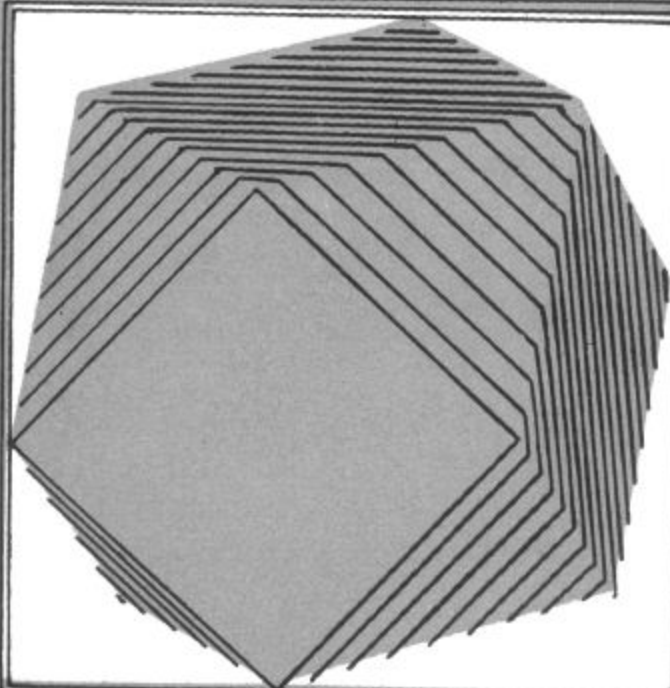


„вища школа“

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск 14



УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный тематический
научный сборник

ВЫПУСК 14

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА».
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ

Х а р ь к о в

1973

Выпуск содержит статьи, посвященные вопросам геометрии в целом (рассматриваются свойства кривых, поверхностей, кривых на поверхностях), теории обобщенных пространств и теории неголономных многообразий, а также линейчатой геометрии, геометрии изотропного и псевдоизотропного пространства.

Редакционная коллегия:

акад. АН УССР проф. *А. В. Погорелов* (ответственный редактор), доц. *В. П. Белоусова*, проф. *Я. П. Бланк* (зам. ответственного редактора), доц. *Д. З. Гордецкий*, проф. *Н. И. Кованцов*, доц. *Е. А. Косачевская*, доц. *А. С. Лейбин* (ответственный секретарь), канд. физ.-матем. наук. *А. Д. Милка*, доц. *Е. П. Сенькин*, проф. *Н. С. Сикюков*, доц. *В. Н. Скрыдлов*, доц. *М. А. Улановский*.

Адрес редакционной коллегии:

310 077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

У $\frac{0223-065}{M226(04)-73}$ 214-73

© Харьковский университет, 1973.

СВОЙСТВА В ЦЕЛОМ КРИВЫХ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, СВЯЗАННЫЕ С КРУЧЕНИЕМ

Ю. А. Аминов

Харьков

Поведение пространственной кривой в зависимости от условий, налагаемых на кривизну и кручение, исследовалось многими авторами. В частности, рассматривался вопрос о неограниченности кривой. В работах [1, 2] установлены достаточные условия неограниченности в пространстве кривой с периодическими кривизной и кручением.

В этой статье рассматривается следующее: в каком случае кривая бесконечной длины с кручением $\kappa \geq \text{const} > 0$ и локально выпуклой проекцией неограничена в пространстве?

Теорема 1. *Если регулярная кривая Γ бесконечной длины имеет кривизну $k > 0$, кручение $\kappa \geq \text{const} > 0$ и расположена на замкнутом строго выпуклом цилиндре, то она неограничена в пространстве.*

В п. 3 строится пример замкнутой кривой с кручением $\kappa \geq \kappa_0 > 0$ и локально выпуклой проекцией. Радиус кривизны проекции ρ удовлетворяет неравенствам $0 < \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$ (κ_0, ρ_0, ρ_1 — постоянные). Однако, если постоянная κ_0 велика, такой пример невозможен. Имеет место

Теорема 2. *Пусть кривая Γ бесконечной длины регулярно проектируется в локально выпуклую кривую γ с кривизной $0 < \frac{1}{\rho} \leq \text{const}$. Пусть у кривой Γ кручение $\kappa \geq \frac{\sup \frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{2\rho}}$. Тогда кривая неограничена в пространстве.*

Заметим, что кривая не обязана подниматься монотонно вверх, даже если ее кручение положительно и она расположена на выпуклом цилиндре. Например, кривая $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = \varphi - 2 \sin \varphi$ имеет бесконечно много локальных максимумов и минимумов компоненты z . В то же время ее кручение $\kappa = 1/(6 + 4 \cos \varphi) \geq \geq 0,1$. Но компонента z будет иметь не более двух экстремумов если $\kappa \rho \geq \frac{1}{2}$, где ρ — радиус кривизны проекции. Значение

безразмерной величины $\kappa\rho = \frac{1}{2}$ в некотором роде критическое для поведения кривой. Если $\kappa\rho \geq \frac{1}{2}$, то на развертке цилиндра кривая Γ будет иметь не более двух точек перегиба, и функция z_{ss} — вторая производная компоненты z по длине дуги Γ — при достаточно больших s не меняет знака. Если же $\inf \kappa\rho \leq \frac{1}{2} - \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число, то функция z_{ss} может быть осциллирующей. Например, кривая на круговом цилиндре $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = \varphi - b \sin \varphi$ имеет кручение $\kappa \geq 1/(2 + 2b + b^2)$, минимум которого при малом b мало отличается от $\frac{1}{2}$. Функция z_{ss} , пропорциональная $z_{\varphi\varphi} = b \cos \varphi$, осциллирует. Для доказательства неограниченности кривой можно несколько снизить значение $\kappa\rho = \frac{1}{2}$, ограничив, однако, кривизну проекции сверху и снизу.

Теорема 3. Пусть кривая Γ с бесконечной длиной и кручением κ имеет локально выпуклую проекцию, радиус кривизны которой ρ удовлетворяет неравенствам $0 < \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$ (ρ_0 , и ρ_1 — постоянные). Пусть

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3e}}} < \inf \kappa\rho.$$

Тогда кривая Γ неограничена в пространстве.

Если ρ_1 близко к ρ_0 , то постоянная слева будет меньше $\frac{1}{2}$.

1. Доказательство теоремы. 1. Прежде всего заметим, что из условий $k \neq 0$, $\kappa \neq 0$ и выпуклости цилиндра следует, что кривая не касается образующей цилиндра. В противном случае в точке касания главная нормаль будет касаться цилиндра и бинормаль пойдет по нормали к цилиндру. Поэтому проекция кривой на плоскость касательной и бинормали в окрестности точки касания будет выпуклой кривой, что противоречит виду проекций кривой с $k \neq 0$ и $\kappa \neq 0$ (см., например [3, стр. 61]). Пусть $r_0(t)$ — плоская кривая, лежащая в плоскости, ортогональной к цилиндру, с длиной дуги t ; e — постоянный единичный вектор, направленный по образующей цилиндра. Кривую Γ представим в виде

$$r(t) = r_0(t) + z(t)e,$$

где $z(t)$ — в силу выше сказанного регулярная функция. Обозначим через $1/\rho$ кривизну $r_0(t)$. По условию теоремы $1/\rho > 0$. Используем выражение для $r(t)$ и формулу для кручения

$$\kappa = \frac{(r' r'' r''')}{|r' r''|^2},$$

в которой возьмем в качестве параметра t . Тогда получим

$$\kappa = \frac{z''' \frac{1}{\rho} - z'' \left(\frac{1}{\rho} \right)' + z' \frac{1}{\rho^3}}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{z'^2}{\rho^3} + z''^2} = \frac{z''' \rho + z'' \rho' + z' \frac{1}{\rho}}{1 + z'^2 + z''^2 \rho^2}, \quad (1)$$

где штрихами обозначены производные по t .

Пусть φ — угол, который составляет касательная к $r_0(t)$ с некоторым фиксированным направлением в плоскости кривой, тогда $dt/d\varphi = \rho$. Так как $1/\rho > 0$, можно принять φ за параметр на кривой r_0 . Обозначим $z'_t = \Psi_\varphi$. Для этой функции составим дифференциальное уравнение. Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_\varphi &= z'' \frac{dt}{d\varphi} = z'' \rho, \\ \Psi_{\varphi\varphi} &= z''' \rho^2 + z'' \rho \rho'. \end{aligned}$$

Используя эти выражения и (1), находим уравнение для Ψ

$$\kappa \rho = \frac{\Psi_{\varphi\varphi} + \Psi}{1 + \Psi^2 + \Psi_\varphi^2}. \quad (2)$$

Покажем, что кривая Γ делает бесконечное число витков по цилиндру.

Лемма 1. Если кривая Γ расположена на строго выпуклом цилиндре с основанием γ не касаясь образующей, то имеет место

$$\left| \int_{\Gamma} \kappa ds \right| < \pi + \int_{\gamma} \frac{dt}{\rho}. \quad (3)$$

Из этой леммы следует, что для любой кривой на выпуклом цилиндре, которая пересекается образующей цилиндра не более одного раза,

$$\left| \int_{\Gamma} \kappa ds \right| < 3\pi.$$

Для доказательства (3) проведем дальнейшие преобразования над выражением (2)

$$\begin{aligned} \kappa \rho &= \frac{\Psi_{\varphi\varphi}}{1 + \Psi^2} \left(1 + \frac{\Psi_\varphi^2}{1 + \Psi^2} \right)^{-1} + \frac{\Psi}{1 + \Psi^2 + \Psi_\varphi^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Psi^2}} \frac{d}{d\varphi} \operatorname{arctg} \frac{\Psi_\varphi}{\sqrt{1 + \Psi^2}} + \frac{\Psi}{1 + \Psi^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что $\rho \sqrt{1 + z'^2} d\varphi = ds$ — элемент длины дуги кривой Γ . Умножим правую и левую часть (4) на $\sqrt{1 + \Psi^2}$ и проинтегрируем по φ . Если P_0 и P_1 — точки кривой Γ и P'_0 и P'_1 — соответствующие точки кривой r_0 , то получим

$$\int_{P_0}^{P_1} \kappa ds - \int_{P'_0}^{P'_1} \frac{\Psi dt}{\sqrt{1 + \Psi^2} \rho} = \operatorname{arctg} \Psi_\varphi / \sqrt{1 + \Psi^2} \Big|_{P'_0}^{P'_1}. \quad (5)$$

Так как касательная Γ не ортогональна плоскости кривой r_0 , то левая часть этого уравнения по модулю меньше π . Отсюда следует неравенство (3). Пусть теперь Γ бесконечной длины и $\kappa \geq \kappa_0 > 0$, где $\kappa_0 = \text{const}$. Тогда длина ее проекции также бесконечна. Действительно, в противном случае, так как $1/\rho > 0$ и цилиндр замкнут, имеем

$$\int \frac{dt}{\rho} < \text{const},$$

где интеграл берется по проекции. Используя (3), получаем

$$\kappa_0 \int_{\Gamma} ds < \pi + \text{const},$$

т. е. длина Γ также была бы ограничена. Итак, кривая Γ проектируется в бесконечное число витков r_0 .

Замечание. Если кривая Γ замкнута, а кривая r_0 локально выпукла с индексом m , то из (4) следует

$$\left| \int_{\Gamma} \kappa ds \right| < 2\pi m.$$

Далее используем уравнение (2), записав его в виде

$$\Psi_{\varphi\varphi} + \Psi = \rho Q(\varphi), \quad Q(\varphi) = \kappa(1 + \Psi^2 + \Psi_{\varphi}^2). \quad (6)$$

Из теории дифференциальных уравнений следует, что Ψ можно представить так:

$$\Psi(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \sin(\varphi_0 - \varphi) Q(\varphi) \rho d\varphi + A \cos \varphi_0 + B \sin \varphi_0,$$

где A и B — произвольные постоянные. Начало координат поместим в точку кривой r_0 . Координаты радиус-вектора $r_0 = \{x, y\}$ можно записать в виде

$$x(t) = \int_0^t \cos \varphi(\tau) d\tau, \quad y(t) = \int_0^t \sin \varphi(\tau) d\tau,$$

где τ — другое обозначение длины дуги r_0 . Пусть l — длина всей кривой r_0 . Положим $\varphi_0 = \varphi(t)$, $\varphi = \varphi(\tau)$ и $Q(\varphi(\tau)) = \tilde{Q}(\tau)$. Заметим, что $\rho d\varphi = d\tau$. Так как кривая r_0 замкнута, приращение координаты z кривой Γ после однократного обхода кривой r_0 будет таким:

$$\begin{aligned} \Delta z &= \int_0^l \Psi(\varphi(t)) dt = \int_0^l \tilde{Q}(\tau) \left[\int_{\tau}^t \sin(\varphi(t) - \varphi(\tau)) dt \right] d\tau = \\ &= \int_0^l \tilde{Q}(\tau) (y'(\tau)x(\tau) - x'(\tau)y(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Если α — угол, составляемый радиус-вектором r_0 с осью x , то $xdy - ydx = r_0^2 d\alpha$. Из условия выпуклости цилиндра следует $\frac{d\alpha}{dt} > 0$. Можно окончательно записать

$$\Delta z = \int_0^l \tilde{Q}(\tau) r_0^2 \frac{d\alpha}{d\tau} d\tau. \quad (7)$$

Обозначим через S площадь области на плоскости, ограниченной кривой r_0 :

$$S = \frac{1}{2} \int r_0^2 d\alpha.$$

Из (7) находим для приращения координаты z после однократного обхода $\Delta z > 2\kappa_0 S$. Следовательно, если число обходов кривой r_0 стремится к бесконечности, то $z \rightarrow \infty$ и кривая Γ неограничена в пространстве.

2. Перейдем к доказательству теоремы 2. Покажем, что найдется такое φ_1 , что при $\varphi \geq \varphi_1$ функция Ψ изменяется монотонно. Действительно, если бы существовали две точки $P_0(\varphi_0)$ и $P_1(\varphi_1)$ на кривой Γ , в которых $\Psi_\varphi = 0$, то, применив (5), получим

$$\int_{P_0}^{P_1} \kappa ds = \int_{P'_0}^{P'_1} \frac{\Psi dt}{\rho \sqrt{1 + \Psi^2}} = \int_{P_0}^{P_1} \frac{\Psi ds}{(1 + \Psi^2) \rho}.$$

Так как $\kappa \geq \sup_{\Gamma} \frac{1}{2\rho}$, то на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$ $\Psi \equiv 1$. Поэтому либо на всем луче $[\varphi_0, \infty)$ $\Psi \equiv 1$, либо существует самая правая точка φ_1 из множества тех точек, где $\Psi_\varphi = 0$. Из монотонности Ψ на луче $[\varphi_1, \infty)$ вытекает, что функция Ψ при достаточно больших значениях φ сохраняет знак. Тогда из неравенства

$$\int_{\Gamma} \kappa ds - \int_{\Gamma} \frac{\Psi dt}{\rho \sqrt{1 + \Psi^2}} < \pi,$$

где интегрирование ведется по отрезку знакопостоянства Ψ , следует

$$L \sup_{\Gamma} \frac{1}{2\rho} < \pi + \sup_{\Gamma} \frac{1}{\rho} |\Delta z|. \quad (8)$$

Так как длина отрезка кривой $L \rightarrow \infty$, то $|\Delta z| \rightarrow \infty$ и кривая неограничена.

3. Для доказательства теоремы 3 установим несколько вспомогательных лемм. Обозначим $\inf \kappa \rho = \sigma_0$.

Лемма 2. Функция

$$[1 + \Psi^2 + \Psi_\varphi^2] e^{-2\sigma_0 \Psi}$$

монотонно возрастает на участке $\Psi_\varphi \geq 0$ и монотонно убывает на участке $\Psi_\varphi \leq 0$.

Отсюда следует, что функция Ψ на отрезке $\Psi \leq 0$, в концах которого $\Psi = 0$, не имеет локального максимума. Лемма 2 следует из (2), если правую и левую часть умножить на Ψ_φ и проинтегрировать.

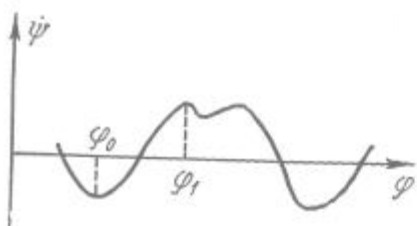
Лемма 3. Для любого значения φ имеет место

$$\Psi(\varphi) + \Psi(\varphi + \pi) \geq 2\sigma_0.$$

Для простоты можем считать, что $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Умножим неравенство

$\Psi_{\varphi\varphi} + \Psi \geq \sigma_0$ на $\cos \varphi$ и проинтегрируем от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Из леммы

вытекает, что за каждым нулем функции Ψ , таким что $\Psi_\varphi < 0$, следует нуль Ψ , в котором $\Psi_\varphi > 0$. Если функция Ψ после некоторого такого нуля остается положительной, то из неравенства (8) получаем неограниченность кривой Γ . Аналогично в случае $\Psi \leq 0$ для всех φ . Поэтому будем считать, что функция Ψ осциллирует (см. рисунок).



Лемма 4. Имеет место априорная оценка

$$\max_{\Psi \leq 0} |\Psi| < \frac{1}{\sqrt{3e\sigma_0}}.$$

Действительно, пусть в точке φ_0 на отрезке $\Psi \leq 0$ функция Ψ принимает наименьшее значение, а в точке φ_1 на последующем отрезке $\Psi \geq 0$ функция имеет первый максимум. Применяя к этим точкам лемму 2, находим

$$[1 + \Psi^2(\varphi_0)] e^{-2\sigma_0\Psi(\varphi_0)} \leq [1 + \Psi^2(\varphi_1)] e^{-2\sigma_0\Psi(\varphi_1)}.$$

Так как $\Psi(\varphi_1) > 0$, то правая часть имеет оценку

$$[1 + \Psi^2(\varphi_1)] e^{-2\sigma_0\Psi(\varphi_1)} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4\sigma_0^2}}{2\sigma_0^2} e^{-1 - \sqrt{1 - 4\sigma_0^2}} \leq \frac{1}{2e\sigma_0^2}.$$

Предположим, что $|\Psi(\varphi_0)| \geq \frac{1}{\sqrt{3e\sigma_0}}$. Тогда получим

$$\left[1 + \frac{1}{3e\sigma_0^2}\right] e^{\frac{2}{\sqrt{3e}}} \leq 1/2e\sigma_0^2,$$

откуда следует $2e^{2/3} \leq 3$, что неверно.

