271, теорема 1]; поэтому одна из r указанных плоскостей также вещественна.

Пусть, например, F_3 есть гиперболическая гипербола в плоскости E^2 . Множество всех ее диаметров состоит из касательных к эллипсу ($r = 2$) — центральному коническому сечению кривой F_3 .

6°. Если все диаметральные плоскости поверхности F_n проходят через одну $(h-1)$ -плоскость Π^{h-1} ($h \geq 1$), то такая Π^{h-1} называется фундаментальной; $(h-1)$ -центр симметрии (т. е. плоскость симметрии минимальной размерности) поверхности F_n является ее фундаментальной $(h-1)$ -плоскостью. Например нецентральная поверхность F_n , инвариантная только относительно группы симметрий правильного m -симплекса, имеет фундаментальную точку — барицентр симплекса.

Пусть $(h-1)$ -плоскость есть несобственная плоскость Π^{h-1} и определяется h -плоскостью Π^h , тогда все $D_i \parallel \Pi^h$. Совместив эту Π^h с координатной $\Pi^h(e_1, \dots, e_n)$, найдем, что форма φ_n не содержит переменных x_j ($j = 1, \dots, h$) и K_n есть цилиндр с h -образующими, параллельными Π^h . Следовательно, для того чтобы все диаметральные плоскости поверхности F_n были параллельны некоторой h -плоскости Π^h , необходимо и достаточно, чтобы ее асимптотический конус был цилиндром с h -образующими, параллельными Π^h (ср. [5] при $h = m-1$). С учетом п. 4° этот результат можно сформулировать так: для того чтобы все диаметральные плоскости поверхности F_n были параллельны некоторой Π^h , необходимо и достаточно, чтобы каждый вектор $u \in \Pi^h$ был сопряжен относительно F_n любому вектору пространства E^m .

7°. Имеют место следующие предложения, доказательства которых принципиально не отличаются от доказательств соответствующих утверждений работ [2, 5].

1. Существование оси вращения конуса K_n есть необходимое и достаточное условие бесконечности множества главных диаметральных плоскостей поверхности F_n .

2. Пусть Π^1 — пересечение осей вращения асимптотического конуса K_n ; $(\gamma-1)$ -конус $\Pi^1 \cap K_n$ является цилиндром с h -образующими, параллельными Π^h , и состоит из l компонент порядка p_i и кратности $q_i < n$, $\sum_{i=1}^l p_i q_i = n$. Если множество главных диаметральных плоскостей поверхности F_n , параллельных ортогональному дополнению $(\gamma-h)$ -плоскости $\Pi^1 \ominus \Pi^h$, конечно, то их число N удовлетворяет условию

$$N \leq \sum_{i=1}^{\gamma-h} \left(\sum_{t=1}^l p_t - 1 \right)^{\gamma-h-1}.$$

В качестве примера рассмотрим в E^{10} поверхность F_8 :

$$a_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^4 + a_2(x_5^2 + x_6^2)^3 x_7^2 + a_3(x_8^2 x_9^2 + x_8^2 x_{10}^2 + x_9^2 x_{10}^2)^2 + a_4 x_8 x_9 x_{10} + a_5 = 0, \quad (8)$$

Эта поверхность имеет две оси вращения: Π_1^6 (ее уравнения $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$) и Π_2^8 ($x_5 = x_6 = 0$); $\gamma = 4$. Ее 3-конус K_3 является цилиндром с 1-образующими, параллельными базисному вектору e_7 ; $l = 1$, $p_1 = 1$, $q_1 = 2$. Главные диаметральные плоскости поверхности F_8 , параллельные Π^7 ($x_8 = x_9 = x_{10} = 0$), имеют уравнения

$$x_i + x_j = 0, \quad i, j = 8, 9, 10, \quad i < j;$$

$$x_8 \pm x_9 \pm x_{10} = 0.$$

Замечание. Случай $\Pi^i \cap K_n = \emptyset$, очевидно, невозможен. Если же $\Pi^i \subset K_n$, то поверхность F_n не имеет определенной главной диаметральной плоскости, параллельной ортогональному дополнению Π^i . Такую F_n , например, задает уравнение (8) при $a_3 = 0$; конус K_8 является цилиндром с 3-образующими, параллельными $\Pi^3(e_8, e_9, e_{10})$. Заменяв второе слагаемое левой части (8) формой

$$a_2 (x_5^2 + x_6^2)^2 x_7 x_8 x_9 x_{10},$$

получим такую F_8 , у которой $\Pi^i \subset K_8$ ($\gamma = 4$) и конус K_8 отличен от цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosina B. A. Nuovi risultati nella teoria diametrale delle superficie algebriche. — «Ann. univ. Ferrara», Sez. VII (N. s.), 1955—1956—(1957), N 5, p. 103—116.
2. Rosina B. A. Sulla teoria diametrale delle superficie algebriche. — «Bull. soc. roy. sci. Liège», 1962, An. 31, № 3, 4, p. 146—167.
3. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М., «Наука», 1972. 567 с.
4. Du Val P. — «Math. Reviews», 1958, vol. 19, N 6, p. 674.
5. Игнатенко В. Ф. К оценке числа главных диаметральных плоскостей алгебраической поверхности пространства E^m . — «Укр. геометр. сб.», Вып. II. Харьков, 1971, с. 31—35.

Поступила 15 ноября 1972 г.

ИНВАРИАНТ ВТОРОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

Дифференциальная окрестность второго порядка комплекса прямых в трехмерном проективном пространстве содержит шесть параметров. Путем канонизации сопровождающего тетраэдра пять параметров можно зафиксировать. При этом один параметр остается незафиксированным и является инвариантом. Цель настоящей работы — найти значение этого инварианта в общем случае.

Для дальнейших выкладок воспользуемся нормальным тетраэдром комплекса прямых, введенным Н. И. Кованцовым¹. В этом тетраэдре уравнение комплекса прямых имеет вид

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \quad (1)$$

При этом дифференциальная окрестность второго порядка комплекса определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_3^4 &= p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 &= \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{aligned} \quad (2)$$

а вариация параметров второй дифференциальной окрестности — уравнениями

$$\begin{aligned} \delta p &= 2\beta\pi_1^2 - p(\pi_2^2 - 2\pi_3^3 + \pi_4^4), \\ \delta q &= 2\gamma\pi_2^1 - q(\pi_2^2 + 2\pi_3^3 - 3\pi_4^4), \\ \delta\beta &= (r - 2\alpha)\pi_1^2 + 2p\pi_2^1 - \beta(\pi_2^2 - \pi_3^3), \\ \delta\gamma &= 2q\pi_1^2 + (r - 2\alpha)\pi_2^1 - \gamma(\pi_2^2 + \pi_3^3 - 2\pi_4^4), \\ \delta(r - 2\alpha) &= 6\gamma\pi_1^2 + 6\beta\pi_2^1 - (r - 2\alpha)(\pi_2^2 - \pi_4^4). \end{aligned} \quad (3)$$

Умножив обе части каждого из уравнений (3) соответственно на некоторые выражения A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и сложив уравнения получим

$$\begin{aligned} A_1\delta p + A_2\delta q + A_3\delta\beta + A_4\delta\gamma + A_5\delta(r - 2\alpha) &= A_1[2\beta\pi_1^2 - p(\pi_2^2 - 2\pi_3^3 + \pi_4^4)] + \\ &+ A_2[2\gamma\pi_2^1 - q(\pi_2^2 + 2\pi_3^3 - 3\pi_4^4)] + A_3[(r - 2\alpha)\pi_1^2 + 2p\pi_2^1 - \beta(\pi_2^2 - \pi_3^3)] + \\ &+ A_4[2q\pi_1^2 + (r - 2\alpha)\pi_2^1 - \gamma(\pi_2^2 + \pi_3^3 - 2\pi_4^4)] + \\ &+ A_5[6\gamma\pi_1^2 + 6\beta\pi_2^1 - (r - 2\alpha)(\pi_2^2 - \pi_4^4)] = \pi_1^2[2\beta A_1 + (r - 2\alpha)A_3 + \\ &+ 2qA_4 + 6\gamma A_5] + \pi_2^1[2\gamma A_2 + 2pA_3 + (r - 2\alpha)A_4 + 6\beta A_5] + \pi_2^2 \times \\ &\times [-pA_1qA_2 - \beta A_3 - \gamma A_4 - (r - 2\alpha)A_5] + \pi_3^3[2pA_1 - 2qA_2 + \beta A_3 - \\ &- \gamma A_4] + \pi_4^4[-pA_1 + 3qA_2 + 2\gamma A_4 + (r - 2\alpha)A_5]. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы в этом уравнении коэффициенты при формах $\pi_1^2, \pi_2^1, \pi_2^2, \pi_3^3$ и π_4^4 равнялись нулю. В этом случае

$$\begin{aligned} A_1\delta p + A_2\delta q + A_3\delta\beta + A_4\delta\gamma + A_5\delta(r - 2\alpha) &= 0, \\ 2\beta A_1 + (r - 2\alpha)A_3 + 2qA_4 + 6\gamma A_5 &= 0, \\ 2\gamma A_2 + 2pA_3 + (r - 2\alpha)A_4 + 6\beta A_5 &= 0, \\ -pA_1 - qA_2 - \beta A_3 - \gamma A_4 - (r - 2\alpha)A_5 &= 0, \\ 2pA_1 - 2qA_2 + \beta A_3 - \gamma A_4 &= 0, \\ -pA_1 + 3qA_2 + 2\gamma A_4 + (r - 2\alpha)A_5 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

¹ Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1963. 380 с.

Из уравнений (4) находим

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{12\gamma^3\beta - \gamma^2(r-2\alpha)^2 + q(r-2\alpha)^3 + 6\gamma^2pq - 4pq^2(r-2\alpha) + 18\beta^2q^2 - 14\beta\gamma q(r-2\alpha)}{8p^2q^2 - 2pq(r-2\alpha)^2 - 4\beta^2\gamma^2 - 4\beta\gamma pq + 3\beta^2q(r-2\alpha) + 3p\gamma^2(r-2\alpha)} A_5, \\
 A_2 &= \frac{12\beta^3\gamma - \beta^2(r-2\alpha)^2 + p(r-2\alpha)^3 + 6\beta^2qp - 4p^2q(r-2\alpha) + 18\gamma^2p^2 - 14\gamma\beta p(r-2\alpha)}{8p^2q^2 - 2pq(r-2\alpha)^2 - 4\beta^2\gamma^2 - 4\beta\gamma pq + 3\beta^2q(r-2\alpha) + 3p\gamma^2(r-2\alpha)} A_5, \\
 A_3 &= \frac{2[8\gamma pq(r-2\alpha) - 12q^2\beta\gamma p - \beta q(r-2\alpha) + \gamma^2\beta(r-2\alpha) - 9\gamma^3p + 3\beta^2\gamma q]}{8p^2q^2 - 2pq(r-2\alpha)^2 - 4\beta^2\gamma^2 + 4\beta\gamma pq + 3\beta^2q(r-2\alpha) + 3p\gamma^2(r-2\alpha)} A_5, \\
 A_4 &= \frac{2[8\beta qp(r-2\alpha) - 12p^2\gamma\beta q - \gamma p(r-2\alpha) + \beta^2\gamma(r-2\alpha) - 9\beta^3q + 3\gamma^2\beta p]}{8p^2q^2 - 2pq(r-2\alpha)^2 - 4\beta^2\gamma^2 - 4\beta\gamma pq + 3\beta^2q(r-2\alpha) + 3p\gamma^2(r-2\alpha)} A_5.
 \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения A_1, A_2, A_3, A_4 в уравнение (4), сокращая обе части полученного уравнения на A_5 и приводя его члены к общему знаменателю, получаем

$$\begin{aligned}
 &[12\gamma^3\beta - \gamma^2(r-2\alpha)^2 + q(r-2\alpha)^3 + 6\gamma^2qp - 4pq^2(r-2\alpha) + 18\beta^2q^2 - \\
 &- 14\beta\gamma q(r-2\alpha)]\delta p + [12\beta^3\gamma - \beta^2(r-2\alpha)^2 + p(r-2\alpha)^3 + 6\beta^2pq - \\
 &- 4qp^2(r-2\alpha) + 18\gamma^2p^2 - 14\gamma\beta p(r-2\alpha)]\delta q + 2[8\gamma pq(r-2\alpha) - \\
 &- 12q^2\beta\gamma p - \beta q(r-2\alpha)^2 + \gamma^2\beta(r-2\alpha) - 9\gamma^3p + 3\beta^2\gamma q]\delta\beta + \\
 &+ 2[8p q\beta(r-2\alpha) - 12p^2\gamma\beta q - p\gamma(r-2\alpha)^2 + \beta^2\gamma(r-2\alpha) - 9\beta^3q + \\
 &+ 3\gamma^2\beta p]\delta\gamma + [8p^2q^2 - 2pq(r-2\alpha)^2 - 4\gamma^2\beta^2 - 4\beta\gamma pq + 3\beta^2q(r- \\
 &- 2\alpha) + 3\gamma^2p(r-2\alpha)]\delta(r-2\alpha) = 0.
 \end{aligned}$$

После умножения обеих частей этого уравнения на 54 оно примет такой вид:

$$\begin{aligned}
 &\left\{A[54\gamma^2 - 36q(r-2\alpha)] - \frac{3}{2}B(-12q)\right\}\delta p + \left\{A[54\beta^2 - 36p(r-2\alpha)] - \right. \\
 &- \frac{3}{2}B(-12p)\left.\right\}\delta q + \left\{A[108q\beta - 18\gamma(r-2\alpha)] - \frac{3}{2}B(12\gamma)\right\}\delta\beta + \\
 &+ \left\{A[108p\gamma - 18\beta(r-2\alpha)] - \frac{3}{2}B(12\beta)\right\}\delta\gamma + \left\{A[-18\gamma\beta - 36pq + \right. \\
 &+ 3(r-2\alpha)^2] - \frac{3}{2}B[-2(r-2\alpha)]\left.\right\}\delta(r-2\alpha) = 0, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где

$$A = 12\gamma\beta - 12pq - (r-2\alpha)^2; \quad (6)$$

$$B = 54q\beta^2 + 54p\gamma^2 - 18\gamma\beta(r-2\alpha) - 36pq(r-2\alpha) + (r-2\alpha)^3.$$

Сгруппировав в уравнении (5) члены с коэффициентами $A, \frac{3}{2}B$, находим

$$\begin{aligned}
 &A\{[54\gamma^2 - 36q(r-2\alpha)]\delta p + [54\beta^2 - 36p(r-2\alpha)]\delta q + [108q\beta - \\
 &- 18\gamma(r-2\alpha)]\delta\beta + [108p\gamma - 18\beta(r-2\alpha)]\delta\gamma + [-18\gamma\beta - 36pq + \\
 &+ 3(r-2\alpha)^2]\delta(r-2\alpha)\} - \frac{3}{2}B[-12q\delta p - 12p\delta q + 12\gamma\delta\beta + \\
 &+ 12\beta\delta\gamma - 2(r-2\alpha)\delta(r-2\alpha)] = 0.
 \end{aligned}$$

или

$$A \{ \delta [54q\beta^2 + 54p\gamma^2 - 18\gamma\beta(r-2a) - 36pq(r-2a) + (r-2a)^3] - \frac{3}{2} B \{ \delta [12\gamma\beta - 12pq - (r-2a)^2] \} = 0.$$

Учитывая (6), имеем

$$A\delta B - \frac{3}{2}B\delta A = 0.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{\delta B}{B} = \frac{3}{2} \frac{\delta A}{A}.$$

Отсюда

$$\ln B = \frac{3}{2} \ln A + \ln C = \ln CA^{\frac{3}{2}},$$

$$B = CA^{\frac{3}{2}},$$

$$C = \frac{B}{A^{\frac{3}{2}}},$$

где

$$C = \text{const.}$$

Таким образом,

$$\delta \left(\frac{B}{A^{\frac{3}{2}}} \right) = \delta C = 0.$$

Следовательно, величина, стоящая под знаком дифференциала является инвариантом. Обозначая инвариант через I и учитывая (4), находим

$$I = \frac{54\beta^3q + 54\gamma^2p - 18\gamma\beta(r-2a) - 36pq(r-2a) + (r-2a)^3}{V[12\gamma\beta - 12pq - (r-2a)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (7)$$

Формула (7) определяет инвариант второй дифференциальной окрестности комплекса прямых в трехмерном проективном пространстве.

ОЦЕНКИ ДЛЯ КРИВИЗНЫ МНОЖЕСТВА, ПРИМЫКАЮЩЕГО К КРАТЧАЙШЕЙ

При обсуждении вопроса о спрямляемости сферического изображения кратчайшей А. В. Погореловым [1, дополнение, п. 1] высказывается следующее интуитивное предложение.

На выпуклой поверхности в E^3 в малой окрестности внутреннего участка кратчайшей не может концентрироваться значительная кривизна.

Тем самым ставится задача о нахождении оценок для кривизны множества, примыкающего к кратчайшей, в зависимости от размеров самого множества.

В настоящей статье устанавливаются теоремы, дающие точное решение этой задачи.

Статья состоит из пяти параграфов. В § 1 формулируются результаты. Следующие два параграфа — вспомогательные. Доказательства посвящены § 4, 5.

§ 1. Результаты

В статье рассматриваются двумерные метрики с неотрицательной кривизной. Для упрощения эти метрики называются выпуклыми поверхностями. В дальнейшем символом ω ($\cdot$) обозначается кривизна множества ($\cdot$); все необходимые определения приведены в § 2.

В. А. Залгаллером [2] рассматривались некоторые задачи, связанные с оценками кривизны на выпуклых поверхностях в точках, вблизи которых проходят кратчайшие. Одно из указанных им неравенств по существу представляет собой оценку для случая бесконечной геодезической на выпуклом конусе.

Чтобы геодезическая была лучом, т. е. кратчайшей на каждом конечном участке, достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы кривизна конуса удовлетворяла следующему соотношению:

$$\omega \leq 2\delta, \quad (1)$$

где δ — угол наклона к геодезической отрезка образующей конуса, соединяющего вершину конуса с началом геодезической.

Как вытекает из (1),

$$\omega \leq 2 \frac{h}{s}, \quad (2)$$

где h — длина перпендикуляра на конусе, опущенного из вершины на геодезическую; s — длина участка этой линии, отсекаемого основанием перпендикуляра (считаем, что его основание располагается внутри геодезической).

Вопрос об оценке для кривизны конуса можно ставить и для конечной геодезической. Здесь соответствующее соотношение, необходимое, чтобы геодезическая была кратчайшей, в обозначениях, подобных только что введенным, имеет вид (§ 3):

$$\omega \leq 2 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) h. \quad (3)$$

Заметим, что (2) по существу является частным случаем (3).

Неравенства (1) и (3) представляют собой оценки для кривизны простейшего множества — точки на специальной выпуклой поверхности — конусе. Естественно ожидать, что аналогичные оценки как необходимые условия имеются и для произвольных выпуклых поверхностей, — т. е. для кривизны множеств на этих поверхностях, примыкающих к кратчайшим. Тем более, что существуют способы преобразования поверхностей, позволяющие для определенного класса множеств концентрировать кривизну этих множеств в точке.

Оценки, установленные в данной статье, являются непосредственным обобщением неравенств (1) и (3). Их получение приводит к случаю кратчайшей на конусе. При этом оказывается полезным следующее предположение: оценка для кривизны множества на выпуклой поверхности, примыкающего к кратчайшей в основном не зависит от кривизны его дополнения. В связи с сказанным, для получения соответствующих оценок используются преобразования поверхностей, удаляющие из этих поверхностей «лишнюю» кривизну.

Теорема 1. Пусть F — выпуклая поверхность, гомеоморфная замкнутому кругу, с кривизной, не превосходящей π , с кривизной неотрицательного поворота, включающим как часть кратчайшую l . Пусть $H \subset F$ — эквидистантный прямоугольник или ромб с основанием l и высотой h . Пусть s_1, s_2 — длины отрезков, дополняющих основание H до l . Тогда, если $h < \sqrt{s_1 s_2}$, справедливы неравенства

$$\operatorname{tg} \frac{\omega(H)}{2} \leq \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2 - h^2} h,$$

$$\omega(H) \leq 2 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) h.$$

При этом

$$\omega(H) < \pi.$$

Теорема 2. Пусть F — открытая выпуклая поверхность l — кратчайшая на F . Пусть $B \subset l$ — некоторое множество, состоящее из концов l на положительных расстояниях s_1, s_2 от некоторой точки. Пусть $\{B_n | B_n \subset F\}$ — последовательность борелевских множеств, сходящихся к множеству B . Тогда справедливо неравенство

$$\omega(B_n) \leq 2 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \varepsilon_n \right) h_n,$$

где h_n — высота B_n над l и $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Пусть F — открытая выпуклая поверхность $l \subset F$ — кратчайшая, исходящая из некоторой точки O . Пусть $\{B_n | B_n \subset F\}$ — последовательность гомеоморфных замкнутому кругу гранично выпуклых множеств, стягивающихся к O , каждое из которых включает O в свою границу и содержит направления из O . Пусть δ_n — угол между направлениями в точке O ветвей границы B_n . Тогда, если $\delta_n \rightarrow 0$, справедливо неравенство

$$\omega(B_n \setminus O) \leq (2 + \varepsilon_n) \delta_n,$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 1 содержится в § 4; в § 3 устанавливается уже отмеченный вариант для этой теоремы для конуса. Вторая теорема — очевидное следствие первой. По поводу теоремы 3 ограничимся лишь некоторыми необходимыми замечаниями, приведенными в § 5; её доказательство в основном сходно с доказательством теоремы 1.

Теорема 2, дающая в определенном смысле также достаточное условие, распространяется соответственно на случай поверхностей с кривизной $\geq k$.

Сформулированные теоремы и методы их доказательства могут оказаться полезными в исследовании внутренних и внешних метрических свойств выпуклых поверхностей. В [3] попутно отмечено, что предельный угол каждой кратчайшей на выпуклой поверхности, больший $\pi/2$. Доказательство этого факта основывается на теореме 3. В [4] устанавливается следующая теорема, в доказательстве которой используется теорема 2.

На выпуклой поверхности в E^3 каждая гладкая точка открытой кратчайшей, не сводящейся в окрестности этой точки к прямолинейному отрезку, есть также гладкая точка поверхности.

Заметим, что эта теорема и утверждение, аналогичное теореме 2, получены также А. А. Дубровиным [5].

§ 2. Некоторые определения и факты

Множество на выпуклой поверхности называется выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками оно содержит хотя бы одну соединяющую их кратчайшую. Множество называется гранично выпуклым, если любая дуга его границы является кратчайшей линией в его дополнении в классе гомотопных этой дуге линий с теми же концами. Гранично выпуклое множество выпукло.

Пусть F — выпуклая поверхность с краем L неотрицательно поворота. Множество точек на F , удаленных от L не менее чем на h , будем обозначать F_h . Известно, что граница L_h этого множества со стороны F_h — линия неотрицательного поворота. Открытое множество, принадлежащее F/F_h и ограниченное отрезком L_h двумя перпендикулярами на L (кратчайшими, реализующими расстояние h до L), проведенными из концов этого отрезка, и соответствующим участком линии L , будем называть открытым эквидистантным прямоугольником с высотой h . Отрезки линий L_h и L , входящие в границу множества, будем называть соответственно верхним и нижним его основаниями (иногда опускают прилагательное «нижний»), а соответствующие перпендикуляры — боковыми сторонами. Будем рассматривать и замкнутые эквидистантные прямоугольники, определение которых очевидно. Чтобы охватить общий случай, к их числу отнесем прямоугольники с совпадающими боковыми сторонами. Каждый такой прямоугольник — вырожденный и сводится к перпендикуляру на L . Верхнее основание эквидистантного прямоугольника может состоять из одной точки; этот прямоугольник, если его нижнее основание — кратчайшая, является равнобедренным треугольником.

Пусть F — выпуклая поверхность с краем L неотрицательно поворота. Выпуклую поверхность $\hat{F}$, полученную стандартным склеиванием двух экземпляров поверхности F , будем называть

удвоением F . Следуя обычной терминологии, удвоение можно рассматривать как дважды покрытую поверхность. Каждому множеству $M \subset F$ естественно сопоставляется его удвоение $\hat{M}$.

Пусть $H \subset F$ — открытая область, гомеоморфная кругу, $\hat{H} \subset \hat{F}$ — удвоение замыкания H . Область H называется открытой нормальной областью, если ее удвоение $\hat{H}$ на $\hat{F}$ гранично выпукло. Очевидным образом определяется замкнутая нормальная область (с непустой внутренностью).

Граница нормальной области H составляется двумя частями: линией $e \subset L$ — основанием и линией e' — верхней дугой границы H , внутренность которой находится в $F \setminus L$. Область H характеризуется следующими свойствами. Углы между e и e' со стороны H не превосходят $\pi/2$; H — гранично выпукла; для любой точки $X' \in e'$ найдется перпендикуляр из X на L , принадлежащий замыканию H . Наибольшая из длин перпендикуляров, опущенных из точек e' на L , называется высотой нормальной области. Введенная высота, как легко устанавливается, совпадает с высотой H как множества, определяемой ниже.

Пусть L и M — соответственно некоторая линия и некоторое множество на выпуклой поверхности. Высотой M над L называется наибольшее из расстояний до линии L от точек множества M .

Пусть F — односвязная выпуклая поверхность с краем L без ребристого поворота. Выпуклый конус с краем $\bar{L}$ называется соприкасающимся конусом F вдоль L , если имеется изометрия $L \leftrightarrow \bar{L}$, в которой соответствующие дуги кривых обладают равными поворотами. Соприкасающийся конус существует; если F бесконечная, то в качестве этого конуса можно рассматривать поверхность, развёртывающуюся на плоскость [6]. Соприкасающийся конус допускает отображение со сжатием на поверхность F , совпадающее на $\bar{L}$ с отображением $\bar{L} \rightarrow L$, которое определяется изометрическим соответствием $L \leftrightarrow \bar{L}$. В дальнейшем часто используется следующая операция: вырезание из поверхности некоторой области и вклеивание на место этой области ее соприкасающегося конуса. Определение правила склеивания в этой операции очевидно.

Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — некоторые поверхности, представленные как объединения непересекающихся множеств: $\Phi = M \cup M'$, $\bar{\Phi} = \bar{M} \cup \bar{M}'$. Предположим, что M и $\bar{M}$ изометричны (в индуцированных метриках) и что эта изометрия продолжается до некоторого отображения $f: \bar{\Phi} \rightarrow \Phi$. Будем тогда говорить, что f — тождественно на M . Для обозначения двух соответствующих элементов Φ и $\bar{\Phi}$ будем использовать общий символ, не различая тем самым эти элементы. Отображение $f^{-1}: \Phi \rightarrow \bar{\Phi}$, таким образом, может рассматриваться как некоторое преобразование (деформация) Φ .

с сохранением M . Результат деформации, поверхность $\bar{\Phi}$, что не употребляя лишнего символа, естественно также обозначать Φ .

§ 3. Оценка для конуса

Вопрос об оценке для кривизны в случае произвольной поверхности принципиально решается получением соответствующего результата для конуса.

Лемма. Пусть K — полный выпуклый конус с кривизной ω и K — кратчайшая. Предположим, что основание перпендикуляра на конусе, опущенного из его вершины на l , располагается внутри кратчайшей и делит ее на отрезки с длинами s_1, s_2 . Пусть h — длина перпендикуляра и $h < \sqrt{s_1 s_2}$. Тогда $\omega < \pi$ и справедливы неравенства

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leq \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2 - h^2} h, \quad \omega \leq 2 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) h.$$

Доказательство. Отрезки образующих, соединяющих вершину конуса с точками l , заполняют на этом конусе область Δ , симметричную плоскому треугольнику. Поскольку l — кратчайшая, то для угла φ в Δ , противолежащего l , имеем неравенство $\varphi < 2\pi - \omega$. Кроме того, из условия $h < \sqrt{s_1 s_2}$ следует, что $\varphi > \pi/2$. Таким образом,

$$\omega/2 \leq \pi - \varphi = \delta_1 + \delta_2 < \pi/2.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы, если заметить, что $\pi - \varphi = \delta_1 + \delta_2$, где δ_1 и δ_2 — углы в Δ , прилежащие к l . Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Поверхность F можно рассматривать как часть бесконечной поверхности Φ , гомеоморфной полуплоскости, со следующими свойствами. Φ — выпуклая поверхность, ограниченная линией L нулевым поворотом, содержащей как часть кратчайшую l ; l — кратчайшая на Φ и H — эквидистантный прямоугольник или соответственно нормальная область над L ; $\omega(\Phi) = \omega(F)$, так что кривизна поверхности Φ сосредоточена в компактной области. Поверхность Φ однозначно строится с помощью подклеивания к F некоторой развертывающейся поверхности, вырезанной из полного конуса — продолжения соприкасающегося конуса поверхности F .