Лемма 5. Если функция Ψ удовлетворяет неравенству

$$\Psi_{\varphi\varphi} + \Psi \geq \sigma_0 \geq 0. \quad (9)$$

$\Psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \Psi(\varphi_0) = 0$, $\Psi_\varphi(\varphi_0) \leq 0$ и $\Psi(\varphi) \geq 0$ для $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \varphi_0\right]$, то $\varphi_0 \geq \frac{\pi}{2}$.

Пусть $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Умножим (9) на $\cos \varphi$:

$$[\cos \varphi \Psi_\varphi + \sin \varphi \Psi]_\varphi \geq \sigma_0 \cos \varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \varphi_0\right].$$

Интегрируя от $-\frac{\pi}{2}$ до φ_0 , находим

$$\cos \varphi_0 \Psi_\varphi(\varphi_0) \geq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \sigma_0 \cos \varphi d\varphi > 0.$$

Но в точке $\varphi_0 \Psi_\varphi \leq 0$. Следовательно, $\varphi_0 \geq \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим теперь отрезок, на котором $\Psi \geq a > 0$. Используем неравенство (9).

Введем функцию $\bar{\Psi} = \Psi - a$. Для нее имеем неравенство

$$\bar{\Psi}_{\varphi\varphi} + \bar{\Psi} \geq 0,$$

если $\sigma_0 \geq a$. Применив лемму 5, получим следующее: угловая длина отрезка, на котором $\Psi \geq \sigma_0$, больше π . Следовательно, для приращения координаты z кривой Γ на отрезке $\Psi \geq 0$ имеем

$$\Delta z_1 = \int_{\Psi \geq 0} z'_i dt = \int \Psi \rho d\varphi \geq \sigma_0 \rho_0 \pi. \quad (10)$$

Оценим теперь величину убывания z на отрезке $\Psi \leq 0$, абсолютное значение которого обозначим через $|\Delta z_2|$.

Лемма 6. Пусть угловая длина отрезка $\Psi \leq 0$ равна l . Тогда

$$|\Delta z_2| \leq \frac{l \rho_1}{\sqrt{3e} \sigma_0}. \quad (11)$$

Имеем

$$|\Delta z_2| = \left| \int_{\Psi \leq 0} \Psi dt \right| \leq \rho_1 l \max_{\Psi \leq 0} |\Psi|.$$

Используя оценку для $|\Psi|$ из леммы 4, получаем (11). Из леммы 3 следует, что если угловая длина отрезка $\Psi \leq 0$ равна l , то на соседнем отрезке $\Psi \geq 0$ будет отрезок длины l , на котором $\Psi \geq 2\sigma_0$. Поэтому имеем вторую оценку для Δz_1

$$\Delta z_1 = \int \Psi \rho d\varphi \geq 2\sigma_0 \rho_0 l. \quad (12)$$

Из (11), (12) вытекает

$$\frac{|\Delta z_2|}{\Delta z_1} \leq \frac{\rho_1}{\rho_0 \sigma_0^2 \sqrt{3e}} =: \theta. \quad (13)$$

По условию теоремы правая часть меньше 1. Для всего приращения z на двух соседних отрезках $\Psi \leq 0$ и $\Psi \geq 0$ в силу (10) и (13) получим

$$\Delta z = \Delta z_1 - |\Delta z_2| \geq (1 - \theta) \Delta z_1 \geq (1 - \theta) \sigma_0 \rho_0 \pi.$$

Так как число таких приращений бесконечно, то кривая неограничена в пространстве в направлении, ортогональном плоскости проектирования.

Дадим теперь пример замкнутой кривой с кручением $\kappa \gg \text{const} > 0$, имеющей локально выпуклую проекцию, радиус кривизны которой ρ удовлетворяет неравенствам $\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{3}{2}$. Положим

$$z'_t = \Psi = 1 - 4 \cos \lambda \varphi, \quad \lambda^2 = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{4},$$

$$\rho = 1 + \frac{1}{2} \cos \lambda \varphi, \quad -\infty < \varphi < \infty,$$

λ — рациональное число.

Легко видеть, что компонента радиус-вектора кривой Γ

$$z = \int_0^\varphi \Psi \rho d\varphi$$

периодическая, если λ — рациональное число. Компоненты

$$x = \int_0^\varphi \cos \varphi \rho d\varphi, \quad y = \int_0^\varphi \sin \varphi \rho d\varphi$$

также периодические, если λ — рациональное число и $\lambda^2 \neq 1$. Поэтому кривая замкнута. С помощью (2) найдем

$$\kappa \rho = \frac{4(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \varphi + 1}{1 + (1 - 4 \cos \lambda \varphi)^2 + 16 \lambda^2 \sin^2 \lambda \varphi}.$$

Так как $\lambda^2 - 1 < \frac{1}{4}$, то $\kappa \rho$ больше некоторого положительного числа. Так как $\rho \leq \frac{3}{2}$, то $\kappa > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакельман И. Я., Вернер А. Л.. Расположение в пространстве кривых с периодическими кривизной и кручением. «Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та», 1967, т. 302, с. 142—156.
2. Волков Ю. А., Невмержидский Н. С. Признаки неограниченности кривых с периодическими кривизной и кручением. «Вестн. Ленингр. ун-та», 1967, № 13. Серия мат., мех., астр., вып. 3. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, с. 29—34.
3. Погорелов А. В.. Дифференциальная геометрия. М., «Наука», 1969. 176 с.

Поступила 5 июня 1972 г.

ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕНОСА В ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Я. П. Бланк, Н. А. Загайный, В. С. Ищенко

Харьков

Изотропным называется неевклидово пространство I_3 с абсолютом, состоящим из плоскости и принадлежащей ей пары комплексно-сопряженных прямых. Наиболее обстоятельно I_3 было исследовано Штрубеккером [1]. За плоскость абсолюта естественно принимается несобственная плоскость $x_4 = 0$ аффинного пространства, а за пару прямых абсолюта — прямые $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_4 = 0$,

Эквивариантные преобразования, сохраняющие абсолют, образуют группу G_6 движений пространства I_3

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi + a_1, \\x'_2 &= x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi + a_2, \\x'_3 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 + a_3.\end{aligned}$$

G содержит две трехчленные подгруппы T_l , T_r клиффордовых переносов

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + a_1, \\x'_2 &= x_2 + a_2, \\x'_3 &= x_3 + a_3 + \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \varepsilon^2 = 1.\end{aligned}$$

Каждый набор значений a_1 , a_2 , a_3 определяет преобразование подгруппы T_l (соответственно T_r). Эти преобразования оставляют неподвижными точки и плоскости, инцидентные прямой $a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0$, $x_4 = 0$, которая служит директрисой двух параболических конгруэнций прямых — правых и левых параллелей Клиффорда. Прямые каждой конгруэнции служат траекториями преобразований подгрупп T_l (T_r) и определяются уравнениями

$$\frac{a}{p_{14}} = \frac{b}{p_{24}} = \frac{c}{p_{34} + \varepsilon p_{12}}. \quad (1)$$

Поверхностью переноса пространства I_3 называется поверхность, образованная левым клиффордовым переносом кривой C_1 вдоль кривой C_2 и соответственно правым клиффордовым переносом кривой C_2 вдоль C_1 . Она допускает параметризацию

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1(u) + b_1(v), \\x_2 &= a_2(u) + b_2(v), \\x_3 &= a_3(u) + b_3(v) + \begin{vmatrix} a_1(u) & b_1(v) \\ a_2(u) & b_2(v) \end{vmatrix}.\end{aligned} \quad (2)$$

С помощью кватернионов она представляется уравнением

$$X = AB,$$

где

$$X = \sum_{i=1}^4 x_i e_i, \quad A = \sum_{i=1}^4 a_i(u) e_i, \quad B = \sum_{i=1}^4 b_i(u) e_i,$$

причем

$$x_4 = a_4 = e_4 = 1,$$

и произведения $e_i e_k$ определяются таблицей

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	e_3	0	e_1
e_2	$-e_3$	0	0	e_2
e_3	0	0	0	e_3
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4

Простейшим инвариантом группы G служит расстояние d между двумя точками $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$:

$$d = \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_1 - x_1)^2},$$

когда эти точки не лежат на прямой, параллельной оси x_3 ;

$$d = |y_3 - x_3|,$$

когда $y_1 = x_1, y_2 = x_2$. Соответственно этому линейный элемент поверхности $x_i = x_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$ имеет вид

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2, \quad \sqrt{EG - F^2} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

Деривационные формулы

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial x_i}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial x_i}{\partial v} + Ln_i,$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial x_i}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial x_i}{\partial v} + Mn_i,$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial x_i}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial x_i}{\partial v} + Nn_i,$$

где

$$n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1.$$

Этих сведений об изотропном пространстве достаточно для понимания дальнейшего содержания статьи. Исчерпывающее изложение вопроса содержится в вышецитированной работе [1] и приведенной в ней литературе.

1. Введем для поверхности в I_3 понятие клиффордовой сопряженности. Пусть τ_1 прямая, касательная к поверхности S в точке x_i .

Опишем около поверхности S линейчатую поверхность F с прямолинейными образующими, клиффордово-параллельными τ_1 . Пусть C линия касания F и S . Прямую τ_2 , касательную к C в точке x_i , назовем клиффордово-сопряженной с τ_1 . Пусть символы d, δ соответствуют перемещению в направлении τ_1, τ_2 . Обозначим p_{ik} плюскерovy координаты прямой τ_1 . Они равны минорам матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из (1) следует

$$\delta \frac{p_{24}}{p_{14}} = 0, \quad \delta \frac{p_{34} + \varepsilon p_{12}}{p_{14}} = 0,$$

следовательно,

$$\delta \frac{dx_2}{dx_1} = 0, \quad \delta \left[\frac{dx_3}{dx_1} - \varepsilon \left(x_1 \frac{dx_2}{dx_1} - x_2 \right) \right] = 0. \quad (3)$$

Пусть уравнение поверхности S

$$x_3 = x_3(x_1, x_2).$$

Уравнение (3₂) принимает вид

$$\delta \left[\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} - \varepsilon \left(x_1 \frac{dx_2}{dx_1} - x_2 \right) \right] = 0,$$

или в силу (3₁)

$$\delta \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} = \varepsilon \left(\delta x_1 \frac{dx_2}{dx_1} - \delta x_2 \right).$$

Условие клиффордовой сопряженности касательных τ_1, τ_2 будет таким

$$\sum_{i, k=1}^2 \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_i \partial x_k} dx_i \delta x_k = \varepsilon (dx_2 \delta x_1 - dx_1 \delta x_2). \quad (4)$$

Если поверхность S задана параметрически, условие клиффордовой сопряженности имеет вид

$$Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = \varepsilon \sqrt{EG - F^2}(dv\delta u - du\delta v). \quad (5)$$

Таким же уравнением определяются клиффордово-сопряженные касательные на поверхностях эллиптического и квазиэллиптического пространства [2, 3].

3. Теорема. *Чтобы сеть кривых на поверхности в I_3 была сетью переноса, необходимо и достаточно, чтобы она была чебышевской и клиффордово-сопряженной.*

Действительно, пусть сеть кривых на поверхности S есть сеть переноса. Отнесем поверхность к этой сети. Имеют место уравнения (2). Отсюда следует

$$E = a_1'^2(u) + a_2'^2(u), \quad G = b_1'^2(v) + b_2'^2(v), \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v G - G_u F}{2(EG - F^2)} = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = 0,$$

т. е. сеть переноса служит чебышевской сетью.
Для координатной сети уравнение (5) принимает вид

$$M = \sqrt{EG - F^2}.$$

Из деривационных формул следует

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v} = M,$$

а из (2) —

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2},$$

и сеть переноса служит клиффордово-сопряженной сетью.
Обратно, пусть координатная сеть поверхности клиффордово-сопряженная, т.е.

$$M = \sqrt{EG - F^2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

и чебышевская, т.е.

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0.$$

Из деривационных уравнений получим

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v} = M.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1(u) + b_1(v), \\ x_2 &= a_2(u) + b_2(v), \\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v} &= \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав третье уравнение, находим

$$x_3 = a_3(u) + b_3(v) + \begin{vmatrix} a_1(u) & b_1(v) \\ a_2(u) & b_2(v) \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

3. Воспользуемся полученным критерием для отыскания в I_3 поверхностей переноса в классе поверхностей вращения.

Уравнения поверхности вращения:

$$x_1 = u \cos v, \quad x_2 = u \sin v, \quad x_3 = q(u). \quad (6)$$

Из (6) следует

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}, \quad \Gamma_{23}^1 = -u, \\ L &= q'', \quad M = 0, \quad N = uq', \quad \sqrt{EG - F^2} = u. \end{aligned}$$

Пусть поверхность (6) несет сеть переноса

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \psi(u, v). \quad (7)$$

Условие клиффордовой сопряженности этой сети

$$q'' + uq'\varphi\psi = u(\varphi - \psi). \quad (8)$$

Чебышевская сеть удовлетворяет уравнениям Сервана—Бианки

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial \alpha \partial \beta} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u^i}{\partial \alpha} \frac{\partial u^j}{\partial \beta} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

где $u^1 = u$, $u^2 = v$, α , β — параметры сети переноса.

Для поверхности (6) эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - u \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= \varphi \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} = \psi \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\psi_u - \varphi_u + \varphi\psi_v - \psi\varphi_v}{\varphi - \psi} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\varphi\psi_u - \psi\varphi_u + \varphi^2\psi_v - \psi^2\varphi_v}{\varphi - \psi} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta}, \end{aligned}$$

поэтому уравнения Сервана — Бианки запишутся так:

$$\begin{aligned} \varphi_u + \psi\varphi_v + \frac{1}{u}(\varphi + \psi) + u\varphi^2\psi &= 0, \\ \psi_u + \varphi\psi_v + \frac{1}{u}(\varphi + \psi) + u\psi^2\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Имеем три уравнения (8), (9) для определения трех функций φ , ψ , q .

4. Сначала рассмотрим случай, когда уравнение (8) неразрешимо относительно φ . Это имеет место при условии

$$q'\psi - 1 = 0. \quad (10)$$

В этом случае

$$q'' + u\psi = 0.$$

Следовательно,

$$q' = \sqrt{c^2 - u^2}, \quad (11)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{c^2 - u^2}}; \quad (12)$$

из (9) находим

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - u^2}}. \quad (13)$$

Из (11) следует

$$q = \frac{c^2}{2} \arcsin \frac{u}{c} + \frac{u}{2} \sqrt{c^2 - u^2}. \quad (14)$$

По (7)

$$dv = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}, \quad \delta v = \frac{\delta u}{\sqrt{c^2 - u^2}},$$

откуда получаем уравнения обоих семейств кривых переноса

$$v + \arcsin \frac{u}{c} = \alpha,$$

$$v - \arcsin \frac{u}{c} = \beta,$$

или

$$v = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad u = c \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Подставляя эти значения в уравнения поверхности (6) и (14), находим представление поверхности как поверхности переноса

$$x = \frac{c}{2} (\sin \beta - \sin \alpha),$$

$$y = \frac{c}{2} (\cos \alpha - \cos \beta),$$

$$z = \frac{c^2}{4} (\beta - \alpha) + \frac{c^2}{4} \sin (\beta - \alpha).$$

5. Пусть $q'\psi - 1 \neq 0$. Из (8) следует

$$\varphi = \frac{u\psi + q''}{u(1 - q'\psi)}.$$

Подставив значение φ и ее производных в (9), получим систему из двух уравнений в частных производных первого порядка на одну функцию ψ

$$u(q'\psi - 1)\psi_u - (u\psi + q'')\psi_v = u^2\psi^3 + (uq'' - q')\psi^2 + 2\psi + \frac{q''}{u}, \quad (15)$$

$$(q'q'' + u)(\psi_u + \psi\psi_v) = -(u^2 + q'^2)\psi^3 + 3(q' - uq'')\psi^2 + (q'q''' - 2q''^2 - 2)\psi - q''.$$

Определитель из коэффициентов при ψ_u , ψ_v этой системы

$$\Delta = (q'q'' + u)(uq'\psi^2 + q'').$$

Если

$$q'q'' + u = 0,$$

то из (15₂) следует

$$q'\psi - 1 = 0,$$

что противоречит нашему исходному допущению.

Если

$$q'' + uq'\psi^2 = 0,$$

то по (9)

$$u(q'\psi - 1)(\varphi - \psi) = 0,$$

и снова приходим к исключенному случаю.

Разрешим систему (15) относительно ψ_u, ψ_v :

$$\Delta\psi_u = \sum_{k=0}^4 a_k(u) \psi^k,$$

$$\Delta\psi_v = \sum_{k=0}^4 b_k(u) \psi^k.$$

Условие интегрируемости этой системы после сокращения на множитель $q'' + uq'\psi^2$, отличный от нуля, имеет вид

$$\sum_{k=0}^4 f_k(u) \psi^k = 0,$$

где

$$f_4 = uq'^2(u^2 + q'^2)q''' + 2u(2u^2 - q'^2)q'q''^2 +$$

$$+ (3u^4 - 7u^2q'^2 + 2q'^4)q'' + 3uq'(q'^2 - u^2);$$

$$f_3 = uq'(3u^2 + 2q'^2 + uq'q'')q''' - 5u^2q'q''^3 + u(q'^2 - 3u^2)q''^2 +$$

$$+ q'(4q'^2 - 3u^2)q'' + 6uq'^2,$$

а выражения для остальных коэффициентов нам не понадобятся.

7. Пусть условие интегрируемости выполняется тождественно относительно ψ . В таком случае поверхность несет ∞^1 сетей переноса. Приравняв нулю два старших коэффициента

$$f_3 = f_4 = 0$$

и исключив из них производную q''' , получим уравнение, левая часть которого допускает разложение на множители и принимает следующий вид:

$$(uq'' - q')(q'q'' + u)^2(3u^2 + q'^2) = 0.$$

Так как случай $q'q'' + u = 0$ рассмотрен в п. 5, остается случай

$$uq'' = q'.$$

Отсюда следует

$$q' = 2cu, \quad q = cu^2$$

(аддитивную постоянную можно опустить).

Внеся значение q в систему (15), получаем вполне интегрируемую систему

$$u\psi_u = -\psi, \quad u\psi_v = -(u^2\psi^2 + 1),$$

из которой находим

$$\psi = \frac{\operatorname{tg}(B_0 - v)}{u}, \quad \varphi = \frac{\operatorname{tg}(B_1 + B_2 - v)}{u},$$

где положено

$$2c = \operatorname{tg} B_1.$$

Из (7) следует для семейств кривых переноса

$$\begin{aligned} u \sin (B_1 + B_2 - v) &= \alpha, \\ u \sin (B_2 - v) &= \beta, \end{aligned}$$

где α, β — параметры сети переноса. В этих параметрах поверхность допускает представление

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos B_2}{\sin B_1} \alpha - \frac{\cos (B_1 + B_2)}{\sin B_1} \beta, \\ y &= \frac{\sin B_2}{\sin B_1} \alpha - \frac{\sin (B_1 + B_2)}{\sin B_1} \beta, \\ z &= \frac{\alpha^2}{\sin 2B_1} + \frac{\beta^2}{\sin 2B_1} - \frac{\alpha\beta}{\sin B_1}. \end{aligned}$$

Здесь

$$-\frac{\alpha\beta}{\sin B_1} = \begin{vmatrix} \frac{\cos B_2}{\sin B_1} \alpha & -\frac{\cos (B_1 + B_2)}{\sin B_1} \beta \\ \frac{\sin B_2}{\sin B_1} \alpha & -\frac{\sin (B_1 + B_2)}{\sin B_1} \beta \end{vmatrix}.$$

Исключив параметры, находим

$$2kz = x^2 + y^2,$$

где

$$k = \operatorname{ctg} B_1.$$

Эта поверхность несет ∞ сетей переноса, зависящих от постоянной B_2 . Ее называют изотропной сферой (см. [1]). Линии переноса имеют равную нулю кривизну, постоянную и одинаковую нормальную кривизну (параболические круги).

7. Если условие интегрируемости не есть тождество относительно ψ , то число сетей переноса конечное (не более четырех). Тогда функция ψ есть корень полинома с коэффициентами, зависящими от одной переменной, и, следовательно, в этом случае

$$\psi_v = 0.$$

В силу (8)

$$\varphi_v = 0.$$

Уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi' + \frac{1}{u} (\varphi + \psi) + u\varphi^2\psi &= 0, \\ \psi' + \frac{1}{u} (\varphi + \psi) + u\psi^2\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эту систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, определяем

$$\varphi(u) = \frac{1 - B^2 u^2}{u \sqrt{A u^2 - B^4 u^4 - 1}}, \quad \psi(u) = \frac{1 + B^2 u^2}{u \sqrt{A u^2 - B^4 u^4 - 1}}.$$

Подстановка этих значений φ , ψ в (8) дает для q уравнение

$$q'' + q' \frac{1 - B^4 u^4}{u(Au^2 - B^4 u^4 - 1)} + \frac{2B^2 u^2}{\sqrt{Au^2 - B^4 u^4 - 1}} = 0.$$

Отсюда следует

$$q = A_1 \arcsin \frac{2B^4 u^2 - A}{\sqrt{A^2 - 4B^4}} + \frac{1}{2B^2} \sqrt{Au^2 - B^4 u^4 + 1}.$$

Проинтегрировав уравнения (7) с полученными для φ , ψ выражениями, находим два семейства линий, образующих сеть переноса:

$$2v + \arcsin \frac{2 - Au^2}{u^2 \sqrt{A^2 - 4B^4}} + \arcsin \frac{2B^4 u^2 - A}{\sqrt{A^2 - 4B^4}} = 2\alpha,$$

$$2v + \arcsin \frac{2 - Au^2}{u^2 \sqrt{A^2 - 4B^4}} - \arcsin \frac{2B^4 u^2 - A}{\sqrt{A^2 - 4B^4}} = 2\beta.$$

Отсюда получим

$$u^2 = \frac{1}{2B^4} [\sqrt{A^2 - 4B^4} \sin(\alpha - \beta) + A],$$

$$v = \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta + \arcsin \frac{\sqrt{A^2 - 4B^4} + A \sin(\alpha - \beta)}{\sqrt{A^2 - 4B^4} \sin(\alpha - \beta) + A} \right).$$

Положив

$$k_1 = \frac{\sqrt{A + 2B^2}}{2B^2}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{A - 2B^2}}{2B^2},$$

получим после замены параметров u , v на параметры α , β следующие канонические уравнения поверхности:

$$\begin{aligned} x &= k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \beta, \\ y &= k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \beta, \\ z &= A_1 (\alpha - \beta) + k_1 k_2 \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Поверхность несет единственную сеть переноса. Кривизна κ и кручение τ кривой изотропного пространства определяется [1] по формулам

$$\kappa = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}, \quad \tau \kappa^2 = \begin{vmatrix} x' y' z' \\ x'' y'' z'' \\ x''' y''' z''' \end{vmatrix}$$

Следовательно, кривые переноса имеют постоянные кривизны $\frac{1}{k_1}$, $\frac{1}{k_2}$ и постоянные кручения $\frac{A_1}{k_1^2}$, $\frac{-A_1}{k_2^2}$, т. е. это винтовые линии.

8. Другое решение. Пусть поверхность вращения (6)

$$x_1 = u \cos v, \quad x_2 = u \sin v, \quad x_3 = q(u)$$

допускает параметризацию

$$x_1 = x + y, \quad x_2 = X(x) + Y(y), \quad x_3 = \int X_0(x) dx - \int Y_0(y) dy + \\ + \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Из (6), (16) следует

$$\frac{D(x_1^2 + x_2^2, x_3)}{D(x, y)} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x + y + (X + Y)X' & X_0 + Y - yX' \\ x + y + (X + Y)Y' - Y_0 - X + xY' \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Продифференцируем (17) по x, y

$$(x^2 + xXX' - XX_0)'Y'' + (y^2 + yYY' - YY_0)'X'' + \\ + (x + XX')'(yY' - Y - Y_0)' + (y + YY')'(xX' - X - X_0)' = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим такой случай:

$$X'' = 0, \quad Y'' = 0.$$

При этом из (18), (17) получим

$$X = ax + a_1, \quad Y = by + b_1, \\ X_0 = a_2 - A(1 + a^2)x, \quad Y_0 = b_2 + A(1 + b^2)y,$$

где

$$A = \frac{a-b}{1+ab}, \quad a_2 = \frac{b_1-a_1}{1+ab}(1+a^2), \quad b_2 = \frac{(a_1-b_1)(1+b^2)}{1+ab}$$

и поверхность допускает параметризацию

$$x_1 = x + y, \quad x_2 = ax + by + a_1 + b_1, \\ x_3 = -\frac{A}{2}[(1+b^2)y^2 + (1+a^2)x^2] + a_2x - b_2y + \begin{vmatrix} x & ax + a_1 \\ y & by + b_1 \end{vmatrix},$$

или

$$x_3 = \frac{b-a}{2(1+ab)}(x_1^2 + x_2^2) + \text{const.}$$

Пусть

$$X''Y'' \neq 0.$$

Разделим (18) на $X''Y''$ и продифференцируем по x, y :

$$\left[\frac{(x + xX')'}{X''} \right]' \left[\frac{(yY' - Y - Y_0)'}{Y''} \right]' + \\ + \left[\frac{(y + yY')'}{Y''} \right]' \left[\frac{(xX' - X - X_0)'}{X''} \right]' = 0. \quad (19)$$

Рассмотрим случай

$$\left[\frac{(x + xX')'}{X''} \right]' = 0, \quad \left[\frac{(y + yY')'}{Y''} \right]' = 0.$$

Отсюда из (18) и (17) следует

$$\begin{aligned} (X - a)^2 + (x - a_1)^2 &= R_1^2, \\ (Y + a)^2 + (y + a_1)^2 &= R_2^2, \\ X_0 (x - a_1) &= (a_2 - a_1 x - aX) X', \\ Y_0 (y + a_1) &= (a_2 + a_1 y + aY) Y'. \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} x - a_1 &= R_1 \cos \alpha, & X - a &= R_1 \sin \alpha, \\ y + a_1 &= R_2 \cos \beta, & Y + a &= R_2 \sin \beta, \end{aligned}$$

получаем для искомой поверхности параметрическое представление

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta, \\ x_2 &= R_1 \sin \alpha + R_2 \sin \beta, \\ x_3 &= h(\alpha - \beta) + R_1 R_2 \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Этим и исчерпываются все решения функционального уравнения (17), так как во всех остальных случаях системы уравнений на функции X, Y, X_0, Y_0 , получаемые из (17), (18), оказываются несовместимыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strubecker K. Casi limiti di Geometri non-euclidee Rendiconti del Seminario Matematico d'Università e del Politecnico di Torino. Vol. 21^o, 1961, p. 141—212.
2. Бланк Я. П. Клиффордово-сопряженные сети. ДАН, ПХ, 7, 1231—1233 (1948).
3. Бланк Я. П. О поверхностях сдвига эллиптического пространства. «Зап. н. -и. ин-та матем. и мех. ХГУ и Харьковск. матем. об-ва», 1950, т. XX, 61—76.

Поступила 5 июня 1972 г.

О СТРОЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРЯМУЮ

А. А. Борисенко

Харьков

Пусть R^m — полное риманово пространство класса C^3 , кривизна которого в каждой точке и в каждом двумерном направлении неотрицательна. Если в R^m существует k линейно независимых прямых, то, как доказал В. Топоногов [1], R^m есть прямое метрическое произведение евклидова пространства E^k и риманова

пространства R^{m-k} неотрицательной кривизны. Эта теорема является обобщением одной теоремы Э. Кон-Фоссена [1].

Недавно аналогичную теорему доказали Чигер и Громолл, заменив требования неотрицательности кривизны по двумерным направлениям требованием неотрицательности кривизны Риччи [3].

Пусть F — полная l -мерная поверхность в E^n класса C^3 , кривизна которой в каждой точке и в каждом двумерном направлении неотрицательна. Если на F лежит k линейно-независимых прямых евклидова пространства E^n , то F будет цилиндром с k -мерной образующей E^k [2]. Теорему доказал Хартман, используя результат Топоногова.

Обобщим эту теорему на l -мерные поверхности класса C^0 с заменой требования неотрицательной кривизны по двумерным направлениям неотрицательностью кривизны Риччи.

Теорема 1. Пусть F — непрерывная l -мерная поверхность в E^n .

Если F с точки зрения внутренней геометрии будет полным римановым многообразием класса C^3 , кривизна Риччи которого неотрицательна в каждой точке и в каждом направлении, и на F будет лежать k -линейно независимых прямых евклидова пространства E^n , то F будет цилиндром с k -мерной образующей.

Лемма. Пусть F — двумерная поверхность в E^n класса C^0 , изометрична плоскости, и на F лежит прямая p .

Тогда F будет цилиндром с образующей, параллельной p .

Пусть $\bar{F}$ — плоскость, изометричная поверхности F ; $\bar{Q} \in \bar{F}$ — точка, соответствующая $Q \in F$ по изометрии; $\bar{P}\bar{Q}$ — расстояние на $\bar{F}$ между точками $\bar{P}$, $\bar{Q}$; PQ — расстояние между точками P , Q в E^n .

Введем на $\bar{p}$ в качестве параметра длину s , отсчитываемую от фиксированной точки $\bar{P}(0) \in \bar{p}$. $\bar{M}(s)$ — кратчайшая, перпендикулярная $\bar{p}$, которая проходит через точку $\bar{P}(s) \in \bar{p}$.

Теперь через каждую точку $P(s) \in p$ поверхности F проведем гиперплоскость $E^{n-1}(s)$, перпендикулярную p . Обозначим $F(s) = E^{n-1}(s) \cap F$. Покажем, что для любого s $F(s) = M(s)$. Допустим, что для какого-то s_0 в $F(s_0)$ будет содержаться точка $Q \in M(s_1)$, где $s_1 \neq s_0$. Возьмем на $\bar{F}$ треугольник $\bar{P}(s_0)\bar{Q}\bar{P}(s)$. Так как $\bar{Q} \in \bar{M}(s_0)$ кратчайшая $\bar{P}(s_0)\bar{Q}$ не перпендикулярна к $\bar{p}$. Точку $\bar{P}(s)$ будем выбирать на луче, который образует с $\bar{P}(s_0)\bar{Q}$ острый угол.

При достаточно большом s угол $\bar{P}(s_0)\bar{Q}\bar{P}(s)$ будет тупым и

$$\bar{P}(s_0)\bar{P}(s) > \bar{Q}\bar{P}(s).$$

Рассмотрим треугольник $P(s_0)QP(s)$. Он прямоугольный с прямым углом $QP(s_0)P(s)$.

Значит,

$$P(s)Q > P(s_0)P(s),$$

но

$$P(s_0)P(s) = \bar{P}(s_0)\bar{P}(s), \quad QP(s) \leq \bar{Q}\bar{P}(s).$$

Отсюда $\bar{P}(s) \bar{Q} > \bar{P}(s_0) \bar{P}(s)$. В результате приходим к противоречию, т. е.

$$F(s) = M(s).$$

Пусть $\bar{Q}$ — произвольная точка $\bar{F}$; $\bar{q}$ — прямая, проходящая через $\bar{Q}$ и параллельная $\bar{p}$.

Покажем, что q будет прямой евклидова пространства, параллельной p . Пусть $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ — произвольные точки на $\bar{q}$. Опустим из $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ перпендикуляры на $\bar{p}$. $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ — основания перпендикуляров $\bar{P}_1\bar{P}_2 = \bar{Q}_1\bar{Q}_2$.

Рассмотрим пространственный четырехугольник $P_1P_2Q_2Q_1$. Натянем на этот четырехугольник евклидово пространство E^3 . Началом прямоугольной системы координат в E^3 возьмем P_1 , ось z направим по прямой p . Точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 имеют следующие координаты:

$$(P_1(0, 0, 0), P_2(0, 0, z_2), Q_1(x_1, y_1, 0), Q_2(x_2, y_2, z_2), \\ P_1P_2 = |z_2|, Q_1Q_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z_2^2} \geq P_1P_2,$$

но $P_1P_2 = \bar{P}_1\bar{P}_2, Q_1Q_2 \leq \bar{Q}_1\bar{Q}_2$, и, значит, $Q_1Q_2 \leq P_1P_2$.

Отсюда $Q_1Q_2 = P_1P_2$. А это возможно, если $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, т. е. отрезок Q_1Q_2 будет параллелен p и он будет кратчайшей на $\bar{F}$.

Ввиду произвольности точек $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}$ утверждение леммы доказано.

Доказательство теоремы 1. Ее достаточно доказать для $k = 1$.

Пусть p_1 — прямая евклидова пространства, которая лежит на F ; $\bar{p}_1$ — внутренняя прямая на $\bar{F}$. Через каждую точку $\bar{F}$ будет проходить единственная прямая, параллельная $\bar{p}_1$ [2, 4].

Пусть $\bar{Q}$ — произвольная точка на $\bar{F}$. Проведем кратчайшую $\bar{K}$ из точки $\bar{Q}$, перпендикулярную $\bar{p}_1$. Через каждую точку $\bar{K}$ проведем прямую, параллельную $\bar{p}_1$. Полученная поверхность $\bar{F}_0$ изометрична плоскости [4]. Поверхность F_0 в E^n , изометричная $\bar{F}_0$, содержит p_1 и, как доказано в лемме, будет цилиндром.

Ввиду произвольности выбора $\bar{Q}$ F будет цилиндром с образующей параллельной p_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Кон-Фоссен Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. Физматгиз, 1959. 256 с.
2. Топоногов В. А. Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямую. «Сиб. мат. ж.», V, 6, 1964, с. 1358—1370.
3. Hartman P. On the isometric immersion in Euclidean space of manifolds with nonnegative sectional curvature. Trans. Amer. Math. Soc., 115, 94—109 (1965). Trans. Amer. Math. Soc., N 2, 147, 1970 p. 541—561.

Поступила 17 января 1972 г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ ЛИ

П. И. Ковалев

Одесса

1. Тройной системой Ли называется [3] конечномерное векторное пространство T , на котором задано трилинейное отображение

$$f: T \times T \times T \rightarrow T,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) = 0, \quad (1)$$

$$f(x, y, z) = -f(y, x, z), \quad (2)$$

$$f(a, b, f(x, y, z)) = f(f(a, b, x), y, z) + \\ + f(x, f(a, b, y), z) + f(x, y, f(a, b, z)) \quad (3)$$

для любых $a, b, x, y, z \in T$.

Отображение f будем называть умножением. Для краткости $f(x, y, z)$ обозначим символом $[x, y, z]$.

В статье рассматриваются тройные системы Ли, удовлетворяющие условию

$$[[x, y, z], u, v] = 0. \quad (4)$$

Легко показать, что условие (3) следует из (1), (2), (4).

Тройные системы Ли, удовлетворяющие условию (4), будем называть *нильсистемами*.

Пусть T — нильсистема размерности n ; $[T, T, T]$ — линейное подпространство T , порожденное элементами $[x, y, z]$ ($x, y, z \in T$). Обозначим $[T, T, T]$ через H . Если размерность H равна $n - s$, то будем говорить, что T — нильсистема типа s . Если $s = 0$, то для любых $x, y, z \in T$ $[x, y, z] = 0$, т. е. тройная система Ли T тривиальна.

Предположим теперь, что $s \geq 1$; обозначим через F линейное подпространство T , дополнительное к H ; очевидно, размерность F равна s . Тогда операция умножения в T индуцирует трилинейное отображение

$$g: F \times F \times F \rightarrow H, \quad (5)$$

удовлетворяющее условиям (1), (2), причем H порождается множеством $g(F \times F \times F)$.

Обратно, любое трилинейное отображение (5), где F и H — некоторые векторные пространства, причем H порождается мно-

жеством $g(F \times F \times F)$, однозначно определяет на линейном пространстве $T = F \oplus H$ структуру нильсистемы и $H = [T, T, T]$.

Пусть F — векторное пространство размерности s ; I_0 — подпространство пространства $F \otimes F \otimes F$, порожденное элементами вида

$$x \otimes y \otimes z + y \otimes x \otimes z, \\ x \otimes y \otimes z + y \otimes z \otimes x + z \otimes x \otimes y.$$

Тогда справедлива

Теорема 1. Любая нильсистема типа s изоморфна нильсистеме вида

$$F \oplus (F \otimes F \otimes F/I), \quad (6)$$

где I — подпространство $F \otimes F \otimes F$, содержащее I_0 , а умножение в нильсистеме (6) определяется следующим образом:

$$[x, y, z] = x \otimes y \otimes z + I,$$

если $x, y, z \in F$, и $[x, y, z] = 0$, если хоть один из элементов x, y, z принадлежит $F \otimes F \otimes F/I$.

Действительно, если T — нильсистема типа s , то $T = F \oplus H$, где $H = [T, T, T]$, а F — дополнение H . Тогда в силу трилинейности отображения g существует однозначно определенное линейное сюръективное отображение

$$g_1: F \otimes F \otimes F \rightarrow H$$

такое, что

$$g_1(x \otimes y \otimes z) = g(x, y, z)$$

(об основных свойствах тензорного произведения смотри, например, в [1]). Отсюда легко следует

Теорема 2. Если T — нильсистема типа s , то

$$s \leq \dim T \leq \frac{s^3 + 2s}{3}.$$

Обратно, для любого n такого, что

$$s \leq n \leq \frac{s^3 + 2s}{3}, \quad (7)$$

существует n -мерная нильсистема типа s .