Теорема доказывается с помощью перехода от произвольной поверхности к поверхности простого строения. При этом, естественно, обеспечивается, что значения величин $\omega(H)$, h , s_1 и s_2 , если и изменяются, то достаточно мало. В связи со сказанным в дальнейшем изложении основное внимание уделяется описанию преобразований поверхности Φ .

1. H — замкнутый эквидистантный прямоугольник. Здесь поверхности Φ указываются деформации, оставляющие, как нетрудно заметить, неизменными величины $\omega(H)$, h , s_1 и s_2 и переводящие эту поверхность в конус.

Пусть L_h — эквидистанта L , содержащая верхнее основание H . Линия L_h , как нетрудно показать, подразделяет Φ на две части: замкнутую полосу Π_h , примыкающую к L , и область Φ_h , гомеоморфную открытой полуплоскости (простой в исследовании случай « Φ_h — пусто» рассматривать не будем). Эквидистанта L_h со стороны Φ_h — неотрицательного поворота; заменим область Φ_h на поверхности Φ ее соприкасающимся конусом. Таким образом будем считать, что область Φ_h изометрична плоской.

Пусть X и Y — крайние точки верхнего основания H . Не исключается, что это основание вырождается в одну точку. Проведем в части Φ_h (имея в виду ее развертку на плоскости) две параллельные лучи ν_x и ν_y , начинающиеся соответственно в точках X и Y . Вырежем из Φ «полоску», ограниченную линиями $a_x \cup \nu_x$ и $a_y \cup \nu_y$, где $a_x, a_y \subset \Pi_h$ — соответствующие боковые стороны эквидистантного прямоугольника. Оставшиеся части поверхности склеим по берегам разрезов, отождествляя отрезки с равными длинами и считая X и Y за одну точку. Линия на поверхности Φ , в которую перейдет линия l , после укорачивания будет кратчайшей. Чтобы убедиться в этом, достаточно учесть следующее легко устанавливаемое свойство прямоугольника H . Длина любой линии в H , эквидистантной к нижнему основанию прямоугольника, не превосходит длины указанного основания. Итак, можно считать, что H вырождается в перпендикуляр на L . Тогда кривизна $\omega(H)$ сосредоточена в верхнем конце этого перпендикуляра; сохранение $\omega(H)$ при переходе к данному случаю вытекает из формулы Гаусса — Бонне.

Рассмотрим сетку кратчайших линий, включающую как множество кратчайшую H и подразделяющую поверхность Φ на выпуклые треугольники. Предполагается, что конечный набор этих треугольников покрывает открытую область, которой принадлежит вся кривизна Φ . Заменим каждый из треугольников его соприкасающимся конусом. Тем самым кривизна поверхности окажется сосредоточенной в конечном числе вершин. Удалив кривизну из дополнения $\Phi \setminus H$ — это будет последнее преобразование поверхности Φ .

Пусть $X \in H$ — некоторая вершина, ближайшая к L ; L'_h — проходящая через X эквидистанта L ; L'_h — бесконечная в одну сторону часть L'_h с началом в X , не пересекающаяся с H . Линия L'_h — геодезическая ломаная; последнее в направлении от X — это по этой ломаной — геодезический «луч» ν , начинающийся в некоторой вершине Z (не исключается, что $Z \equiv X$). Разрежем

лучу γ и вклеим в разрез плоский угол, отождествляя его границу с Z . Угол подбирается таким образом, чтобы на полученной поверхности Φ_Z кривизна в точке Z была бы равна нулю. Нетрудно заметить, что на Φ_Z линия l — кратчайшая. С помощью отображения $\Phi \rightarrow \Phi_Z$, примененной (если понадобится) неоднократно к поверхности Φ_Z , затем к полученной из нее поверхности и т. д., поверхность Φ преобразуется в конус. Оценка для кривизны в этом случае установлена в предыдущем параграфе.

Пусть H — открытая нормальная область. Получим оценку $\omega(H)$, указав надлежащие преобразования поверхности Φ . Будем использовать такие обозначения: e и e' — соответственно основание и верхняя дуга границы области H ; A, B — общие концы e, e' .

Пусть s — ломаная в H , составленная из кратчайших, правильно вписанная в e' , достаточно близкая к e' , оканчивающаяся в точках A, B . В качестве новой области H рассмотрим многоугольник — нормальную область, ограниченную ломаной $s \cup e$. При переходе к этому многоугольнику значения s_1, s_2 останутся неизменными, а величины h и $\omega(H)$ изменятся достаточно мало.

Построим достаточно мелкую триангуляцию многоугольника H , и каждый из треугольников заменим его соприкасающимся конусом. С помощью надлежащих разрезов по кратчайшим в соединяющим вершины, и вклеиваний дважды покрытых треугольников многоугольник H преобразуется так, чтобы его внутренние вершины все отстояли от основания на равных расстояниях, не превосходящих исходного (т. е. до преобразования) значения h . Теперь, очевидно, оценка для кривизны вытекает из результата п. 1.

3. H — замкнутая нормальная область. Здесь, безусловно, предполагается, что часть кривизны этой области сосредоточена на ее границе. Будем применять обозначения e, e', A, B , введенные в п. 1.

Пусть s — ломаная в H , составленная из достаточно малых правильных, правильно вписанная в e' , оканчивающаяся в точках A, B . Ломаная s отсекает от H некоторое число луночек. Заменяя каждую из луночек ее соприкасающимся конусом. Линия s ограничивает в H многоугольник S ; рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию этого многоугольника, и каждый из треугольников также заменим его соприкасающимся конусом. В результате получим новую замкнутую нормальную область, имеющую прежнюю кривизну $\omega(H)$. Для высоты $\tilde{h}$ этой области и высоты h исходной имеем неравенства

$$h \leq \tilde{h} \leq h + 2\omega(H)d + \varepsilon,$$

где d — наибольшая из длин сторон треугольников триангуляции S , ε — мало вместе с малостью луночек. Левое из этих неравенств следует из того факта, что новая нормальная область отображается на старую со сжатием, тождественным на $e \cup e'$; правое

неравенство вытекает из общих теорем [7] метрической аппроксимации произвольных выпуклых поверхностей многогранниками. Итак, можно принять, что кривизна поверхности внутри сосредоточена в конечном числе вершин. Тогда можно считать дополнительно, что внутренность H разворачивается на плоскость. В противном случае кривизна внутренней области перемещается на границу области H . Это достигается за счет применения (при необходимости — неоднократного) следующей операции, которая в сущности уже использовалась в § 1.

Пусть $\Delta \subset H$ — равнобедренный треугольник с основанием e , с боковыми сторонами — высотами, опущенными на основание e из общей точки на верхней дуге границы этой области. Кривизна внутренней области треугольника Δ отлична от нуля. Вырежем Δ из H и склеим на оставшейся поверхности берега разрывов, отождествляя отрезки с равными длинами. Линия на новой поверхности, в которую перейдет линия l после укорачивания, будет кратчайшей; H перейдет в замкнутую нормальную область, причем значения $\omega(H)$, h , s_1 и s_2 не изменятся.

Последнее преобразование области H может превратить область в вырожденную — в перпендикуляр на L ; оценка $\omega(H)$ для этого случая уже получена. Далее предполагается, что внутренность H имеет нулевую кривизну и что выполняются следующие условия. Некоторые отрезки линии границы H , примыкающие к A и B , есть кратчайшие на некоторой окрестности линии L на поверхности Φ — разворачивающаяся на плоскость; линия l — единственная кратчайшая, соединяющая соответствующие точки поверхности. Этого можно добиться таким образом. Заменяем малые дуги e' , подходящие к A и B , замыкающими их хордами в H (при этом $\omega(H)$ изменится достаточно мало); вклеиваем вместо каждого из треугольников надлежащей триангуляции окрестности L его соприкасающийся конус; мало укорачиваем линию l .

Укажем еще одну деформацию области H , заменив ее близкой нормальной областью с кривизной внутренней области, равной $\omega(H)$. Тем самым оценка для кривизны приводится к случаю открытой нормальной области.

Пусть τ и τ' — функции, выражающие повороты открытой кривой e' на борелевских множествах соответственно со стороны области H и ее дополнения на поверхности Φ . Будем считать, что $\tau'(e') < 0$ (в случае $\tau'(e') = 0$ построения изменяются несущественно; заметим, что функция τ' — неположительная). Пусть $\tilde{e}'$ — выпуклая кривая в плоскости, отличная от прямолинейного отрезка, изометричная e' , неотрицательный поворот которой выражается функцией $\tilde{\tau}' \equiv -\tau' \leq \tau$. Такая кривая существует, поскольку для полного ее поворота имеем неравенства

$$\tilde{\tau}'(\tilde{e}') = -\tau'(e') < \tau(e') \leq \pi.$$

Пусть α, β — наклоны в H в точках A, B линии e' к основанию e . Пусть $\tilde{A}, \tilde{B}$ — концы $\tilde{e}'$, соответствующие точкам $A, B \in e'$; линия в этих точках образует с замыкающей ее хордой углы, меньшие соответствующих им углов в H (см., например, [8]). Тогда существует замкнутая выпуклая кривая q , составленная из $\tilde{e}'$ и двух прямолинейных отрезков, которые в $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ образуют с линией углы α и β соответственно. Пусть Q — общий конец отрезков K — замкнутая выпуклая область с границей q .

Обозначим H_t и K_t поверхности, полученные соответственно из H и K преобразованиями подобия с коэффициентом t , где $0 < t < 1$. Считаем, что преобразование $K \rightarrow K_t$ осуществляется обычным образом в плоскости, с центром подобия в точке Q , тогда

$K_t \subset K$. Между линиями e'_t и $\tilde{e}'_t$, входящими соответственно в границы H_t и K_t и являющимися образами e' и $\tilde{e}'$, естественно устанавливается изометрия.

Вырежем H из Φ и K_t из K . Затем, учитывая изометрические соответствия $e'_t \leftrightarrow \tilde{e}'_t$ и $e' \leftrightarrow \tilde{e}'$, произведем подклеивания

$$H_t \rightarrow K/K_t \rightarrow \Phi/H.$$

При t , достаточно близком к единице, линия на новой поверхности Φ , в которую перейдет линия l , будет кратчайшей; высота новой нормальной области будет достаточно близкой к высоте H , а кривизна внутренности новой области — равной $\omega(H)$.

Теперь оценка для $\omega(H)$ — следствие результата, полученного в п. 2.

Теорема доказана.

§ 5. Замечания к теореме 3.

Чтобы установить эту теорему, достаточно убедиться в справедливости следующего утверждения.

(*) Пусть F — выпуклая поверхность, гомеоморфная замкнутому кругу, с кривизной, не превосходящей π , с краем неотрицательного поворота, включающим как часть кратчайшую l . Пусть $H \subset F$ — замкнутая нормальная область с принадлежащим l основанием e , примыкающим к одному из концов O кратчайшей. Пусть s, s_1 — соответственно длина e и длина отрезка, соединяющего e до l , а δ — угол наклона k e в точке O верхней грани H . Тогда

$$\omega(H \setminus O) \leq (2 + \epsilon) \delta,$$

где ϵ — сколь угодно мало, если сколь угодно малы δ и s/s_1 .

Доказательство предложения (*) осуществляется в том плане, что и доказательство теоремы 1 (§ 2, 3). Здесь также поверхность F включается в надлежащую бесконечную выпуклую поверхность. Рассматривая открытую область H и учитывая соответствующие преобразования — замену H соприкасающимся конусом, удаление кривизны из дополнения к H — можно считать, что бесконечная поверхность есть выпуклый конус. Тогда оценка для кривизны получается с помощью неравенства

$$\omega(H) \leq 2(\delta_1 + \delta_2),$$

аналогичного использованному в доказательстве леммы. Из этого результата соответственно следует оценка для кривизны замкнутой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. 1969. 759 с.
2. Залгаллер В. А. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. «Укр. геометр. сб.» Вып. 10, Харьков, 1971, с. 12—18.
3. Милка А. Д. Особенность у конца кратчайшей на выпуклой поверхности. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 14. Харьков, 1973, с. 48—55.
4. Милка А. Д. Теорема о гладкой точке кратчайшей. См. статью в настоящем сборнике.
5. Дубровин А. А. О регулярности выпуклой поверхности в окрестности кратчайшей. См. статью в настоящем сборнике.
6. Милка А. Д. О непрерывных изгибаниях выпуклых поверхностей. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 13. Харьков, 1972, с. 129—141.
7. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М., — Л., Гостехиздат, 1948. 387 с.
8. Милка А. Д. Об одной теореме Шура — Шмидта. — «Укр. геометр. сб.» Вып. 8. Харьков, 1970, с. 95—102.

Поступила 27 января 1979

ТЕОРЕМА О ГЛАДКОЙ ТОЧКЕ КРАТЧАЙШЕЙ

В статье устанавливается следующая теорема, высказанная в качестве предположения в [1—2].

На выпуклой поверхности в E^3 каждая гладкая точка открытой кратчайшей, не сводящейся в окрестности этой точки к прямолинейному отрезку, есть также гладкая точка поверхности.

Первый параграф статьи — вспомогательный. Доказательство теоремы содержится в § 2.

Одно из вспомогательных предложений (лемма 2) — оценка кривизны малой области, примыкающей к кратчайшей — получено как следствие в [3]. В данной статье для полноты эта оценка выводится независимо; она элементарно устанавливается для конуса и достаточно просто переносится на произвольные поверхности.

Сформулированная теорема и соответствующее утверждение локальной оценке доказаны также А. А. Дубровиным [4].

В продолжении этой статьи будет дано распространение приведенного результата на случаи пространств сферического и Лобачевского.

§ 1. Вспомогательные предложения

Условимся в этом параграфе под выпуклыми поверхностями понимать метрики с неотрицательной кривизной.

Пусть F — односвязная выпуклая поверхность с краем L неотрицательного поворота. Выпуклый конус с краем $\bar{L}$ называется соприкасающимся конусом F вдоль L , если имеется изометрия $L \leftrightarrow \bar{L}$, в которой соответствующие дуги кривых имеют равные повороты [5]. Если F — бесконечная, то в качестве этого конуса можно рассматривать поверхность, разворачивающуюся на плоскость. Соприкасающийся конус допускает отображение со сжатием на поверхность F , совпадающее на $\bar{L}$ с отображением $\bar{L} \rightarrow L$, которое определяется изометрическим соответствием $L \leftrightarrow \bar{L}$.

Пусть F — часть некоторой поверхности Φ . В дальнейшем используется следующая операция: вырезание F из Φ и вклеивание на место F (с учетом изометрии $L \leftrightarrow \bar{L}$) ее соприкасающегося конуса. Указанная операция обладает важным свойством: пусть $I \subset \Phi$ — кратчайшая, не пересекающаяся с внутренностью F ; тогда эта линия на новой поверхности, в которую переходит поверхность Φ , также является кратчайшей.

Заметим, что кривизна внутренности F и кривизна ее соприкасающегося конуса равны.

Высотой множества над кривой на некоторой поверхности называется наибольшее из расстояний до этой кривой от точек множества; термин «высота множества» будет применяться и для обозначения кратчайшей линии, реализующей указанное расстояние.

Далее, как обычно, кривизна множества $(\cdot)$ на выпуклой поверхности обозначается $\omega(\cdot)$.

Общие факты для выпуклых поверхностей, которые нами используются, имеются в [6].

Лемма 1. Пусть F — выпуклая поверхность, гомеоморфная замкнутому кругу, с краем неотрицательного поворота, составленным из двух линий — кратчайшей $\bar{e}$ и дуги e . Пусть $X \in e$ — переменная точка такая, что основание $\bar{X}$ перпендикуляра $X\bar{X}$, опущенного на $\bar{e}$ из X (т. е. кратчайшей на F , реализующей расстояние от X до $\bar{e}$), располагается внутри $\bar{e}$. Пусть A — один из общих концов e и $\bar{e}$; x — длина дуги $\bar{A}X \subset e$; $h(x) = |X\bar{X}|$; $s(x) = |A\bar{X}|$ — длины соответствующих кратчайших. Тогда функция $\lambda(x) = h(x)/s(x)$ — невозрастающая по переменной x .

Доказательство. Пусть $X', X'' \in e$ — произвольные точки, для которых $0 < x' < x''$ и основания $\bar{X}', \bar{X}''$ соответствующих перпендикуляров располагаются внутри $\bar{e}$. Вырежем из фигуры P , ограниченную дугой $\bar{A}X'' \subset e$, перпендикуляром $X''\bar{X}''$ и отрезком $A\bar{X}'' \subset e$. Перпендикуляр $X'\bar{X}'$ подразделяет эту фигуру на две части. Заменим каждую из частей P ее соприкасающимся конусом, и каждый из конусов разрежем по образующей, идущей из вершины во внутреннюю точку соответствующей дуги $\bar{A}X', X'\bar{X}'' \subset e$. Полученную в результате метрику разведем на плоскость. При этом линия $\bar{A}X'' \subset e$ перейдет в прямой линейный отрезок, а высотами $X'\bar{X}', X''\bar{X}''$ будут перпендикуляры к отрезку, восстановленные по одну его сторону из точек $\bar{X}'$ и $\bar{X}''$. Другие концы перпендикуляров, как нетрудно заметить, будут принадлежать некоторой локально выпуклой кривой концами в A и X'' обращенной вогнутостью к $\bar{X}'$ и ограничивающей вместе с перпендикуляром $X''\bar{X}''$ и отрезком $A\bar{X}''$ одну связную область в плоскости. Теперь, очевидно, неравенство $\lambda(x') \geq \lambda(x'')$.

Лемма доказана.

Применяя лемму 1, будем иметь в виду следующее

Замечание. Из приведенного доказательства ясно, что множество точек $X \in e$, для которых выполняется утверждение леммы, можно расширить. Новое множество определяется следующим условием: $X \neq A$, и соответствующий перпендикуляр $X\bar{X}$ в точке $\bar{X}$ образует с отрезком $A\bar{X}$ угол $\pi/2$.

Лемма 2. Пусть F — выпуклая поверхность, гомеоморфная замкнутому кругу, с границей неотрицательного поворота, включающей кратчайшую l . Пусть $E \subset l$ — некоторое множество, отстоящее от концов l на положительных расстояниях. Пусть $\{E_n | E_n \subset F\}$ — последовательность открытых множеств, сходящихся к E . Тогда справедливо неравенство

$$\omega(E_n) \leq Ch_n,$$

где h_n — высота E_n над l ; C — не зависящая от n положительная постоянная.

Доказательство. Будем рассматривать F как часть бесконечной поверхности Φ , гомеоморфной замкнутой полуплоскости и обладающей следующими свойствами. Граница Φ — линия L с нулевым поворотом; $l \subset L$; линия l_0 — кратчайшая от Φ ; $\omega(\Phi) = \omega(F)$, так что кривизна Φ сосредоточена в компактной области. Φ однозначно строится с помощью подклеивания к F некоторой развертывающейся поверхности, вырезанной из полного конуса — продолжения соприкасающегося конуса поверхности F .

Введем следующие обозначения, связанные с поверхностью Φ ; l_h — эквидистанта L с высотой h ; Π_h — замкнутая полоска, ограниченная L и L_h ; $\Phi_h \equiv \Phi / \Pi_h$. При малой h область Φ_h гомеоморфна полуплоскости, линия L_h со стороны Φ_h неотрицательного поворота. При достаточно больших n имеем $E_n \subset \Pi_{h_n}$.

Пусть $A_n, B_n \in L_{h_n}$ — некоторые точки; $A_n \bar{A}_n, B_n \bar{B}_n$ — опущенные из них соответственно перпендикуляры на L ; $H_n \subset \Pi_{h_n}$ — замкнутый эквидистантный прямоугольник, ограниченный этими перпендикулярами и дугами $\bar{A}_n \bar{B}_n \subset L, A_n B_n \subset L_{h_n}$. Можно считать, что $E_n \subset H_n$ и $H_n \rightarrow E$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда при больших n точки $\bar{A}_n, \bar{B}_n$ располагаются внутри l . Пусть $s_{1,n}, s_{2,n}$ — соответствующие расстояния от каждой из этих точек до ближайшего из концов l . Очевидно, при $n \rightarrow \infty$

$$s_{1,n} \rightarrow s_1, s_{2,n} \rightarrow s_2,$$

где s_1, s_2 — отличные от нуля числа (расстояния до концов l от E).

Оценим кривизну множества H_n . Для этого подвергнем Φ последовательности преобразований. Полученную из Φ поверхность, а также ее промежуточные преобразования будем по-прежнему обозначать Φ , связывая с этими поверхностями эквидистанты L_h и области Φ_h .

Вырежем область Φ_{h_n} из Φ и вклеим на место Φ_{h_n} ее соприкасающийся конус. Проведем в области Φ_{h_n} , имея теперь в виду ее развертку на плоскость, параллельные лучи $\sphericalangle A_n, \sphericalangle B_n$ из точек A_n, B_n соответственно. Вырежем из Φ полоску, ограниченную линиями $A_n \bar{A}_n \cup \sphericalangle A_n$ и $B_n \bar{B}_n \cup \sphericalangle B_n$; оставшиеся куски Φ склеим по берегам разрезов, отождествляя дуги с равными длинами и точки $\bar{A}_n$ и $\bar{B}_n$. Результат склеивания A_n с B_n обозначим $\bar{A}_n, \bar{A}_n$ с $\bar{B}_n$ — $\bar{S}_n$. Граница новой поверхности Φ — линия с нулевым поворотом; линия, в которую переходит кратчайшая l после укорачивания на этой поверхности — также кратчайшая. Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно воспользоваться следующим легко устанавливаемым фактом; длина дуги

любой эквидистанты L_n , заключенной в прямоугольнике не превосходит длины его основания — дуги $\overline{A_n B_n}$. Кривизна в точке S_n на поверхности Φ равна $\omega(H_n)$ — это следует из формулы Гаусса — Бонне. Линия $S_n \overline{S_n}$ — результат склеивания A_n и $B_n \overline{B_n}$ является на этой поверхности перпендикуляром к границе.

Последнее преобразование поверхности Φ — удаление кривых из дополнения $\Phi \setminus S_n \overline{S_n}$. Оно осуществляется следующим образом.

Введем подразделение поверхности Φ на многоугольники углами, не превосходящими π , ни один из которых не пересекается внутренностью с замкнутым перпендикуляром $S_n \overline{S_n}$. Каждый из многоугольников заменим его соприкасающимся конусом. Тогда, учитывая, что кривизна Φ сосредоточена в компактной области, можно считать в дальнейшем, что Φ — многогранная поверхность с конечным числом вершин. Пусть L_h — эквидистанта L , проходящая через одну из вершин Φ , ближайшую к Φ и отличную от S_n . Линия L_h — геодезическая ломаная. Одна из ее бесконечных звеньев — замкнутый геодезический луч γ не пересекающийся с замкнутым перпендикуляром $S_n \overline{S_n}$ с началом в некоторой вершине $X \neq S_n$ поверхности Φ . Разрежем Φ по лучу γ и вклеим в разрез обычным образом плоский угол, равный по величине кривизне поверхности в точке X . Тогда самым Φ преобразуется в поверхность с меньшим числом вершин. Очевидно, каждая линия, кратчайшая на поверхности Φ не пересекающаяся с внутренностью луча γ , на новой поверхности остается кратчайшей. С помощью описанной операции, применяемой, если понадобится, неоднократно, поверхность Φ преобразуется в конус.

Пусть l_n — кратчайшая на конусе Φ , образ кратчайшей Δ_n — треугольник на Φ , составленный отрезками образующих, проектирующих l_n из S_n . Основание $\overline{S_n}$ перпендикуляра $S_n \overline{S_n}$ имеющего длину h_n , опущенного на l_n , делит l_n на отрезки длинами $s_{1,n}$, $s_{2,n}$. Так как l_n — кратчайшая, то угол при вершине S_n в Δ_n не превосходит половины полного угла в этой вершине на поверхности Φ . Поэтому, учитывая, что кривизна конуса равняется $\omega(H_n)$, имеем неравенство

$$\frac{\omega(H_n)}{2} \leq \delta_{1,n} + \delta_{2,n} < \frac{h_n}{s_{1,n}} + \frac{h_n}{s_{2,n}},$$

где $\delta_{1,n}$, $\delta_{2,n}$ — углы в Δ_n , прилежащие к l_n . Отсюда получается необходимая оценка для кривизны E_n , поскольку $\omega(E_n) \leq \omega(H_n)$

$$\omega(E_n) \leq 2 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \varepsilon_n \right) h_n,$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма доказана.

Множество на выпуклой поверхности называется гранично выпуклым, если любая дуга его границы является кратчайшей линией в его дополнении в классе кривых с теми же концами.

Лемма 3. Пусть F — выпуклая поверхность с краем неотрицательного поворота, включающим как часть кратчайшую Γ и $E_n \subset F$ — последовательность гранично выпуклых множеств, гомеоморфных открытому кругу, сходящихся к внутренней точке в этой кратчайшей. Предположим, что границу E_n составляют: замкнутый отрезок $\bar{e}_n \subset l$ и линия e_n , принадлежащая внутренности F . Допустим, что для некоторой точки $X_n \in e_n$ опускание перпендикуляра на l из этой точки делит $\bar{e}_n$ на отрезки с длинами a_n, b_n ; пусть h_n — длина перпендикуляра. Пусть отношения $h_n/a_n, h_n/b_n$ стремятся к нулю, и при любом n

$$\omega(E_n) \geq D_n \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) h_n > 0.$$

Тогда $\lim D_n = 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не выполняется и существует константа D , не зависящая от n , для которой при всех n (это не нарушает общности)

$$\omega(E_n) \geq D \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) h_n > 0.$$

Введем следующие обозначения: A_n, B_n — концы e_n (и также e_n), h'_n — высота e_n , а значит, и множества E_n , над l ; $X'_n \in e_n$ — точка, расстояние которой до l равно h'_n ; X'_n — основание перпендикуляра $X'_n \bar{X}'_n$ на l из X'_n . Будем считать, что $a_n = |A_n \bar{X}'_n|$ и $b_n = |B_n \bar{X}'_n|$. Тогда соответственно обозначим $a'_n = |A_n \bar{X}'_n|$, $b'_n = |B_n \bar{X}'_n|$.

Надо полагать $X'_n \neq X_n$, иначе получим противоречие с леммой 2. Кроме того, $\bar{X}'_n \neq \bar{X}_n$, что следует из условия неналегания кратчайших.

Пусть для бесконечного числа значений n точка X'_n принадлежит дуге $X'_n B_n \subset e_n$. Далее рассуждения проводятся именно для этих n .

Покажем, что на кратчайшей l точка $\bar{X}'_n$ располагается относительно $\bar{X}_n$ с той же стороны, что и B_n . Допустим противное: порядок точек на l подчинен неравенству $\bar{X}'_n < \bar{X}_n < B_n$. Тогда нужно принять, учитывая граничную выпуклость E_n , что $\bar{X}'_n < A_n$ и что открытый перпендикуляр $X'_n \bar{X}'_n$ не имеет с E_n общих точек.

Рассмотрим треугольник Δ_n на F , составленный кратчайшими $A_n \bar{X}_n \subset l$, $A_n X'_n$ и $X'_n \bar{X}'_n$. Можно считать, что $A_n X'_n$ принадлежит

замыканию E_n . Так как $A_n X_n^*$ и $X_n \bar{X}_n$ пересекаются, то в силу условия $h_n/a_n \rightarrow 0$ $A_n X_n^*$ образует с кратчайшей $A_n B_n$ в точке A_n угол, стремящийся при $n \rightarrow \infty$ к нулю. Тогда угол в треугольнике Δ_n в вершине A_n близок к π , а остальные углы близки к нулю, поскольку близка к нулю кривизна этого треугольника. Но угол в $\bar{X}_n$ этого треугольника равен $\pi/2$ — получено противоречие.

Итак, для точек на l имеем порядок

$$A_n < \bar{X}_n < X_n^*.$$

Пусть X_n^* — точка пересечения кратчайшей $A_n X_n^*$ с перпендикуляром $X_n \bar{X}_n$; $h_n = |X_n \bar{X}_n|$. При достаточно больших n угол в треугольнике $A_n X_n^* \bar{X}_n$ на F в вершине X_n^* близок к $\pi/2$. Тогда, применяя лемму 1 к этому треугольнику, получаем

$$\omega(E_n) \geq D \frac{h_n}{a_n} \geq D \frac{h_n}{a_n} \geq D \frac{h_n}{a_n}.$$

Таким образом, для бесконечного числа значений n выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\omega(E_n) \geq D \frac{h_n}{a_n}, \quad \omega(E_n) \geq D \frac{h_n}{b_n}.$$

Но это противоречит лемме 2, поскольку при $n \rightarrow \infty$ $a_n^*, b_n^* \rightarrow 0$. Поэтому наше исходное предположение оказывается неверным. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы

Предположим, что утверждение теоремы не выполняется. Пусть E — ребристая точка на выпуклой поверхности F и V — двугранный угол, касательный конус поверхности в этой точке. Предположим, что существует кратчайшая $l \subset F$, проходящая через E , касающаяся ребра g угла V и не сводящаяся в окрестности E к прямолинейному отрезку, принадлежащему g .