В силу теоремы 1 достаточно рассмотреть нильсистему типа (6). Пусть элементы $f_1, \dots, f_s$ образуют базис F . Тогда элементы вида

$$f_i \otimes f_j \otimes f_k + f_j \otimes f_i \otimes f_k \quad (1 \leq i \leq j \leq s), \\ f_i \otimes f_j \otimes f_k + f_i \otimes f_k \otimes f_j + f_k \otimes f_i \otimes f_j \quad (i < j < k),$$

образуют базис пространства I_0 . Простой подсчет показывает, что размерность I_0 равна

$$\frac{2s^3 + s}{3}.$$

следовательно, размерность пространства (6) не превосходит

$$s + \left(s^3 - \frac{2s^3 + s}{3} \right) = \frac{s^3 + 2s}{3},$$

что и доказывает теорему.

В [3] установлено, что всякая тройная система Ли является тройной системой Ли некоторой алгебры Ли, т. е. для всякой тройной системы Ли T существует такая алгебра Ли L , что $T \subset L$ и T замкнуто относительно операции

$$(x, y, z) \rightarrow [[x, y], z],$$

где $[x, y]$ — умножение в алгебре Ли L , причем для любых $x, y, z \in T$ $[x, y, z] = [[x, y], z]$.

Пусть L — некоторая алгебра Ли и

$$L = L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_m \supset \dots$$

— последовательность идеалов L , где $L_{k+1} = [L_k, L]$. Тогда имеет место

Теорема 3. *Тройная система Ли T является нильсистемой тогда и только тогда, когда T является тройной системой Ли алгебры Ли L , такой, что $L_4 = \{0\}$.*

Достаточность немедленно следует из определения тройной системы Ли алгебры Ли. Для доказательства необходимости заметим, что, если T — тройная система Ли некоторой алгебры Ли, то из (3) следует, что $T + [T, T]$ — подалгебра Ли этой алгебры Ли. Пользуясь тождеством Якоби, легко показать, что $(T + [T, T])_4 = \{0\}$.

2. Пусть A — пространство аффинной связности без кручения; A_p — касательное пространство к A в точке $p \in A$. Если тензор кривизны определяет в A_p для любых $p \in A$ структуру нильсистемы, то будем называть A *нильпространством*. Очевидно, A является нильпространством тогда и только тогда, когда тензор кривизны удовлетворяет условию

$$R_{klj}^s R_{abs}^r = 0. \quad (8)$$

В любом нильпространстве справедливо соотношение

$$R_{kij, ab}^r = R_{kij, ba}^r.$$

В римановом нильпространстве квадрат тензора Риччи равен 0. Риманово нильпространство с положительно определенной метрикой локально евклидово.

Ясно, что все двумерные нильсистемы тривиальны. Отсюда следует, что двумерные нильпространства локально евклидовы.

Теорема 4. *Риманово нильпространство V , тензор конформной кривизны которого равен 0, локально евклидово.*

Действительно, в этом случае тензор кривизны V имеет вид

$$R_{ijk}^r = \frac{1}{n-2} (\delta_k^r R_{ij} - \delta_j^r R_{ik} + g_{ij} R_k^r - g_{ik} R_j^r) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (\delta_j^r g_{ik} - \delta_k^r g_{ij}). \quad (9)$$

Из (8) получим

$$R_{ijk}^s R_{sa} = 0.$$

Подставляя сюда вместо R_{ijk}^s его значение, находим

$$R_{ij} R_{ka} - R_{ik} R_{ja} + \frac{R}{n-1} (g_{ik} R_{ja} - g_{ij} R_{ka}) = 0.$$

Свертывая по a и k , имеем

$$R \left(R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij} \right) = 0.$$

Отсюда легко следует, что пространство V локально евклидово. В частности, любое трехмерное риманово нильпространство локально евклидово.

Можно показать, что пространства Веденяпина [2] являются нетривиальным примером римановых нильпространств. Другой класс нильпространств (в общем случае не являющихся римановыми) дает

Теорема 5. Пусть A — пространство аффинной связности без кручения размерности n , тензор Риччи которого равен нулю и каждая точка обладает координатной окрестностью U , отнесенной к системе координат $(x^1, \dots, x^n)$, в которой выполнены следующие условия:

- 1) векторное поле $(1, \dots, 1)$ абсолютно параллельно;
- 2) если вектор $(a^1, \dots, a^n)$ параллельно переносится вдоль пути $x^i = x^i(t)$ из точки с координатами

$$(x^1(t_0), \dots, x^n(t_0))$$

в точку с координатами

$$(x^1(t_0 + \Delta t), \dots, x^n(t_0 + \Delta t)),$$

то приращения координат вектора $(a^1, \dots, a^n)$ равны между собой с точностью до бесконечно малых порядка выше первого относительно Δt .

Тогда A является нильпространством.

Действительно, условие 1) равносильно следующему:

$$\sum_i \Gamma_{ij}^k = 0. \quad (10)$$

Из второго условия получаем

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^r.$$

Поэтому можем Γ_{ij}^k обозначить просто символом Γ_{ij} .

Тензор Римана пространства A имеет вид

$$R_{rjh}^i = \frac{\partial \Gamma_{kr}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jr}}{\partial x^k}.$$

Используя условие $R_{ij} = 0$, получаем, что тензор кривизны пространства A удовлетворяет условию (8), что и требовалось доказать.

Из теоремы 5 следует, что существуют трехмерные аффинно связные нильпространства, не являющиеся локально евклидовыми. Пусть, например, E — открытое подмножество трехмерного евклидового пространства; $f(t)$, $g(t)$ — гладкие функции, причем производные до третьего порядка f и g всюду отличны от 0. Тогда, полагая

$$\Gamma_{12} = f(x^3 - x^4), \quad \Gamma_{13} = g(x^2 - x^4), \quad \Gamma_{23} = \text{const}$$

и определяя остальные Γ_{ij} из равенства (10), получаем на E связность без кручения, удовлетворяющую условиям теоремы 5. Пространство E , наделенное этой связностью, не является локально евклидовым (оно даже не дважды рекуррентно).

Если A_p — касательное пространство нильпространства A , тензор кривизны которого индуцирует в A_p структуру нильсистемы, и A удовлетворяет условиям теоремы 5, то размерность $[A_p, A_p, A_p]$ равна 1. Отсюда следует, что тип A_p равен $n-1$ (n — размерность A).

Обозначим символом L_p алгебру Ли, порожденную тройной системой Ли A_p . Тогда легко показать, что, если A удовлетворяет условиям теоремы 5, $(L_p)_3 = \{0\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра. М., Физматгиз, 1962, 516 с.
2. Воднев В. Т. О пространствах Д. В. Веденяпина. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1968, № 1, с. 61—73.
3. Yamaguti K. On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems). J. Sci. Hiroshima Univ., 1957, A21, № 2, p. 107—113.

Поступила 13 марта 1972 г.

РАССЛОЕНИЕ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В НОРМАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ

Н. И. Кованцов, Т. В. Носаль

Киев

В 1861 г. Абель Трансон отметил, что произвольный комплекс прямых в трехмерном евклидовом пространстве может быть расслоен в однопараметрическое семейство нормальных конгруэнций [1]. При этом не предполагалось, что поверхности, ортогональные лучам конгруэнций, подчинены каким-либо заранее заданным условиям.

В 1958 г. Н. И. Кованцов поставил вопрос о расслоении комплекса в нормальные конгруэнции, представляющие собой совокупности нормалей к поверхностям постоянной кривизны [2]. В этой работе было показано, в частности, что если точка M описывает поверхность, ортогональную лучам конгруэнции, принадлежащей комплексу, то ее абсцисса удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению; подобные же уравнения получаются и в том случае, когда комплекс расслаивается в иные конгруэнции или в те или иные линейчатые многообразия.

Настоящая статья является продолжением работы [2]. Обратим внимание на следующие обстоятельства.

В первой дифференциальной окрестности луча комплекса в трехмерном евклидовом пространстве естественным образом выделяется одна точка — центр луча [3].

Во второй дифференциальной окрестности выделяется четверка инфлекционных центров луча. Такая четверка имеет проективный характер, а поэтому может быть определенной и в метрическом пространстве. Центр луча — понятие чисто метрическое.

В работах В. Л. Карпенко, К. И. Гриневичюса, Р. Н. Щербакова, Е. Т. Ивлева, М. А. Акивиса [4—8] рассмотрены отдельные вопросы, связанные со строением комплексов и их систем как в метрическом, так и в иных пространствах. Однако авторами не получены характерные инвариантные точки на луче в E_3 , кроме перечисленных, которые имели бы достаточно естественное геометрическое истолкование.

Задача, связанная с расслоением комплекса в нормальные конгруэнции с заранее предписанными свойствами для поверхностей, ортогональных лучам конгруэнций, приводит к выделению геометрически интересных точек на луче, а это дает возможность исследовать строение комплексов по поведению этих точек аналогично тому, как это в свое время было сделано для инфлекционных центров.

В настоящей работе вначале выписаны необходимые уравнения, связанные с расслоением комплекса. В [2] эти уравнения выписаны применительно к тому случаю, когда сопровождающий репер комплекса был нормальным (вершина A совпадает с центром луча, вектор e лежит на луче, векторы e_1 и e_2 — единичные векторы нормали и бинормали луча). Здесь будут найдены необходимые уравнения в произвольном репере, а также необходимое нам уравнение инфлекционных центров. Вывод такого уравнения представляет собой аналитически достаточно трудную задачу и ранее в литературе это уравнение не приводилось.

Вид уравнения, связывающего абсциссу точки, зависит от вида поверхности. Назовем точки на луче комплекса, которые могут описывать поверхности, ортогональные лучам конгруэнции, точками ортогональности. Если эти поверхности имеют постоянную кривизну, то упомянутое уравнение является уравнением четвертой степени, близким к уравнению инфлекционных центров.

Назовем точки ортогональности, соответствующие поверхностям постоянной кривизны, точками ортогональности постоянной кривизны.

Совершенно естественно поставить вопрос так: у каких комплексов уравнение точек ортогональности постоянной кривизны совпадает с уравнением инфлекссионных центров. Докажем, что это возможно лишь для класса комплексов, широта которого — две функции одного аргумента. Исследуем строение такого класса комплексов и дадим его безынтегральное представление. Однако это представление оказывается возможным лишь при условии, что будет проинтегрировано некоторое дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Свести безынтегральное представление к одним элементарным построениям здесь в принципе невозможно.

Известно, что комплексом с неопределенными инфлекссионными центрами на каждом луче является лишь линейный комплекс. Оказывается, что единственный комплекс с неопределенными точками ортогональности на каждом луче — тоже линейный комплекс.

Точки ортогональности на лучах существуют у каждого комплекса, однако, не у каждого такие точки действительно описывают поверхности, ортогональные лучам нормальных конгруэнций. В случае линейного комплекса получается однопараметрическая совокупность расслоений в нормальные конгруэнции, ортогональные поверхностям постоянной кривизны. При этом каждый линейный комплекс расслаивается в семейство нормальных конгруэнций с ортогональными поверхностями постоянной кривизны с произволом в две постоянные.

В последующей работе будет дано построение поверхностей постоянной кривизны для заданного линейного комплекса и, таким образом, определится безынтегральное построение комплексов через посредство этих поверхностей.

1. Уравнение инфлекссионных центров в произвольном сопровождающем трехграннике

Пусть вершина A сопровождающего трехгранника помещена в центр луча комплекса, а e_3 лежит на луче. В таком случае, инфинитезимальные смещения репера запишутся в виде

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i e_i \\ de_i &= \omega_i^k e_k \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

где

$$\omega_i^k + \omega_k^i = 0.$$

Заметим, что $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$ — главные формы, единственная связь между которыми представляется следующим образом:

$$\omega^2 = k\omega_3^1 + A\omega_3^2 + B\omega^1. \quad (1.2)$$

Поскольку формы ω^i , ω_j^i подчинены уравнениям структуры

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^j \omega_j^i] \\ D\omega_i^k &= [\omega_i^j \omega_j^k] \end{aligned} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (1.3)$$

то, дифференцируя (1.2) внешним образом, учитывая (1.3) и раскрывая квадратичные уравнения по лемме Картана, получаем равенства, коэффициенты которых характеризуют вторую дифференциальную окрестность луча комплекса:

$$\begin{aligned} \Delta B &= dB - (1 + B^2) \omega_2^1 = p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\ \Delta k &= dk + (A - Bk) \omega_2^1 + B\omega^3 = \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ \Delta A &= dA - (k + AB) \omega_2^1 - \omega^3 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть

$$M = A + te_3$$

— точка на луче комплекса; она остается неподвижной, если выполняются равенства

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0, \quad \omega^2 + t\omega_3^2 = 0, \quad \omega^3 + dt = 0. \quad (1.5)$$

Через точку M проходит конус лучей комплекса. Пусть π — плоскость, соответствующая точке M в нормальной корреляции. Поскольку

$$de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2,$$

вектор нормали N этой плоскости определится [3] как векторное произведение

$$N = [de_3 e_3] = -(A + t) e_2 + (Bt - k) e_1.$$

Единичный вектор нормали имеет вид

$$n = \rho [-(A + t) e_2 + (Bt - k) e_1],$$

где

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{(A + t)^2 + (Bt - k)^2}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} dn &= \rho [-(dA + dt) e_2 + (tdB + B dt - dk) e_1 - \\ &- (A + t) (\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3) + (Bt - k) (\omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3)] + \frac{d\rho}{\rho} n. \end{aligned}$$

Плоскость π остается неподвижной, если $dn = 0$. Легко видеть, что это равносильно трем следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \omega^1 + t\omega_3^1 &= 0, \\ \omega^2 + t\omega_3^2 &= 0, \\ (k + AB) dt - (Bt - k) [(dA - \omega_1^2 (Bt - k)) + \\ &+ (A + t) [t dB - dk + \omega_1^3 (A + t)]] = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Первые два равенства совпадают с первыми двумя равенствами системы (1.5). Исключив dt из системы (1.5) и (1.6), найдем

$$(k + AB) [-(Bt - k)(dA - \omega_1^2(Bt - k)) - \omega^3(k + AB) + (A + t)(t dB - dk + \omega_1^2(A + t))] = 0. \quad (1.7)$$

Равенство $k + AB = 0$ выделяет специальный комплекс, исключив который из рассмотрения, получим

$$-(Bt - k)[dA - \omega_1^2(Bt - k)] - \omega^3(k + AB) + (A + t)[t dB - dk + \omega_1^2(A + t)] = 0. \quad (1.8)$$

Заменяя здесь дифференциалы dk , dA , dB их значениями

$$\begin{aligned} dk &= \Delta k + (Bk - A)\omega_2^1 - B\omega^3, \\ dA &= \Delta A + (AB + k)\omega_2^1 + \omega^3, \\ dB &= \Delta B + (1 + B^2)\omega_2^1, \end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$-\Delta A(Bt - k) + \Delta Bt(A + t) - \Delta k(A + t) = 0. \quad (1.9)$$

Из первых двух равенств (1.5) и из равенства (1.2) получим

$$\omega^1 = -t\omega_3^1, \quad \omega_3^2 = \frac{Bt - k}{A + t}\omega_3^1. \quad (1.6)$$

Внеся (1.6) в (1.9), после приведения подобных членов и сокращения на ω_3^1 придем к уравнению четвертой степени, характеризующему инфлекссионные центры:

$$\begin{aligned} pt^4 - 2t^3(B\beta - Ap + \alpha) + t^2(2\beta k + q - 2AB\beta + A^2p - \\ - 4A\alpha + B^2r + 2B\gamma) - 2t(k\gamma - Aq - AB\gamma - A\beta k + \\ + Bkr + A^2\alpha) + rk^2 - 2Ak\gamma + A^2q = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В частности, если $A = B = 0$, сопровождающий трехгранник становится нормальным и уравнение инфлекссионных центров принимает известный вид

$$pt^4 - 2\alpha t^3 + (2k\beta + q)t^2 - 2k\gamma t + k^2r = 0. \quad (1.11)$$

2. Уравнение точек ортогональности постоянной кривизны в произвольном сопровождающем трехграннике

Равенство (1.2) представляет собой дифференциальное уравнение комплекса прямых, отнесенного к произвольному сопровождающему трехграннику (точка A — на луче, вектор e_3 — параллелен лучу).

Пусть

$$M = A + te_3 \quad (2.1)$$

— точка на луче комплекса, описывающая голономную поверхность, ортогональную лучу комплекса. В таком случае

$$\omega^3 + dt = 0. \quad (2.2)$$

Комплекс — трехпараметрическое семейство прямых, все формы ω^i , ω_j^i — функции от U, V, W, dU, dV, dW . Полагая $W = f(U, V)$, выделяем из комплекса некоторую конгруэнцию — двухпараметрическое семейство прямых

$$\omega^1 = a\omega_3^1 + b\omega_3^2. \quad (2.3)$$

Дифференцируя (2.3) внешним образом, учитывая (1.3) и раскрывая квадратичные уравнения по лемме Картана, имеем

$$\begin{aligned} [\Delta a \omega_3^1] + [\Delta b \omega_3^2] &= 0, \quad \Delta a = da + (Ba + k + b)\omega_2^1 - \omega^3, \\ \Delta b &= db + (A + Bb - a)\omega_2^1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Дифференцируя (2.2) внешним образом, учитывая (1.3) и предыдущие равенства, получаем

$$b = k + Ba. \quad (2.5)$$

Решение системы

$$\begin{aligned} \omega^3 + dt &= 0, \\ \omega^1 &= a\omega_3^1 + b\omega_3^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

существует с произволом в одну функцию одного аргумента, т. е. произвольный комплекс (1.2) допускает расслоение в нормальные конгруэнции с ортогональными поверхностями с произволом в одну функцию одного аргумента.

Дифференцируя (2.1) и учитывая (1.1), (2.2), находим

$$dM = (\omega^1 + t\omega_3^1)e_1 + (\omega^2 + t\omega_3^2)e_2. \quad (2.7)$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = \dot{\omega}^1, \quad \omega^2 + t\omega_3^2 = \dot{\omega}^2, \quad (2.8)$$

откуда

$$\omega^1 = \dot{\omega}^1 - t\omega_3^1, \quad \omega^2 = \dot{\omega}^2 - t\omega_3^2. \quad (2.9)$$

Подставляя в (2.9) значения ω^1 и ω^2 из (1.2) и (2.3), а также введя обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{(a+t) - \frac{k+Ba}{A+t}(k-tB)} + \frac{B}{\frac{A+t}{k+Ba}(a+t) - (k-tB)}, \\ \beta &= -\frac{1}{\frac{A+t}{k+Ba}(a+t) - (k-tB)}, \\ \gamma &= \frac{1}{-\frac{k+Ba}{a+t}(k-tB) + (A+t)}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

получаем

$$\omega_3^1 = \alpha \bar{\omega}^1 + \beta \bar{\omega}^2, \quad \omega_3^2 = \beta \bar{\omega}^1 + \gamma \bar{\omega}^2. \quad (2.11)$$

Кривизна поверхности K определяется равенством

$$K = \alpha\gamma - \beta^2.$$

учитывая обозначения (2.10), переписываем его в виде

$$K = \frac{1}{(A+t)(a+t) - (k+AB)(k-tB)}. \quad (2.12)$$

Выразим a из (2.12)

$$a = \frac{1 + Kk^2 - Kt^2 - AKt - BKkt}{K(B^2t + A - Bk + t)}. \quad (2.13)$$

Продифференцировав (2.13), найдем

$$da = \frac{1}{K} \cdot \frac{[\Delta k + (Bk - A)\omega_2^1 - B\omega^3]\xi - \omega^3\eta + + [\Delta A + (AB + k)\omega_2^1 + \omega^3]\lambda + [\Delta B + (1 + B^2)\omega_2^1]\mu}{\delta^2}, \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= 2B^2Kkt + 2AKk - BKk^2 + 2Kkt - B^3Kt^2 - 2ABKt - 2BKt^2 + B, \\ \eta &= -B^2Kt^2 - 2AKt + 2BKkt - Kt^2 - A^2K - B^2 - Kk^2 - 1, \\ \lambda &= -B^2Kt^2 + 2BKkt - Kk^2 - 1, \\ \mu &= -2AKkt - 2Kkt^2 - 2Bt - 2BKk^2t + 2BKt^3 + 2ABKt^2 + \\ &\quad + B^2Kkt^2 + Kk^3 + k, \\ \delta^2 &= B^4t^2 + A^2 + B^2k^2 + t^2 + 2AB^2t - 2B^3kt + \\ &\quad + 2B^2t^2 - 2ABk + 2At - 2Bkt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Учитывая выражения для Δa , Δb и подставляя вместо b (2.5), равенство (2.4) представим в виде

$$\begin{aligned} &[da + 2(k + Ba)\omega_2^1 - \omega^3, \omega_3^1] + \\ &+ [db + (A + Bk + B^2a - a)\omega_2^1, \omega_3^2] = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

или, принимая во внимание (2.15), (2.14), (1.4), находим

$$\begin{aligned} &-[\xi(\alpha K\delta k + \alpha Ba' + \gamma K\delta) + \lambda(\beta K\delta k + \beta Ba' + K\delta r) + \\ &+ \mu(pK\delta k + pBa' + K\delta\beta)] + (K\delta^2 + B\xi)(\alpha a' + qK\delta) + \\ &+ B\lambda(\beta a' + \gamma K\delta) + (\delta a' + B\mu)(pa' + \alpha K\delta) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= B^2t + A - Bk + t, \\ a' &= B^2t + A - Bk + t + 2B^2Kk^2t + AKk^2 - BKk^3 + Kk^2t - \\ &\quad - B^2Kt^3 - 2AKt^2 - Kt^3 - AB^2Kt^2 - A^2Kt - B^3Kkt^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Раскрывая скобки в (2.17), после приведения подобных членов и сокращения на $\omega_3^1\omega_3^2$ получаем уравнение четвертой степени,

характеризующее точки ортогональности постоянной кривизны в произвольном сопровождающем трехграннике:

$$\begin{aligned} pK^2t^4 - 2K^2t^3(\alpha + B\beta - Ap) + Kt^2(Kq - 2p + 2k\beta K - 4AK\alpha + \\ + B^4Kq + 2B^2Kq + 2BK\gamma + B^2Kr - 2ABK\beta + A^2Kp) - \\ - 2Kt(Kk\gamma - \alpha + A^2K\alpha - AB^2Kq + B^3Kkq - AKq + \\ + BKkq - ABK\gamma + BKkr - AKk\beta - B\beta + Ap) + p + Kk^2p + \\ + 2AK\alpha - 2BKk\alpha + A^2K^2q + B^2K^2k^2q - 2ABK^2kq - \\ - 2BK\gamma - 2AK^2k\gamma + Kr + K^2k^2r = 0. \end{aligned}$$

После сокращения на K найдем следующее:

$$\begin{aligned} pKt^4 - 2Kt^3(\alpha + B\beta - Ap) + t^2(Kq - 2p + 2k\beta K - 4AK\alpha + \\ + B^4Kq + 2B^2Kq + 2BK\gamma + B^2Kr - 2ABK\beta + A^2Kp) - \\ - 2t(Kk\gamma - \alpha + A^2K\alpha - AB^2Kq + B^3Kkq - AKq + BKkq - \\ - ABK\gamma + BKkr - AKk\beta - B\beta + Ap) + \frac{1}{K}(p + Kr)(1 + k^2K) + \\ + 2A\alpha - 2Bk\alpha + A^2Kq + B^2Kk^2q - 2ABKkq - \\ - 2B\gamma - 2AKk\gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В частности, в нормальном трехграннике ($A = B = 0$) уравнение (2.19) запишется таким образом:

$$\begin{aligned} pKt^4 - 2\alpha Kt^3 + t^2(Kq - 2p + 2k\beta K) - \\ - 2t(k\gamma K - \alpha) + \frac{1}{K}(p + Kr)(1 + k^2K) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

3. Комплексы, у которых инфлекционные центры совпадают с точками ортогональности постоянной кривизны

В нормальном репере уравнение (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\ dk &= \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Потребуем, чтобы уравнения (1.11) и (2.20) совпадали, что приведет к четырем соотношениям:

$$\frac{pK}{p} = \frac{2\alpha K}{2\alpha} = \frac{Kq - 2p + 2k\beta K}{2k\beta + q} = \frac{k\gamma K - \alpha}{k\gamma} = \frac{\frac{1}{K}(p + Kr)(1 + k^2K)}{k^2r}.$$

А это равносильно следующим трем равенствам:

$$p = 0, \alpha = 0, r = 0. \quad (3.2)$$

Тогда уравнения (3.1) представляются так:

$$\omega_1^2 = \beta\omega_3^2, dk = q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1. \quad (3.3)$$

Продифференцировав эти уравнения внешним образом, получим

$$\begin{aligned} [\Delta \beta \omega_3^2] &= 0, \\ [\Delta q \omega_3^1] + [\Delta \gamma \omega_3^2] &= 0, \\ [\Delta \beta \omega^1] + [\Delta \gamma \omega_3^1] + \beta (q + 2k\beta) [\omega_3^2 \omega_3^1] &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \beta &= d\beta + (1 + \beta^2) \omega_3^1, \\ \Delta q &= dq, \\ \Delta \gamma &= d\gamma + \beta \gamma \omega_3^1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из первых двух равенств (3.4) и леммы Картана следует

$$\begin{aligned} \Delta \beta &= \lambda \omega_3^2, \\ \Delta q &= \mu \omega_3^1 + \nu \omega_3^2, \\ \Delta \gamma &= \gamma \omega_3^1 + \delta \omega_3^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вносим эти формы в третье равенство (3.4)

$$\lambda [\omega_3^2 \omega^1] + [(\nu \omega_3^1 + \delta \omega_3^2) \omega_3^1] + \beta (q + 2k\beta) [\omega_3^2 \omega_3^1] = 0.$$

Отсюда, учитывая независимость форм ω^1 , ω_3^1 , ω_3^2 , получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, \\ \delta &= -\beta (q + 2k\beta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Первое уравнение (3.6) принимает вид

$$d\beta + (1 + \beta^2) \omega_3^1 = 0. \quad (3.8)$$

Внешнее дифференцирование его приводит к тождеству.

Продолжая второе и третье уравнения (3.6), будем иметь

$$\begin{aligned} d\mu &= \dot{A} \omega_3^1 + \dot{B} \omega_3^2, \\ d\nu + \gamma \beta \omega_3^1 &= \dot{B} \omega_3^1 + \dot{C} \omega_3^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\dot{C} = q + 4k\beta - \beta\mu - 3q\beta^2, \quad (3.10)$$

а это значит, что рассматриваемый класс комплексов существует с произволом в две функции одного аргумента.

Исследуем строение комплекса.

Легко видеть, что конгруэнция, определяемая уравнением

$$\omega_3^1 = 0, \quad (3.11)$$

голомнна, ибо

$$D\omega_3^1 = 0.$$

Если точка

$$M = A + te_3$$

является фокусом какой-либо конгруэнции, то имеют место следующие равенства:

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0, \quad \omega^2 + t\omega_3^2 = 0.$$

Для конгруэнции (3.11) последние уравнения принимают вид

$$\omega^1 = 0, \quad t\omega_3^2 = 0. \quad (3.12)$$

Это означает, что один фокус совпадает с центром луча ($t = 0$), а другой — есть бесконечно удаленная точка луча ($t = \infty$). Уравнение инфлекционных центров луча комплекса класса (1.11) имеет вид

$$(2k\beta + q)t^2 - 2k\gamma t = 0. \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что одним инфлекционным центром является центр луча ($t = 0$), бесконечно-удаленная точка луча является двойным инфлекционным центром, четвертый центр определяется равенством

$$t = \frac{2k\gamma}{2k\beta + q}. \quad (3.14)$$

То обстоятельство, что бесконечно удаленная точка является двойным инфлекционным центром, означает, что эта точка есть вершина пучка проходящих через него параллельных прямых.

Равенство

$$de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 = \omega_2^3 (\beta e_1 + e_3) \quad (3.15)$$

означает, что сферическое отображение бинормалей рассматриваемого комплекса вырождается в кривую. Однако комплекс бинормалей не вырождается ни в конгруэнцию, ни в линейчатую поверхность. Действительно, линейными формами, определяющими положение бинормали, являются формы

$$\omega^1, \quad \omega^3, \quad \omega_2^1, \quad \omega_2^3. \quad (3.16)$$

Из равенств (3.3) находим

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \beta\omega_3^2, \\ \omega^3 &= -\beta\omega^1 - \gamma\omega_3^1 + k\beta\omega_3^2. \end{aligned}$$

По условию формы $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$ линейно независимы. Отсюда видно, что все формы (3.16) будут выражаться через такие две формы ω^1, ω_3^2 при условии $\gamma = 0$. Лишь в этом случае комплекс бинормалей вырождается в конгруэнцию. Вырождение же его в линейчатую поверхность исключено, так как среди форм (3.16) по крайней мере две линейно независимы (ω^1, ω_3^2).

Остановимся на комплексе, для которого

$$\gamma = 0. \quad (3.17)$$

Для него, как показывает равенство (3.14), четвертый инфлекционный центр, как и первый, совпадает с центром луча. В этом случае $\Delta\gamma = 0$, а потому и

$$\beta(q + 2k\beta) = 0.$$

Равенство

$$\beta = 0$$

невозможно, так как в противном случае из (3.8) следовало бы, что $\omega_3^1 = 0$, а это исключено. Но в таком случае имеем

$$q + 2k\beta = 0.$$

Уравнение инфлекционных центров (1.11) тождественно исчезает, следовательно, комплекс, для которого $\gamma = 0$, является линейным.

Вернемся к общему случаю (3.2).

Для конгруэнции (3.11) имеем

$$dA = \omega^1 e_1 + \omega^3 e_3,$$

т. е. фокальная поверхность σ , описываемая точкой A , касается плоскости $e_1 e_3$. Нормалью к этой плоскости служит бинормаль комплекса. В силу равенства (3.15) касательные плоскости к указанной фокальной поверхности описывают однопараметрическое семейство, следовательно, σ является торсом. Образующая такого торса определяется вектором $[e_3 de_2]$, т. е. вектором

$$e = e_1 - \beta e_3. \quad (3.18)$$

Покажем, что вектор e имеет одно и то же направление для всех лучей комплекса (3.2). Действительно,

$$\begin{aligned} de &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 - d\beta e_3 - \beta(\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) = \\ &= -\beta\omega_3^1(e_1 - \beta e_3) = -\beta\omega_3^1 e. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Это означает, что торс σ является цилиндром.

Равенство (3.8) для конгруэнции $\omega_3^1 = 0$ принимает вид

$$d\beta = 0,$$

т. е.

$$\beta = \text{const.}$$

Это означает, что вектор e расположен под постоянным углом θ к вектору e_3 . Единичный вектор e_0 , соответствующий вектору e , есть

$$e_0 = \frac{e}{|e|} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} e_1 - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} e_3,$$

а потому

$$\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} = \cos \theta, \quad -\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = \sin \theta.$$

Векторы e_1 и e_3 лежат в касательной плоскости тора σ . При перемещении вдоль образующей этого тора указанные векторы, оставаясь взаимно-перпендикулярными, перемещаются параллельно самим себе. Поскольку $\beta = \text{const}$ на всей поверхности σ , то все лучи комплекса (они параллельны вектору e_3), будучи касательными к σ , образуют с образующей поверхности σ один и тот же угол.

Найденных свойств недостаточно для того, чтобы составить полное представление о конструировании рассматриваемого комплекса. В то же время можно высказать следующее предположение о строении рассматриваемого класса комплексов.

Чтобы построить комплекс класса $p = \alpha = r = 0$, надо взять связку параллельных прямых и расслнить ее в однопараметрическое семейство цилиндров σ (одна функция двух аргументов). Затем следует задать для каждого цилиндра угол θ (еще одна функция одного аргумента) и провести вдоль каждой образующей касательные прямые к σ под заданным углом к образующей соответствующего цилиндра в каждой ее точке. Все такие прямые и составят искомый комплекс. Однако построенный таким образом комплекс имеет произвол в одну функцию двух аргументов, а тот, который исследуется (комплекс (3.2)), существует с произволом в две функции одного аргумента. Вместе с тем ничто нам не мешает принять в качестве аргумента именно угол θ , следовательно, упомянутую выше функцию одного аргумента можно не принимать в расчет. Подойдем к вопросу с иной стороны. Построим комплекс способом, описанным в предыдущем абзаце. При подходящем выборе репера можно добиться выполнения первых двух равенств (3.2)

$$p = \alpha = 0.$$

Равенство $r = 0$ будет выполнено лишь при условии, что каждая точка цилиндра оказывается инфлексционным центром луча, являющегося касательным к цилиндру в этой точке. Задав двупараметрическое семейство цилиндров с помощью некоторой функции двух аргументов и подчинив ее указанному условию, придем к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка. Проинтегрировав его, получим искомый комплекс. Поскольку уравнение не будет элементарно интегрироваться, то безынтегральное представление, которое сводилось бы к элементарному, уже известным нам образом дать сейчас невозможно. Аналогичное положение существует в интегральном исчислении, когда не всякий определенный интеграл можно выразить через элементарные функции, несмотря на то, что интеграл как функция существует.

Итак, пусть задано однопараметрическое семейство цилиндров (произвольный цилиндр обозначим символом σ) с параллельными образующими и к каждому такому цилиндру проведем касательные под одним и тем же углом к его образующим. Совместим вершину A репера с точкой цилиндра σ , вектор e_3 направим по лучу построенного комплекса, а плоскость $e_1 e_3$ совместим с касательной

плоскостью к σ . Поскольку главными формами смещения репера будут формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$, то в этом случае будет справедливо следующее равенство:

$$\omega^2 = k\omega_3^1 + A\omega_3^2 + B\omega^1. \quad (3.20)$$

Для цилиндра σ

$$dA = \omega^1 e_1 + \omega^3 e_3, \quad (3.21)$$

следовательно, его уравнение имеет вид

$$\omega^2 = 0. \quad (3.22)$$

Вектор, параллельный образующей цилиндра σ , обозначим через e и представим в виде

$$e = e_1 - \beta e_3. \quad (3.23)$$

Для всей поверхности σ этот вектор образует постоянный угол с лучом комплекса, следовательно,

$$d\beta = 0 \pmod{\omega^2}. \quad (3.24)$$

Учтем то обстоятельство, что вектор e остается параллельным самому себе во всем комплексе, т. е. при изменении всех форм $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$.

Тогда из равенства

$$de = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 - d\beta e_3 - \beta (\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2)$$

следует, что

$$\omega_1^2 = \beta \omega_3^2, \quad -\frac{\beta \omega_3^1}{1} = \frac{\omega_1^3 - d\beta}{-\beta},$$

или

$$\omega_1^2 = \beta \omega_3^2, \quad d\beta + (1 + \beta^2) \omega_3^1 = 0. \quad (3.25)$$

Из второго равенства заключаем, что

$$d\beta = 0 \pmod{\omega_3^1}.$$

Но в таком случае, учитывая (3.24), получаем

$$\omega^2 = k\omega_3^1, \quad (3.26)$$

а поэтому из (3.20) вытекает

$$A = B = 0.$$

Продолжая (3.26), получаем (3.1), а сравнивая это с первым равенством (3.25), находим

$$p = \alpha = 0. \quad (3.27)$$

Таким образом, при любом выборе семейства цилиндров с параллельными образующими приходим к равенствам (3.27).

Потребуем теперь, чтобы точка A была инфлексционным центром для того луча построенного комплекса, который касается цилиндра σ , проходящего через A .

Для семейства цилиндров σ в неподвижной системе координат имеем

$$F(x, y, z) = -z + \varphi(x, c) = 0, \quad (3.28)$$

(мы выбрали образующие цилиндра параллельными оси ординат). Проведем через точку $A(x, y, z)$ в касательной плоскости к σ прямую под углом θ к образующей. Уравнения такой прямой запишутся в виде

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-\varphi(x, c)}{n}. \quad (3.29)$$

Так как прямая, проведенная таким образом, принадлежит касательной плоскости цилиндра, то

$$\varphi_x - n = 0. \quad (3.30)$$

Выберем параметр c так, чтобы имело место равенство $\frac{1}{c} = \cos \theta$.