Пусть l_1, l_2 — открытые ветви l , на которые эта кратчайшая разбивается точкой E . Условимся в следующих обозначениях: $\{A_n | A_n \in l_1\}$ и $\{B_n | B_n \in l_2\}$ — последовательности точек, сходящихся к E ; σ_n — плоскость, проведенная через A_n и B_n перпендикулярно биссекториальной плоскости σ угла V ; $\tilde{E}_n$ — открытая шапочка, отсекаемая от F плоскостью σ_n ; $g_{1,n}$ и $g_{2,n}$ — прямые в плоскости σ_n , опорные к основанию шапочки $\tilde{E}_n$, проведенные перпендикулярно σ со «сторон» A_n и B_n соответственно. Пусть EQ_n — перпендикуляр из E на σ_n . Основание Q_n перпендикуляра принадлежит внутренности основания $\tilde{E}_n$. Обозначим

начим: $z_n = |EQ_n|$, $x_{1,n}$ и $x_{2,n}$ — расстояния от точки Q_n до прямых $g_{1,n}$ и $g_{2,n}$ соответственно; $y_{1,n} = |A_n^{\sim}E|$, $y_{2,n} = |B_n^{\sim}E|$ — длины дуг l .

Заметим, что

$$z_n/x_{1,n} \rightarrow 0 \text{ и } z_n/x_{2,n} \rightarrow 0.$$

Легко устанавливается (с помощью леммы Либермана), что для некоторых последовательностей $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ (их мы будем рассматривать далее) при $n \rightarrow \infty$

$$x_{1,n} < (2 + \varepsilon_n) y_{1,n} \text{ и } x_{2,n} < (2 + \varepsilon_n) y_{2,n},$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$. В случае, когда одна из ветвей l в окрестности E , например l_2 , — прямолинейный отрезок, точки $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ выбираются так, чтобы при $n \rightarrow \infty$ $x_{1,n} \ll x_{2,n}$.

Применим метод оценки кривизны шапочки в окрестности вершинной точки, изложенный в [7]. Тогда получим

$$\omega(\tilde{E}_n) \geq 5D_1 \left(\frac{1}{x_{1,n}} + \frac{1}{x_{2,n}} \right) z_n,$$

где D_1 — некоторая положительная постоянная, определяемая величиной угла V , не зависящая от n . Отсюда следует, если еще перейти к величинам y , что для одной из частей $\tilde{E}_n$ (обозначим ее E_n) при достаточно больших n справедливо неравенство

$$\omega(E_n) \geq D_1 \left(\frac{1}{y_{1,n}} + \frac{1}{y_{2,n}} \right) z_n.$$

Напомним, что кривизна внутренности кратчайшей на выпуклой поверхности равна нулю.

Далее удобно считать, что E_n — открытая область, и рассматривать совокупность $\{E_n\}$ в некоторой фиксированной полуокрестности кратчайшей l . Очевидно, что при больших n область E_n в этой полуокрестности графично выпуклая; границу E_n составляют такие кривые: замкнутый отрезок $\bar{e}_n \subset l$ и не перекрывающаяся с l открытая линия e_n .

Пусть $X_n \bar{E} \subset E_n$, где $X_n \subset e_n$ — дуга сечения поверхности F плоскостью τ_n , проходящей через EQ_n перпендикулярно биссекторальной плоскости угла V . При $n \rightarrow \infty$ плоскости τ_n почти перпендикулярны ребру g . Поэтому для длины $z_n = |X_n^{\sim}E|$ имеем

$$z_n \geq D_2 \bar{z}_n,$$

где D_2 — положительная постоянная, просто связанная с величиной угла V , не зависящая от n . Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\bar{z}_n/y_{1,n} \rightarrow 0 \text{ и } \bar{z}_n/y_{2,n} \rightarrow 0.$$

Пусть $X_n \bar{X}_n$ (где $\bar{X}_n \subset l$) — перпендикуляр на F из точки X_n на кратчайшую l ; $h_n = |X_n \bar{X}_n|$, $a_n = |A_n \bar{X}_n|$, $b_n = |B_n \bar{X}_n|$ — длины соответствующих кратчайших. Имеем

$$\bar{z}_n \geq h_n.$$

Очевидно, при достаточно больших n точка $\bar{X}_n$ — внутренняя для $\bar{e}_n$, $X_n \bar{X}_n$ принадлежит замыканию E_n и при $n \rightarrow \infty$

$$h_n/a_n \rightarrow 0, a_n/y_{1,n} \rightarrow 1, h_n/b_n \rightarrow 0, b_n/y_{1,n} \rightarrow 1.$$

Учитывая последние соотношения и собирая предыдущие неравенства, получаем

$$\omega(E_n) \geq D \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) h_n,$$

где D — не зависящая от n положительная постоянная. Но это противоречит лемме 3 в применении к области $E_n \subset F$. Тем самым приходим к тому, что наше исходное предположение неверно.

Теорема доказана.

Следствие (см. [2]). *Сферическое изображение открытой кратчайшей на выпуклой поверхности в E^3 есть простая кривая*

ЛИТЕРАТУРА

1. Милка А. Д. Об одном признаке сферы. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 9. Харьков, 1970, с. 78—84.
2. Залгаллер В. А. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 10. Харьков, с. 12—18.
3. Милка А. Д. Оценки для кривизны множества, примыкающего к кратчайшей. См. статью в настоящем сборнике.
4. Дубровин А. А. О регулярности выпуклой поверхности в окрестности кратчайшей. См. статью в настоящем сборнике.
5. Милка А. Д. О непрерывных изгибаниях выпуклых поверхностей. — «Укр. геометр. сб.». Вып. 13. Харьков, 1973, с. 129—141.
6. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.—Л., Гостехиздат, 1948. 387 с.
7. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., 1968. 759 с.

Поступила 27 января 1973 г.

ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТРЕХМЕРНОГО ПСЕВДОИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей работе строим некоторые интерпретации трехмерного псевдоизотропного пространства 1I_3 [1, с. 311; 5].

§ 1. Применение $\frac{1}{4}$ -кватернионов

Прежде всего построим интерпретацию пространства 1I_3 помощью алгебры $\frac{1}{4}$ -кватернионов

$$\alpha = a + b\varepsilon + c\eta + d\omega, \quad \varepsilon^2 = \eta^2 = 0, \quad \varepsilon\eta = -\eta\varepsilon = \omega,$$

аналогичную интерпретации Штрубеккера [2, с. 188] для изотропного пространства I_3 [1, с. 311].

В алгебре $\frac{1}{4}$ -кватернионов имеется переход к сопряженному элементу

$$\alpha \rightarrow \bar{\alpha} = a - b\varepsilon - c\eta - d\omega,$$

обладающий свойствами

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}, \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha.$$

Произведение

$$\alpha\bar{\alpha} = a^2$$

будем называть квадратом 1-го модуля $|\alpha|_1$ $\frac{1}{4}$ -кватерниона:

$$|\alpha|_1 = |a|.$$

Для $\frac{1}{4}$ -кватернионов вида $b\varepsilon + c\eta + d\omega$ определим 2-й модуль $|\alpha|_2$

$$|\alpha|_2^2 = b^2 - c^2,$$

для $\frac{1}{4}$ -кватернионов вида $d\omega$ определим 3-й модуль $|\alpha|_3$

$$|\alpha|_3 = |d|.$$

Если за расстояние между двумя $\frac{1}{4}$ -кватернионами α и β принять не равное нулю число $|\beta - \alpha|_1$, при $|\beta - \alpha|_1 = 0$ — число $|\beta - \alpha|_2$, а при $|\beta - \alpha|_1 = |\beta - \alpha|_2 = 0$ — число $|\beta - \alpha|_3$, то алгебра $\frac{1}{4}$ -кватернионов становится изометричной полуевклидову пространству ${}^{10}R_4^{13}$ [1, с. 310]. Вращения этого пространства вокруг начала имеют вид

$$\bar{x}' = U\bar{x},$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a \pm \operatorname{ch} \varphi \pm \operatorname{sh} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ b \pm \operatorname{sh} \varphi \pm \operatorname{ch} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ c & A & B \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразования

$$\xi' = a\xi, \quad \xi' = \xi a \quad (1)$$

в алгебре $\frac{1}{4}$ -кватернионов имеют соответственно вид

$$\begin{cases} 'x^0 = ax^0, \\ 'x^1 = bx^0 + ax^1, \\ 'x^2 = cx^0 + ax^2, \\ 'x^3 = dx^0 - cx^1 + bx^2 + ax^3, \end{cases} \quad \begin{cases} 'x^0 = ax^0, \\ 'x^1 = bx^0 + ax^1, \\ 'x^2 = cx^0 + ax^2, \\ 'x^3 = dx^0 + cx^1 - bx^2 + ax^3. \end{cases} \quad (2)$$

Поэтому преобразования (1) при $a = \pm 1$ являются вращениями пространства ${}^{10}R_4^{13}$ при $\varphi = 0$, и, следовательно, введен-

ная нами метрика является инвариантной относительно преобразований (1) при $|\alpha|_1 = 1$.

Роль сферы единичного радиуса в пространстве ${}^{10}R_4^{13}$ играет пара параллельных плоскостей $a = \pm 1$, каждая из которых изометрична псевдоизотропному пространству I_3 . Поэтому пространство I_3 можно рассматривать как сферу единичного радиуса в пространстве ${}^{10}R_4^{13}$ с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Таким образом, пространство I_3 может быть представлено как сфера $|\alpha|_1 = 1$ с отождествленными диаметрально противоположными точками в алгебре $\frac{1}{4}$ -кватернионов с определенной инвариантной метрикой в ней.

Преобразования (1) при $a = 1$ в алгебре $\frac{1}{4}$ -кватернионов определяют в пространстве I_3 движения специального вида, которые перепишем в прямоугольной системе пространства I_3

$$\begin{cases} x' = x + b, \\ y' = y + c, \\ z' = -cx + by + z + d; \end{cases} \quad (3') \quad \begin{cases} x' = x + b, \\ y' = y + c, \\ z' = cx - by + z + d. \end{cases} \quad (3'')$$

При преобразованиях (3'), (3'') все точки пространства I_3 сдвигаются на одно и то же расстояние δ , так как расстояние между точками с координатами (x, y, z) и (x', y', z') в обоих случаях определяется по формуле

$$\delta^2 = (x' - x)^2 - (y' - y)^2 = b^2 - c^2.$$

Поэтому будем называть движения (3) и (3'') соответственно левыми и правыми паратактическими сдвигами.

Левые и правые паратактические сдвиги образуют группы, каждая из которых зависит от трех параметров. В отличие от групп паратактических сдвигов пространств S_3 , 2S_3 , S_3^1 и I_3^1 [1, с. 110, 254, 375, 382] группы левых и правых паратактических сдвигов пространства I_3 порождают не всю группу движений этого пространства, а ее 5-параметрическую подгруппу, что объясняется тем, что группы (3'), (3'') имеют общую 1-параметрическую подгруппу

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + d$$

сдвигов вдоль сильно изотропных прямых. Заметим, что группы левых и правых паратактических сдвигов и порожденная ими 5-параметрическая группа имеют место также в изотропном пространстве I_3 и во флаговом пространстве F_3 . Отличия групп движений пространств I_3 , I_3 и F_3 — в шестом параметре φ этих групп движений, которые можно записать соответственно в виде

$$\begin{cases} x' = \pm (x \operatorname{ch} \varphi + y \operatorname{sh} \varphi) + b, \\ y' = \pm (x \operatorname{sh} \varphi + y \operatorname{ch} \varphi) + c, \\ z' = Ax + By + z + d, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cos \varphi \mp y \sin \varphi + b, \\ y' = x \sin \varphi \pm y \cos \varphi + c, \\ z' = Ax + By + z + d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + b, \\ y' = \varphi x + y + c, \\ z' = Ax + By + z + d. \end{cases}$$

§ 2. Интерпретация на флаговой плоскости

Пространство 1I_3 допускает интерпретацию в виде группы движений флаговой плоскости F_2 [1, с. 386], аналогичную интерпретации Штрубеккера [2, с. 190] для изотропного пространства I_3 .

Запишем движения плоскости F_2

$$\begin{cases} X' = X + a, \\ Y' = AX + Y + b. \end{cases} \quad (4)$$

Введем в связную группу движений плоскости F_2 инвариантную метрику следующим образом: за расстояние δ между движениями T_1 и T_2 этой группы примем число, определяемое соотношением

$$\delta^2 = a^2 - \frac{A^2}{4},$$

где a , A — параметры движения $T_2 T_1^{-1}$, записанного в виде (4). Если $\delta = 0$, за расстояние между движениями T_1 и T_2 примем число

$$\delta' = \left| b - \frac{aA}{2} \right|.$$

Произведение движения (4) на движение

$$\begin{cases} X'' = X' + a', \\ Y'' = A'X' + Y' + b' \end{cases} \quad (5)$$

является движением

$$\begin{cases} X'' = X + a + a' = X + a'', \\ Y'' = A'(X + a) + AX + Y + b + b' = A''X + Y + b''. \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда получаем связь между параметрами движений (4), (5), (6) в виде

$$a'' = a + a', \quad A'' = A + A', \quad b'' = b + b' + aA'. \quad (7)$$

Поставим в соответствие всякому движению (4) группы движений плоскости F_2 точку пространства 1I_3 с прямоугольными координатами

$$x = a, \quad y = \frac{A}{2}, \quad z = b - \frac{aA}{2}.$$

Очевидно, введенная нами в группу движений плоскости F_2 метрика является метрикой пространства 1I_3 , причем подгруппы группы движений пространства F_2 изображаются прямыми пространства 1I_3 . Подгруппы переносов вдоль неизотропных прямых плоскости F_2 , имеющие вид

$$X' = X + \alpha t, \quad Y' = Y + \beta t, \quad (\alpha \neq 0),$$

изображаются прямыми вещественной длины пространства 1I_3

$$x = at, \quad y = 0, \quad z = \beta t,$$

пересекающими бесконечно удаленную прямую плоскости $y = 0$.
Подгруппы поворотов плоскости F_2 , имеющие вид

$$X' = X, \quad Y' = tX + Y - ta,$$

изображаются прямыми мнимой длины пространства 1I_3

$$x = 0, \quad y = \frac{t}{2}, \quad z = -ta,$$

пересекающими бесконечно удаленную прямую плоскости $x = 0$.
Подгруппы переносов вдоль изотропных прямых плоскости F_2 , имеющие вид

$$X' = X, \quad Y' = Y + t,$$

изображаются прямыми пространства 1I_3

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = t,$$

проходящими через абсолютную точку (такие прямые называются сильно изотропными прямыми):

Подгруппы циклических поворотов [4, с. 5]

$$X' = X \pm pt, \quad Y' = tX + Y - at \pm \frac{1}{2}pt^2,$$

переводящие в себя циклы

$$(X - a)^2 = \pm 2p(Y - b),$$

изображаются прямыми пространства 1I_3

$$x = \pm pt, \quad y = \frac{t}{2}, \quad z = -at,$$

т. е. при $|p| > \frac{1}{2}$ изображаются прямыми вещественной длины, при $|p| < \frac{1}{2}$ — прямыми мнимой длины, а при $|p| = \frac{1}{2}$ — прямыми, пересекающими одну из абсолютных прямых, но не проходящими через абсолютную точку (такие прямые называются изотропными прямыми).

В силу формул (7) умножения всех элементов связной группы движений плоскости F_2 на один и тот же элемент этой группы слева или справа изображаются в пространстве 1I_3 движениями

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + \frac{A}{2}, \\ z' = -\frac{A}{2}x + ay + z + \left(b - \frac{aA}{2}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + \frac{A}{2}, \\ z' = \frac{A}{2}x - ay + z + \left(b - \frac{aA}{2}\right) \end{cases}$$

совпадающими с левыми и правыми паратактическими сдвигами $(3')$, $(3'')$.

Таким образом, пространство 1I_3 может быть интерпретировано в виде связной группы движений флаговой плоскости F_2 ,

причем умножения всех элементов связной группы движений плоскости F_2 на один и тот же элемент этой группы слева или справа изображаются в пространстве 1I_3 левыми и правыми паратактическими сдвигами.

§ 3. Интерпретация на паре псевдоевклидовых плоскостей

Рассмотрим многообразие поляризованных сильно изотропных прямых пространства 1I_3 . Каждая сильно изотропная прямая этого многообразия пересекает координатную плоскость $z = 0$, являющуюся псевдоевклидовой плоскостью 1R_2 , в точке P с координатами (x, y) ; с другой стороны, бесконечно удаленная поляра q сильно изотропной прямой является прямой бесконечно удаленной плоскости, представляющей собой копсевдоевклидову плоскость ${}^1R_2^*$. Плоскость $z = 0$ и бесконечно удаленная плоскость пересекаются по прямой, являющейся бесконечно удаленной прямой плоскости $z = 0$. Поэтому каждому направлению на плоскости $z = 0$ соответствует точка этой бесконечно удаленной прямой. Если мы изобразим многообразие прямых плоскости ${}^1R_2^*$ точками некоторой плоскости 1R_2 , то каждому направлению на плоскости $z = 0$ будет соответствовать направление на плоскости ${}^1R_2^*$ и прямая пучка с центром в абсолютной точке на этой плоскости, а следовательно, соответственная этой прямой бесконечно удаленная точка плоскости 1R_2 и определяемое этой точкой направление на этой плоскости.

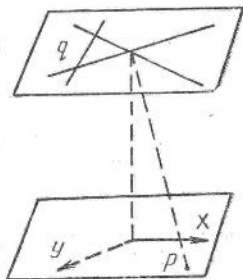


Рис. 1.

Поэтому можем совместить плоскость 1R_2 с плоскостью $z = 0$, совмещая соответственные направления этих плоскостей. Прямая q плоскости ${}^1R_2^*$ при этом изобразится точкой Q плоскости 1R_2 и, таким образом, поляризованная сильно изотропная прямая пространства 1I_3 изобразится на плоскости $z = 0$ парой точек P и Q (рис. 1).

Если обозначить радиусы-векторы точек P и Q через $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, то векторы

$$\bar{P}_+ = \frac{\bar{P} + \bar{Q}}{2} \text{ и } \bar{P}_- = \frac{\bar{P} - \bar{Q}}{2}$$

и, следовательно, точки P_+ и P_- изобразят поляризованную сильно изотропную прямую пространства 1I_3 .

Покажем, как эти точки P_+ и P_- преобразуются при преобразованиях пространства 1I_3 . При левых и правых паратактических сдвигах $(3', 3'')$ точка $P(x, y, 0)$ плоскости $z = 0$ переходит соответственно в точки

$$P_l(x + b, y + c, -cx + by + d), \quad P_r(x + b, y + c, cx - by + d),$$

проекции которых из абсолютной точки на неизотропную плоскость $z = 0$ совпадают с точкой $P'(x + b, y + c, 0)$. Бесконечно удаленная плоскость $x' = 0$ при левых и правых паратактических сдвигах, которые можно записать в виде (2), преобразуется соответственно по закону

$$\begin{cases} x^1 = x^1, \\ x^2 = x^2, \\ x^3 = -cx^1 + bx^2 + x^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x^1 = x^1, \\ x^2 = x^2, \\ x^3 = cx^1 - bx^2 + x^3. \end{cases}$$

Тангенциальные координаты прямых при этих преобразованиях преобразуются по соответственным законам

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + cu_3, \\ u_2' = u_2 - bu_3, \\ u_3' = u_3, \end{cases} \quad \begin{cases} u_1' = u_1 - cu_3, \\ u_2' = u_2 + bu_3, \\ u_3' = u_3. \end{cases}$$

При нашем переходе от прямой q плоскости ${}^1R_2^*$ к точке плоскости 1R_2 прямой $u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0$ соответствует точка с координатами

$$x = \frac{u_2}{u_3}, \quad y = -\frac{u_1}{u_3}.$$

Поэтому преобразования (8) плоскости ${}^1R_2^*$ изображаются плоскости 1R_2 соответственно формулами

$$\begin{cases} x' = x - b, \\ y' = y - c, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + b, \\ y' = y + c \end{cases}$$

и точка $Q(x, y)$ перейдет соответственно в точки

$$Q_l(x - b, y - c) \text{ и } Q_r(x + b, y + c).$$

Поэтому при преобразованиях пространства 1I_3 точки

$$P_+ \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2} \right) \text{ и } P_- \left(\frac{x_P - x_Q}{2}, \frac{y_P - y_Q}{2} \right)$$

переходят соответственно в точки

$$\begin{aligned} P_+ \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2} \right), & \quad P_+ \left(\frac{x_P + x_Q}{2} + b, \frac{y_P + y_Q}{2} + c \right) \\ P_- \left(\frac{x_P - x_Q}{2} + b, \frac{y_P - y_Q}{2} + c \right), & \quad P_- \left(\frac{x_P - x_Q}{2}, \frac{y_P - y_Q}{2} \right) \end{aligned}$$

и, следовательно, при левых паратактических сдвигах точка P остается неподвижной, а точка P_- подвергается переносу вектор $\{b, c\}$. При правых паратактических сдвигах точка P остается неподвижной, а точка P_+ подвергается переносу вектор $\{b, c\}$.

Аналогичная интерпретация имеет место и для пространства I_3 . Если вместо поляризованных сильно изотропных прямых рассмотрим поверхностные элементы (плоскости с выделенной точкой), точки которых расположены на сильно изотропной прямой, а плоскости параллельны и проходят через бесконечно удаленную полярю этой прямой, то получим интерпретацию многообразия поверхностных элементов пространства I_3 , предложенную К. Штрубеккером [2, с. 192]; поэтому наша интерпретация является аналогом интерпретации Штрубеккера.

Интерпретацию Штрубеккера можно получить предельным переходом из интерпретации Фубини многообразия прямых эллиптического пространства S_3 на паре эллиптических плоскостей [1, с. 113]. Наша интерпретация может быть получена предельным переходом из аналогичной интерпретации многообразия прямых гиперболического пространства 2S_3 на паре плоскостей Лобачевского [1, с. 256].

§ 4. Применение дуодуальных чисел

Идея еще одной интерпретации пространства I_3 была предложена А. П. Широковым [3]. Для построения этой интерпретации следует рассмотреть алгебру $R(\varepsilon, E)$ дуодуальных чисел

$$\alpha = a + b\varepsilon + cE + d\varepsilon E, \quad \varepsilon^2 = E^2 = 0, \quad \varepsilon E = E\varepsilon, \quad (9)$$

определяющуюся тензорным произведением двух алгебр $R(\varepsilon)$.

В алгебре дуодуальных чисел имеется переход к сопряженным элементам:

$$\alpha \rightarrow \bar{\alpha} = a - b\varepsilon + cE - d\varepsilon E, \quad (10)$$

$$\alpha \rightarrow \tilde{\alpha} = a + b\varepsilon - cE - d\varepsilon E, \quad (10')$$

$$\alpha \rightarrow \tilde{\tilde{\alpha}} = a - b\varepsilon - cE + d\varepsilon E. \quad (10'')$$

Для получения этой интерпретации будем характеризовать каждую ориентированную прямую вещественной длины пространства I_3 следующими четырьмя параметрами. Спроектируем прямую на плоскость xOy в направлении сильно изотропной прямой и обозначим мнимый угол, под которым проекция этой прямой пересекает ось Ox , через $i\theta$; мнимое расстояние от точки O до указанной проекции — через ip ; ашпликату точки B прямой, лежащей над основанием C перпендикулярно, опущенного из точки O на проекцию прямой, — через h и угол между прямой и ее проекцией — через k . Поставим в соответствие ориентированной прямой вещественной длины пространства I_3 дуодуальное число

$$Y = \text{th} \frac{X}{2}, \quad (11)$$

$$X = \theta + p\varepsilon + kE - h\varepsilon E.$$

В обозначениях рис. 2

$$pi = OC, \quad h = CB, \quad k = \frac{CB}{AC}$$

(A — точка пересечения прямой с плоскостью xOy).

Рассмотрим аналитические функции дуодуального переменного, представленные в виде бесконечных степенных рядов с вещественными коэффициентами

$$Y = f(X) = \sum_k a_k X^k. \quad (1)$$

Если вещественную аналитическую функцию с теми же коэффициентами обозначить через $y = f(x)$, где

$$y = f(x) = \sum_k a_k x^k,$$

то первая и вторая производные этой функции будут равны

$$y' = f'(x) = \sum_k k a_k x^{k-1},$$

Рис. 2.

$$y'' = f''(x) = \sum_k k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Поэтому функцию вида (12) можно записать в форме

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 \varepsilon + y_3 E + y_4 \varepsilon E &= f(x_1 + x_2 \varepsilon + x_3 E + x_4 \varepsilon E) = \\ &= \sum_k a_k (x_1 + x_2 \varepsilon + x_3 E + x_4 \varepsilon E)^k = \sum_k a_k x_1^k + \varepsilon x_2 \sum_k k a_k x_1^{k-1} + \\ &+ E x_3 \sum_k k a_k x_1^{k-1} + \varepsilon E \left(x_4 \sum_k k a_k x_1^{k-1} + x_2 x_3 \sum_k k(k-1) a_k x_1^{k-2} \right) \\ &= f(x_1) + f'(x_1) \cdot \varepsilon x_2 + E x_3 f'(x_1) + \varepsilon E [x_4 f'(x_1) + x_2 x_3 f''(x_1)]. \end{aligned} \quad (13)$$

В частности, это также имеет место для функции $Y = \text{th} \frac{X}{2}$. В этом случае

$$f'(x_1) = \frac{1}{\text{ch}^2 \frac{\theta}{2}}, \quad f''(x_1) = -\frac{2 \text{sh} \frac{\theta}{2}}{\text{ch}^3 \frac{\theta}{2}}.$$

Откуда следует, что

$$Y = \text{th} \frac{X}{2} = \text{th} \frac{\theta}{2} + \frac{\varepsilon p + E k - \varepsilon E \left(h + p k \text{th} \frac{\theta}{2} \right)}{2 \text{ch}^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (14)$$

Покажем, что при движениях пространства I_3 дуодуальные преобразования, изображающие прямые вещественной длины этого пространства, преобразуются по закону

$$Y' = \frac{AY + B}{BY + A}. \quad (15)$$

Всякое движение из связной группы движений пространства может быть представлено в виде произведения переносов вдоль координатных осей Ox , Oy , Oz , имеющих соответственно вид

$$x' = x + t, \quad y' = y, \quad z' = z; \quad (16)$$

$$x' = x, \quad y' = y + t, \quad z' = z; \quad (17)$$

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + t \quad (18)$$

и поворотов в координатных плоскостях xOy , xOz , yOz :

$$x' = x \operatorname{ch} \varphi + y \operatorname{sh} \varphi, \quad y' = x \operatorname{sh} \varphi + y \operatorname{ch} \varphi, \quad z' = z; \quad (19)$$

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + t\varphi; \quad (20)$$

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + ty. \quad (21)$$

При переносе (16) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $k' = k$, $p' = p + t \operatorname{sh} \theta$, $h' = h - kt \operatorname{ch} \theta$.

Поэтому

$$\begin{aligned} Y' &= \operatorname{th} \frac{\theta}{2} + \frac{\varepsilon(p + t \operatorname{sh} \theta) + Ek - \varepsilon E \left[h - kt \operatorname{ch} \theta + k(p + t \operatorname{sh} \theta) \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right]}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} = \\ &= Y + \frac{\varepsilon t \operatorname{sh} \theta - \varepsilon E \left(-kt \operatorname{ch} \theta + 2kt \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2} \right)}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} = \\ &= Y + \varepsilon t \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2} + \varepsilon E \frac{kt}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\varepsilon Y = \varepsilon \operatorname{th} \frac{\theta}{2} + \frac{k \varepsilon E}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$Y' = Y(1 + \varepsilon t). \quad (22)$$

При переносе (17) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $k' = k$, $p' = p + t \operatorname{ch} \theta$, $h' = h - kt \operatorname{sh} \theta$.