Тогда

$$\frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \frac{1}{c}. \quad (3.31)$$

Угловые коэффициенты m и n прямой (3.20) определяются равенствами (3.30) и (3.31). В уравнениях (3.29) имеем, следовательно, всего три независимых параметра x, y, c . Это означает, что совокупность прямых (3.29) образует комплекс.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка пространства. Пусть эта точка принадлежит цилиндру σ_0 , соответствующему значению параметра c_0 . В таком случае

$$z_0 = \varphi(x_0, c_0).$$

Для всех прямых (3.29), проходящих через точку M_0 , будет выполняться соотношение

$$\frac{x_0-x}{1} = \frac{y_0-y}{m} = \frac{z_0-\varphi(x, c)}{n} \quad (3.32)$$

или

$$\begin{aligned} y_0 - y &= m(x_0 - x), \\ z_0 - \varphi(x, c) &= n(x_0 - x). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Имеем два уравнения на три параметра x, y, c . Попробуем решить их относительно двух параметров. Относительно x решить их не представляется возможным, так как при $x = x_0, y = y_0, c = c_0$ получим $\left(\frac{dx}{dc}\right)_0 = \infty$.

Действительно, перепишем второе уравнение (3.33) в виде

$$\Phi(x, c) = -z_0 + \varphi(x, c) + n(x_0 - x) = 0. \quad (3.34)$$

Дифференцируя (3.34) по x , находим

$$\Phi_x = \varphi_x + n_x(x_0 - x) - n. \quad (*)$$

Отсюда, учитывая (3.30), где надо положить $x = x_0$, $c = c_0$, имеем

$$\Phi_x^0 = \varphi_x^0 + n_x^0(x_0 - x_0) - n^0 = 0,$$

т. е.

$$\Phi_x^0 = 0, \quad (3.35)$$

значит, решить (3.34) относительно x нельзя.

Продифференцируем (3.34) по c :

$$\Phi_c = \varphi_c + n_c(x_0 - x).$$

Отсюда

$$\Phi_c^0 = \varphi_c^0. \quad (**)$$

Но $\varphi_c^0 \neq 0$, ибо в противном случае φ не зависело бы от c , следовательно, $\Phi_c^0 \neq 0$. В таком случае, решая (3.34) относительно c , имеем

$$c = c(x). \quad (3.36)$$

Решим первое уравнение (3.33) относительно y :

$$y = y_0 - \sqrt{\frac{1+n^2}{c^2-1}}(x-x_0) \quad (3.37)$$

[m заменено одним из его значений, найденных из (3.31)]. Подставляя теперь значения c и y в (3.29), получаем уравнение образующей конуса K с вершиной M_0 . Этот конус является конусом нашего комплекса. Пересечем его плоскостью

$$X = \text{const} = h. \quad (3.38)$$

В сечении получим кривую

$$Y = y + m(h-x), \quad Z = \varphi + n(h-x). \quad (3.39)$$

Эта кривая пересекается с прямой $M_0e_0(e_0(1, m_0, n_0))$ в некоторой точке N_0 . Условием того, что кривая (3.39) имеет в точке N_0 перегиб, служит следующее равенство:

$$Y'_0 Z''_0 - Y''_0 Z'_0 = 0. \quad (3.40)$$

Это равенство и является условием того, что точка M_0 представляет инфлекссионный центр луча M_0N_0 комплекса. Дифференцируем два раза (3.39) и (3.33) по x , тогда

$$\begin{aligned} Y' &= y' + m'(h-x) - m, & Y'' &= y'' + m''(h-x) - 2m', \\ Z' &= \varphi' + n'(h-x) - n, & Z'' &= \varphi'' + n''(h-x) - 2n'; \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} -y' &= m'(x_0-x) - m, & -y'' &= m''(x_0-x) - 2m', \\ -\varphi' &= n'(x_0-x) - n, & -\varphi'' &= n''(x_0-x) - 2n'. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Берем значение (3.42) в точке M_0 (нулевые индексы при этом отбрасываем):

$$\begin{aligned} y' &= m, & y'' &= 2m', \\ \varphi' &= n, & \varphi'' &= 2n'. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В таком случае равенства (3.41) приобретают вид

$$\begin{aligned} Y' &= m' (h - x), & Y'' &= m'' (h - x), \\ Z' &= n' (h - x), & Z'' &= n'' (h - x). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Подставляя (3.44) в (3.40), имеем

$$m'n'' - n'm'' = 0. \quad (3.45)$$

Равенство (3.31) можно переписать в виде

$$1 + n^2 + m^2 (1 - c^2) = 0. \quad (3.46)$$

Дифференцируя его два раза по x , получаем

$$\begin{aligned} nn' + mm' (1 - c^2) - cc'm^2 &= 0, \\ n'^2 + nn'' + (m'^2 + mm'') (1 - c^2) - 4cc'mm' - m^2 (c'^2 + cc'') &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Из (3.34) находим (при $x = x_0$)

$$c' = -\frac{\Phi_x}{\Phi_c} = 0 \quad (3.48)$$

(нулевые индексы отброшены).

Учитывая (3.48), имеем (при $x = x_0$)

$$c'' = -\frac{\Phi_{xx}\Phi_c - \Phi_x\Phi_{cx}}{\Phi_c^2}. \quad (3.49)$$

Принимая во внимание (*) и (**), получаем (при $x = x_0$)

$$\Phi_{xx} = -\varphi_{xx}, \quad \Phi_{cx} = \varphi_{cx} - n_c. \quad (3.50)$$

Следовательно, (3.49) переписывается в таком виде:

$$c'' = \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_c}. \quad (3.51)$$

Из (3.47) находим (при $x = x_0$)

$$n' = \frac{m}{n} (c^2 - 1) m', \quad (3.52)$$

$$\frac{m^2}{n^2} (c^2 - 1)^2 m'^2 + nn'' + (m'^2 + mm'') (1 - c^2) - m^2 cc'' = 0. \quad (3.53)$$

Умножим второе равенство на m' :

$$\frac{m^2}{n^2} (c^2 - 1)^2 m'^3 + nn''m' + (m'^3 + mm'm'') (1 - c^2) - m'm^2 cc'' = 0. \quad (3.54)$$

Заменяем здесь $m'n''$ его значением $m''n'$ из (3.45). После приведения подобных членов равенство (3.54) примет вид

$$[mm'(1-c^2)]^2 + (nm')^2(1-c^2) - (nm)^2cc'' = 0$$

или

$$(nn')^2 + \left(n \frac{nn'}{m(c^2-1)}\right)^2 (1-c^2) - (nm)^2cc'' = 0. \quad (3.55)$$

Учитывая (3.30), получаем равенство (при $x = x_0$)

$$(\varphi_x \varphi_{xx})^2 - \frac{\varphi_x^4 \varphi_{xx}^2}{1 + \varphi_x^2} - \frac{\varphi_x^2 (1 + \varphi_x^2)}{c^2 - 1} c \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_c} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\varphi_{xx} \varphi_c = \frac{c}{c^2 - 1} (1 + \varphi_x^2)^2. \quad (3.56)$$

Полученное дифференциальное уравнение имеет решение с произволом в две функции одного аргумента. Это как раз совпадает с широтой класса комплексов (3.2).

Таким образом, чтобы построить произвольный комплекс (3.2), необходимо взять однопараметрическое семейство цилиндров (3.28), где функция $\varphi(x, c)$ удовлетворяет уравнению (3.56), и выполнить построение, как это указано в тексте.

Заметим, что, если возможно дать безынтегральное представление комплекса (3.2) полностью через известные нам элементарные построения, то тем самым возможно проинтегрировать уравнение (3.56).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tran son A. Mèmoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace suivant une loi continue, Journal de l'école Polytechnique, v. 22, № 38, 1861.
2. Кованцов Н. И. О векторных полях, присоединенных к комплексу. УМЖ, т. X, № 1, 1958, с. 37—58.
3. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, Изд-во КГУ, 1963. 292 с.
4. Карпенко В. Л. Гиперкомплексы прямых с совпадающими основными точками и с точками совмещения в четырехмерном проективном пространстве. «Укр. геом. сб.», вып. 5—6, Харьков, Изд-во ХГУ, 1968, с. 85—92.
5. Гринцевичюс К. И. О неголономном комплексе. «Литовск. матем. сб.», 9, № 1, Вильнюс, Изд. АН ЛССР, 1968, с. 85—98.
6. Щербаков Р. Н., Бочилло Г. П. К проективно-дифференциальной геометрии комплекса прямых. «Тр. Томск. ун-та», 181, 1965, с. 24—33.
7. Ивлев Е. Т. Некоторые вопросы эквиаффинной теории пары комплексов трехмерного пространства. «Тр. Томск. ун-та», 168, 1963, с. 120—131.
8. Акивис М. А. Проективно-метрическая теория пар T комплексов. «Матем. сб.», 46, № 4, М., 1958, с. 399—420.

Поступила 29 февраля 1972 г.

ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В. В. Макаров

Харьков

Известно, что большинство современных космологических моделей является решениями уравнений Эйнштейна при определенных начальных условиях. Эйнштейновские уравнения совместимы с весьма широким классом начальных условий — распределения плотности, состава, энтропии, скорости вещества и метрики пространства. Естественно поэтому, что разнообразию начальных условий соответствует разнообразие моделей. Грубо можно выделить три класса моделей: I — однородные и изотропные; II — однородные, но анизотропные; III — неоднородные и анизотропные.

В каждом классе можно выделить модели с сингулярностью и без нее. Общим свойством всех моделей является нестационарность, подтверждаемая наблюдениями. Нестационарность и вероятное существование сингулярности в прошлом затрудняет, как показано в работе [1], непосредственные исследования свойств Вселенной в целом. Поэтому большой интерес представляют критерии физичности — те ограничения, которые можно наложить на космологические модели в целом, исходя из соображений, не зависящих от локальных астрофизических наблюдений.

Впервые на необходимость подобных критериев указал К. Гедель [2], построивший космологическую модель с линейным элементом

$$ds^2 = a^2 (d\tau^2 - dx^2 + 1/2e^{2x} dy^2 - dz^2 + 2e^x d\tau dy), \quad (1)$$

где $\lambda = -\frac{1}{2a^2}$ — космологическая постоянная. Эта модель удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, но содержит класс замкнутых времениподобных линий.

К. Гедель отметил, что от подобных недостатков свободны модели, удовлетворяющие требованию геодезической полноты. Однако проверка метрик на геодезическую полноту зачастую затруднительна, а допускаемые в моделях «истинные» сингулярности осложняют интерпретацию геодезической полноты как критерия «физичности» метрики.

Более естественно в качестве упомянутого критерия использовать критерий «ограниченной полноты в будущем (прошлом)», введенный М. А. Улановским [3].

Согласно определению, данному в работе [3], пространство V_n называется ограничено полным в будущем (прошлом), если всякая изотропная геодезическая, начиная от произвольной своей точки, может быть продолжена в будущее (прошлое) до сколь угодно больших значений аффинного параметра. Аналогичное определение можно дать для ограниченной полноты в прошлом.

Выполнение критерия ограниченной полноты в будущем (прошлом) гарантирует невозможность локально изометрического отображения данного V_n на собственное подмногообразие V'_n той же размерности и сигнатуры. Пространство, не удовлетворяющее требованию полноты в прошлом или будущем, не является геодезически полным. Если при этом V_n не является частью полного V'_n , то это означает, что рассматриваемая метрика имеет истинную сингулярность.

В цитируемой работе [3] критерий ограниченной полноты был получен для метрик вида

$$ds^2 = dt^2 - f^2(t) d\sigma^2, \quad (2)$$

где $d\sigma^2$ — полная положительная метрика на V_{n-1} .

Именно метрика вида (2) ограничена полна в будущем, если $\int_0^\infty f(t) dt = \infty$. Метрикам вида (2) соответствуют космологические модели класса I [4]. Однако, как показано в работе [1], значительно больший интерес представляют модели классов II, III. Л. П. Грищуком [4] был выделен класс анизотропных метрик, удовлетворяющих критерию физической однородности.

В данной работе получен критерий ограниченной полноты для метрик вида

$$ds^2 = dt^2 - f^2(t) e^{\mu(x_1, x_2)} [dx_1^2 + dx_2^2] - \psi^2(t) e^{\lambda(x_3)} dx_3^2, \quad (3)$$

где f, ψ — произвольные функции; а μ и λ таковы, что положительная метрика

$$d\sigma^2 = e^{\mu(x_1, x_2)} [dx_1^2 + dx_2^2] + e^{\lambda(x_3)} dx_3^2$$

полна на V_3 . Частным случаем метрик вида (3) являются метрики Торна и большинство метрик Грищука.

Выпишем одно из уравнений геодезических:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + e^\mu f \ddot{f} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 [x_1^2 + x_2^2] + e^\lambda \psi \ddot{\psi} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \dot{x}_3^2 = 0,$$

где $x_i = \frac{dx_i}{dt}$. Обозначая далее $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\frac{dt}{ds} = t'$, получаем

$$\frac{t''}{(t')^2} = -e^\mu f \ddot{f} (x^2 + y^2) - e^\lambda \psi \ddot{\psi} z^2,$$

откуда

$$\frac{\ddot{s}}{s} = e^\mu (x^2 + y^2) \ddot{f} + e^\lambda z^2 \ddot{\psi}$$

(здесь и далее s — аффинный параметр). В данных обозначениях уравнение распространения света имеет вид

$$f^2(t) e^\mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \psi^2(t) e^\lambda \dot{z}^2 = 1.$$

После простых преобразований находим

$$\frac{\ddot{s}}{s} = \frac{\dot{f}}{f} e^{\psi} f^2(t) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\dot{\psi}}{\psi} e^{\lambda \psi^2} (t) \dot{z}^2.$$

Предположим теперь, что существует две функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ такие, что

$$0 \leq \varphi_1 \leq \min(f, \psi), \quad \left(\frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1}\right) \leq \min\left(\frac{\dot{f}}{f}, \frac{\dot{\psi}}{\psi}\right);$$

$$\varphi_2 > \max(f, \psi), \quad \left(\frac{\dot{\varphi}_2}{\varphi_2}\right) > \max\left(\frac{\dot{f}}{f}, \frac{\dot{\psi}}{\psi}\right).$$

Тогда $\varphi_1 < \dot{s}\varphi_2$ и

$$\int_0^\infty \varphi_1(t) dt < s \leq \int_0^\infty \varphi_2(t) dt.$$

Таким образом, расходимость интеграла $\int_0^\infty \varphi_1(t) dt$ означает, что рассматриваемое V_4 является ограниченно полным в будущем.

Если же $\int_0^\infty \varphi_2(t) dt$ сходится, то пространство является геодезически неполным.

Имеет место и обратное утверждение: если пространство V_4 ограничено полно в будущем, то, поскольку поверхности $x_3 = \text{const}$ а также $x_2 = \text{const}$ и $x_1 = \text{const}$ вполне геодезические, соответственно $\int_0^\infty f dt = \infty$ и $\int_0^\infty \psi dt = \infty$.

Полученные результаты несложно обобщить для случая

$$ds^2 = dt^2 - f^2(t) d\sigma_1^2(\{x_i\}) - \psi^2(t) d\sigma_2^2(\{y_j\}), \quad (4)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, m$; $\{x_i\} \cap \{y_j\} = \emptyset$.

В заключение отметим, что рассматриваемые пространства V_4 интерпретируются как пространства событий. Поэтому ясно, что критерию ограниченной полноты могут удовлетворять модели, которым не соответствует какое-либо реальное распределение материи. В качестве примера можно привести пространство с метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М., «Наука», 1967. 654 с.
2. Gödel K. Rev. Mod. Phys., 21, 447, 1949.

3. Улановский М. А. О конформной и геодезической полноте псевдоримановых пространств физического типа. «Укр. геометр. сб.», вып. 13, Харьков, Изд-во ХГУ, 1972, с. 172—179.

4. Грищук Л. П. Критерии пространственной однородности и космологические модели. Астроном. ж., т. 44, вып. 5, 1967, с. 1097—1103.

Поступила 27 мая 1972 г.

ОСОБЕННОСТЬ У КОНЦА КРАТЧАЙШЕЙ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ. I

А. Д. Милка

Харьков

Пусть F — выпуклая поверхность, а L — кратчайшая на F , оканчивающаяся в точке T и не сводящаяся к прямолинейному отрезку в окрестности этой точки. Рассмотрим плоскости, опорные к F в T , пределы опорных плоскостей поверхности во внутренних точках кратчайшей. Будем считать, что указанные предельные плоскости не все совпадают. Тогда границей пересечения полупространств, определяемых этими плоскостями, включающих поверхность F , является, как можно заметить, двугранный угол, ребру которого принадлежит полукасательная к L в точке T . Назовем этот угол предельным двугранным углом кратчайшей. Кратчайшая L на поверхности F обладает характерной особенностью: сферический образ L в окрестности точки T не есть простая кривая и не спрямляем.

Цель этой заметки — доказать существование поверхности и кратчайшей с описанными выше свойствами, что осуществляется построением соответствующего примера.

Пример кратчайшей на выпуклой поверхности, исходящей из гладкой точки, с неспрямляемым сферическим изображением, являющимся простой кривой, построен ранее в [1]. Аналогичный пример легко получается и как следствие результата данной заметки. (В настоящее время автором построен пример выпуклой поверхности, содержащей кратчайшую линию, имеющую неспрямляемое сферическое изображение в окрестности некоторой внутренней точки. В п. 1 указана специальная выпуклая поверхность с выделенной на ней квазигеодезической линией. На этой поверхности сферическое изображение открытой квазигеодезической, которая даже является геодезической, в окрестности ее конечной точки представляется неспрямляемой ломаной, напоминающей по форме график функции $y = \sin \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$. Далее в п. 2, 3 устанавливается, что при некоторых дополнительных предположениях квазигеодезическая в окрестности конечной точки является на построенной поверхности кратчайшей линией. В п. 2 для удобства приводится схема этого доказательства, в п. 3

выносятся алгебраические выкладки. Заметим, что для рассматриваемой квазигеодезической почти независимо от ее выбора (сначала строится эта линия, затем по ней определяется поверхность) предельный двугранный угол, как оказывается, оценивается снизу положительной постоянной. Вопрос о точности такой оценки, имеющий и самостоятельное значение, для произвольной кратчайшей будет рассматриваться в другой публикации.

1. Построение поверхности

Пусть R — единичная окружность в некоторой плоскости E . Рассмотрим выпуклую ломаную L , описанную вокруг R , с конечной длиной, меньшей длины окружности, и с бесконечным числом звеньев. Пусть T_0 и T — крайние вершины ломаной, а $T_0, T_1, \dots, T_k, \dots$ — последовательные точки касания L с R , так что T — их точка сгущения. Внутренние вершины ломаной L обозначим соответственно $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots$. Для длин отрезков ломаной L введем следующее обозначение: $|P_k T_k| = |P_k T_{k+1}| = s_k$. В примере, который здесь строится, считается, что $s_k = q^k$, где $0 < q < 1$. Пусть g — прямая, перпендикулярная к E , проходящая через центр R , и T^+, T^- — две точки на g , равноотстоящие от центра. Проведем плоскость E_k через точку $T^+ (T^-)$ и отрезок $T_k P_k$ с четным (соответственно нечетным) номером k . Пересечение полупространств, содержащих L , определяемых плоскостями $\{E_k\}$, является выпуклым телом. Границу замыкания этого тела, выпуклую бесконечногранную поверхность, обозначим F . Будет доказано (при некотором дополнительном предположении относительно длины $|T^+ T^-|$), что в окрестности T линия L на F есть кратчайшая.

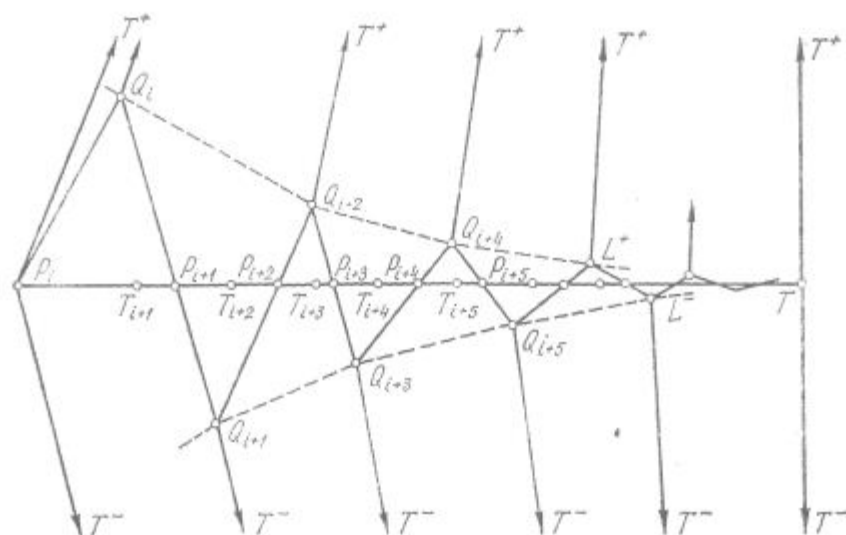
Внутренность L на поверхность F является, очевидно, геодезической; сферическое изображение внутренности L — бесконечнозвенная ломаная, звенья которой по длине сходятся к величине $(\pi - 2\mu)$, где $\mu < \pi/2$ — угол наклона граней поверхности, или плоскостей E_k к плоскости E ; L в точке T имеет определенное направление, касательное к окружности R , перпендикулярное на поверхности к отрезкам TT^+ и TT^- ; предельный двугранный угол V линии L (он определяется так же, как и для кратчайшей) образован двумя гранями, проходящими через точки T^+ и T^- соответственно, наклоненными к E под одним и тем же углом μ ; ребро угла V касается R .

Поверхность F в полуокрестности линии $T^+ TT^-$, содержащей участок L , по своему строению напоминает бесконечногранную скошенную бипирамиду. Вид части этой окрестности (вместе с соответствующими элементами поверхности F и в тех же обозначениях, что и для поверхности) в проекции на плоскость, проходящую через ребро V , перпендикулярно к E , представлен на рисунке (число i — достаточно большое, но фиксированное).

Здесь прямолинейный отрезок $P_i T$ соответствует участку линии L . Другие сплошные линии, внутренние для данной фигуры, кото-

рую будем обозначать Δ , соответствуют ребрам поверхности, а точки $\{Q_k\}$ — ее вершинам. Ломаная $Q_0, Q_1, \dots, Q_k, \dots$ — бесконечнозвенная, звенья которой сгущаются к точке T . Ребро поверхности $Q_{k-1}Q_k$, проходящее через точку P_k , получено пересечением плоскостей E_k и E_{k+1} , а ребро $T^+Q_k(T^-Q_k)$ с четным (соответственно нечетным) номером k — пересечением E_k и E_{k+2} .

Введем еще две вспомогательные бесконечнозвенные ломаные, принадлежащие F : $L^+ \equiv Q_0Q_2 \dots Q_{2k} \dots$, составленную отрезками $Q_{2k}Q_{2k+2}$ и $L^- \equiv Q_1Q_3 \dots Q_{2k+1} \dots$, которую образуют отрезки вида $Q_{2k-1}Q_{2k+1}$. Звенья этих ломаных отмечены на рисунке пунктиром. Четырехугольник на F при точке T , содержащий участок



Δ , ограниченный отрезками T^+T_i , T^-T_i , T^+T и TT^- , разбивается этими ломаными на три области, каждая из которых разворачивается на плоскость: область Φ , по которой проходит L , и области Φ^+ и Φ^- , содержащие соответственно точки T^+ и T^- . В наших условиях ломаные L^+ , L^- являются вогнутыми в сторону Φ , следовательно, в сторону областей Φ^+ и Φ^- эти ломаные соответственно выпуклые; эти линии в точке T имеют направление линии L . Высказанные утверждения проверяются в п. 3. Участок линии L в развертке Φ представляет собой, очевидно, прямолинейный отрезок.

2. План доказательства

В дальнейшем части фигуры Δ , на которые ее разбивает L , обозначим соответственно Δ^+ , содержащую точку T^+ , и Δ^- , содержащую T^- .

Допустим, что L в окрестности T — не кратчайшая. Тогда существует последовательность точек $\{X_n | X_n \in L\}$, сходящихся к T , и соответствующая им последовательность $\{\overline{X_n T}\}$ кратчайших на F , для которых при любом n имеем $\overline{X_n T} \neq X_n T$, где $X_n T$ — участок

L . Как вытекает из результатов [2], кратчайшая $\overline{X_n T}$ и линия L образуют в точке T на F ненулевой угол; очевидно, при $n \rightarrow \infty$ угол между этими линиями стремится к нулю и $\overline{X_n T}$ располагается в фигуре Δ в достаточно малой окрестности T . Можно считать, что кратчайшая $\overline{X_n T}$ во внутренних точках не пересекается с Δ . Тогда эта кратчайшая принадлежит Δ^+ или Δ^- .

Пусть $\overline{X_n T} \in \Delta^+$ (в другом случае доказательство аналогично). Из свойств ломаной L^+ по отношению к областям Φ и Φ^+ следует, что линия $\overline{X_n T}$ состоит из двух участков, принадлежащих указанным областям, и пересекается своей внутренностью с линией L^+ лишь в одной точке $Y_k \in Q_k Q_{k+2}$ ($Y_k \neq Q_k, Q_{k+2}$) для определенного четного k , причем $k \rightarrow \infty$ одновременно с n . Эти участки кратчайшей $\overline{X_n T}$, которые обозначим соответственно $X_n Y_k$ и $Y_k T$, при разворачивании Φ и Φ^+ на плоскость переходят в прямолинейные отрезки. Отложим (в развертке Φ) от точки $\bar{Q}_k$ проекции Q_k на L , вдоль линии L в сторону точки P_k отрезок фиксированной длины l , подобранной таким образом, чтобы этот отрезок полностью помещался в области Φ ; обозначим Z_k конец этого отрезка, отличный от $\bar{Q}_k$. Линия на F , составленная из отрезка $Z_k X_n \subset L$ и кратчайшей $\overline{X_n T}$, очевидно, короче участка $Z_k T$ линии L . Введем еще два отрезка: $Z_k Q_k \subset \Phi$ и $Q_k T \subset \Phi^+$ (имея в виду, что области Φ, Φ^+ разворачиваются на плоскость и что L^+ по отношению к ним имеет определенные свойства выпуклости, можем говорить о подобных отрезках).

Фигура на F , содержащая отрезок $Q_k Y_k$, ограниченная этими отрезками, отрезком $Z_k X_n$ и кратчайшей $\overline{X_n T}$, разворачивается на плоскость в четырехугольник Δ_k , поскольку звено $Q_k Q_{k+2}$ ломаной L^+ однозначно проектируется прямолинейными отрезками из точки T и точки Z_k в развертках областей Φ^+ и Φ соответственно. Этот четырехугольник, как оказывается, является выпуклым: угол при вершине, соответствующей X_n , меньше π ; углы при вершинах, соответствующих Z_k и T , стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$; соответствующий точке Y_k угол ψ_k (можно, очевидно, считать $n = n(k)$), меньше π , и это обеспечивается надлежащим подбором величины μ (п. 3). В тех же условиях диагональ Δ_k (обозначим d_k длину диагонали), которая соединяет вершины, соответствующие Z_k и T , оказывается по длине большей, чем $\bar{d}_k = |Z_k T|$. Здесь мы приходим к противоречию с допущением в начале параграфа. Следовательно, L в окрестности T — кратчайшая на F . Этим доказательство почти закончено. Осталось лишь убедиться в справедливости неравенств $\psi_k < \pi$ и $d_k > \bar{d}_k$ при всех достаточно больших k . Проверка этих неравенств осуществляется в следующем параграфе.

3. Проверка неравенств

Используем развертки на плоскость областей Φ и Φ^+ . Для образов элементов поверхности в этих развертках применим те же обозначения, что и на поверхности. В развертке Φ :

$$\begin{aligned} h_k &= |Q_k \bar{Q}_k|, \quad s_k^* = |Q_k Q_{k+2}|, \\ \bar{s}_k &= |\bar{Q}_k \bar{Q}_{k+2}|, \quad l_k = |Z_k Q_k|; \end{aligned}$$

δ_k и φ_k — соответствующие углы наклонов отрезков $Z_k Q_k$ и $Q_k Q_{k+2}$ к линии L . Легко доказывается, что при любом k имеем $|\bar{Q}_k P_k| = s_{k+1}$ и $|\bar{Q}_k P_{k+1}| = s_k$, тогда $\bar{s}_k = s_k + s_{k+1} + s_{k+2} + s_{k+3}$. Будет очевидно, что φ_k монотонно стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$; это соответствует вогнутости L^+ в сторону области Φ . Тогда линия L^+ в развертке Φ^+ является выпуклой в сторону этой развертки и подходит к отрезку TT^+ под углом $\pi/2$. Свяжем с разверткой Φ^+ ортогональную декартову систему с началом в T , с положительным направлением оси (y) по отрезку TT^+ и положительным направлением оси (x) по полукасательной к L^+ в точке T . Точка Q_k в этой системе определяется координатами (x_k, y_k) . Обозначим через θ_k угол наклона отрезка $Q_{k+2} Q_k$ к оси (x), ε_k — угол наклона TQ_k к оси (x), $\rho_k = |Q_k T|$ и ω_k — кривизну в точке Q_k поверхности F .

Для интересующих нас величин ψ_k и d_k получим следующие представления:

$$\begin{aligned} \psi_k &= \pi - \varphi_k - \delta_k + \theta_k - \varepsilon_k, \\ d_k^2 &= l_k^2 + \rho_k^2 - 2l_k \rho_k \cos \psi_k. \end{aligned}$$

Пусть h — расстояние в пространстве между точками T^+ и T_k поверхности; h не зависит от k и $h = 1/\cos \mu$. Легко устанавливается, что для кривизны ω_k справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\omega_k/2) = (s_k + s_{k+1})/(h - h_k).$$

Имеем еще

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_k &= (h_k - h_{k+2})/\bar{s}_k, \quad \operatorname{tg} \delta_k = h_k/l, \\ (s_k^*)^2 &= (h_k - h_{k+2})^2 + \bar{s}_k^2, \quad l_k^2 = l^2 + h_k^2, \\ \theta_k &= \varphi_k + \sum_{l=1}^{\infty} \omega_{k+2l}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_k = y_k/x_k. \end{aligned}$$

Введем такие обозначения:

$$\alpha_k = (s_k s_{k+1} - s_{k+2} s_{k+3})/\bar{s}_k, \quad \beta_k = \sum_{l=0}^{\infty} s_{k+2+l}.$$

Легко доказывается, что

$$h_k = (s_k s_{k+1})/\cos \mu.$$

Из представлений для φ_k и ω_k следует, что

$$\varphi_k = \alpha_k/\cos \mu + O(s_k^3), \quad \omega_k = 2(s_k + s_{k+1})\cos \mu + O(s_k^3).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\theta_k &= \alpha_k / \cos \mu + 2 \cos \mu \beta_k + 0(s_k^3), \\ \sin \theta_k &= \alpha_k / \cos \mu + 2 \cos \mu \beta_k + 0(s_k^3), \\ \cos \theta_k &= 1 - \frac{1}{2} (\alpha_k / \cos \mu + 2 \cos \mu \beta_k)^2 + 0(s_k^4).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$s_k^* = \bar{s}_k + (\bar{s}_k/2) (\alpha_k / \cos \mu)^2 + 0(s_k^5)$$

и, значит,

$$\begin{aligned}y_p &= \sum s_k^* \sin \theta_k = \sum \bar{s}_k (\alpha_k / \cos \mu + 2 \cos \mu \beta_k) + 0(s_p^4), \\ x_p &= \sum s_k^* \cos \theta_k = \sum \bar{s}_k - 2 \sum \bar{s}_k (\alpha_k \beta_k + \cos^2 \mu \beta_k^2) + 0(s_p^5).\end{aligned}$$

Здесь и далее проводится суммирование по всем четным k , начиная с p . Выписав теперь выражение для $\operatorname{tg} \varepsilon_p$, получим

$$\varepsilon_p = (\sum \bar{s}_k)^{-1} \sum \bar{s}_k (\alpha_k / \cos \mu + 2 \cos \mu \beta_k) + 0(s_p^3).$$

Далее

$$\operatorname{tg} \delta_p = h_p / l = 0(s_p^2).$$

Теперь имеем

$$\psi_p = \pi - \cos \mu \frac{\sum \bar{s}_k \alpha_k}{\sum \bar{s}_k} \left(\frac{1}{\cos^2 \mu} - \frac{\sum \bar{s}_k (\beta_p - \beta_k)}{\sum \bar{s}_k \alpha_k} \right) + 0(s_p^2).$$

Так как

$$C_1 q^p \leq (\sum \bar{s}_k \alpha_k) / \sum \bar{s}_k \leq C_2 q^p,$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные, не зависящие от p при $p \rightarrow \infty$, то для доказательства неравенства $\psi_p < \pi$ достаточно установить, что

$$\nu_p^0 = 2 \frac{\sum \bar{s}_k (\beta_p - \beta_k)}{\sum \bar{s}_k \alpha_k} < \nu^0 < \frac{1}{\cos^2 \mu}, \quad (1)$$

где ν^0 — постоянная, не зависящая от p (при больших p). Неравенство (1) может быть выполнено при соответствующем подборе μ . Поскольку нам будет нужно удовлетворить еще одно подобное неравенство, то выбор μ проведем несколько позже. Сейчас же считается, что нужное μ уже подобрано. Тогда имеет смысл доказать неравенство $d_p > \bar{d}_p$. Имеем

$$\begin{aligned}l_p &= l + 0(s_p^4), \quad \rho_p = x_p / \cos \varepsilon_p = \\ &= \sum \bar{s}_k + (2 \sum \bar{s}_k)^{-1} \{ [\sum \bar{s}_k (\alpha_k / \cos \mu + 2 \cos \mu \beta_k)]^2 - \\ &\quad - 4 (\sum \bar{s}_k) \sum \bar{s}_k (\alpha_k \beta_k + \cos^2 \mu \beta_k^2) \} + 0(s_p^5).\end{aligned}$$

Отсюда, зная значение ψ_p , после простых преобразований находим

$$\begin{aligned}d_p^2 &= (l + \sum \bar{s}_k)^2 + [4l \cos^2 \mu \sum \bar{s}_k (\beta_p - \beta_k) \alpha_k] \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\cos^2 \mu} - \frac{\sum \bar{s}_k (\beta_p - \beta_k)^2}{\sum \bar{s}_k (\beta_p - \beta_k) \alpha_k} \right] + 0(s_p^4).\end{aligned}$$

Так как

$$\bar{d}_p = l + \sum \bar{s}_k, \\ D_1 q^{3p} \leq \sum \bar{s}_k (\beta_p - \beta_k) \alpha_k \leq D_2 q^{3p},$$

где D_1, D_2 — положительные постоянные, не зависящие от p при больших p , для доказательства неравенства $d_p > \bar{d}_p$ достаточно убедиться, что

$$\nu_p^1 \equiv \frac{\sum \bar{s}_k (\beta_p - \beta_k)^2}{\sum \bar{s}_k (\beta_p - \beta_k) \alpha_k} < \nu^1 < \frac{1}{\cos^2 \mu} \quad (2)$$

(здесь ν^1 — постоянная, не зависящая от p при $p \rightarrow \infty$).

Напомним, что в неравенствах (1), (2) суммирование проводится по четным k , начиная с p . Если бы случилось, что кратчайшее $\overline{X_n T}$ принадлежат Δ^- (см. п. 2), то было бы необходимо проверить аналогичные неравенства, в которых суммирование осуществляется по всем нечетным k , начиная с некоторого p . Таким образом, для доказательства того, что линия L в окрестности T — кратчайшая на F , необходимо подобрать μ , что при любом p выполнялись неравенства (1), (2), в которых суммирование осуществляется по всем k , начиная с p и имеющим с p одинаковую четность. Легко убедиться в том, что при $p \rightarrow \infty$ величины ν_p^0 и ν_p^1 имеют конечные пределы. Взяв соответственно числа ν^0, ν^1 чуть большими этих пределов (и соответствующих пределов для нечетных p) и выбрав μ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \frac{1}{\cos^2 \mu}, \quad \nu^1 < \frac{1}{\cos^2 \mu},$$

увидим, что для поверхности F , определяемой этим числом μ , при всех достаточно больших p неравенства (1), (2) справедливы. Тем самым построение примера, о котором говорилось в начале статьи, полностью закончено.

* * *

Предельные двугранные углы кратчайших на выпуклых поверхностях, которые можно получить изложенным способом, ограничены снизу. Для этих углов выполняется неравенство

$$2\mu \geq 2\frac{\pi}{3},$$

так как при $k \geq p + 2$ имеем $\beta_p - \beta_k > 4\alpha_k$ и из (2) следует, что $\cos \mu < 1/2$. Вопросы, связанные с точной оценкой предельных углов кратчайших, будут обсуждаться в другой работе (оказывается, эти углы всегда $\geq \pi/2$).

Заметим, что результаты, аналогичные полученным в настоящей работе, тем же способом устанавливаются в пространствах сферическом и Лобачевского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Залгаллер В. А. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. «Укр. геометр. сб.», вып. 10, Харьков, Изд-во ХГУ, 1971, с. 12—19.
2. Милка А. Д. О некоторых свойствах квазигеодезических. «Укр. геометр. сб.», вып. 11, Харьков, Изд-во ХГУ, 1971, с. 73—77.