Поэтому

$$Y' = Y + \frac{\varepsilon t \operatorname{ch} \theta - \left(-kt \operatorname{sh} \theta + kt \operatorname{ch} \theta \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right) \varepsilon E}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= Y + \frac{\varepsilon t \operatorname{ch} \theta + \varepsilon E k t \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
&= Y + \frac{\varepsilon t \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon t \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon E k t \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
&= Y + \frac{\varepsilon t}{2} + \frac{\varepsilon t \cdot \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2}}{2} + \frac{\varepsilon E k t \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\varepsilon Y^2 = \varepsilon \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\varepsilon E k \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}},$$

то

$$Y' = Y + \frac{\varepsilon t}{2} + \frac{\varepsilon t}{2} Y^2$$

или

$$Y' = \frac{Y + \frac{\varepsilon t}{2}}{-\frac{\varepsilon t}{2} Y + 1}. \quad (23)$$

При переносе (18) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $p' = p$, $k' = k$, $h' = h + t$. Поэтому

$$Y' = \operatorname{th} \frac{X - t\varepsilon E}{2} = \frac{\operatorname{th} \frac{X}{2} - \operatorname{th} \frac{t\varepsilon E}{2}}{1 - \operatorname{th} \frac{X}{2} \operatorname{th} \frac{t\varepsilon E}{2}}.$$

Так как

$$\operatorname{th} \frac{t\varepsilon E}{2} = \frac{t\varepsilon E}{2},$$

то

$$Y' = \frac{Y - \frac{t}{2} \varepsilon E}{-\frac{t}{2} \varepsilon E Y + 1}. \quad (24)$$

При повороте (19) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta + \varphi$, $h' = h$, $k' = k$, $p' = p$. Поэтому

$$Y' = \operatorname{th} \frac{X + \varphi}{2} = \frac{\operatorname{th} \frac{X}{2} + \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{th} \frac{X}{2} \cdot \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} + 1}$$

$$Y' = \frac{Y + \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}}{Y \cdot \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} + 1}. \quad (25)$$

При повороте (20) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $p' = p$, $k' = k + t \operatorname{ch} \theta$, $h' = h - pt \operatorname{sh} \theta$. Поэтому

$$\begin{aligned} Y' &= Y + \frac{E \operatorname{ch} \theta - \left(-pt \operatorname{sh} \theta + pt \operatorname{ch} \theta \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right) \varepsilon E}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} = \\ &= Y + \frac{Et}{2} + \frac{Et}{2} \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\varepsilon E p t \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned}$$

так как

$$EY^2 = E \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\varepsilon p E \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}},$$

то

$$Y' = Y + \frac{Et}{2} + \frac{Et}{2} Y^2,$$

или

$$Y' = \frac{Y + \frac{t}{2} E}{-\frac{t}{2} EY + 1}. \quad (26)$$

При повороте (21) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $p' = p$, $h' = h - pt \operatorname{ch} \theta$, $k' = k + t \operatorname{sh} \theta$. Поэтому

$$Y' = Y + \frac{Et \operatorname{sh} \theta - \left(-pt \operatorname{ch} \theta + pt \operatorname{sh} \theta \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right) \varepsilon E}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}},$$

или

$$Y' = Y (1 + Et). \quad (27)$$

Все преобразования (22) — (27) являются частными случаями преобразований (15), поэтому их произведения также являются преобразованиями (15). Так как произведению движений (16) — (21) соответствует произведение соответствующих преобразований (22) — (27), то всякое движение пространства 1I_3 , принадлежащее к связной группе движений этого пространства изображается преобразованием (15).

Для аналогичного изображения прямых мнимой длины пространства I_3 определим алгебру $R(\varepsilon, E, I)$ бидуодуальных чисел — чисел вида (9), где коэффициенты a, b, c, d — комплексные числа. Эта алгебра является тензорным произведением двух алгебр $R(\varepsilon)$ и поля $C = R(i)$ комплексных чисел. В алгебре $R(\varepsilon, E, I)$ можно определить, кроме перехода к сопряженным элементам ($10, 10', 10''$), также переход к сопряженному элементу

$$\alpha \rightarrow \hat{\alpha} = \bar{a} + \bar{b}\varepsilon + \bar{c}E + \bar{d}\varepsilon E$$

и произведение этого перехода на переходы ($10, 10', 10''$). Выделим в алгебре $R(\varepsilon, E, I)$ множество элементов, удовлетворяющих условию

$$\hat{\alpha} = \alpha,$$

т. е. элементов вида

$$\alpha = a + d\varepsilon E + i(b\varepsilon + cE),$$

где a, b, c, d — вещественные числа. Это множество является алгеброй, так как $i\varepsilon = iE = iE = -\varepsilon E$, все остальные произведения и квадраты базисных элементов равны нулю. Будем обозначать эту подалгебру $\hat{R}(\varepsilon, E)$.

Покажем, что многообразие прямых мнимой длины пространства I_3 изображается элементами алгебры $\hat{R}(\varepsilon, E)$, причем при движениях пространства I_3 эти элементы преобразуются по закону

$$Y' = \frac{AY + B}{BY + A}, \quad (28)$$

где A, B — элементы алгебры $\hat{R}(\varepsilon, E)$.

Будем характеризовать каждую ориентированную прямую мнимой длины пространства I_3 такими четырьмя параметрами. Спроектируем прямую на плоскость xOy в направлении сильно изотропной прямой и обозначим: комплексный угол, под которым проекция этой прямой на плоскость xOy пересекает ось Ox , через $\frac{\pi}{2} - i\theta$; расстояние от точки O до указанной проекции через p ; аппликату точки B прямой, лежащей над основанием C перпендикуляра, опущенного из точки O на проекцию прямой, через h ; мнимый угол между прямой и ее проекцией через ik . Поставим в соответствие ориентированной прямой мнимой длины пространства I_3 бидуодуальное число

$$Y = \text{th} \frac{X}{2},$$

где

$$X = \theta - h\varepsilon E + i(p\varepsilon + kE).$$

Используя формулу (13), получаем

$$Y = \operatorname{th} \frac{\theta}{2} + \frac{i\epsilon p + iEk - \epsilon E \left(h - pk \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right)}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

При переносе (16) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $k' = k$, $p' = p + t \operatorname{ch} \theta$, $h' = h + kt \operatorname{sh} \theta$. Поэтому

$$\begin{aligned} Y' &= Y + \frac{i\epsilon t \operatorname{ch} \theta - \epsilon E \left(kt \operatorname{sh} \theta - kt \operatorname{ch} \theta \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right)}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} = \\ &= Y + \frac{i\epsilon t}{2} + \frac{i\epsilon t}{2} \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\epsilon E kt \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Так как

$$i\epsilon Y^2 = i\epsilon \cdot \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\epsilon E k \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$Y' = \frac{Y + \frac{i\epsilon t}{2}}{-\frac{i\epsilon t}{2} Y + 1}. \quad (29)$$

При переносе (17) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $k' = k$, $p' = p + t \operatorname{sh} \theta$, $h' = h + kt \operatorname{ch} \theta$. Поэтому

$$\begin{aligned} Y' &= Y + \frac{i\epsilon t \operatorname{sh} \theta - \epsilon E \left(kt \operatorname{ch} \theta - kt \operatorname{sh} \theta \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2} \right)}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} = \\ &= Y + i\epsilon t \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2} - \frac{\epsilon E kt}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$i\epsilon Y = i\epsilon \operatorname{th} \frac{\theta}{2} - k \frac{\epsilon E}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$Y' = Y (1 + i\epsilon t). \quad (30)$$

При переносе (18) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $p' = p$, $k' = k$, $h' = h + t$.

Поэтому

$$Y' = \operatorname{th} \frac{X - t\epsilon E}{2} = \frac{\operatorname{th} \frac{X}{2} - \operatorname{th} \frac{t\epsilon E}{2}}{1 - \operatorname{th} \frac{X}{2} \operatorname{th} \frac{t\epsilon E}{2}},$$

или

$$Y' = \frac{Y - \frac{t\epsilon E}{2}}{-\frac{t\epsilon E}{2}Y + 1}. \quad (31)$$

При повороте (19) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta + \varphi$, $p' = p$, $k' = k$, $h' = h$, поэтому

$$Y' = \operatorname{th} \frac{X + \varphi}{2} = \frac{Y + \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}}{Y \cdot \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} + 1}. \quad (32)$$

При повороте (20) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $p' = p$, $k' = k + t \operatorname{sh} \theta$, $h' = h + pt \operatorname{ch} \theta$, тогда

$$Y' = Y + iEt \cdot \operatorname{th} \frac{\theta}{2} - \frac{\epsilon Ept}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Так как

$$iEY = iE \operatorname{th} \frac{\theta}{2} - \frac{\epsilon Ep}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}},$$

то

$$Y' = Y (1 + iEt). \quad (33)$$

При повороте (21) параметры прямой преобразуются по закону $\theta' = \theta$, $p' = p$, $k' = k + t \operatorname{ch} \theta$, $h' = h + pt \operatorname{sh} \theta$, поэтому

$$Y' = Y + \frac{iEt}{2} + \frac{iEt}{2} \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\epsilon Ept \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Поскольку

$$iEY^2 = iE \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\epsilon Ep \operatorname{th} \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}},$$

то

$$Y' = \frac{Y + \frac{iEt}{2}}{-\frac{iEt}{2}Y + 1}. \quad (34)$$

Все преобразования (29) — (34) являются частными случаями преобразований (28), поэтому их произведения также являются преобразованиями (28). Так как произведению движений (16) — (21) соответствует произведение соответствующих преобразований (29) — (34), то всякое движение пространства I_3 , принадлежащее к связной группе движений этого пространства, изображается преобразованием (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., «Наука», 1969, 548 с.
2. Strubecker K. Casi limiti di geometrie non-euclidee. — «Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino», 1961—1962, vol. 21, p. 141—212.
3. Широков А. П. Пространства над ассоциативными унитарными алгебрами — «Учен. зап. Казанск. ун-та. Геометрия обобщенных пространств», 1963, т. 123, № 1, с. 222—247.
4. Макарова Н. М. Геометрия Галилея — Ньютона, II. Движения и преобразования подобия. «Учен. зап. Орехово-Зуевского пед. ин-та», 1957, т. 7, вып. 2, с. 5—27.
5. Проскурипа Р. Г. Образы симметрии и антисимметрии трехмерного псевдоизотропного пространства. — «Укр. геом. сб.». Вып. 14. Харьков, 1973, с. 77—83.

Поступила 4 мая 1972 г.

КАСАТЕЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ

В статье анализируются различные определения линейной связности на дифференцируемом многообразии V . Связность по Ш. Эресману рассматривается несколько в другом аспекте, чем в работе М. Спивака [1]. Имея в виду каноническое вложение $TFV \subset FTV$ [2], горизонтальное распределение Эресмана отображается в класс эквивалентных сечений FTV . В результате этого, линейная связность на V может быть определена как некоторый класс эквивалентных систем специальных реперов на касательном расслоении TV .

1. Различные определения линейной связности

Существуют различные, но эквивалентные между собой определения линейной связности на дифференцируемом многообразии V .

Во-первых, классическое определение: линейная связность на V определяется заданием на каждой координатной окрестности $U \subset V$ (где $n = \dim V$) функций Γ_{jk}^i преобразующихся при преобразовании локальных координат

$$\xi^{i'} = a^i (\xi^1, \dots, \xi^n) \quad (1)$$

по закону

$$\Gamma'^i_{jk} = (a^i_l \Gamma^l_{pq} - a^l_{pq}) \bar{a}^p_j \bar{a}^q_k,$$

где (a^i_j) — якобиева матрица преобразования (1); $(\bar{a}^i_j)$ — ее обратная матрица, а $a^i_{jk} = \frac{\partial a^i_k}{\partial \xi^j}$.

Во-вторых, линейная связность на V может быть определена как оператор ∇ , сопоставляющий любой паре векторных полей (X, Y) на V векторное поле $\nabla_Y X$, аддитивный относительно X и Y и удовлетворяющий условиям

$$\nabla_f Y X = f \nabla_Y X \text{ и } \nabla_Y (f \cdot X) = f \nabla_Y X + Y f X$$

(здесь f — любая дифференцируемая скалярная функция на V).

В-третьих, по Э. Картану линейная связность на V — это закон, согласно которому любой системе реперов R_i на V ставится в соответствие система 1-форм ω^i_j таким образом, что, если другой системе реперов $R'_i = R_i \bar{A}^i_j$ соответствует система форм ω'^i_j , то имеет место соотношение

$$\omega'^i_j = A^i_k \bar{d} \bar{A}^k_j + A^i_k \omega^k_l \bar{A}^l_j,$$

где A — матрица, обратная к матрице $\bar{A}$. В матричной записи эту формулу можно представить в виде

$$\omega' = A d \bar{A} + A \omega \bar{A}. \quad (3)$$

При этом для векторного поля $X = R_i x^i$ и 1-формы $\Phi = \varphi_i \theta^i$, где θ^i — система кореперов, дуальная к системе реперов R_i , тензорные поля

$$\nabla X = R_i \otimes (dx^i + \omega^i_j x^j),$$

$$\nabla \Phi = (d\varphi_i - \varphi_j \omega^j_i) \otimes \theta^i$$

называются соответствующими ковариантными дифференциалами. Значения этих ковариантных дифференциалов, как векторных форм, для некоторого векторного поля Y являются ковариантными производными относительно Y соответственно векторного поля X и 1-формы Φ . Обозначив их $\nabla_Y X$ и $\nabla_Y \Phi$, получим переходные формулы к предыдущему определению, а дальнейший переход к локальной карте к U даст классические формулы ковариантного дифференцирования.

В-четвертых, известно определение линейной связности по Ш. Эресману, как задание соответствующего горизонтального распределения на главном расслоении реперов EV многообразия V . Ниже мы рассмотрим это определение более подробно.

2. Определение связности по Ш. Эресману

2.1. Рассмотрим дифференцируемое отображение

$$\rho: V_1 \times V_2 \rightarrow V_3,$$

где V_1 , V_2 и V_3 — дифференцируемые многообразия, с отображениями $\rho_\eta: V_1 \rightarrow V_3$ для каждого элемента $\eta \in V_2$ и $\rho_\xi: V_2 \rightarrow V_3$ для каждого элемента $\xi \in V_1$, так что $\rho_\xi(\eta) = \rho_\eta(\xi) = \rho(\xi, \eta)$. Запишем касательного отображения $T\rho$ (дифференциала ρ) следующую формулу

$$\xi_{(1)}\eta_{(1)} = \xi\eta_{(1)} + \xi_{(1)}\eta. \quad (4)$$

При этом образ пары (ξ, η) при отображении ρ обозначается через $\xi \cdot \eta$, образ пары $(\xi_{(1)}, \eta_{(1)})$ при отображении $T\rho$, где $\xi_{(1)} \in T_\xi V_1$ и $\eta_{(1)} \in T_\eta V_2$, обозначается через $\xi_{(1)} \cdot \eta_{(1)}$ и, кроме того, введены обозначения

$$\xi \cdot \eta_{(1)} = T\rho_\xi(\eta_{(1)}), \quad \xi_{(1)} \cdot \eta = T\rho_\eta(\xi_{(1)}).$$

2.2. При заданной, например, группе Ли G с законом групповой композиции $\gamma: G \times G \rightarrow G$ получим касательную группу TG с законом групповой композиции, определяемым касательным отображением $T\gamma$. Благодаря формуле (4), этот закон записывается формулой

$$a_{(1)}b_{(1)} = ab_{(1)} + a_{(1)}b, \quad (5)$$

где $a, b \in G$, $a_{(1)} \in T_a G$ и $b_{(1)} \in T_b G$. Здесь и в дальнейшем при произведении групповых элементов точка между ними не пишется. Формула (5) говорит о том, что произведение касательных векторов $a_{(1)}$ и $b_{(1)}$ к G в точках a и b соответственно как элементов касательной группы TG определяется суммой двух касательных векторов к G в точке ab . Первый из них получен путем перенесения вектора $b_{(1)}$ из b в ab с помощью дифференциала левого сдвига TL_a , а второй — в результате перенесения вектора $a_{(1)}$ из a в ab с помощью дифференциала правого сдвига TR_b .

Любой вектор $a_{(1)} \in T_a G$ может быть представлен как результат правого сдвига вектора $a_{(1)}a^{-1}$ из единицы e в a или как результат левого сдвига вектора $a^{-1}a_{(1)}$ из e в a , т. е.

$$a_{(1)} = (a_{(1)}a^{-1})a = a(a^{-1}a_{(1)}).$$

Назовем векторы $a_{(1)}a^{-1}$ и $a^{-1}a_{(1)}$ соответственно левым и правым представителем вектора $a_{(1)}$ в единице e .

Для произведения $a_{(1)}b_{(1)}$ левым представителем в e является вектор $a_{(1)}a^{-1} + a(b_{(1)}b^{-1})a^{-1}$, а правым представителем — вектор

$$b^{-1}(a^{-1}a_{(1)})b + b^{-1}b_{(1)}.$$

Обратным элементом для вектора $a_{(1)}$ в TG является вектор $-a^{-1}a_{(1)}a^{-1}$ в точке a^{-1} . Эти векторы переводит друг в друга дифференциал отображения $p: a \rightarrow a^{-1}$. Заметим, что если $e_{(1)}$ — некоторый вектор в единице e , то векторы $ae_{(1)}$, где a — произвольный элемент G , образуют на G левоинвариантное векторное поле,

а векторы $e_{(1)}a$ образуют на G правоинвариантное векторное поле. При этом очевидно, что для каждого фиксированного a внутренний автоморфизм $A_a: b \rightarrow aba^{-1}$, точнее, его дифференциал TA_a , обозначаемый часто и через $\text{ad}(a)$, отображает $e_{(1)}a$ в $a e_{(1)}$. Правый представитель $a^{-1}a_{(1)}$ вектора $a_{(1)}$ в e отображается при TA_a в левый представитель $a_{(1)}a^{-1}$.

2.3. Пусть теперь V — главное расслоенное пространство со структурной группой G и пусть правостороннее действие G на V определяется отображением

$$\rho: V \times G \rightarrow V.$$

Рассмотрим точку $\xi \in V$ и элементы группы G a и b . Обозначим $\xi' = \xi \cdot a$, $\xi'' = \xi' \cdot b = \xi \cdot ab$. Для произвольного вектора $\xi_{(1)} \in T_{\xi}V$ и произвольных элементов $a_{(1)}$ и $b_{(1)}$ касательной группы T_eG имеем общую формулу

$$\xi_{(1)} \cdot a_{(1)} b_{(1)} = \xi_{(1)} \cdot ab + \xi'' \cdot (b^{-1}(a^{-1}a_{(1)})b + b^{-1}b_{(1)}). \quad (6)$$

Обозначим через $\Delta_v(\xi)$ множество вертикальных векторов в точке ξ . Дифференциал $T\rho_{\xi}$ отображения $\rho_{\xi}: a \rightarrow \xi'$ в единице $e \in G$ определяет изоморфизм между касательным пространством T_eG (алгеброй Ли группы G) и вертикальным пространством $\Delta_v(\xi')$.

Согласно Ш. Эресману, связность на V определяется заданием в каждой точке $\xi \in V$ некоторого горизонтального подпространства $\Delta_h(\xi)$, такого, что касательное пространство $T_{\xi}V$ для любого $\xi \in V$ изоморфно прямой сумме

$$\Delta_v(\xi) \oplus \Delta_h(\xi) \quad \text{и} \quad T\rho_a(\Delta_h(\xi)) = \Delta_h(\xi')$$

для любого $a \in G$.

Предложение. Если на V задана связность по Ш. Эресману (горизонтальное распределение Δ), то для произвольного вектора $\xi_{(1)}$ из $T_{\xi}V$ существует единственный горизонтальный вектор $\eta_{(1)}$ из $T_{\xi}V$ и единственный вектор $a_{(1)}$ в заданной точке $a \in G$ такие, что

$$\xi_{(1)} = \xi_{(1)} \cdot a_{(1)} = \xi' \cdot a^{-1}a_{(1)} + \eta_{(1)} \cdot a. \quad (7)$$

□ Действительно, согласно условию 1), имеет место единственное разложение $\xi_{(1)} = \eta_{(1)} + \mu_{(1)}$, где $\eta_{(1)} \in \Delta_v(\xi')$ и $\mu_{(1)} \in \Delta_h(\xi')$. Ввиду изоморфизма $T\rho_{\xi}$ в T_eG найдется единственный вектор $a^{-1}a_{(1)}$ (в T_eG — вектор $a_{(1)}$), такой, что $\eta_{(1)} = \xi' \cdot a^{-1}a_{(1)}$. Согласно условию 2), в $\Delta_h(\xi)$ определяется единственный горизонтальный вектор $\xi_{(1)}$, который при изоморфизме $T\rho_a$ между $\Delta_h(\xi)$ и $\Delta_h(\xi')$ отображается в вектор $\mu_{(1)}$. □

Таким образом, формула (7) определяет однозначно разложение произвольного вектора $\xi_{(1)}$ на вертикальную и горизонтальную составляющие. При этом отображение

$$\omega_{\xi}: \xi_{(1)} \rightarrow a^{-1}a_{(1)} \quad (8)$$

является линейным отображением касательного пространства $T_b V$ в алгебру Ли $T_e G$ и называется формой связности Эресмана (в точке ξ'). Свойства

$$\text{Ker } \omega = \Delta_b \text{ и } T\rho_b^* \omega = \omega_0 T\rho_b = b^{-1} \omega b$$

следуют непосредственно из определения ω и из формулы (6) при $b_{(1)} = b$ (b_1 является нулевым вектором в точке b).

2.4. Линейная связность на многообразии V может быть определена по Эресману как связность на главном расслоении реперов FV . При этом структурной группой является линейная группа $GL(n)$.

Нам нужно получить локальную формулу для формы линейной связности ω на координатной окрестности FU . Для этого определим репер $\xi' \in FV$ с помощью $n(n+1)$ координат (x^i, a_j^i) относительно канонического базиса на U и представим формулу в виде $n \times n$ -матрицы с 1-формами

$$\omega_j^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x, a) dx^k + \Lambda_{jl}^{ik}(x, a) da_l^i$$

в качестве элементов. Значение этой матрицы для касательного вектора $\xi'_{(1)} = \xi'_{(1)} \cdot a_{(1)}$ с координатами $(x^i, a_j^i, dx^i, da_j^i)$ в $T_{\xi'} FV$ есть элемент алгебры Ли $T_e GL(n)$. При преобразовании $\xi'_{(1)} \cdot a_{(1)} \rightarrow \xi'_{(1)} \cdot a_{(1)} b_{(1)}$ слоя происходит переход к точке $\xi'' = \xi' \cdot ab$ и к касательному вектору с координатами

$$(x^i, a_k^i b_j^k, dx^i, da_k^i b_j^k + a_k^i db_j^k).$$

В точке ξ'' имеем $n \times n$ -матрицу

$$\omega_j'^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x, ab) dx^k + \Lambda_{jl}^{ik}(x, ab) (da_k^i b_j^s + a_k^i db_j^s),$$

которую в силу формулы (6) можно представить, с другой стороны, в виде

$$\omega_j'^i = \bar{b}_s^i \omega_j^s b_j^t + \bar{b}_s^i db_j^s.$$

Сравнивая последние две формулы, получаем равенства

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x, ab) &= \bar{b}_s^i \tilde{\Gamma}_{jk}^s(x, a) b_j^t; \\ b_k^s \Lambda_{jl}^{ik}(x, ab) &= \bar{b}_r^i \Lambda_{il}^{rs}(x, a) b_j^t; \\ \Lambda_{jl}^{ik}(x, ab) a_s^l &= \bar{b}_s^i \delta_j^k. \end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует что

$$\bar{b}_r^i \Lambda_{il}^{rs}(x, a) a_k^l b_j^t = \bar{b}_k^i b_j^s,$$

$$\Lambda_{jl}^{ik}(x, a) = \bar{a}_l^i \delta_j^k;$$

а из первого равенства при замене a на e и b на a находим

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i(x, a) = \bar{a}_s^i \Gamma_{ik}^s a_j^t,$$

где положено

$$\Gamma_{ik}^s = \tilde{\Gamma}_{ik}^s(x, e).$$

В итоге форма ω_j^i в точке ξ' представится в виде

$$\omega_j^i = \bar{a}_s^i \Gamma_{ik}^s a_j^k dx^k + \bar{a}_j^i da_j^i. \quad (9)$$

Любой горизонтальный вектор в точке ξ' представим $n(n+1)$ локальными координатами

$$(x_1^i, -\Gamma_{ik}^i a_j^k x_1^k), \quad (10)$$

где x_1^i — произвольные числа, а n векторов

$$(\partial_j^i, -\Gamma_{ij}^i a_j^k) \quad (11)$$

определяют базис $\Delta_h(\xi')$.

3. Вложение А. Моримото $TFV \subset FTV$

3.1. Рассмотрим отображение

$$\rho: FV \times GL(n) \rightarrow FV,$$

определяющее действие линейной группы $GL(n)$ на главном расслоении реперов FV многообразия V . Касательное отображение Tr определяет аналогичное действие касательной группы $TGL(n)$ на касательном расслоении TFV многообразия FV (имеется в виду изоморфизм между $T(FV \times GL(n))$ и $TFV \times TGL(n)$).

А. Моримото обозначает через j_n отображение $TGL(n) \rightarrow GL(2n)$, переводящее пару матриц $(a, \tilde{a})$, которая изображает касательный вектор к $GL(n)$ в точке a , в блок-матрицу порядка $2n \times 2n$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ \tilde{a} & a \end{pmatrix}$$

и изучает в [2] отображение $j_V: TFV \rightarrow FTV$, удовлетворяющее условию коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} TFV \times TGL(n) & \xrightarrow{Tr} & TFV \\ j_V \times j_n \downarrow & \tilde{\rho} \downarrow j_V & \\ FTV \times GL(2n) & \xrightarrow{\quad} & FTV, \end{array}$$

где отображением $\tilde{\rho}$ определяется обычное действие линейной группы $GL(2n)$ на расслоении FTV . В координатной записи отображение j_V следует понимать как отображение

$$(\xi^i, u_j^i, \tilde{\xi}^i, \tilde{u}_j^i) \rightarrow \left((\xi^i, \tilde{\xi}^i), \begin{pmatrix} u_j^i & 0 \\ \tilde{u}_j^i & u_j^i \end{pmatrix} \right), \quad (12)$$

которое касательному вектору $(\tilde{\xi}^i, \tilde{u}_j^i)$ к FV в точке (ξ^i, u_j^i) ставит в соответствие репер

$$\begin{pmatrix} u_j^i & 0 \\ \tilde{u}_j^i & u_j^i \end{pmatrix}$$

в точке $(\xi^i, \tilde{\xi}^i)$ касательного расслоения TV .

3.2. Теперь допустим, что на многообразии V задана линейная связность. В силу (10) горизонтальный вектор представим локальными координатами

$$(\xi^i, u_j^i, \xi_1^i, -\Gamma_{lk}^i u_j^l \xi_1^k); \quad (13)$$

при отображении j_V переходит в репер

$$\begin{pmatrix} u_j^i & 0 \\ -\Gamma_{lk}^i u_j^l \xi_1^k & u_j^i \end{pmatrix} \quad (14)$$

в точке (ξ^i, ξ_1^i) касательного расслоения TV .

Отсюда следует, что

1) множество горизонтальных векторов в одной точке FV (u_j^i фиксированы, ξ_1^i меняются) отображается при j_V в множество реперов в разных точках касательного пространства $T_\xi V$;

2) множество горизонтальных векторов в точках некоторого сечения расслоения FV (u_j^i и Γ_{lk}^i являются функциями ξ) отображается в систему реперов на TV , т. е. в сечение расслоения FTV .

Если ввести $2n$ векторных полей $(\partial_j^2, \partial_i^{12})$, определяющих естественную систему реперов на TU относительно координатных функций (ξ^i, ξ_1^i) , то такое сечение локально представится формулой

$$(R_i^2 R_j^{12}) = (\partial_j^2 \partial_i^{12}) \times \begin{pmatrix} u_j^i & 0 \\ -\Gamma_{lk}^i u_j^l \xi_1^k & u_j^i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Заметим здесь же, что системе реперов (15) соответствует и система дуальных кореперов

$$\begin{pmatrix} \theta_2^i \\ \theta_{12}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_j^i & 0 \\ \bar{u}_j^i \Gamma_{lk}^i \xi_1^k & \bar{u}_j^i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d\xi^j \\ d\xi_1^j \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Системы (15) и (16) изучались автором подробно в работе [3].

4. Новое определение линейной связности на многообразии V

4.1. Итак, линейную связность на V можно теперь определить как некоторое множество эквивалентных между собой систем реперов на TV вида (15).

Во-первых, следует определить систему реперов вида (15) как некоторое сечение расслоения FTV , независимо от локальных координат. Здесь фигурируют прежде всего n векторных полей

$$R_i^2 = (\partial_j^2 - \partial_i^{12} \Gamma_{jk}^i \xi_1^k) u_i^j, \quad (17)$$

а затем — n векторных полей

$$R_i^{12} = \partial_j^{12} u_i^j. \quad (18)$$

Предложение 1. Векторное поле $\tilde{X}$ на TV тогда и только тогда обладает таким свойством: для всякой 1-формы Φ на V , рассматриваемой как скалярная функция на TV , производная $\tilde{X}\Phi$ в направлении поля $\tilde{X}$ есть также 1-форма на V , когда на любой координатной окрестности TU это поле можно представить в виде

$$\tilde{X} = \partial_j^{12} u^j + \partial_j^{12} \omega^j, \quad (19)$$

где u^j — некоторые скалярные функции; ω^j — некоторые 1-формы на U .

□ Это очевидно, если представить Φ локальной формулой

$$\Phi = \varphi_i \xi_1^i,$$

а $\tilde{X}\Phi$ — формулой

$$\tilde{X}\Phi = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_1^j} u^j \xi_1^i + \varphi_i \omega^i. \quad \square$$

Векторное поле вида (19) на TV называется векторным полем, сохраняющим 1-формы на V . Заметим, что дифференциал $T\pi$ проекции $\pi: TV \rightarrow V$ отображает векторные поля, сохраняющие 1-формы на V , в векторные поля на V (в частности, $T\pi\tilde{X} = \partial_i u^i$).

Предложение 2. С каждым векторным полем $\tilde{X}$ на TV , сохраняющим 1-формы на V , ассоциируется канонически поле вертикальных векторов $\bar{X}$, удовлетворяющее условию

$$\bar{X}\Phi = \Phi(T\pi\tilde{X}). \quad (20)$$

□ Действительно, в локальном представлении

$$\Phi(T\pi\tilde{X}) = \varphi_i u^i$$

и, следовательно,

$$\bar{X} = \partial_i^{12} u^i. \quad \square$$

В результате, векторные поля (17) и (18) могут быть определены следующим образом: R_i^2 — это n векторных полей на TV ,

сохраняющие 1-формы на V и проектирующиеся при $T\pi$ в систему n линейно-независимых векторных полей на V (систему реперов)

$$T\pi R_i^2 = \partial_i u^1,$$

где матрица (u^i) обратимая, а $R_i^{12} — n$ вертикальных векторных полей, канонически ассоциированных с векторными полями R_i^2 , г. е.

$$R_i^{12} = \bar{R}_i^2.$$

Назовем такую систему реперов $(R_i^2 R_i^{12})$ на TV Γ -сечением расслоения FTV .

4.2. Далее, нужно определить отношение эквивалентности в множестве локальных Γ -сечений.

На V два локальных сечения R_i и R'_i расслоения FV (системы реперов), заданные соответственно на окрестностях U и U' , могут быть названы эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\alpha: U \rightarrow U'$, такой, что $R'_i = T\alpha R_i$.

На TV два локальных Γ -сечения — $(R_i^2 R_i^{12})$ и $(R_i'^2 R_i'^{12})$, заданные соответственно на TU и TU' , назовем эквивалентными не только тогда, когда существует диффеоморфизм $\alpha: U \rightarrow U'$, второй дифференциал которого $T^2\alpha$ отображает систему $(R_i^2 R_i^{12})$ в систему $(R_i'^2 R_i'^{12})$. Допустим, кроме того, преобразование слоев FTV ; пусть $A: U \rightarrow GL(n)$ — некоторое отображение окрестности U в группу $GL(n)$ и TA — его дифференциал; тогда композиция $j_n \circ TA$ есть отображение $TU \rightarrow GL(2n)$, представленная блок-матрицей

$$\begin{pmatrix} A_j^i & 0 \\ dA_j^i & A_i^j \end{pmatrix},$$

где (A_j^i) — обратимая матрица на U , соответствующая отображению A . Для каждой точки TU этой матрицей определяется преобразование слоя FTV .

Два локальных Γ -сечения, заданных соответственно на TU и TU' , назовем эквивалентными, если существуют такой диффеоморфизм $\alpha: U \rightarrow U'$ и такое отображение $A: U \rightarrow GL(n)$, что последовательное выполнение преобразований $j_n \circ TA$ и $T^2\alpha$ отображает заданное на TU Γ -сечение в Γ -сечение, заданное на TU' .

Если Γ -сечение на TU задано блок-матрицей (14), то эквивалентное ему Γ -сечение на TU' определяется блок-матрицей

$$\begin{pmatrix} u'^i_j & 0 \\ -\Gamma'^i_{rs} u'^r_j \xi^s_i & u'^i_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^i_k & 0 \\ d\alpha^i_k & \alpha^i_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^h_i & 0 \\ dA^h_i & A^h_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u^i_j & 0 \\ -\Gamma^i_{rs} u^r_j \xi^s_i & u^i_j \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где (α^i_k) — якобиева матрица преобразования α .

Если здесь, в частности, положить $A_j^i = \delta_j^i$, то получим $u'^i_j = = \alpha^i_k u^k_j$, и с учетом $\xi^{i'}_1 = \alpha^i_j \xi^j_1$

$$\Gamma'^i_{jk} = (\alpha^i_l \Gamma^l_{pq} - \alpha^i_{pq}) \bar{\alpha}^p_j \bar{\alpha}^q_k.$$

Это классический закон преобразования компонентов линейной связности (1). С другой стороны, если в формуле (21) считать, что α — тождественное преобразование U , то получим

$$u'^i_j = A^i_k u^k_j, \quad \xi^{i'}_1 = \xi^i_1, \\ -\Gamma'^i_{js} \xi^s_1 A^j_k = dA^i_k - A^i_l \Gamma^l_{ks} \xi^s_1.$$

Обозначив

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{js} \xi^s_1, \quad \omega'^i_j = \Gamma'^i_{js} \xi^s_1,$$

получим окончательно

$$\omega^i_j = \bar{A}^i_k \omega'^k_l A^l_j + \bar{A}^i_l dA^l_j,$$

а это — закон преобразования форм связности (3) по Э. Картану.

Таким образом, классические формулы (1) и (3) являются следствиями формулы (21).

Итак, линейную связность на V можно определить как некоторый класс эквивалентных локальных Γ -сечений расслоения FTV . Ясно, что для задания класса эквивалентности достаточно задать один представитель этого класса в виде Γ -сечения (15) или же в виде n -мерного распределения (17) на касательном расслоении TV .

ЛИТЕРАТУРА

1. Spivak M.—«Differential Geometry», Tome II. Brandeis University USA, 1970. 425 p.
2. Morimoto A. Prolongation of G-structures to Tangent Bundles.— Nagoya Math. I., vol. 32, 1968, p. 67—108.
3. Rahula M. Géométrie des fibrés tangents, I—II. Algérie, Boumerdès, 1969, 280p.

Поступила 18 апреля 1972 г.

УДК 513 : 78 : 530.12

Д. Д. СОКОЛОВ

**НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПСЕВДОРИМАНОВЫХ
МНОГООБРАЗИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
К МАТЕМАТИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ КОСМОЛОГИИ**

В современной космологии имеется направление, ставящее своей задачей вывести из имеющихся в нашем распоряжении немногих опытных факторов и разумных априорных предположений свойства, общие всем моделям Вселенной, им удовлетворяющим. Начало этому направлению было положено, по-види-

мому, работой К. Геделя [4] и в дальнейшем представлено работами [2, 3, 5 и др.]. В настоящей работе формулируются несколько систем таких постулатов и доказываются некоторые теоремы о свойствах моделей Вселенной, им удовлетворяющим. В § 1 предлагается система постулатов, восходящая к работе К. Геделя [4] и называемая нами геделевской (G). Далее излагается основная система постулатов, используемая в настоящей работе — SG . В рамках SG оказывается возможным исследование псевдоримановых пространств, ей удовлетворяющих. В частности, доказывается, что если SG удовлетворяет M^4 , то $M^4 = M^3 \times (0; 1)$. В § 2 доказываются вспомогательные теоремы и вводится система постулатов I . В § 3 вводится понятие трехмерного пространства для моделей Вселенной из SG и рассматривается вопрос о его существовании. В § 3 даются также необходимые и достаточные условия того, что многообразие M^4 может быть носителем псевдориманова многообразия, удовлетворяющего SG .

§ 1. Геделевская система постулатов и система постулатов SG

Исторически первой и наиболее известной системой постулатов является следующая, восходящая к работе К. Геделя [4]. Далее, если не оговорено обратное, предполагаем гладкость всех встречающихся объектов C^∞ . (Обозначим класс многообразий, удовлетворяющих некоторому постулату, той же буквой, что и сам постулат).

Определение 1. Псевдориманово многообразие M^4 удовлетворяет системе постулатов G тогда и только тогда, когда

(B) оно имеет постоянную сигнатуру $(1,3)$ и, следовательно, размерность 4;

(G_1) множество конусов времениподобных и изотропных¹ векторов $\{T^+(x)\}$ разбивается на множество конусов прошлого $\{T^-(x)\}$ и будущего $\{T^+(x)\}$ так, что, если $\xi \in T^+(x)$, то $(-\xi) \in T^-(x)$, и наоборот. Кроме того, $T^+(x) \cap T^-(x) = \emptyset$;

(G_2) M^4 не содержит замкнутых времениподобных линий²;

(G_3) на M^4 существует функция

$$t: M^4 \rightarrow (0; 1)$$

такая, что

$$(\text{grad } t)^2 = g^{ij} \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j} > 0,$$

где g^{ij} — контрвариантные компоненты метрического тензора.

(ZN) в M^4 не существует неориентируемых трехмерных пространственноподобных подмногообразий;

¹ Времениподобным (пространственноподобным, изотропным) называется ненулевой вектор, квадрат длины которого > 0 (≤ 0 , $= 0$).

² Подмногообразие называется времениподобным, если каждый его касательный вектор времениподобен и т. д.

(МВ) в M^4 не существует односторонне вложенных в M^4 трехмерных пространственноподобных подмногообразий.

Постулат В является, очевидно, необходимой предпосылкой применения общей теории относительности (ОТО) к космологии; однако он налагает определенные ограничения на топологию M^4 [3]. Постулаты G_1, G_2, G_3 были предложены К. Геделем в [4], ZN — Я. Б. Зельдовичем и И. Д. Новиковым в [1, 6], MB — Д. Д. Соколовым в [7]. В вышеперечисленных работах указан физический смысл этих постулатов.

Сформулируем несколько иную систему постулатов — SG . Смысл этого изменения состоит в следующем. Легко видеть (впервые это было отмечено в [8]), что все многообразия, удовлетворяющие G , некомпактны. Поэтому мы попытаемся рассматривать так называемые компактифицированные модели Вселенной в виде многообразий с угловыми точками, где угловые точки описывали бы бесконечно удаленные точки Вселенной.

Дадим определение угловых точек, так как в литературе это понятие употребляется в различных смыслах (мы следуем [9, 13]). Пусть в n -мерном арифметическом пространстве A^n заданы множества

$$\Sigma^j = \{x = (x_1, \dots, x_n), \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1, x_1 \geq 0, \dots, x_j \geq 0\}, 0 \leq j \leq n.$$

Пусть далее $M \subseteq N$, где N — многообразие. Точка $p \in M$ называется угловой точкой индекса j , если в N существует ее карта $(U_\alpha; h_\alpha)$ такая, что $h_\alpha(M \cap U_\alpha) = \Sigma^j$, причем $h_\alpha(p) = \{0, \dots, 0\}$. M называется многообразием с угловыми точками индекса не выше l , если все его точки — угловые индексы не выше l . Отметим, что многообразием с краем называется многообразие с угловыми точками индекса не выше 1. Мы будем обозначать $\partial_k M$ множество угловых точек индекса k в M .

Класс псевдоримановых многообразий с краем оказывается слишком узким для построения моделей Вселенной и сигнатура метрики на множестве угловых точек должна, вообще говоря, меняться. Сформулируем условие, заменяющее условие постоянства сигнатуры, столь важное в индефинитном случае, — им и будет нижеследующий постулат SB . Прежде чем перейти к его формулировке, напомним, что, если M — компактное многообразие с угловыми точками, существует подмногообразие $N(M)$

такое, что $M \setminus N(M)$ является окрестностью $\bigcup_{i=1}^n \partial_i M$, диффеоморфной $\left(\bigcup_{i=1}^n \partial_i M\right) \times [0; 1]$ ([11, № 3]). Отметим, что $N(M)$ называется окрестностью $\bigcup_{i=1}^n \partial_i M$.

Определение 2. Псевдориманово многообразие M^4 с метрикой g удовлетворяет системе постулатов SG тогда и только тогда, когда

(SB) в M^4 существует подмножество $N(M^4)$ такое, что

1. $N(M^4)$ — компактное многообразие с угловыми точками индекса не выше 2;

2. $\text{int } N(M^4)$ диффеоморфно M^4 ;

3. $\partial_1 N(M^4) \cup \partial_2 N(M^4) = M_1^3 \cup M_2^3 \cup \bar{M}^3$,

$\partial_2 N(M^4) = (M_1^3 \cup M_2^3) \cup \bar{M}^3$,

где M_1^3 , M_2^3 , $\bar{M}^3$ — трехмерные многообразия с краем;

4. g на M^4 имеет сигнатуру (1,3), а ограничение g на $\bar{M}^3$ сигнатуру (1,2);

(G) $\text{int } N(M^4)$ удовлетворяет G;

(SG₃) на $N(M^4)$ существует функция

$$t: N(M^4) \rightarrow [0; 1]$$

такая¹, что

$$t^{-1}(0) = M_1^3; \quad t^{-1}(1) = M_2^3; \quad (\text{grad } t)^2 = g^{ij} \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j} > 0.$$

В [11] показано, что SB обеспечивает возможность введения понятий бесконечно удаленного прошлого и будущего (M_1^3 , M_2^3) и пространственной бесконечности ($\bar{M}^3$). Далее будут использованы также термины типа модель Вселенной, удовлетворяющая (принадлежащая) SG , псевдориманово многообразие из SG и т. д., смысл которых очевиден.

Теорема 1. Если M^4 удовлетворяет SG , то $M^4 = M^3(0; 1)$, где $M^3 = \text{int } N^3$; N^3 — компактное многообразие с краем.

Доказательство. 1) Очевидно, достаточно доказать, что $N(M^4) = N^3[0; 1]$.

2) Легко видеть, что функция t , о которой идет речь в SG_3 , обладает тем свойством, что $\text{grad}_{\bar{M}^3} t \neq 0$, где grad_A обозначает оператор градиента на подмногообразии A .

3) В теории Морса [10, 12] доказывается, что если в условиях нашей теоремы положить $M_- = \emptyset$, а M_1^3 и M_2^3 считать замкнутыми, то

$$N(M^4) = N^3 \times [0; 1].$$

4) В [13] доказано, что $\partial_i \partial_i = 0$, откуда получаем, что

$$\partial_1 \bar{M}^3 \subseteq M_1^3 \cup M_2^3; \quad \bar{M}^3$$

¹ Гладкость функции t в граничных точках $N(M^4)$ понимается следующим образом: существуют такие окрестность $N(M^4)$ U и функция $T: U \rightarrow (-\infty; \infty)$, что $t = T|_{N(M^4)}$; тогда полагаем

$$(\text{grad } t) \Big|_{t=1}^{\bar{U}} \partial_i N(M^4) = (\text{grad } T) \Big|_{t=1}^{\bar{U}} \partial_i N(M^4).$$

в силу 2) и 3) имеет вид

$$\overline{M}^3 = \partial_1 M^3 \times [0; 1] = \partial_1 M^3 \times [0; 1] = M^3 \times [0; 1].$$

5) Пусть теперь

$$M^4 = M_1^3 \times [0; 1],$$

тогда

$$M_2^3 \cup (\partial_1 + \partial_2) M^4 = ((\partial_1 + \partial_2) N(M^4)) \cup M_1^3.$$

Пусть

$$\overline{M}^4 = M^4 \cup_{\overline{M}^3} N(M^4).$$

Продолжим t на все $\overline{M}^4$ следующим образом. Пусть t_1 — координата на $[0; 1]$ в M^4 ; $N(M^4) \setminus N_1(M^4)$ — кольцевая окрестность $\overline{M}^3$ в $N(\overline{M}^4)$. По определению $N(M^4) \setminus N_1(M^4) = \overline{M}^3 \times [0; 1] = (M^3 \times [0; 1])' \times [0; 1] = (M^2 \times [0; 1]) \times [0; 1]'$ (индекс' различает «разные экземпляры» отрезка $[0; 1]$). Пусть l_1, l_2 — разбиение единицы на $[0; 1]$. Определим функции E_1 и E_2 следующим образом. Пусть $x \in N(M^4) \setminus N_1(M^4)$ — точка с координатами (y, a, b) , где $y \in M^2$, $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]'$. Тогда положим $E_1(x) = l_1(a)$, $E_2(x) = l_2(a)$. Искомым продолжением функции t на все $\overline{M}^4$ с сохранением гладкости является, например, функции

$$T = \begin{cases} t & \text{на } N_1(M^4) \\ tE_1 + t_1E_2 & \text{на } N(M^4) \setminus N_1(M^4). \\ t_1 & \text{на } M^4 \end{cases}$$

Тогда согласно 3)

$$\overline{M}^4 = M^3 \times [0; 1], \quad N(M^4) = N^3 \times [0; 1],$$

где

$$N^3 = M_1^3 \times M_2^3, \quad M^3 = M_1^3 H_{\partial M_1^3} M_1^3, \quad M^4 = \text{int } M_1^3 \times (0; 1).$$

Теорема 1 доказана.

§ 2. Система постулатов J

Сформулируем одну вспомогательную систему постулатов — J . С ее помощью установим некоторые свойства погружаемости многообразий из SG в псевдоевклидовы пространства, которые используем для выяснения необходимых и достаточных условий принадлежности SG . Ниже докажем, что J эквивалентна SG .

Определение 3. Псевдориманово многообразие удовлетворяет системе постулатов J тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет SB и, кроме того,

- (J_1) при достаточно большом m $N(M^4)$ имеет изометрическое
 (C^∞) погружение в $E_{(1; m-1)}^m$;
 (J_2) M^4 ориентируемо;
 (B) $g|_{M_1^3}$ и $g|_{M_2^3}$ имеют сигнатуру $(0; 3)$;

Далее воспользуемся рядом понятий теории погружений, за определением которых отсылаем к [16]. Введем важное понятие короткого погружения. Оно было впервые сформулировано Дж. Нэшем в [14], а для индефинитной метрики — К. Кларком в [15]; мы сформулируем его в несколько иной, более удобной для наших целей, форме.

Определение 4. Дифференциальное погружение (вложение, отображение) многообразия M с метрикой g

$$f: M \rightarrow E_{(p'; q')}^m$$

называется коротким, если квадратичная форма $ds_g^2 - ds_f^2$, где $ds_g^2 (ds_f^2)$ — линейный элемент, соответствующий g (f), знакоопределена.

Лемма 1. Если псевдориманово многообразие M^4 удовлетворяет SG , то $N(M^4)$ имеет короткое отображение в $E_{(1; 0)}^1$, короткое погружение в $E_{(1; 4)}^5$, короткое вложение в $E_{(1; 5)}^6$.

Доказательство. Докажем, например, последнее из утверждений. Согласно теореме 1, $N(M^4) = N^3 \times [0; 1]$, причем координата t в $[0; 1]$ времениподобна. По теореме Уитни [17] имеется дифференциальное вложение $\tilde{f}: N^3$ в E^5 . Определим искомое короткое вложение следующим образом:

$$f = f_1 \times \tilde{f}: M^4 \rightarrow E_{(1; 5)}^6 = E_{(1; 0)}^1 \times E_{(0; 5)}^5,$$

где

$$f_1 = Ct; C = \text{const}; \kappa = \text{const}.$$

Путем прямого подсчета легко убедиться, что при достаточно большом C и достаточно малом κ f — короткое вложение, причем форма $ds_g^2 - ds_f^2$ отрицательно определена.

Теорема 2. Из SG следует J_1 . Другими словами, при достаточно большом m $N(M^4)$ для каждого M^4 из SG имеет изометрическое погружение в $E_{(1; m-1)}^m$.

Доказательство. Отрицательно определенная метрика $ds_g^2 - ds_f^2$ имеет изометрическое погружение f^* в $E_{(0; l)}^l$ при достаточно большом l [16]. Тогда искомым изометрическим погружением метрики g в $E_{(1; 4)}^5 \times E_{(0; l)}^l$ является, очевидно, отображение $f \times f^*: N(M^4) \rightarrow E_{(1; 4+l)}^{5+l}$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Из SB , J_1 и B следует SG_3 , а для $\text{int } N(M^4)$ — $G_1 G_2 G_3$.

Доказательство. Проверим, например, что из SB , J_1 и B следует SG_3 (проверка остальных утверждений аналогична). В [18] доказано, что если $N(M^4)$ имеет погружение в $E_{(1;m-1)}^m$, то $(\text{grad}_{x_1}(N(M^4)))^2 > 0$, где x_1 — первая функция погружения. Нормировкой можно добиться того, чтобы $\frac{1}{4} \leq x_1 \leq \frac{3}{4}$. Деформируем погружение (при этом изометричность, конечно, нарушится) так, чтобы новая функция погружения $\tilde{x}_1$ обладала еще дополнительно тем свойством, что

$$0 \leq \tilde{x}_1 \leq 1, \quad \tilde{x}_1^{-1}(0) = M_1^3; \quad \tilde{x}_1^{-1}(1) = M_2^3.$$

Это, очевидно, можно сделать, проектируя по x_1 кольцевые окрестности M_1^3 и M_2^3 на кольцевые окрестности $E_{(0;m)}^m \times \{0\}$ и $E_{(0;m)}^m \times \{1\}$.

Теорема 3 доказана.

Заметим, что для тех погружений, которые давались теоремой 2, функция $x_1(N(M^4)) / \max(x_1(N(M^4)))$ обладает всеми свойствами функции t , о которой говорится в SG_3 (действительно, $x_1 = Ct$). Далее для многообразий из SG рассмотрим именно те погружения, которые даются теоремой 2.

Сформулируем одно простое следствие теорем этого параграфа.

Следствие 1. На $N(M^4)$ многообразия M^4 из SG существует функция $t: M^4 \rightarrow [0; A]$ такая, что $(\text{grad } t)^2 > 0$ и $(\text{grad } \bar{M}^3 t)^2 > 0$.

Очевидно, что функция $t = x_1(N(M^4))$ удовлетворяет этим условиям. Функцию t , о которой шла речь в следствии 1, принято называть мировым временем.

§ 3. Понятие пространства в SG . Необходимое и достаточное условие принадлежности SG

Определение 4. Если существует мировое время t такое, что для некоторого $a \in [0; A]$ $t^{-1}(a)$ — пространственноподобное трехмерное подмногообразие, то $t^{-1}(a)$ называется пространством, соответствующим моменту a мирового времени t .

Из теорем 1, 2, 3 аналогично предыдущему следует

Следствие 2. Для $N(M^4)$ многообразия M^4 из SG существует такое мировое время t , что каждому его моменту a соответствует пространство $M^3(a)$; все $M^3(a)$ диффеоморфны M_1^3 и M_2^3 .

Теперь можем дать необходимые и достаточные условия принадлежности SG .

Теорема 4. 1° Многообразие M^4 может быть носителем псевдориманова многообразия из SG тогда и только тогда, когда $M^4 = M^3 \times (0; 1)$, где $M^3 = \text{int } N^3$; N^3 — компактное ориентируемое трехмерное многообразие с угловыми точками.

2°. Системы SG и J эквивалентны.

Доказательство. 1) Проверка достаточности условия 1^о затруднений не вызывает. Задаем на M^3 дефинитную метрику ds_1^2 (всегда возможно в силу теоремы Уитни), на M^4 искомой индефинитной метрикой является, например, метрика

$$ds^2 = dt^2 - ds_1^2.$$

2) Докажем теперь ту часть теоремы 4, которая не охвачена теоремами 1, 2, 3.

Из $G_3(SG_3)$ следует, что всякое пространственноподобное подмногообразие H многообразия $M^4(N(M^4))$ из $G(SG)$ трансверсально функции t , т. е. $\text{grad } t$ не лежит в касательном пространстве H . Далее, используя следствие 2, получаем, что для всякого пространственноподобного подмногообразия H подмногообразия $N(M^4)$ многообразия M^4 из SG существует отображение в M^3 , являющееся локальным диффеоморфизмом. Далее, т. к. для многообразий M^4 из SG N^3 является пространственноподобным (следствие 2), то по (ZN) N^3 ориентируемо. Дальнейшее доказательство очевидно в силу стандартных свойств ориентируемости (см. например [19]). Теорема 4 доказана.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Э. Г. Позняку за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Новиков Н. Д. Релятивистская астрофизика. М., «Наука», 1967, 654 с.
2. Hawking S. W., Penrose R. The singularities of gravitation collapse and cosmology. — «Proc. Roy. Soc. London.» 1970, vol. 3146, № 1519, p. 529—548.
3. Ceroch R. P. Topology in General Relativity. — J. Math. Phys. 1967, 8, № 4, p. 782—786.
4. Gödel K. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation, Rev. Mod. Phys., 1949, 21, № 3, p. 447—450.
5. Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии. УФН, 1970, 102, № 3 с. 463—500.
6. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Физические ограничения топологии Вселенной. — «Письма ЖЭТФ», 1967, 6, № 7, с. 772—773.
7. Соколов Д. Д. О топологии моделей Вселенной. — «Докл. АН СССР», 1970, 195, № 6, с. 1307—1309.
8. Bass R. W., Witten L. Remarks on Cosmological Models. — Rev. Mod. Phys., 1957, 29, № 3, p. 442—445.
9. Мезер Дж. Структурная устойчивость отображений. — В сб.: Особенности дифференцируемых отображений. М., «Мир», 1968, с. 216—267.
10. Милнор Дж. Теорема об h -кобордизме. М., «Мир», 1969, 210 с.
11. Пенроуз Р. Конформная трактовка бесконечности. — В сб.: Гравитация и топология. М., «Мир», 1966, с. 152—181.
12. Милнор Дж. Теория Морса. М., «Мир», 1965, 320 с.
13. Шварц Дж. Дифференциальная геометрия и топология. М., «Мир», 1970, 480 с.
14. Nash J. C^1 — isometric imbeddings. — «Ann. of Math», 1954, vol. 60, № 4, p. 383—396.

15. Clarke C. J. S. On the global isometric embedding of pseudo-Riemannian manifolds. — «Proc. Roy. Soc. London», 1970, vol. A 314 № 1518, p. 417—428.
16. Громов М. Л. Рохлин В. А. Вложения и погружения в римановой геометрии. — УМН, 25, 5, 165, 1970, с. 3—62.
17. Whitney H. The self-intersections of a smooth n -manifolds in $2n$ -space, — «Ann. of Math». 1944, 45, № 2, p. 220—246.
18. Соколов Д. Д. О некоторых свойствах индефинитной метрики. — «Матем. сб.», 1971, 86 (128), 9, с. 3—8.
19. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М.-Л., ГОНТИ, 1938. 410 с.

Поступила 18 апреля 1972 г.

О МОНОТОННЫХ КРИВЫХ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой работе под кривой понимается непрерывное отображение в трехмерное евклидово пространство E_3 отрезка $[a, b]$, рассматриваемое с точностью до монотонных преобразований параметра $t \in [a, b]$ [1]. Тем самым кривой приписывается определенное направление, т. е. ее точки упорядочиваются в соответствии с возрастанием параметра.

В пространстве зададим декартову систему координат. Пусть $(X = x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ — какая-либо параметризация кривой K в E_3 . Кривая K называется *монотонной*, если для любых значений t_0, t_1, t_2, t_3 таких, что $a \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \leq b$, определитель

$$\Delta = \Delta(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1(t_0) & x_1(t_1) & x_1(t_2) & x_1(t_3) \\ x_2(t_0) & x_2(t_1) & x_2(t_2) & x_2(t_3) \\ x_3(t_0) & x_3(t_1) & x_3(t_2) & x_3(t_3) \end{vmatrix}$$

либо всегда неотрицателен, либо всегда неположителен, причем имеется система значений t_0, t_1, t_2, t_3 , для которой он отличен от нуля. Таким образом, *кривая K — существенно пространственная*.

Нетрудно видеть, что свойство кривой быть монотонной не зависит от выбора декартовой системы координат в пространстве.

Кривую K будем называть *локально монотонной* в E_3 , если у каждой ее точки имеется на кривой K окрестность U , которая является монотонной кривой в E_3 .

Понятие монотонной кривой изучается в так называемой теории геометрических порядков, служившей в свое время предметом большого числа исследований (см., например, [2], где приведена подробная библиография). Монотонные кривые естественным образом возникают в связи с некоторыми задачами теории аппроксимации.

В настоящей работе монотонные кривые изучаются с определенной новой точки зрения. Рассматриваются вопросы, связанные с их строением, принадлежностью их к выпуклым поверхностям, локальной выпуклостью индикатрис их касательных и бинормалей. Затем даются оценки для интегральных кривизн и кручений монотонных кривых. При этом последовательно используются понятия и результаты работ [3, 4].

§ 1. Общие сведения

Лемма 1. Пусть точки X_1, X_2, X_3 монотонной кривой K определяют единственную плоскость $P(X_1, X_2, X_3)$ и пусть точки M и N кривой K не принадлежат плоскости P . Тогда, если на кривой K между точками M и N находится четное число точек из X_1, X_2, X_3 , то M и N лежат по одну сторону от плоскости P , если же между M и N — нечетное число точек из X_1, X_2, X_3 , то M и N лежат по разные стороны от плоскости P .

При этом определители $\Delta(M, X_1, X_2, X_3)$ и $\Delta(N, X_1, X_2, X_3)$ будут одного знака тогда и только тогда, когда между M и N находится четное число точек из X_1, X_2, X_3 , т. е. когда M и N лежат по одну сторону от P , и разных знаков в противном случае.

Доказательство. Будем считать, что точки X_1, X_2, X_3 обозначены в порядке их следования на кривой K с концами A и B . Точки X_1, X_2, X_3 разбивают K на четыре дуги $AX_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3B$. На каждой из этих дуг возьмем по одной точке, не лежащей на плоскости P , и обозначим их соответственно через C, D, E, F . Если некоторые из указанных дуг вырождаются в точки или принадлежат плоскости P , то соответствующие им точки из C, D, E, F отсутствуют и в дальнейшем не рассматриваются.

По определению для выделенных точек, взятых в порядке их следования на монотонной кривой K , определители $\Delta(C, X_1, X_2, X_3)$, $\Delta(X_1, D, X_2, X_3)$, $\Delta(X_1, X_2, E, X_3)$ и $\Delta(X_1, X_2, X_3, F)$ будут одного знака. Следовательно, знак определителей $\Delta(C, X_1, X_2, X_3)$ и $\Delta(E, X_1, X_2, X_3)$ будет противоположен знаку определителей $\Delta(D, X_1, X_2, X_3)$ и $\Delta(F, X_1, X_2, X_3)$. Тем самым точки C и E лежат по одну сторону от плоскости P , а точки D и F — по другую сторону от P . Поэтому в силу произвола в выборе точек C, D, E, F утверждения леммы 1 доказаны.

Лемма 2. Каждая плоская дуга монотонной кривой выпукла.

Доказательство. Пусть монотонная кривая K содержит невыпуклую плоскую дугу CD . Тогда существует такая прямая l , которая пересекает дугу CD не менее, чем в трех точках X_1, X_2, X_3 , принадлежащих различным связным компонентам общей части CD и l . При этом точки X_1, X_2, X_3 , занумерованные в порядке их следования на кривой K , можно выбрать

так, что точки X_1 и X_3 не совпадают в пространстве (точка X_1 может совпадать с одной из них, например, когда дуга CD на некотором своем участке EF проходит сама по себе дважды).

Дуги X_1X_2 и X_2X_3 кривой K не лежат целиком на прямой l , поэтому на них можно выбрать по точке M и N , не лежащие на l . Точки M и N вместе с дугой CD и прямой l лежат на некоторой плоскости Q .

На кривой K возьмем какую-либо точку Y , не принадлежащую плоскости Q . Это можно сделать, так как K — существенно пространственная кривая. Проведем через точку Y и прямую l плоскость P . Тогда точки M и N не могут лежать на P , так как они принадлежат Q , но не лежат на l , по которой пересекаются P и Q . Согласно лемме 1 точки M и N не могут лежать по разные стороны от P , поскольку между ними нет ни одной из трех точек Y, X_1, X_3 , определяющих единственную плоскость P . Точки M и N также не могут лежать с одной стороны от P , так как между ними лежит одна точка X_2 тройки точек Y, X_1, X_2 или Y, X_2, X_3 , которые определяют единственную плоскость P .

Полученное противоречие опровергает допущенное. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. *Общая часть монотонной кривой и любой прямой состоит не более чем из двух различных связных компонент на одной прямой.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть некоторая прямая l имеет более двух различных связных компонент общими с монотонной кривой K . Возьмем какие-либо три из них и в каждой выберем по точке X_1, X_2, X_3 , занумеровав их в порядке следования на кривой K .

Из точек X_1, X_2, X_3 на прямой l либо $X_1 \in [X_2, X_3]$, либо $X_3 \in [X_1, X_2]$. Для определенности будем считать, что $X_1 \in [X_2, X_3]$. Дуги X_1X_2 и X_2X_3 кривой K не могут лежать в одной плоскости (согласно лемме 2). Поэтому на них можно взять по одной точке M и N так, что плоскость $P(X_1, M, N)$ будет единственной и $l \notin P$.

Тогда точки X_2 и X_3 будут лежать по одну сторону от P . Но по лемме 1 они должны лежать по разные стороны от P , так как между ними лишь одна точка N тройки точек X_1, M, N .

Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Концы A и B монотонной кривой K не могут совпадать.*

Доказательство. Монотонная кривая K , как уже отмечалось, существенно пространственная. Поэтому на K можно выбрать три точки X_1, X_2, X_3 , не лежащие на одной прямой и такие, что плоскость $P(X_1, X_2, X_3)$ не содержит точек A и B . Согласно лемме 1, точки A и B должны лежать по разные стороны от P , так как между ними находятся все три точки X_1, X_2, X_3 , и лемма доказана.

§ 2. Цилиндр монотонной кривой

Через концы A и B кривой K проведем прямую l , затем через все точки кривой K проводим прямые, параллельные l . Тем самым получим замкнутую цилиндрическую поверхность, которую будем называть цилиндром кривой K и обозначать $C(K)$.

Лемма 5. Каждая из образующих цилиндра монотонной кривой K за исключением образующей l , проходящей через концы кривой K , имеет лишь одну общую точку с кривой K .

Доказательство. Пусть некоторая образующая l' , несовпадающая с l , имеет с кривой K общими две различные точки X_1 и X_2 .

Кривая K не плоская. Поэтому на ней найдется точка X_3 такая, что плоскость P , проходящая через точки X_1, X_2, X_3 не содержит концов A и B кривой K . При этом точки A и B лежат по одну сторону от P , так как принадлежат образующей l , параллельной P , но по лемме 1 они должны лежать по различные стороны от P , так как разделены тремя точками X_1, X_2, X_3 .

Это противоречие доказывает лемму.

Теорема 1. Цилиндр монотонной кривой K — выпуклый.

Доказательство. Допустим обратное. Тогда очевидно существует такая прямая m , которая пересекает цилиндр $C(K)$ не менее чем в трех изолированных точках M'_1, M'_2, M'_3 , и m не пересекает образующей AB , проходящей через концы A и B кривой K . Проведем через m плоскость P , параллельную образующей цилиндра $C(K)$. Плоскость P пересечет K не менее чем в трех изолированных точках M_1, M_2, M_3 , лежащих на образующих $M_1M'_1, M_2M'_2, M_3M'_3$ цилиндра $C(K)$ (согласно лемме 5). Точки M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой (см. лемму 3) и потому определяют единственную плоскость P . Концы A и B кривой K по построению лежат по одну сторону от P , а согласно лемме 1 они должны лежать по разные стороны от P , так как между ними находятся три точки M_1, M_2, M_3 плоскости P .

Это противоречие доказывает теорему.

В дальнейшем, учитывая доказанную теорему, цилиндр $C(K)$ монотонной кривой K будем называть выпуклым цилиндром этой кривой.

Замечание. Из предыдущего следует, что, если ветви монотонной кривой уходят в бесконечность и имеют асимптоты, каждая из этих асимптот может быть принята за направляющую цилиндра кривой. Полученные цилиндры будут выпуклыми, но могут быть не замкнутыми.

Аналогично теореме 1 доказывается следующая.

Теорема 1'. Всякая монотонная кривая K лежит на пересечении выпуклых конусов, вершинами которых являются концы кривой K , а направляющей — сама кривая K .

§ 3. Строение монотонной кривой

1°. **Лемма 6.** Монотонная кривая K не имеет точек возврата.

Доказательство. Допустим противное. Пусть точка M является точкой возврата кривой K . Возьмем на дугах AM и BM кривой K по точке L и N так, что прямая LN не параллельна касательной к K в M и дуга LMN не лежит вся в плоскости $P(LMN)$. Тогда дуга LMN будет монотонной кривой, так как она является частью K и не лежит ни в какой плоскости.

Проекция кривой LMN на плоскость, перпендикулярную прямой LN , будет замкнутая кривая $L'M'N'$ с точкой возврата в M' , т. е. не выпуклая кривая. Следовательно, цилиндр C кривой LMN не будет выпуклым, так как его ортогональной направляющей будет не выпуклая кривая $L'M'N'$. Это противоречит теореме 1, и лемма доказана.

2°. **Теорема 2.** Монотонная кривая K либо не имеет самопересечений, либо может иметь одну кратную точку $X_1 = X_2$, которая разбивает K на три простых дуги AX_1 , X_1X_2 , X_2B , так, что дуга X_1X_2 является плоской замкнутой выпуклой кривой, а дуги AX_1 и X_2B лежат на одной прямой по разные стороны от плоскости дуги X_1X_2 . Одна из дуг AX_1 и X_2B может вырождаться в точку.

Доказательство. Пусть точки $X_1 = X(t_1)$ и $X_2 = X(t_2)$ ($t_1 < t_2$) кривой K совпадают и дуга X_1X_2 кривой K не вырождается в точку. Тогда дуга X_1X_2 плоская, так как иначе она будет монотонной кривой с совпадающими концами, что противоречит лемме 4. Согласно лемме 2 дуга X_1X_2 выпукла.

Построим выпуклый цилиндр $C(K)$ кривой K . Его образующая AB , соединяющая концы A и B кривой K , не параллельна плоскости P , содержащей дугу X_1X_2 . Действительно, в противном случае плоскость P была бы опорной к $C(K)$ и на ней нашлась бы образующая цилиндра $C(K)$ отличная от AB и пересекающая дугу X_1X_2 в двух различных точках, что противоречит лемме 5. Отсюда следует, что хотя один из концов A , B кривой не лежит в плоскости P и каждая образующая цилиндра $C(K)$ пересекает дугу X_1X_2 в одной точке.

Все точки кривой K , не лежащие на дуге X_1X_2 , лежат на образующей AB . Действительно, если бы на K существовала точка $C \in X_1X_2$ и $C \notin AB$, то проходящая через нее образующая цилиндра $C(K)$ пересекала бы дугу X_1X_2 в некоторой точке $D \neq C$, но это противоречило бы лемме 5. Поэтому за точку пересечения образующей AB с дугой X_1X_2 можно принять точку $X_1 (= X_2)$.

Из доказанного следует, что дуги AX_1 и X_2B лежат на одной прямой и по крайней мере одна из них не вырождается в точку. Для определенности, будем считать, что $A \neq X_1$. Дуги AX_1 и X_2B лежат по разные стороны от плоскости P — это видно из следующего. На дуге X_1X_2 можно взять три различные точки, определяющие единственную плоскость P , тогда эти точки будут

лежать между точками A и B и, согласно лемме 1, A и B должны лежать по разные стороны от P .

Наконец покажем, что никакой отрезок кривой K не проходит дважды.

В соответствии с введенными обозначениями $A = X(a)$,

$$X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), B = X(b) \text{ и } a < t_1 < t_2 \leq b.$$

Из предыдущего и из леммы 6 очевидно, что на дугах AX_1 и X_2B не может быть отрезков проходимых дважды. Покажем, что таких отрезков не может быть и на дуге X_1X_2 . На основании леммы 6 это может быть только в том случае, если вся дуга X_1X_2 прохордится дважды, т. е. дуга X_1X_2 состоит из двух совпадающих дуг X_1Y и YX_2 , у которых точки $X_1 = X(t_1)$, $Y = X(t^*)$, $X_2 = X(t_2)$ совпадают и $t_1 < t^* < t_2$. Возьмем на дугах X_1Y и YX_2 по точке $M = X(t')$ и $N = X(t'')$ таких, что точка X_1 не лежит на прямой MN и $t_1 < t' < t^* < t'' < t_2$. Тогда точки A, M, N определяют единственную плоскость, от которой лежат по одну сторону точки X_1, Y, X_2 . Но, согласно лемме 1, точки X_1 и Y должны лежать по разные стороны от этой плоскости, так как разделены лишь одной точкой M из трех A, M, N . (В соответствии с выбором $a < t_1 < t' < t^* < t'' < t_2 \leq b$ порядок следования перечисленных точек на кривой K такой: A, X_1, M, Y, N, X_2, B). Этим доказано последнее утверждение, и тем самым доказательство теоремы закончено.

Замечание. Из теоремы 2 видно, что, если монотонная кривая имеет точку самопересечения, ее строение очень просто и она не представляет интереса в рассмотрении монотонных кривых. Поэтому в дальнейшем, чтобы не делать излишних оговорок, такие кривые среди монотонных кривых рассматриваться не будут, хотя все результаты будут верны и для них, но иногда с очевидными оговорками.

§ 4. Пересечение монотонной кривой с прямой и с плоскостью

1°. Пусть дана плоскость P и пусть M — множество тех $t \in [a, b]$, для которых точка $X(t)$ кривой K принадлежит P . Множество M замкнуто. Если M состоит из m связных компонент, то будем говорить, что плоскость P пересекает K m -кратно.

Аналогично определим кратность пересечения прямой и кривой.

Теорема 3. Монотонная кривая K пересекается любой прямой не более чем двукратно. При этом множество их общих точек может быть только одним из следующих видов:

- 1) пустое множество;
- 2) одна или две изолированные точки;
- 3) один прямолинейный отрезок, и если ни один из его концов не совпадает ни с одним из концов кривой K , то только он один;

4) два прямолинейных отрезка или один прямолинейный отрезок и одна изолированная точка — в том и только в том случае, когда каждая из этих связанных компонент содержит по одному из концов кривой K .

Доказательство. Справедливость всех утверждений теоремы 3 становится очевидной, если построить выпуклый цилиндр $C(K)$ кривой K и пересекать его всевозможными прямыми. При этом надо учесть леммы 3, 5, 6, теорему 2 и замечание к ней.

2°. Теорема 4. Монотонная кривая K пересекается любой плоскостью P не более чем трехкратно. При этом множество их общих точек может быть только одним из следующих видов:

- 1) пустое множество;
- 2) одна, две или три изолированных точки;
- 3) один прямолинейный отрезок, и если ни один из его концов не совпадает ни с одним из концов кривой K , то кроме этого отрезка может быть еще только одна изолированная точка, не лежащая на одной прямой с этим отрезком;

4) один прямолинейный отрезок и одна или две изолированных точки, при этом две точки только в том случае, когда один из концов кривой K совпадает с одним из концов этого отрезка, а второй ее конец совпадает с одной из изолированных точек и эта точка лежит на одной прямой с отрезком;

5) два прямолинейных отрезка, притом только в том случае, когда один из концов каждого из этих отрезков совпадает с одним из концов кривой. Если оба отрезка принадлежат одной прямой, то может быть еще только одна изолированная точка;

6) одна плоская дуга, и если ни один из ее концов не совпадает с одним из концов кривой K , то только она одна, а ветви кривой K , примыкающие к такой дуге, лежат по разные стороны от плоскости этой дуги;

7) плоская дуга, один из концов которой совпадает с одним из концов кривой K , тогда может быть еще и второй конец кривой K , а также примыкающий к нему прямолинейный отрезок или плоская дуга.

Доказательство. Допустим, что монотонная кривая K с некоторой плоскостью P имеет более чем 3-кратное пересечение. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — точки, принадлежащие различным связным компонентам пересечения, занумерованным в порядке следования их на K . Никакие три из этих точек не лежат на одной прямой (теорема 3), поэтому любые три из них определяют одну и ту же плоскость P . Между каждой парой соседних из точек X_1, X_2, X_3, X_4 возьмем по одной точке, не принадлежащей плоскости P и обозначим их в порядке следования на кривой K через Y_1, Y_2, Y_3 . Из трех точек Y_1, Y_2, Y_3 хотя бы две лежат по одну сторону от плоскости P . Обозначим их через Y_4 и Y_5 . Между точками Y_4 и Y_5 находится хотя бы одна из точек X_2 и X_3 . Обозначим ее, а если их две таких, то любую одну из них — через X_4 .

Тем самым в порядке следования на кривой K выбрано пять точек X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3 . При этом точки Y_1 и Y_2 лежат по одну сторону от P и разделены лишь одной точкой X_2 из трех X_1, X_2, X_3 , что противоречит лемме 1 и, следовательно, опровергает сделанное допущение.

Этим доказано основное утверждение теоремы.

3°. То, что общая часть монотонной кривой и плоскости может быть перечисленных в теореме 4 видов, очевидно. Доказательство того, что она не может быть иных видов будет следовать из теоремы 3 и из доказательства утверждений 5, 6 и 7.

Пусть две различные связные компоненты общей части кривой K и плоскости P являются прямолинейными отрезками $[X_1, X_2]$ и $[X_3, X_4]$, концы которых перенумерованы в порядке следования по кривой K и пусть хоть один из концов кривой K , например B , не является концом ни одного из указанных отрезков. Для определенности, будем считать, что точка B следует на кривой K после точки X_4 . В этом случае по теореме 3 никакие три из четырех точек X_1, X_2, X_3, X_4 не лежат на одной прямой. Следовательно, каждые три из них определяют одну и ту же плоскость P .

На кривой K между точками X_2 и X_3 возьмем точку M , не лежащую на плоскости P , и среди следующих за X_4 возьмем точку N , не принадлежащую также плоскости P .

Тогда точки M и N будут разделены двумя точками X_3 и X_4 тройки X_2, X_3, X_4 и на основании леммы 1 должны лежать по одну сторону от плоскости P . Кроме того, точки M и N разделены одной точкой X_3 тройки X_1, X_2, X_3 и, следовательно, должны принадлежать различным полупространствам, определяемым плоскостью P . Это противоречие доказывает основную часть утверждения 5. Остальное в этом утверждении следует из теоремы 3.

Пусть одной из связных компонент общей части кривой K и плоскости P является дуга X_1X_3 , ни один из концов которой не совпадает с концом кривой K , и пусть общей части принадлежит еще некоторая точка $X_4 \in X_1X_3$. Точка X_4 либо предшествует X_1 , либо следует за X_3 . Для определенности будем считать, что X_4 следует за X_3 .

Среди точек кривой K , предшествующих X_1 , имеются точки, не лежащие на плоскости P . Обозначим одну из них через M . Аналогично среди точек дуги X_3X_4 имеются точки, не принадлежащие P . Одну из них обозначим через N . Кроме того, на дуге X_1X_3 возьмем точку X_2 , не лежащую на прямых X_1X_3 и X_1X_4 . Тогда тройки точек X_1, X_2, X_4 и X_1, X_2, X_3 определяют одну и ту же плоскость P .

Точки M и N разделяются тремя точками тройки X_1, X_2, X_3 , и потому должны лежать по разные стороны от плоскости P . Кроме того, точки M и N разделяются двумя точками X_1 и X_2 тройки X_1, X_2, X_4 и, следовательно, должны лежать по одну сто-

рону от плоскости P (лемма 1). Это противоречие доказывает основную часть утверждения 6 теоремы 4.

То, что ветви кривой K , примыкающие к дуге X_1X_3 , лежат по разные стороны от плоскости этой дуги, очевидно из леммы 1, ибо любая из точек, предшествующих X_1 , и любая из точек, следующих за X_3 , разделены тремя точками X_1, X_2, X_3 , где X_2 — точка дуги X_1X_3 , не лежащая на прямой X_1X_3 . Доказательство утверждения 6 закончено.

Пусть конец X_1 дуги X_1X_3 совпадает с одним из концов кривой K . Допустим, что кривая K с плоскостью P имеет общими кроме дуги X_1X_3 еще одну точку X_4 такую, что на кривой K есть точки, следующие за X_4 , не принадлежащие P . Одну из таких точек обозначим через N . Через M обозначим одну из точек дуги X_3X_4 , не принадлежащих плоскости P , наконец, через X_2 — точку дуги X_1X_3 , не лежащую на прямых X_1X_3 и X_1X_4 . Тройки точек X_1, X_2, X_3 и X_1, X_2, X_4 определяют одну плоскость P .

Точки M и N следуют после точки X_3 , тем самым не разделены точками X_1, X_2, X_3 и по лемме 1 должны лежать по одну сторону от плоскости P , но точки M и N разделены одной точкой X_4 тройки X_1, X_2, X_4 и по той же лемме 1 должны лежать по разные стороны от той же плоскости.

Полученное противоречие опровергает допущение того, что на кривой K среди следующих за X_4 точек имеются не принадлежащие P . Поэтому либо точка X_4 является вторым концом кривой K , либо все последующие за X_4 точки кривой K , включая и ее конец, принадлежат плоскости P .

То, что в рассматриваемом случае плоскости P может принадлежать, кроме дуги X_1X_3 , второй конец кривой K и даже примыкающий к этому концу прямолинейный отрезок или некоторая дуга кривой K , не противоречит нашему доказательству и подтверждается простейшими примерами монотонных кривых. Тем самым доказательство теоремы 4 закончено.

§ 5. Касательные к монотонной кривой

1°. Теорема 5. *В каждой точке M монотонной кривой K существует правая касательная $t_r(M)$ и левая касательная $t_l(M)$.*

Доказательство. Покажем, что предел секущих MM_1 , когда M_1 стремится к M по K , оставаясь правее M , существует.

Построим выпуклый цилиндр $C(K)$ кривой K , и возьмем на K две точки L и M таких, что ее дуга $LN \supset M$ будет монотонной и прямая LN не параллельна образующей AB цилиндра $C(K)$, затем построим выпуклый цилиндр $C(LN)$ дуги LN . Цилиндры $C(K)$ и $C(LN)$ будут пересекаться по дуге LN . Сечение $C(K)$ любой плоскостью не параллельной его образующей будет выпуклой кривой K' .

Всякая выпуклая кривая в каждой точке имеет правую и левую касательные [1 с. 280—281].

Обозначим через $P_r(M)$ ту опорную плоскость к цилиндру $C(K)$ в точке M , которая проходит через правую касательную какого-либо сечения K' цилиндра $C(K)$ плоскостью, проходящей через M не параллельно образующей $C(K)$. Через $P'_r(M)$ обозначим опорную плоскость к цилиндру $C(LN)$ в точке M , построенную аналогично предыдущей.

Теперь покажем, что прямая $t_r = P_r(M) \cap P'_r(M)$ является правой касательной кривой K в точке M .

Возьмем на дуге MN точку M_1 , близкую к M , и спроектируем дугу MM_1 на плоскости $P_r(M)$ и $P'_r(M)$ в направлении образующих LN и AB цилиндров $C(LN)$ и $C(K)$.

Из предыдущего легко видеть, что проекциями будут выпуклые дуги MM'' и MM''' , для которых прямая $t_r = MM'$ будет правой касательной в точке M , т. е. при стремлении M'' и M''' к M по дугам MM'' и MM''' секущие MM'' и MM''' имеют пределы, совпадающие с прямой t_r и, следовательно, предел секущей MM_1 , проекциями которой являются секущие MM'' и MM''' , при неограниченном стремлении M_1 по кривой K к M также существует и он совпадает с t_r .

Этим закончено доказательство теоремы для правой касательной, для левой касательной все рассуждения аналогичны.

2°. Заметим, что все секущие MM_2 для точек M_2 , принадлежащих дуге MM_1 , будут лежать внутри или на границе четырехгранного угла с вершиной в M и ребрами MM_1 , MM' , MM'' , MM''' , когда точки M , M_1 , M' , M'' , M''' взяты в соответствии с проведенным только что построением.

Из доказательства теоремы 5 легко видно следующее.

Правые (левые) опорные плоскости в точке M к выпуклым цилиндрам каждой монотонной дуги кривой K , содержащей M , пересекаются по одной прямой $t_r(M)$ [соответственно по $t_l(M)$].

Утверждения теоремы 5 известны [2], но приведенное здесь доказательство исходит из других предпосылок и будет использовано в дальнейшем. Отметим еще один известный факт [2]. Множество угловых точек на монотонной кривой не более чем счетно.

В этом легко убедиться, разбив кривую K с концами A и B на две дуги AC и CB . При этом точку C берем так, чтобы она не лежала на прямой AB . Затем строим выпуклые цилиндры кривых K , AC и CB . Цилиндры $C(K)$ и $C(AB)$ пересекаются по кривой AC , а цилиндры $C(K)$ и $C(CB)$ пересекаются по кривой CB .

Цилиндры $C(K)$ и $C(AC)$ соответственно $C(K)$ и $C(CB)$ имеют плоские выпуклые направляющие. А плоские выпуклые кривые имеют не более чем счетные числа угловых точек. Угловых точек на дуге не более чем их на двух ее не параллельных плоских проекциях, и, следовательно, не более чем счетно.

Также доказывается и то, что угловых точек на дуге CB , а следовательно, и на всей кривой K не более чем счетно. Точно также доказывается, что *монотонная кривая спрямляема*.

3°. Введем орты $t_r(M)$ и $t_l(M)$ соответственно правой и левой касательной $t_r(M), t_l(M)$ в точке M кривой K , направленные в сторону возрастания параметра, и назовем их *правым и левым касательными ортами*. Так как кривая K не может иметь точек возврата (лемма 6), угол φ между этими ортами всегда удовлетворяет неравенствам $0 \leq \varphi < \pi$. Этот угол назовем *углом поворота касательной* в точке M ; в обыкновенной точке кривой угол $\varphi = 0$.

Определение. *Касательными ортами* в точке M к монотонной кривой K будем называть левый и правый касательные орты $t_r(M)$, $t_l(M)$ и каждый орт $t_m(M)$, лежащий внутри плоского выпуклого угла, образованного ортами $t_r(M)$ и $t_l(M)$. *Касательными прямыми* к монотонной кривой в точке M будем называть все прямые, проходящие через касательные орты этой точки, и обозначать соответственно $t_r(M)$, $t_l(M)$, $t_m(M)$. В тех случаях, когда либо точка обыкновенная и касательный вектор единственен (теорема 5), либо для нас безразлично, какой из касательных ортов в точке M рассматривается, будем употреблять обозначение $t(M)$ для орта и $t(M)$ для соответствующей касательной.

4°. **Замечание 1.** Каждая касательная прямая $t(M)$ к монотонной кривой K обладает теми же свойствами, что и прямая, проходящая через две достаточно близкие точки кривой K . Например, общая часть K и $t(M)$, если она не содержит концов A и B кривой K , состоит либо из точки касания M , либо из прямолинейного отрезка кривой K , которому принадлежит точка M .

Справедливость утверждения, высказанного в замечании 1, для $t_l(M)$ и $t_r(M)$ легко видеть из того, что 1) t есть предел секущих MM_1 при $M_1 \rightarrow M$, когда $M \in K$; 2) общая часть t и K замкнута и 3) из утверждений теоремы 3. Для касательных $t_m(M)$ это тем более очевидно.

Замечание 2. Общая часть монотонной кривой K и плоскости P , проходящей через касательную $t(M)$ и не содержащей концов кривой K , кроме прямолинейного отрезка, содержащего M , может содержать еще лишь одну изолированную точку.

В этом легко убедиться, допустив противное и взяв точку M_1 на K , близкую к M , но не лежащую на P . Тогда плоскость P' , проходящая через $t(M)$ и точку M_1 , в силу непрерывности и замкнутости рассматриваемых общих компонент K и P должна будет иметь вид, противоречащий теореме 4.

5°. **Теорема 6.** *Монотонная кривая K в точке M справа (слева) имеет касательную в сильном смысле, т. е. существует предел секущих M_1M_2 , когда M_1 и M_2 стремятся к M по K справа (слева). При этом ее направление совпадает с t_r (соотв. с t_l). Если же точки M_1 и M_2 брать по разные стороны от M , то каждое*

предельное положение секущих $M_1 M_2$ совпадает с одной из касательных t_m , t_r , t_l .

Доказательство. Для K и ее монотонной части LN , содержащей M , берем выпуклые цилиндры $C(K)$ и $C(LN)$. Затем пересекаем их двумя различными плоскостями P'_r и P''_r , проходящими через правую касательную t_r к K в M . Кривые пересечения указанных плоскостей и цилиндров будут выпуклыми кривыми K' и K'' , правые касательные для которых будут совпадать с t_r .

Теперь возьмем на K две точки M_1 и M_2 и устремим их по K к M , тогда секущая $M_1 M_2$ будет проектироваться на плоскости P'_r и P''_r в секущие $M'_1 M'_2$ и $M''_1 M''_2$ к выпуклым кривым K' и K'' .

Для выпуклых кривых в любой точке очевидно существование правой (левой) касательной в сильном смысле. Следовательно, секущие $M'_1 M'_2$ и $M''_1 M''_2$ имеют общий предел t_r . Поэтому и секущая $M_1 M_2$ имеет тот же самый предел. Совпадение их направлений также очевидно. Этим закончено доказательство существования правой (левой) касательной в сильном смысле. Также доказывается все и для средних касательных.

6°. Теорема 7. Касательные во всех точках монотонной кривой K не параллельны образующим ее выпуклого цилиндра $C(K)$. Исключение может быть лишь для точек, лежащих на образующей l , соединяющей концы A и B кривой K .

Доказательство. Допустим, что касательная $t(X_2)$ к кривой K в точке X_2 , не принадлежащей образующей l , параллельна l . На кривой K возьмем точку X_1 такую, что плоскость P , проходящая через точки X_1 и X_2 параллельно образующей l , не содержит l . Тогда концы A и B кривой K будут лежать по одну сторону от P .

Рассмотрим сначала тот случай, когда касательная $t(X_2)$ совпадает хоть с одной из $t_l(X_2)$ и $t_r(X_2)$, т. е. является пределом секущих $X_2 X_3$ при стремлении X_3 к X_2 хотя бы с одной стороны по кривой K .

При стремлении точки X_3 по кривой K к точке X_2 , плоскость Q , проходящая через точки X_1 , X_2 , X_3 , будет стремиться к плоскости P или уже совпадает с ней. Поэтому с некоторого момента точки A и B будут лежать по одну сторону от Q . Это противоречит лемме 1, так как точки A и B разделены тремя точками X_1 , X_2 , X_3 . Тем самым лемма 7 для рассмотренного типа касательных доказана.

Если же касательная $t(X_2)$ будет касательной типа $t_m(M)$, т. е. проходит внутри плоского угла, образованного касательными ортами $t_l(X_2)$ и $t_r(X_2)$, тогда в силу леммы 5 и только что доказанного очевидно, что касательные орты $t_l(X_2)$ и $t_r(X_2)$ направлены так, что образующая цилиндра $C(K)$ не может

проходить внутри угла t, t_i . Следовательно, касательная $t_m(X_2)$ тем более не может быть параллельна образующей цилиндра. Лемма доказана полностью.

§ 6. Соприкасающиеся плоскости

1°. Точку M монотонной кривой K будем называть обыкновенной справа (слева), если всякая сколь угодно малая дуга кривой K , идущая из M вправо (влево), не является прямолинейным отрезком.

Определение 1. Правой (левой) соприкасающейся плоскостью $P_r(M)$ (соответственно $P_l(M)$) к кривой K в точке M обыкновенной справа (слева) будем называть предельное положение плоскостей, проходящих через точку M и две бесконечно близкие к ней точки M_1 и M_2 , которые сходятся к M по кривой K , оставаясь все время справа (слева) от M . Средней соприкасающейся плоскостью $P_m(M)$ к кривой K в точке M , когда $t_l(M) \neq t_r(M)$ будем называть предельное положение плоскостей, проходящих через M , и две бесконечно близкие к ней точки M_1 и M_2 , которые сходятся к M по кривой K с разных сторон от M . Если же $t_l(M) = t_r(M)$, но $P_l(M) \neq P_r(M)$, то за $P_m(M)$ принимаем плоскость $P_l(M)$. (Конечно, за $P_m(M)$ можно принять и $P_r(M)$, и даже любую плоскость, лежащую между ними).

При этом плоскости $P_l(M)$, $P_r(M)$ и $P_m(M)$ будем называть ориентированными в соответствии с ориентацией сходящихся к ним плоскостей, определяемой обходом точек M , M_1 , M_2 в порядке следования их на кривой K .

Это определение плоскостей $P_l(M)$, $P_r(M)$ и $P_m(M)$ в точке M обыкновенной справа (слева) эквивалентно, очевидно, следующему.

Плоскость $P_r(M)$ ($P_l(M)$) есть предельное положение плоскостей, проходящих через правую (левую) касательную к кривой K в точке M и через точку M_1 , когда M_1 стремится справа (слева) к точке M по K . Плоскость $P_m(M)$ есть предельное положение плоскостей, проходящих через правую касательную к K в M и через точку M_1 , когда M_1 стремится слева к M по K . Ориентации плоскостей $P_r(M)$, $P_l(M)$ и $P_m(M)$ определяются направлением вращения $t_r(M)$ (соответственно $t_l(M)$) к $\overline{MM}_1$.

Подчеркнем, что пока плоскости $P_l(M)$, $P_r(M)$ определены во всех точках монотонной кривой, не принадлежащих ее прямолинейным отрезкам, причем на концах этих отрезков со стороны таких отрезков соответствующие плоскости также не определены. Плоскости $P_m(M)$ определены во всех точках кривой K , исключая лишь внутренние точки ее прямолинейных отрезков и тех концов этих отрезков, которые являются концами рассматриваемой кривой. Например, если к точке M подходят два прямолинейных отрезка, то плоскостью $P_m(M)$ в M будет плоскость

этих отрезков, причем ее ориентация будет определена естественно.

2°. Для обоснования существования введенных понятий и их единственности докажем следующую теорему.

Теорема 7. В каждой обыкновенной справа (слева) точке M монотонной кривой K существует правая (левая) соприкасающаяся плоскость и в каждой точке M , не являющейся внутренней точкой какого-либо прямолинейного отрезка кривой K , существует средняя соприкасающаяся плоскость.

Доказательство. Пусть точка M обыкновенная справа. Будем считать, что правая касательная $t_r(M)$ к K в M не проходит через правый конец B кривой K , т. е. что между M и B существует точка $B_1 \in t_r(M)$ (тогда вместо кривой K можно рассматривать ее часть K_1 от левого конца A до B_1 и все условия будут соблюдены).

Через $t_r(M)$ проведем опорную плоскость P к выпуклому цилиндру $C(K)$ кривой K и полуплоскость Q , которая проходит через $t_r(M)$ и точку M_1 , лежащую на K справа от M и $M_1 \in t_r(M)$.

При движении точки M_1 по кривой K к точке M полуплоскость Q вращается вокруг $t_r(M)$. При этом ее вращение ограничено плоскостью P . Поэтому для доказательства существования ее предельного положения достаточно показать, что хотя бы с некоторого момента она вращается в одном направлении или остается постоянной. Допустим противное. Пусть направление вращения Q меняется сколько угодно раз. Возьмем на дуге MM_1 три точки M_2, M_3, M_4 таких, что в них направление вращения Q меняется на противоположное. Тогда либо LM_3MM_4 содержит LM_2MM_3 , либо LM_2MM_3 содержит LM_3MM_4 . Очевидно, найдется такое положение Q_1 полуплоскости Q , что в первом случае она будет пересекать дуги M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4 , а во втором — дуги M_2M_3, M_3M_4, M_4M . Тем самым плоскость, содержащая Q_1 , будет пересекать кривую K не менее чем 4-кратно: в точке M и в трех точках указанных дуг. Это противоречие с теоремой 4 опровергает сделанное допущение.

Итак, при движении M_1 справа к M предельное положение полуплоскостей Q , проходящих через $t_r(M)$ и M , существует, а это значит, что существует предельное положение ориентированных плоскостей, содержащих полуплоскости Q . Тем самым доказано существование плоскостей $P_r(M)$ (и $P_l(M)$). Существование плоскостей $P_m(M)$, когда $t_l(M) \neq t_r(M)$, следует из существования $t_l(M)$ и $t_r(M)$, а в случае $t_l(M) = t_r(M)$ следует из существования $P_l(M)$. Этим доказательство теоремы закончено.

3°. Прямую $n_r(M)$ ($n_l(M)$), проходящую через M перпендикулярно $t_r(M)$ ($t_l(M)$) в плоскости $P_r(M)$ ($P_l(M)$), будем называть главной нормалью к K в M , а орт $n_r(M)$ ($n_l(M)$), направленный по $n_r(M)$ ($n_l(M)$) от $t_r(M)$ ($t_l(M)$) в сторону предельного положения полуплоскости $Q_r(Q_l)$, будем называть ортом правой (левой) главной нормали. Совершенно аналогично прямую $n_m(M)$,

проходящую через M , перпендикулярно $t_l(M)$ в плоскости $P_m(M)$ будем называть средней главной нормалью к K в M , а орт $n_m(M)$ направленный по $n_m(M)$ в сторону $t_r(M)$ (когда $t_l \neq t_r$) и в сторону $n_l(M)$ (если $t_l = t_r$), будем называть ортом средней главной нормали.

Ортом правой (левой или средней) бинормали $b_r(M)$ ($b_l(M)$) или $b_m(M)$ к кривой K в точке M будем называть орт, перпендикулярный $t_r(M)$ и $n_r(M)$ (соответственно $t_l(M)$ и $n_l(M)$ или $t_m(M)$ и $n_m(M)$), образующий с ними правую тройку векторов.

4°. **Лемма 8.** Если в точке M монотонной кривой K две из трех соприкасающихся плоскостей $P_l(M)$, $P_r(M)$, $P_m(M)$ совпадают, то совпадают и их ориентации.

Доказательство. Пусть в некоторой точке M правая и левая соприкасающиеся плоскости $P_r(M)$ и $P_l(M)$ к монотонной кривой совпадают. Возьмем на K монотонную дугу LN такую что она содержит точку M и прямая LN не параллельна плоскости $P_l(M)$ ($P_r(M)$) (для обеспечения последнего достаточно взять хоть одну из точек L и N вне плоскости $P_l(M)$).

Плоскость $P_l(M)$ пересекает выпуклый цилиндр $C(LN)$ дуги LN по некоторой замкнутой выпуклой кривой K' . Касательные орты t_l и t_r к кривой K' в точке M совпадают с касательными ортами t_l и t_r к кривой K в точке M . Также совпадают орты главных нормалей n_l (и n_r) к кривой K' в точке M с n_l (и n_r) к K в M . (Они лежат в одной плоскости P_l и находятся по одну сторону от опорной прямой $t_l(t_r)$ к кривой K и от опорной плоскости, проходящей через $t_l(t_r)$ к цилиндру $C(KL)$, а следовательно, к кривой LN).

Все пары орт t_l , n_l и t_r , n_r в любой точке плоской выпуклой кривой K ориентированы одинаково (или однозначно определяют ориентированную соприкасающуюся плоскость этой кривой). Следовательно, ориентации плоскостей $P_l(M)$ и $P_r(M)$ также одинаковы.

В случае совпадения $P_m(M)$ и $P_l(M)$ (ориентация $P_m(M)$ определяется направлением вращения от орта $t_l(M)$ к орту $t_r(M)$), после проведения построенный практически тех же, что и для случая $P_l(M) = P_r(M)$, приходим к доказательству совпадения ориентаций $P_m(M)$ и $P_l(M)$.

Аналогично доказывается совпадение ориентаций $P_m(M)$ и $P_r(M)$, когда они совпадают в пространстве. Этим доказательство леммы закончено.

5°. Нетрудно доказать, что на монотонной кривой множество точек, где $t_l(M) = t_r(M)$, а $P_l(M) \neq P_r(M)$, не более чем счетно.

Останавливаться на доказательстве этого не будем, так как этот факт следует из ограниченности и монотонности изменения $\tau(K)$ (см. теоремы 17 и 14).

Плоскости $P_l(M)$ и $P_r(M)$ пересекают плоскость $P_m(M)$ соответственно по левой и правой касательным $t_l(M)$ и $t_r(M)$.

В частности, когда $P_m(M)$ совпадает с $P_r(M)$, то $P_r(M)$ пересекает $P_l(M)$ по $t_r(M)$, а при совпадении $P_m(M)$ с $P_r(M)$ плоскости $P_r(M)$ и $P_l(M)$ пересекаются по $t_l(M)$. Наконец, при совпадении $t_l(M)$ с $t_r(M)$ плоскости $P_l(M)$ и $P_r(M)$ проходят через общую касательную и могут не совпадать.

Углом между двумя ориентированными плоскостями называются меньший из двух углов, дополняющих друг друга до 2π , на который надо повернуть одну из плоскостей вокруг их общей прямой до совпадения со второй вместе с их ориентациями. При этом каждую из ориентированных плоскостей, с которыми совпадает вместе с ориентацией непрерывно вращаемая плоскость, будем называть плоскостью, лежащей внутри угла, образованного данными ориентированными плоскостями (или коротко лежащей между данными плоскостями).

Когда две плоскости совпадают, но имеют противоположную ориентацию, можно говорить, что угол между ними равен π . Нас последний случай не будет интересовать, так как рассматриваемые соприкасающиеся плоскости в любой точке монотонной кривой, согласно лемме 8, образуют углы $< \pi$.

6°. Теперь, учитывая последнее замечание и утверждение леммы 6, можно дать определение соприкасающихся плоскостей в любых точках монотонной кривой.

Определение 2. Если точка M монотонной кривой K слева и справа обыкновенная, то соприкасающейся плоскостью $P(M)$ в точке M к кривой K будем называть каждую из ориентированных плоскостей, которая либо совпадает хоть с одной из плоскостей $P_l(M)$, $P_r(M)$ и $P_m(M)$ (левой, правой и средней соприкасающихся плоскостей), либо лежит внутри одного из двух углов, образованных парами ориентированных плоскостей $P_l(M)$, $P_m(M)$ или плоскостей $P_m(M)$, $P_r(M)$.

Если прямолинейный отрезок M_1M_2 кривой K не является частью какого-либо другого прямолинейного отрезка этой кривой и его левый конец M_1 не совпадает с левым концом кривой K , то соприкасающейся плоскостью $P(M)$ в любой его точке M к кривой K будем называть среднюю соприкасающуюся плоскость в точке M_1 , т. е. $P(M) \equiv P_m(M_1)$, $M \in [M_1, M_2]$. При этом в точке M_2 плоскость $P(M)$ принимаем за левую соприкасающуюся плоскость, т. е. $P_l(M_2) = P(M) = P_m(M_1)$.

Если левый конец M_1 прямолинейного отрезка M_1M_2 совпадает с началом кривой K , то в этом и только в этом случае за соприкасающуюся плоскость $P(M)$ к K в любой точке отрезка $[M_1, M_2]$ принимаем среднюю соприкасающуюся плоскость во втором конце этого отрезка, т. е. $P(M) = P_m(M_2)$, $M \in [M_1, M_2]$.

В принятом определении соприкасающаяся плоскость $P(M)$ в точках прямолинейного отрезка кривой K , вообще говоря, зависит от направления обхода K . Но не трудно видеть, что какое-то предпочтение началу отрезка перед его концом сделано лишь для определенности и в предположении того, что кривая K этим

отрезком и окончится. На последующем же это не скажется. Впрочем, этого выделения начала и конца отрезка можно и не делать, приняв за $P(M)$ во всех внутренних точках отрезка $[M_1, M_2]$ любую ориентируемую плоскость, лежащую внутри угла между плоскостями $P_m(M_1)$ и $P_m(M_2)$. При этом выбранную плоскость $P(M)$ следует считать в точке M_1 за $P_r(M_1)$, а в точке M — за $P_l(M_2)$.

В дальнейшем будет доказана теорема 8, из которой в частности, будет следовать, что на монотонной кривой K нет точки M такой, что вблизи нее кривая K расположена по одну сторону от плоскости $P_m(M)$. Иначе это можно сказать так: в любой точке M монотонной кривой орты $n_l(M)$ и $n_r(M)$ должны быть направлены в различные стороны от $P_m(M)$ или по $P_m(M)$.

7°. Прежде (см. п. 3°) было указано, как строятся орты главных нормалей $n_l(M)$, $n_r(M)$ и $n_m(M)$ в плоскостях $P_l(M)$, $P_r(M)$ и $P_m(M)$. Теперь для ориентированных соприкасающихся плоскостей $P(M)$, лежащих внутри углов, образованных плоскостями $P_l(M)$ и $P_m(M)$, а также $P_m(M)$ и $P_r(M)$, за орты n главных нормалей примем на них единичные векторы, перпендикулярные ребрам указанных углов и направленные внутри этих углов.

Наконец, для того чтобы орты n в точке M , где $t_l(M) \neq t_r(M)$, изменялись непрерывно, удобно считать, что средняя соприкасающаяся плоскость $P_m(M)$ непрерывно скользит сама по себе, т. е., когда орт $t_l(M)$ поворачивается вокруг точки M на угол φ до совпадения с ортом $t_r(M)$, и орты главных нормалей также поворачиваются около M на угол φ в плоскости $P_m(M)$ от положения, перпендикулярного к $t_l(M)$, до положения, перпендикулярного к $t_r(M)$.

Теперь ортом бинормали в $b(M)$ к кривой K в точке M будем называть всякий единичный вектор, перпендикулярный к любой из соприкасающихся плоскостей в M к K и образующий с ортами t и n этой плоскости правую тройку ортов. Таким образом, вдоль монотонной кривой тройка ортов t , n , b меняется непрерывно. При этом в точке M , где $t_l \neq t_r$, вообще говоря, орты $t(M)$ заполняют угол φ между ортами $t_l(M)$ и $t_r(M)$; орты $b(M)$ заполняют два плоских угла θ_1 и θ_2 , образованных парами ортов $b_l(M)$, $b_m(M)$ и $b_m(M)$, $b_r(M)$.

Наконец, орты $n(M)$ заполняют три плоских угла, равных тем же θ_1 , φ , θ_2 , и лежат в плоскостях, ортогональных ортам $t_l(M)$, $b_m(M)$, $t_r(M)$.

Заметим, что на монотонной кривой почти всюду сопровождающие трехгранники t, n, b определяются однозначно, так как неоднозначность может быть только в тех точках, где либо $t_l \neq t_r$, либо $t_l \neq t_r$, но $n_l \neq n_r$, а тех и других точек, как отмечалось в §§ 5, 6, счетное число.

8°. Из теоремы 4 и леммы 1 следует

Лемма 9. Если плоскость P проходит через три не лежащие

на одной прямой точки X_1, X_2, X_3 монотонной кривой K , то ветви кривой K , примыкающие к двум крайним из этих трех точек, лежат по разные стороны от плоскости P . При этом, если какие-либо из точек X_1, X_2, X_3 вместе со всеми точками какой-либо дуги кривой K , содержащей конец кривой K , принадлежат плоскости P , то остальные из X_1, X_2, X_3 принадлежат дуге кривой K , которая также принадлежит P и содержит второй конец кривой K и кроме этих дуг P и K общих точек не имеют.

Теперь докажем следующую теорему о расположении всей монотонной кривой относительно соприкасающихся плоскостей.

Теорема 8. Пусть плоскость P является соприкасающейся плоскостью к монотонной кривой K в некоторой точке M . Если точка M не является одним из концов кривой K и не принадлежит плоской дуге AN , один из концов которой совпадает с одним из концов кривой K , то ветви кривой K от точки M могут идти сначала в плоскости P (когда M принадлежит плоской дуге или прямолинейному отрезку кривой K), а затем идут в разные стороны от плоскости P .

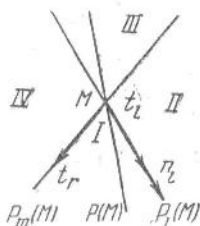
Если же M является одним из концов кривой K или плоскости P вместе с M содержит и все точки кривой K от одного из ее концов A до некоторой точки N и при этом часть AN кривой K содержит M , то плоскости P может еще принадлежать только второй конец кривой K и, может быть, примыкающие к нему прямолинейный отрезок или плоская дуга.

Доказательство. Если соприкасающаяся плоскость P совпадает хоть с одной из плоскостей P_l, P_m, P_r , т. е. ее можно рассматривать, как предел плоскостей, проходящих через точку M и две бесконечно близкие к ней точки M_1 и M_2 , то утверждения теоремы на основании леммы 9 очевидны.

Если теперь будет доказано, что внутри двугранных углов, образованных парами плоскостей из P_l, P_m, P_r , а также углов, вертикальных с указанными, нет точек кривой K , то тем самым будет доказано, что любая из остальных соприкасающихся плоскостей $P(M)$ к K в M (она лежит внутри указанных углов) имеет с кривой K только одну общую точку или прямолинейный отрезок, т. е. и для плоскостей типа $P(M)$ теорема будет доказана. Этим будет закончено доказательство теоремы.

Рассмотрим для определенности вертикальные углы, образованные плоскостями $P_l(M)$ и $P_m(M)$ (для остальных пар плоскостей рассуждения аналогичны). На рисунке эти углы обозначены цифрами I и III, а ребро t_l изображено точкой.

Как уже доказано, ветви K_l и K_r кривой K от точки M идут по разные стороны от плоскостей $P_l(M)$ и $P_m(M)$. Поэтому они лежат либо в углах I и III, либо в углах II и IV и, может быть, на их границах.



Из того, что от плоскости $P_m(M)$ ветви K_l и K идут по разные стороны, следует, что вектор n_r , а с ним и ветвь K_r идут в сторону углов III и IV, не содержащих n_l , кроме того, ветвь K_r идет в сторону t_r , т. е. в сторону четвертей I и IV, следовательно, точки ветви K_r могут быть только в угле IV, а ветвь K_l в угле II или может быть на границах этих углов. Поэтому внутри углов I и III точек кривой нет.

Тем самым доказательство теоремы 8 закончено.

§ 7. Строение конуса и индикатрисы касательных монотонной кривой

1°. При обходе монотонной кривой K , заданной уравнением $X = X(t)$ по всем ее точкам в порядке возрастания параметра от a до b , каждой точке кривой будет соответствовать либо единственный касательный орт t , либо целый плоский угол таких векторов (§ 5, п. 3°). Каждый из ортов t отложим из фиксированной точки O . Так как t меняются непрерывно на каждом гладком куске кривой (гладкий кусок монотонной кривой — это дуга, не содержащая угловых точек), а при переходе через угловые точки орты t заполняют плоские углы, соединяющие орты t_l и t_r на концах гладких кусков, сходящимся к таким точкам, то при изменении параметра t от a до b векторы t составят непрерывную коническую поверхность, которую будем называть конусом касательных кривой K и обозначать через K_t . При этом концы ортов t опишут кривую на единичной сфере с центром в точке O . Эту кривую будем называть индикатрисой касательных кривой K и обозначать через K'_t . Иными словами индикатриса касательных кривой K является пересечением ее конуса касательных с единичной сферой с центром в вершине этого конуса.

Очевидно, что угловым точкам, в которых $t_l \nparallel t_r$, будут соответствовать на K'_t дуги больших кругов, соединяющие концы векторов t_l и t_r .

2°. Теорема 9. Конус касательных (индикатриса касательных) монотонной кривой локально выпуклый.

Доказательство. Пусть t — какая-либо из образующих конуса касательных K_t монотонной кривой K , т. е. t — касательный орт к K в некоторой точке M . Обозначим через $P(M)$ соприкасающуюся плоскость к K в M , проходящую через t если таких несколько, то любую одну из них. Теперь докажем, что в любой из точек M' на K , предшествующих M и достаточно близких к M , правые (левые) касательные орты направлены к $P(M)$ или по $P(M)$, а во всех точках M'' на K , следующих за M и достаточно близких к M , касательные орты направлены от $P(M)$ или по $P(M)$. Тем самым будет доказано то, что все перечисленные орты направлены в одну сторону от плоскости $P(M)$,

попутно будет доказано и то, что все касательные орты в точке M , отличные от t (если таковые имеются), направлены в ту же сторону от $P(M)$ или по $P(M)$. А это значит, что в достаточно малой окрестности $\bar{t}$ все образующие конуса K_t направлены в одну сторону от плоскости $P'(M)$, проходящей через вершину O конуса K_t параллельно $P(M)$, т. е. плоскость $P'(M)$ будет локально опорной плоскостью к K_t по t . Этим будет закончено доказательство теоремы. (Для доказательства же локальной выпуклости сферической индикатрисы касательных достаточно взять пересечение полученной плоскости $P'(M)$ с единичной сферой с центром в O .)

Проведем к K в M правую соприкасающуюся плоскость $P_r(M)$. Ориентированные плоскости $P_r(M)$ и $P(M)$ либо совпадают, либо образуют между собой угол α .

Точка M разбивает K на две ветви K_l и K_r , которые согласно теореме 8 и ее доказательству идут либо по разные стороны от каждой из $P_r(M)$ и $P(M)$, либо могут лежать одна на $P_r(M)$, другая на $P(M)$. В общем же случае ветви K_r и K_l не имеют общих точек с внутренними точками угла между ориентированными плоскостями $P(M)$ и $P_r(M)$ и угла, вертикального с ним. Поэтому, когда M не совпадает ни с одним из концов A и B кривой K , среди предшествующих и следующих за M можно взять по такой точке L и R , что выпуклый цилиндр $C(LR)$ дуги LR кривой K будет пересекать обе плоскости $P(M)$ и $P_r(M)$. Если бы M совпадала с одним из концов A и B , то его приняли бы за соответствующий конец дуги LR .

3°. Пусть плоскости $P_r(M)$ и $P(M)$ совпадают. Эти плоскости пересекают цилиндр $C(LR)$ по некоторой выпуклой кривой K^1 . Обозначим через M какую-либо из точек, лежащих в опорной прямой к K^1 , параллельной t_r . Точки M и M' разбивают кривую K^1 на две дуги. Нас будет интересовать та из них, на которую проектируется точка M_2 , лежащая на дуге LR после точки M и близкая к M . Эту дугу обозначим через $(MM')_r$.

Через касательный орт t_r и точку M_2 проведем плоскость Q . Как уже показывалось при доказательстве теоремы 7, когда точка M_2 неограниченно приближается по кривой MR к точке M , оставаясь справа от M , плоскость Q будет превращаться в одном направлении к своему предельному положению $P_r(M)$ и в некоторый момент может совпасть с $P_r(M)$. Поэтому, если на кривой LR взять точку M_1 между точками M и M_2 , то M_1 будет лежать внутри или на границе угла, образованного плоскостями Q и $P_r(M)$, и, кроме того, M_1 будет ближе, чем M_2 к ребру $t_r(M)$ этого угла, так как они проектируются на выпуклую дугу $(MM')_r$. Следовательно, точка M_1 ближе к плоскости $P_r(M)$, чем следующая после нее точка M_2 . (Если же плоскость Q с некоторого момента совпадет с $P_r(M)$, то точки M_1 и M_2 с этого момента будут лежать на $P_r(M)$, т. е. их расстояние от $P_r(M)$ будут одинаковы).

Поэтому вектор M_1M_2 будет направлен от плоскости $P_r(M)$ или по ней, а это значит, что в достаточно близких к M точках на LR и следующих за M правые и левые касательные орты (а следовательно, в угловых точках и касательные орты, лежащие между ними) направлены от плоскости $P_r(M)$ и от совпадающей с ней $P(M)$.

4°. Несколько менее очевидно, то же самое для случая, когда плоскости $P_r(M)$ и $P(M)$ пересекаются под углом $\alpha \neq 0$, особенно, когда $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Если касательный орт $t_r(M)$ не совпадает с прямой t пересечения $P_r(M)$ и $P(M)$, то плоскость $P(M)$ проходит через касательный орт $t_l(M)$, так как по определению всякая соприкасающаяся плоскость проходит хоть через один из ортов $t_l(M)$ и $t_r(M)$. Орт $t_r(M)$ направлен в ту сторону от плоскости $P(M)$, где лежит ветвь K_r , содержащая все точки кривой K , следующие за точкой M . Тем самым $t_r(M)$ направлен от $P(M)$, следовательно, все касательные орты, лежащие между ортами $t_l(M)$ и $t_r(M)$, также направлены от $P(M)$.

Выпуклые кривые, по которым плоскости $P_r(M)$ и $P(M)$ пересекают выпуклый цилиндр $C(LR)$ обозначим соответственно через K' и K'' . На кривых K' и K'' возьмем соответственно по точке M' и M'' , лежащие на опорных прямых к K' и K'' , параллельных прямой t .

На кривой LR после точки M возьмем достаточно близкие к ней точки M_1 и M_2 так, чтобы M_1 лежала между M и M_2 . В этом случае, как доказано в предыдущем пункте, точка M_1 будет не дальше от плоскости $P_r(M)$, чем точка M_2 . Проведем через M_1 и M_2 образующие цилиндра l_1 и l_2 , которые пересекут кривые K' и K'' соответственно в точках M'_1, M''_1 и M'_2, M''_2 . Тогда отрезки $M_1M'_1$ и $M_2M'_2$ будут лежать вне угла, образованного плоскостями $P_r(M)$ и $P(M)$, и поэтому $M_1M'_1 = M_1M'_1 + M'_1M''_1$ и $M_2M'_2 = M_2M'_2 + M'_2M''_2$. При этом $M_1M'_1 \leq M_2M'_2$, так как M_1 находится от плоскости $P_r(M)$ не дальше, чем M_2 , и $M_1M'_1$ параллелен $M_2M'_2$. Кроме того, $M'_1M''_1 < M'_2M''_2$, так как $M'_2M''_2$ проходит дальше от ребра t рассматриваемого угла, чем $M'_1M''_1$, и они параллельны. Поэтому $M_1M'_1 < M_2M'_2$.

Наконец, из того, что $M_1M'_1 \parallel M_2M'_2$, следует, что M_1 ближе к $P(M)$, чем M_2 . Из последнего, как и в конце предыдущего пункта, следует, что в точках кривой K , следующих за M и достаточно близких к ней, все касательные орты направлены от плоскости $P(M)$.

5°. Если вместо плоскости $P_r(M)$ рассматривать левую соприкасающуюся плоскость $P_l(M)$, то совершенно аналогично доказывается, что во всех точках кривой K , предшествующих M и достаточно близких к M , все касательные орты либо направлены к плоскости $P(M)$, либо параллельны ей.

Этим, как отмечалось прежде, доказательство теоремы 9 закончено.

6°. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями и терминами.

Через α_1 будем обозначать опорную плоскость цилиндра $C(K)$ монотонной кривой K , проходящую через прямую $l = AB$ (A и B концы кривой K) и через касательную к кривой K в точке A . При этом, если таких опорных существует больше одной, то за α_1 принимаем любую одну из них. Аналогично через α_2 обозначим опорную плоскость, проходящую через l и касательную к кривой K в другом ее конце B . При этом, если касательные в точках A и B совпадают с образующей l цилиндра $C(K)$, то за α_2 будем брать плоскость, совпадающую с α_1 .

Через β обозначим опорную плоскость к цилиндру $C(K)$, параллельную опорной плоскости α_1 . Если плоскость β и цилиндр $C(K)$ имеют общими только одну образующую l' , то на ней находится единственная точка кривой K (лемма 5, § 2), которую обозначим через S . Если же β и $C(K)$ имеют более одной общей образующей, то каждая из них имеет лишь одну общую точку с кривой K и за S принимаем одну из них.

Точка S делит кривую K на две части, которые будем называть ветвями кривой K и обозначать через K_1 и K_2 .

Лемма 10. *Конусы касательных ветвей K_1 и K_2 монотонной кривой K не имеют самопересечений.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что среди касательных ортов в точках каждой из ветвей K_1 и K_2 нет равных, исключая, разумеется, случай точек, лежащих на прямолинейных отрезках кривой. Допустим, что на ветви K_1 найдутся две точки M_1 и M_2 такие, что касательные орты t_1 и t_2 к ветви K_1 в этих точках совпадают.

Проведем через точки M_1 и M_2 опорные плоскости γ_1 и γ_2 к цилиндру $C(K)$. Плоскости γ_1 и γ_2 могут пересекаться, быть параллельными и совпадающими.

Рассмотрим отдельно эти три возможности.

Если плоскости γ_1 и γ_2 пересекаются, то линия их пересечения параллельна образующим цилиндра $C(K)$. Вектор t лежит в γ_1 , вектор t_2 лежит в γ_2 и так как $t_1 = t_2$, то t_1 и t_2 параллельны образующим цилиндра. Это противоречит лемме 7, § 5.

Если $\gamma_1 = \gamma_2$, то вся дуга M_1M_2 ветви K_1 содержится в плоскости $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$, а так как плоскость этой дуги является опорной плоскостью к цилиндру $C(K)$, то концы кривой не могут лежать по разные стороны этой плоскости. Следовательно, дуга M_1M_2 содержится в некоторой плоской дуге AD кривой K , конец которой совпадает с концом A кривой K (теорема 8), поэтому плоскости γ_1 и γ_2 совпадают с плоскостью α_1 .

Каждая образующая цилиндра $C(K)$, кроме образующей, проходящей через концы A и B , пересекает K в единственной точке. Поэтому через каждую точку дуги AD за исключением,

быть может, точек ее прямолинейного отрезка, примыкающего к концу A , проходит одна образующая цилиндра $C(K)$ и эти образующие лежат в плоскости α_1 . На плоской же дуге, обладающей этим свойством, могут быть две точки M_1 и M_2 , не принадлежащие одному ее прямолинейному отрезку, в которых вектора t_1 и t_2 параллельны и направлены в одну сторону, только в том случае, когда дуга AD не выпукла. Это противоречит лемме 2. Следовательно, случай $\gamma_1 = \gamma_2$ исключен.

Случай, когда плоскости γ_1 и γ_2 параллельны и различны, возможен лишь, если плоскости γ_1 и γ_2 совпадают с плоскостями α_1 и β , проходящими через концы A и C ветви K_1 . Проведем плоскость P через образующие цилиндра $C(K)$, проходящие через точки M_1 и M_2 . Тогда орт t_1 в точке M_1 направлен либо по образующей l (это возможно, если M_1 принадлежит образующей l), либо направлен в то полупространство, определяемое плоскостью P , которое не содержит точки A . В точке M_2 орт t_2 не может быть параллельным образующей (лемма 7) и, следовательно, направлен в то полупространство, определяемое плоскостью P , которое содержит точку A (ибо кривая в точке M_2 переходит в это пространство), это доказывает, что и в последнем случае равенство $t_1 = t_2$ невозможно. Лемма доказана.

7°. Теорема 10. (Теорема о строении касательных конусов). *Конусы касательных каждой из ветвей K_1 и K_2 монотонной кривой K выпуклы. Они лежат по разные стороны плоскости γ , проходящей через их общую вершину Q параллельно плоскости α_1 (и β); общими у этих конусов является образующая OC' , соответствующая касательному орту t в точке C , лежащему в плоскости β , и, может быть, образующие, соответствующие касательным ортам в точках ветвей K_1 и K_2 , лежащих в общей опорной плоскости $\alpha_1 = \alpha_2$ (α_1, α_2 — опорные плоскости в концах A и B кривой K).*

Доказательство. Рассмотрим сначала тот случай, когда опорные плоскости α_1 и α_2 к цилиндру $C(K)$ в точках A и B совпадают.

Из того, что опорная плоскость β к цилиндру $C(K)$ в точке C параллельна опорной плоскости α в точке A (см. обозначения, принятые в начале п. 6°) и из того, что все остальные опорные плоскости, проходящие через все точки ветви K_1 , пересекают плоскость β , а касательные орты в таких точках направлены к линии пересечения этих плоскостей (см. леммы 5 и 7), следует, что касательные орты во всех точках ветви K_1 направлены в одно полупространство, определяемое плоскостью β . Аналогично, очевидно, что во всех точках второй ветви K_2 касательные орты направлены во второе полупространство, определяемое той же плоскостью β .

Этот результат для образующих конуса касательных ветви K_1 можно пересказать так. Касательные орты в точках A и C параллельны плоскости β , тем самым плоскость β параллельна

плоскости $OA'C'$. В этой плоскости находятся еще образующие, соответствующие касательным в тех точках ветви K_1 , которые находятся в плоскости α_1 , остальные же образующие направлены в одно из полупространств, определяемых плоскостью $OA'C'$. Кроме того, конус касательных этой ветви не имеет самопересечений (лемма 10) и локально выпуклый (теорема 9). Отсюда следует: конус касательных ветви K_1 выпуклый. Аналогично доказывается выпуклость конуса касательных ветви K_2 .

Если опорные плоскости α_1 и α_2 совпадают, то касательные орты $t(A)$ и $t(B)$ в концах A и B кривой K компланарны с касательным ортом $t(C)$ в точке C (последний лежит в плоскости β). Поэтому образующие касательных конусов, соответствующие векторам $t(A)$, $t(B)$ и $t(C)$, лежат в одной плоскости, а сами конусы K_{1t} и K_{2t} лежат по разные стороны от этой плоскости. При этом, если дуги кривой K , примыкающие к концам A и B , лежат в той же плоскости, то они могут иметь одинаково направленные касательные орты и, следовательно, соответствующие образующие конусов касательных ветвей K_1 и K_2 будут совпадать.

Если опорные плоскости α_1 и α_2 различны, т. е. пересекаются вдоль образующей l цилиндра $C(K)$ под углом $\varphi \neq 0$, то рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к тем же результатам. Очевидная разница будет лишь в том, что касательные конусы ветвей K_1 и K_2 будут иметь лишь одну общую образующую OC' , соответствующую касательному орту кривой K в точке C . Эти конусы будут разделены не только плоскостью γ , но даже двугранным углом φ , образованным плоскостями, проходящими через OC' параллельно векторам $t(A)$ и $t(B)$. Что и требовалось доказать.

8° Теорема 11. *Касательные орты во всех точках монотонной кривой направлены в одно полупространство, определяемое соприкасающейся плоскостью в точке C .*

Доказательство. Действительно, касательные орты в точках, неограниченно приближающихся к точке C , по ветвям K_1 и K_2 направлены в одно из полупространств, определяемых соприкасающейся плоскостью P в точке C , и так как для каждой ветви K_1 и K_2 конусы касательных выпуклы и касаются этой плоскости с одной и той же стороны, то они оба целиком лежат в одном полупространстве. Тем самым плоскость P , проходящая через вершину конуса касательных K_t кривой K , параллельно соприкасающейся плоскости в точке C , будет локальной опорной плоскостью к этому конусу, т. е. конусы ветвей K_1 и K_2 вблизи их общей образующей OC' расположены по одну сторону от плоскости P . Если же учесть, что эти оба конуса выпуклы и разделены плоскостью γ , параллельной плоскости β , проходящей через вершину O и их общую образующую OC , то будет очевидно, что конусы обеих ветвей лежат в одном полупространстве, определяемом плоскостью $P(C)$. Теорема доказана.

9°. Все теоремы и леммы, доказанные в этом параграфе, для конусов касательных монотонной кривой K и ее ветвей K_1 и K_2 можно перефразировать для индикатрис касательных кривой K и ее ветвей K_1 и K_2 . Справедливость их будет верна, так как индикатрисы касательных будут являться пересечением единичной сферы с соответствующими конусами касательных, вершины которых совпадают с центром этой сферы. При этом выпуклость кривой на сфере понимается в смысле внутренней метрики сферы.

Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 10'. *Индикатрисы касательных каждой из ветвей K_1 и K_2 монотонной кривой выпуклы.*

§ 8. Оценка интегральной кривизны монотонной кривой

Теорема 12. *Интегральная кривая $\kappa(K)$ всякой монотонной кривой K меньше 4π и может быть сколь угодно близка к 4π .*

Доказательство. Интегральная кривизна всякой кривой равна длине ее индикатрисы касательных, т. е. равна повороту касательной при обходе кривой K от одного ее конца до другого. В силу теоремы 10 индикатриса K_t кривой K состоит из двух выпуклых дуг без самопересечений. Длина каждой из таких дуг меньше 2π . Значит $\kappa(K) < 4\pi$. Что эта оценка точна можно показать, вытягивая кривую вдоль образующих цилиндра.

§ 9. Конус и индикатриса бинормалей монотонной кривой и их строение

1°. Конус и индикатрису бинормалей кривой будем строить подобно тому, как их строили для касательных (см. начало § 7).

Множество всех ортов бинормалей $b(t)$ кривой K отложим из фиксированной точки O . В силу принятых в § 6 условий относительно непрерывного изменения трехвекторника (t, n, b) ясно, что орты $b(t)$ образуют некоторый конус, который будем называть конусом бинормалей кривой K и обозначать K_b . При этом концы ортов бинормалей $b(t)$ заполняют на единичной сфере с центром в O кривую, которую будем называть сферической индикатрисой бинормалей кривой и обозначать K_b' .

Теорема 13. *Конусы касательных и бинормалей кривой K ортогонально сопряжены.*

Доказательство. Для обыкновенных точек кривой K имеет место формула Френе $\dot{t} = \kappa n$, тем самым главная нормаль кривой в каждой регулярной точке кривой K направлена по касательной к индикатрисе касательных K_t' . Поэтому плоскость, проходящая через образующую $t(s)$ конуса касательных и через касательную $\dot{t}$ к индикатрисе касательных, будет параллельна

соприкасающейся плоскости в соответствующей точке кривой K . Следовательно, каждая образующая конуса бинормалей направлена по нормали к конусу касательных вдоль тех ее образующих, у которых эта нормаль определена однозначно. Нами не исключены из рассмотрения кривые, имеющие особенности. Но из определений §§ 5, 6 видно, что трехвекторник t, n, b в особых точках изменяется непрерывно и при том так, что всегда $t \parallel n$. Поэтому предыдущие рассуждения верны и для «особых» образующих конуса K_t . Заметим лишь, что конус касательных K_t и конус бинормалей K_b кривой могут не быть гладкими, т. е. некоторые из их образующих будут ребрами этих конусов. Итак, доказано, что все образующие конуса бинормалей будут перпендикулярны к локально опорным плоскостям конуса касательных кривой K .

Аналогично из проведенных построений и формулы Френе $b = \tau n$ легко видеть, что для регулярных точек кривой образующие конуса касательных направлены по нормали к конусу бинормалей, а если учесть определения, принятые в §§ 5 и 6, относительно построения касательных и соприкасающихся плоскостей в точках кривой, где нарушается их регулярность или однозначность, то и для таких точек ортогональность касательных к конусу бинормалей также очевидна. Теорема доказана.

2°. Из теорем 9 и 13 и их доказательств легко убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 14. *Монотонная кривая во всех точках имеет кручение либо неотрицательное, либо неположительное.*

Действительно, при обходе кривой K соприкасающаяся к ней плоскость вращается параллельно локальным опорным плоскостям к конусу K_t касательных кривой K . Так как конус K_t локально выпуклый (теорема 9), локально опорная плоскость при обходе конуса K_t вращается в одну сторону. Поэтому и соприкасающаяся плоскость при обходе кривой K вращается в одну сторону.

3°. Если кручение кривой K во всех точках неположительно, то бинормали направлены в сторону выпуклости конуса касательных во всех точках. Если же кручение кривой K не отрицательно, то бинормали направлены в сторону вогнутости конуса касательных. В последнем случае для единообразия изложения дальнейшего вместо вектора $b(t)$ из точки O будем откладывать противоположный ему вектор $-b(t)$. Тогда векторы $-b(t)$ образуют конус, симметричный относительно точки O конусу K_b , а концы вектора $-b(t)$ зачертят кривую, также симметричную сферическому изображению K_b . Так полученные конус и кривую будем также называть конусом бинормалей и индикатрисой бинормалей и будем обозначать также через K_b и K'_b . При этом очевидно, что никакие свойства их не изменятся, но направлены они будут в сторону выпуклости кону-

са касательных. Результаты же, полученные в дальнейшем, будут верны как относительно вновь полученных, так и относительно исходных фигур.

4°. **Теорема 15.** *Конусы бинормалей и индикатрисы бинормалей каждой из ветвей K_1 и K_2 монотонной кривой K выпуклы. Конус бинормалей и индикатриса бинормалей всей кривой K локально выпуклы.*

Доказательство. Здесь будем пользоваться обозначениями, введенными в § 7, п. 6°. Докажем сначала выпуклость индикатрисы бинормалей ветви K_1 . По теореме 10 конус касательных K_{1t} ветви K_1 выпуклый. Так как его образующие, соответствующие концам A и C ветви K_1 , не совпадают, то дополним конус K_{1t} плоским сектором единичного круга, ограниченного радиусами, параллельными касательным ортам в точках A и C ветви K_1 . Очевидно, в результате получим новый выпуклый конус $\bar{K}_{1t}$, вершина которого O имеет окрестность, гомеоморфную кругу. Конус $\bar{K}_{1t}$ будем называть дополненным. Сферическое изображение вершины выпуклого конуса $\bar{K}_{1t}$ выпукло [1], а следовательно, его граница, частью которой является индикатриса бинормалей, также выпукла. Тем самым доказана и выпуклость конуса бинормалей ветви K_1 .

Утверждения теоремы относительно ветви K_2 доказываются аналогично. Осталось доказать локальную выпуклость индикатрисы и конуса бинормалей лишь для точки C , делящей K на две ветви K_1 и K_2 . Через точку C проходит однозначно определенная опорная плоскость β к цилиндру $C(K)$ кривой K , а потому рассмотрение следует вести лишь относительно той образующей конуса касательных, которая лежит в этой опорной плоскости (остальные подсоединены к ветвям K_1 и K_2). Эту образующую обозначим через $t(C)$. Возьмем около образующей $t(C)$ конуса касательных окрестность, в которой конус касательной выпуклый (см. теорему 9). Тогда рассуждения, подобные только что проведенным для конуса касательных ветви K_1 , показывают, что конус и индикатриса бинормалей локально выпуклы и в точке C . Теорема доказана.

5°. **Теорема 16.** *Интегральное кручение (монотонной) кривой K равно повороту индикатрисы касательных, а интегральная кривизна кривой K равна повороту индикатрисы бинормалей.*

Доказательство. На основании теоремы 13 известно, что конусы касательных K_t и бинормалей K_b ортогонально сопряжены, кроме того, они локально выпуклы, а для ветвей K_1 и K_2 просто выпуклы (теоремы 10 и 15). Поэтому для ветвей K_1 и K_2 индикатрисы K'_t и K'_b являются частями границ сферических изображений вершин дополненных конусов $\bar{K}'_t$ и $\bar{K}'_b$. Длина же границы сферического изображения вершины выпуклого конуса равна повороту той кривой, которую вырезает этот конус на единичной сфере с центром в вершине конуса, т. е. равна повороту инди-

катрис касательных (соответственно для бинормалей). Учитывая то, что K'_1 и K'_2 являются частями дополненных замкнутых выпуклых кривых на сфере и то, что точка C общая для них, легко видеть справедливость теоремы 16. (Первая часть этой теоремы указана в [3]).

§ 10. Оценка интегрального кручения монотонной кривой

Теорема 17. *Интегральное кручение монотонной кривой меньше 3π и может быть сколь угодно близко к 3π .*

Доказательство. Интегральное кручение всякой кривой равно длине индикатрисы бинормалей этой кривой.

Для вычисления длины индикатрисы бинормалей монотонной кривой K вычислим отдельно длины индикатрис бинормалей ее ветвей K_1 и K_2 без их общего конца C и то же самое отдельно для точки C .

Рассмотрим дополненные конусы касательных $\bar{K}_{1t}$ и $\bar{K}_{2t}$ ветвей K_1 и K_2 . Обозначим через γ_1 и γ_2 углы этих конусов вдоль их общей образующей OC' , являющейся ребром на них и через γ_3 угол между плоскостями $OC'A'$ и $OC'B'$.

Сферическое изображение вершины выпуклого конуса K_{1t} выпукло и, следовательно, длина его границы $\leq 2\pi$. Сферическая же индикатриса бинормалей ветви K_1 за исключением ее конца C является частью этой границы. Именно из нее надо выбросить сферическое изображение ребра OC' и, может быть, еще сферические изображения ребра OA' (если оно является ребром конуса K_{1t}). Длина сферического изображения ребра OC' конуса K_{1t} равна $\pi - \gamma_1$. Поэтому длина индикатрисы бинормалей ветви K_1 без точки C ($K_1 - C$) будет не больше $2\pi - (\pi - \gamma_1) = \pi + \gamma_1$. Аналогично для ветви K_2 получим $\tau(K_2 - C) \leq \pi + \gamma_2$.

Конусы касательных и бинормалей во всех точках монотонной кривой K локально выпуклы и ортогонально сопряжены. Поэтому длина индикатрисы бинормалей кривой K в точке C будет $\tau(C) = \pi - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$, где $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \leq \pi$ и $\gamma_3 \geq 0$.

Отсюда длина индикатрисы бинормалей кривой K будет $\tau(K_1 - C) + \tau(K_2 - C) + \tau(C) \leq \pi + \gamma_1 + \pi + \gamma_2 + \pi - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \leq 3\pi$. Если же учесть то, что дополненные конусы касательных для обеих ветвей K_1 и K_2 , одновременно не могут вырождаться в один прямолинейный отрезок, то ясно, что хотя для одного из них длина границы сферического изображения будет строго меньше 2π и, следовательно, в последнем неравенстве получим строгое неравенство, т. е. $\tau(K) < 3\pi$.

Этим доказано основное утверждение теоремы. То, что $\tau(K)$ может быть сколь угодно близко к 3π не трудно видеть из примера вытянутой винтовой линии, концы которой загнуты к образующей цилиндра. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М., 1948. 387 с.
2. Haupt O., Künnet H. — «Geometrische Ordnungen.» Springer — Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967. 429 с.
3. Александров А. Д. — УМН, 1947, 2—3(19), с. 182—184.
4. Александров А. Д., Залгаллер В. А. — «Тр. матем. ин-та АН СССР» 1961, № 63, с. 1—262.

Поступила 26 мая 1972 г.

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
Украинский геометрический сборник, вып. 12			
62	5—7 стр.	C_p относится к 6 и 7 стр. стр. $D_{p,q}$ — к 5 стр. стр.	C_p относится только к 7 стр. стр. $D_{p,q}$ — к 5 и 6 стр. стр.
63	6 св.	Под знаком синуса и косинуса в знаменателе p	$2p$
Украинский геометрический сборник, вып. 13			
173	7 стр.	гарантирует возможность локального изометрического отображения	гарантирует невозможность локального изометрического отображения
178	13 св.	$R_{ij} = R_{i,j}^k$	$R_{ij} = R_{i,kj}^k$
178	16 стр.	V_{n+1}	V_{n-1}

СОДЕРЖАНИЕ

Андреева Н. П. О разложении квазиаффинного преобразования на A -гомотопию и движение	3
Борисенко А. А. О полных поверхностях в пространствах постоянной кривизны	8
Ваксман Л. Л., Лившиц М. С. Открытая геометрия и операторные узлы	16
Горзий Т. А. Однозначная определенность гладких выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства	36
Дубровин А. А. О регулярности выпуклой поверхности в окрестности кратчайшей I	42
Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. О диаметральных плоскостях алгебраической поверхности в пространстве E^n	54
Карпенко В. Л. Инвариант второй дифференциальной окрестности комплекса прямых	59
Милка А. Д. Теорема о гладкой точке кратчайшей	62
Милка А. Д. Оценки для кривизны множества, примыкающего к кратчайшей	70
Проскурина Р. Г. Интерпретации трехмерного псевдоизотропного пространства	80
Рахула М. О. Касательные расслоения и линейная связность	95
Соколов Д. Д. Некоторые свойства псевдоримановых многообразий и их приложения к математическим задачам космологии	104
Стрельцов В. В. О монотонных кривых в трехмерном пространстве	112

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский межведомственный
тематический научный сборник

Выпуск 15

Редактор А. Л. Алиева

Обложка художника А. И. Удовенко

Технический редактор Г. П. Александрова

Корректор Т. А. Жигальцова

Сдано в набор 17/IX 1973 г. Подписано в печать 28.V.1974 г. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 3. Усл. печ. л. 9. Уч.-изд. л. 8,8.

Тираж 650. Заказ 3-2019, БЦ 50128. Цена 88 коп.

Издательство издательского объединения «Вища школа»
при Харьковском государственном университете
310003, Харьков, 3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики «Коммунист» в городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков, 3, Университетская. 16.
Зак. 4228.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

О разложении квазиаффинного преобразования на k -гомологию и движение. Андреева Н. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 3—8.

Получены условия, при которых квазиаффинное преобразование n -мерного квазиэллиптического пространства может быть представлено в виде произведения k -гомологии и движения. Эти условия сформулированы как свойства матрицы этого преобразования, затем найден их геометрический смысл.

Библ. 2.

УДК 513

О полных поверхностях в пространствах постоянной кривизны. Борисенко А. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 8—15.

Изучаются l -мерные поверхности неположительной кривизны в E^{l+p} и S^{l+p} . Дается оценка ранга точки поверхности $r(X)$ и индекса точки $\gamma(X)$ в зависимости от p . Находятся условия, когда полная l -мерная поверхность в S^{l+p} будет большой сферой.

Библ. 10.

УДК 513

Открытая геометрия и операторные узлы. Ваксман Л. Л., Лившиц М. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 16—35.

Изучается дифференцируемое многообразие, наделенное одновременно структурой риманова пространства и структурой пространства аффинной связанности. Устанавливается связь указанной пары геометрий с теорией несамосопряженных операторов и открытых физических систем. Найден вид операторного узла для тензора кривизны.

Библ. 8. Ил. 2.

УДК 513

Однозначная определенность гладких выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства. Горзий Т. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 36—42.

Доказывается однозначная определенность гладких выпуклых изометрических гиперповерхностей n -мерного эллиптического пространства.

Библ. 4.

УДК 513

О регулярности выпуклой поверхности в окрестности кратчайшей. Дубровин А. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 42—54.

Доказывается, что кривизна множества в узкой полукрестности кратчайшей, удаленного достаточно далеко от концов кратчайшей, имеет порядок ширины этой полукрестности при стягивании ее к кратчайшей. Полученная оценка используется при исследовании регулярности точек открытой кратчайшей на выпуклой поверхности. Установлено, что внутренняя точка кратчайшей γ на выпуклой поверхности гладкая, если она гладкая на кривой γ , не являющейся отрезком прямой в окрестности этой точки.

Библ. 7.

УДК 513

О диаметральных плоскостях алгебраической поверхности в пространстве E^m . Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 54—59.

Изучается структура множества диаметральных гиперплоскостей алгебраической гиперповерхности в евклидовом пространстве.

Библ. 5.

УДК 513

Инвариант второй дифференциальной окрестности комплекса прямых. Карпенко В. Л. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 59—62.

Дифференциальная окрестность второго порядка комплекса прямых в P_3 содержит шесть параметров. Фиксируя пять из них при помощи канонизации, автор находит конечное выражение для инвариантного шестого параметра.

Библ. 1.

УДК 513

Теорема о гладкой точке кратчайшей. Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 62—70.

Доказывается такая теорема. На выпуклой поверхности в E^3 каждая гладкая точка кратчайшей, не сводящейся в окрестности этой точки к прямолинейному отрезку, есть также гладкая точка поверхности.

Библ. 7.

УДК 513

Оценки для кривизны множества, примыкающего к кратчайшей. Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 70—80.

Устанавливаются некоторые оценки (локальные и в целом) для кривизны множеств на выпуклой поверхности, примыкающих к кратчайшей. Один из результатов следующий: кривизна множества на выпуклой поверхности, стягивающегося к замкнутому отрезку открытой кратчайшей, оценивается величиной, имеющей порядок высоты множества над кратчайшей.

Библ. 3.

УДК 513

Интерпретации трехмерного псевдоизотропного пространства. Проскурина Р. Г. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 80—95.

Даны интерпретации пространства U_3 при помощи U_4 -кватернионов, причем введены левые и правые паратактические сдвиги; на флаговой плоскости,

аналогично интерпретации Штрубеккера пространства I_3 на изотропной плоскости; на паре псевдоевклидовых плоскостей; с помощью дуальных чисел по А. П. Широкову.

Библ. 5. Ил. 2.

УДК 513

Касательные расслоения и линейная связность. Рахула М. О. «Украинский геометрический сб.», вып. 15, 1974, с. 95—104.

Рассматриваются различные определения линейной связности на дифференцируемом многообразии, подробно излагается ее определение по Ш. Эресману. Вводится определение Γ -сечения главного расслоения реперов многообразия касательных векторов данного многообразия. Линейная связность на многообразии определяется как некоторый класс эквивалентности Γ -сечений; доказано, что такое определение равносильно классическому.

Библ. 3.

УДК 513 : 78 : 530.12

Некоторые свойства псевдоримановых многообразий и их приложения к математическим задачам космологии. Соколов Д. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 104—112.

Сформулировано несколько систем постулатов, которым должны удовлетворять модели Вселенной, и доказаны некоторые теоремы о свойствах моделей Вселенной, им удовлетворяющих. В рамках одной из этих систем — усиленной геделевской (SG) — оказывается возможным провести исследование псевдоримановых пространств, ей удовлетворяющих. Даются необходимые и достаточные условия того, что многообразие может быть носителем псевдориманова многообразия из SG . Для моделей Вселенной из SG вводится и исследуется понятие (трехмерного) пространства.

Библ. 19.

УДК 513.733

О монотонных кривых в трехмерном пространстве. Стрельцов В. В. «Украинский геометрический сборник», вып. 15, 1974, с. 112—140.

Кривую K называют монотонной, если симплекс с вершинами в четырех последовательных точках на K не меняет ориентации при их движении по K . Устанавливается строение таких кривых, их принадлежность выпуклым поверхностям, локальная выпуклость индикатрис их касательных и бинормалей и даются оценки их интегральных кривизны и кручения.

Ил. 1. Библ. 4.