Поступила 5 июня 1972 г.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

И. Г. Мулин

Абакан

1. Пространства постоянной кривизны представляют собой наиболее изученный класс римановых пространств. Известны многие обобщения понятия постоянной кривизны. Одно из возможных обобщений этого понятия составляет содержание статьи.

Рассмотрим n -мерные римановы пространства R_n ($n = 2, 3, \dots$) трех типов. К первому отнесем такие R_n , тензор кривизны ρ_{ijkl} каждого из которых имеет вид

$$\rho_{ijkl} = \alpha (g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}) + \beta (u_{ik}u_{jl} - u_{jk}u_{il}) + \gamma (v_{ik}v_{jl} - v_{jk}v_{il}), \quad (1)$$

где α, β и γ — скаляры; g_{ik} ($i, k = 1, \dots, n$) — метрический тензор пространства; u_{ik} и v_{ik} — два симметричных тензора. К соотношению (1) присоединим требование, чтобы тензоры u_{ik} и v_{ik} удовлетворяли системе уравнений в ковариантных производных вида

$$\begin{aligned} u_{ik, m} &= \overset{1}{\sigma_m} g_{ik} + \overset{2}{\sigma_m} u_{ik} + \overset{3}{\sigma_m} v_{ik}, \\ v_{ik, m} &= \overset{1}{\tau_m} g_{ik} + \overset{2}{\tau_m} u_{ik} + \overset{3}{\tau_m} v_{ik}, \end{aligned} \quad (2)$$

где запятой обозначено ковариантное дифференцирование, а $\overset{1}{\sigma_m}, \dots, \overset{3}{\tau_m}$ — векторные поля, свойства которых устанавливаются в каждом случае отдельно. Ко второму типу отнесем пространства R_n , тензор кривизны ρ_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$) каждого из которых следующий:

$$\rho_{ijkl} = \alpha (p_{ik}p_{jl} - p_{jk}p_{il}) + \beta (s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il}) + \lambda s_{ij}s_{kl} \quad (3)$$

где α , β и λ — скаляры; ρ_{ik} и s_{ik} — симметрический и кососимметрический тензоры. Уравнениям (2) в этом случае соответствуют такие две системы:

$$a) \rho_{ik,m} = \sigma_m \rho_{ik}, \quad б) s_{ik,m} = \tau_m s_{ik}, \quad (4)$$

где σ_m , τ_m — векторные поля, свойства которых устанавливаются в каждом случае. К третьему типу мы относим такие R_n , для каждого из которых тензор кривизны ρ_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$) имеет вид

$$\rho_{ijkl} = \alpha (r_{ik}r_{jl} - r_{jk}r_{il} + \lambda r_{ij}r_{kl}) + \\ + \beta (s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} + \mu s_{ij}s_{kl}), \quad (5)$$

где α , β , λ , μ — скаляры; r_{ik} и s_{ik} — два кососимметрических тензора. Здесь уравнениям (4) соответствуют

$$a) r_{ik,m} = \overset{1}{\theta}_m r_{ik} + \overset{2}{\theta}_m s_{ik}, \\ б) s_{ik,m} = \overset{1}{\pi}_m r_{ik} + \overset{2}{\pi}_m s_{ik}, \quad (6)$$

где $\overset{1}{\theta}_m, \dots, \overset{2}{\pi}_m$ — векторные поля, свойства которых в каждом случае устанавливаются отдельно.

В статье рассматриваются R_n только с положительной фундаментальной формой ds^2 .

2. Сформулируем результаты, которые нам удалось получить.

Теорема 1. Если (1) и (2) имеют вид соответственно

$$\rho_{ijkl} = \alpha (g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}) + \beta (u_{ik}u_{jl} - u_{jk}u_{il}), \quad (7)$$

$$u_{ik,m} = \sigma_m g_{ik} + \tau_m u_{ik}, \quad (8)$$

то такое пространство есть либо R_n постоянной кривизны, либо прямое произведение пространств постоянной кривизны, либо произвольное R_2 , либо прямое произведение произвольного R_2 на пространство постоянной кривизны; однако не всякое произведение конечного числа пространств постоянной кривизны удовлетворяет условиям (7) и (8).

Теорема 2. Если соотношения (1) сводятся к (7) и если рассматриваемое R_n неприводимо, то такое R_n является пространством постоянной кривизны при $n > 2$.

Теорема 3. Если (1) сводятся к (7) и если рассматриваемое R_n приводимо, то такое R_n есть либо прямое произведение евклидовой прямой на неприводимое R_2 постоянной кривизны, либо прямое произведение евклидовой прямой на неприводимое R_3 постоянной кривизны.

Теорема 4. Если к соотношениям (3) и (4) присоединить условие

$$\rho_{ijkl,m} = 0, \quad (9)$$

характеризующее симметрические пространства, то наше R_n есть либо n -мерное евклидово пространство E_n , либо известное прост-

пространство А. П. Широкова [1], либо прямое произведение R_2 постоянной кривизны на R_{n-2} тоже постоянной кривизны.

Теорема 5. Если наше R_n несимметрическое, то условия (3) и (4) дают либо произвольное неприводимое двумерное пространство, либо прямое произведение двух двумерных произвольных пространств R_2 , либо прямое произведение произвольного двумерного пространства R_2 на евклидову прямую E_1 .

Теорема 6. Пространство R_n , характеризуемое соотношениями (5) и (6), есть либо n -мерное евклидово пространство E_n , либо прямое произведение двух произвольных двумерных несимметрических пространств R_2 .

3. Все шесть теорем доказываются по одной схеме. Как видно из формулировок этих теорем, наиболее интересен случай, когда рассматриваются соотношения (3), (4) вместе с условием (9), т. е., когда согласно теореме 4 в качестве R_n получается пространство А. П. Широкова. Поэтому здесь будет подробно проведено доказательство теоремы 4 в той ее части, где к соотношениям (3), (4) присоединяется условие (9). На этом примере будут видны все методы исследования.

Рассмотрим случай

$$\alpha^2 = \beta^2 = 1. \quad (10)$$

Подставляя тензор (3) в тождества Риччи

$$\rho_{ijkl} + \rho_{iklj} + \rho_{iljk} = 0, \quad (11)$$

получаем

$$(\lambda - 2)(s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} - s_{ij}s_{kl}) = 0. \quad (12)$$

Пусть

$$s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} - s_{ij}s_{kl} \neq 0. \quad (13)$$

Тогда $\lambda = 2$ и (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho_{ijkl} = & \alpha(p_{ik}p_{jl} - p_{jk}p_{il}) + \\ & + \beta(s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} + 2s_{ij}s_{kl}). \end{aligned} \quad (14)$$

Подстановка ρ_{ijkl} из (14) в (9) в силу (4) дает

$$\begin{aligned} & \alpha\sigma_m(p_{ik}p_{jl} - p_{jk}p_{il}) + \\ & + \beta\tau_m(s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} + 2s_{ij}s_{kl}) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Предположим, что

$$\tau_m = 0. \quad (16)$$

Тогда (15) запишем так:

$$\sigma_m(p_{ik}p_{jl} - p_{jk}p_{il}) = 0. \quad (17)$$

Если

$$p_{ik}p_{jl} - p_{jk}p_{il} = 0, \quad (18)$$

то ввиду (3), (46) необходимо определить тип R_n , характеризуемого условиями

$$p_{ijkl} = \beta (s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} + 2s_{ij}s_{kl}), \quad (19)$$

$$s_{ij, k} = 0, \quad (20)$$

ибо сейчас $\tau_m = 0$. Условия интегрируемости системы уравнений (20) ввиду (19) и того, что $s_{ij} = -s_{ji}$, в подробной записи выглядит так:

$$(s_{.k}^h s_{ji} - s_{.l}^h s_{jk}) s_{ih} + (s_{.k}^h s_{il} - s_{.l}^h s_{ik}) s_{hj} = 0. \quad (21)$$

Исключая из рассмотрения n -мерное евклидово пространство E_n как тривиальный случай, считаем, что $s_{ij} \neq 0$, а потому

$$s_{.k}^h s_{ih} = s_{.l}^h s_{kh} \neq 0, \quad (22)$$

вследствие чего в R_n существует такой вектор η_i , что

$$s_{.k}^h s_{ih} \eta^i \eta^k = 1 \neq 0. \quad (23)$$

Полагая

$$s_{ih} \eta^i = x_h, \quad s_{.k}^h x_h = y_k \quad (24)$$

и свертывая (21) с $\eta^i \eta^k$, получаем

$$s_{il} = y_j x_l - y_l x_j. \quad (25)$$

Не нарушая вида уравнений (4), (21), в (25), векторы x_i и y_i можно считать ортогональными ортами, и тогда (25) примет вид

$$s_{il} = f(y_j x_l - y_l x_j). \quad (26)$$

Так как из (24) и (23) имеем

$$x_i \eta^i = 0, \quad y_i \eta^i = -1, \quad (27)$$

то свертывание результата подстановки s_{il} из (26) в (21) с $\eta^i \eta^l$ дает

$$y_k x_j = 0, \quad (28)$$

что невозможно. Итак, (18) невозможно. В таком случае из (17) получим

$$\sigma_m = 0. \quad (29)$$

Уравнения (4) в силу (29) и (16) примут вид

$$\text{а) } p_{il, k} = 0, \quad \text{б) } s_{il, k} = 0. \quad (30)$$

Так как $s_{ij} = -s_{ji}$, то

$$s_{.j}^h s_{ih} + s_{.i}^h s_{jh} = 0. \quad (31)$$

Свертывая (43а) с p^i в силу (36), получаем

$$m = 0. \quad (44)$$

Теперь (38) в силу (43б) и (44) принимает вид

$$\varphi_j s_l = \varphi_l s_j. \quad (45)$$

Поэтому свертывание (37) с $\eta^i \eta^k$ в силу (36) дает

$$\beta (s_j f_l - s_l f_j) - \beta s^2 s_{jl} = \alpha (p p_i^h s_{hj} - b_j p_l - p_j c_l). \quad (46)$$

Из (36) и (43б) в силу (35) следует, что

$$p \neq 0, \quad a_j \neq 0. \quad (47)$$

Теперь (37) в силу (44) и (43б) примет вид

$$\alpha (f p_{jl} - p p_i^h p_{hj}) - \beta (s_j b_l + s_l b_j) = \beta \varphi_j s_l, \quad (48)$$

а из (39) находим $\alpha p_i^h p_{hj}$ в виде

$$\alpha p_i^h p_{hj} = \frac{\alpha f}{p} p_{jl} + q_{il}, \quad (49)$$

где

$$q_{jl} = -\beta (s_j b_l + s_l b_j) - \frac{\beta}{2} (\varphi_j s_l + \varphi_l s_j). \quad (49')$$

Подставляя $\alpha p_i^h p_{hj}$ из (49), (32), находим

$$\begin{aligned} & q_{ik} p_{jl} - q_{il} p_{jk} + q_{jk} p_{il} - q_{jl} p_{ik} + \\ & + \beta p [(s_{.k}^h s_{jl} - s_{.l}^h s_{jk} + 2s_{.j}^h s_{kl}) p_{ih} + \\ & + (s_{.k}^h s_{il} - s_{.l}^h s_{ik} + 2s_{.i}^h s_{kl}) p_{hj}] = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Из (49') в силу (36) и (44) имеем

$$q_j \equiv q_{jl} \eta^l = 0. \quad (51)$$

Свертыванием (50) с $\eta^i \eta^j$ в силу (36), (55), (48) получаем

$$b_k s_{.} - b_l s_k = 0. \quad (52)$$

Теперь из (36), (52) и (45) определяем

$$c_j s_l - c_l s_j = 0. \quad (53)$$

Исключая $p s_{.k}^h p_{ih}$ из (50) с помощью (46), после приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} & q_{ik} p_{jl} - p_{il} p_{jk} + q_{ik} p_{il} - q_{il} p_{ik} + \\ & + \alpha [f_i s_k - f_k s_i] s_{jl} - (f_i s_l - f_l s_i) s_{jk} + \\ & + (f_j s_k - f_k s_j) s_{il} - (f_j s_l - f_l s_j) s_{ik}] + \\ & + \beta [(p_i b_k + c_i p_k) s_{jl} - (p_i b_l + c_l p_i) s_{jk} + \\ & + (p_j b_k + c_j p_k) s_{il} - (p_j b_l + c_l p_j) s_{ik}] + \\ & + 2s_{kl} (p_i b_l + p_j b_i + c_i p_l + c_l p_i) = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Свертывание (50) с $\eta^l \eta^k$ в силу (36), (44), (52), (53), (51) дает

$$q_{jl} = -\beta (b_i s_l + b_l s_i) - \frac{\beta}{2} (b_i s_l + b_l s_i) - \frac{\beta}{2} (c_i s_l + c_l s_i). \quad (55)$$

Сравнивая (55) и (49'), находим

$$c_i s_l = 0, \quad (56)$$

ибо, согласно (36), $\varphi_i = b_i + 3c_i$. Если

$$s_i = 0, \quad (57)$$

то (49') дает

$$q_{jl} = 0, \quad (58)$$

так что (49) принимает вид

$$p_i^h p_{hj} = \frac{f}{p} p_{jl}. \quad (59)$$

Если же в (56) $s_i \neq 0$, то $c_i = 0$, так что из (36) имеем

$$s^h p_{hj} = 0. \quad (60)$$

В случае, когда $|p_{hj}| \neq 0$, из (60) следует (57), а значит, и (58). Если же $|p_{hj}| = 0$, то, связывая матрицу (p_{hj}) с линейным преобразованием в n -мерном векторном пространстве и учитывая, что $p_{hj} = p_{jh}$, выбираем в этом векторном пространстве такой базис, в котором эта матрица имеет диагональный вид. Перенумеровав базис, эту матрицу запишем так:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & p_{tt} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} t < n, \\ p_{ii} \neq 0, \\ (i = 1, 2, \dots, t). \end{matrix} \quad (61)$$

Тогда R_n распадается в прямое произведение пространств R_t и R_{n-t} . В R_t из (60) опять следует (57), а значит, (58), (59). В R_{n-t} $p_{ij} = 0$, так что (3) и (46) дают, как показано в начале статьи, при исследовании соотношений (20), (21) невозможный случай. Итак, всякий раз имеет место (59).

Определяя p_{jl} из (59), получаем

$$p_{jl} = \omega g_{jl}, \quad (62)$$

где ω — скаляр. Решение системы уравнений (59) проводится (ср. [4]) путем приведения (p_{jl}) к диагональной форме и последующего выбора в R_n , например, римановой системы координат [2]. Тогда в полюсе $g_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, так что в полюсе имеем соотношение вида (62). Так как (62) носит тензорный характер и так как за полюс римановых координат можно взять любую

точку в R_n , то (62) установлено во всем R_n . Подстановка p_i из (62) в (30) дает

$$\omega = \text{const.} \quad (63)$$

Подставляя p_{il} из (62) в (33), находим

$$\begin{aligned} & (\beta s_{.k}^h s_{ih} + \alpha \omega^2 g_{ik}) s_{jl} - (\beta s_{.l}^h s_{ih} + \alpha \omega^2 g_{il}) s_{jk} + \\ & + (\beta s_{.l}^h s_{jh} + \alpha \omega^2 g_{jl}) s_{ik} - (\beta s_{.k}^h s_{ih} + \alpha \omega^2 g_{jk}) s_{il} = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Пусть

$$\beta s_{.k}^h s_{ih} + \alpha \omega^2 g_{ik} = 0, \quad (65)$$

т. е. пусть

$$s_{.k}^h s_{ih} = -\frac{\alpha}{\beta} \omega^2 g_{ik}. \quad (66)$$

Ввиду (63) подстановка $s_{.k}^h$ из (66) в (30 б) дает тождество, поскольку ковариантная производная левой части (66) равна нулю. Соотношения (62) и (66) определяют так называемое пространство А. П. Широкова [1], которое неприводимо.

Пусть теперь

$$a_{ik} \equiv \beta s_{.k}^h s_{ih} + \alpha \omega^2 g_{ik} \neq 0. \quad (67)$$

Так как $a_{ik} = a_{ki}$, то в R_n существует такой вектор μ^i , что

$$(\beta s_{.k}^h s_{ih} + \alpha \omega^2 g_{ik}) \mu^i \mu^k = \pm 1. \quad (68)$$

Рассмотрим случай, когда правая часть (68) равна единице, ибо второй случай рассматривается так же и дает тот же результат.

Полагая

$$s_{jk} \mu^k = x_j, \quad s_{.l}^h x_h = y_l, \quad \lambda_l = \beta y_l + \alpha \omega^2 \mu_l \quad (69)$$

и свертывая (64) с $\mu^i \mu^k$, получаем

$$s_{il} = x_j \lambda_l - x_l \lambda_j, \quad (70)$$

что можно переписать так:

$$s_{il} = \sigma (a_j b_l - a_l b_j), \quad (71)$$

где a_j и b_j — орты соответственно для векторов x_j и λ_j . Подстановка s_{il} из (71) в (64) дает

$$\begin{aligned} & (a_i b_k - a_k b_i) g_{jl} - (a_l b_i - a_i b_l) g_{jk} + \\ & + (a_j b_l - a_l b_j) g_{ik} - (a_j b_k - a_k b_j) g_{il} = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Так как $s_{il} \neq 0$, то ввиду (71) $a_j \nparallel b_j$, поэтому свернув (72) с g_{il} , найдем

$$n = 2. \quad (73)$$

Поскольку (71)

$$a_i a^i = b_i b^i = 1, \quad a_i b^i = 0, \quad (74)$$

то свертывая (72) с $a^i b^j$, получаем

$$g_{il} = -(a_j b_i + a_i b_j). \quad (75)$$

Теперь из (71) и из (75) имеем

$$s_{,k}^h s_{ih} = \sigma^2 g_{ik}. \quad (76)$$

Дифференцируя ковариантно соотношение (76), в силу (30 б) получаем $\sigma = \text{const}$. Соотношения (62) и (76) ввиду (73) дают двумерное пространство А. П. Широкова, т. е. ввиду (9) это есть R_2 постоянной кривизны. Подставляя s_{jl} из (71) в (30.2), находим

$$a_{i,k} b_j + a_i b_{j,k} - a_{j,k} b_i - a_j b_{i,k} = 0. \quad (77)$$

Свертывание (77) с a^i в силу (74) дает

$$b_{jk} = a_j v_k, \quad (78)$$

где

$$v_k = b_{i,k} a^i. \quad (78a)$$

Подставляя $b_{j,k}$ из (78) в (77) и свертывая результат с b^j , в силу (74) и (78a) получаем

$$a_{i,k} = -b_i v_k. \quad (79)$$

Итак, случай (13) при $\tau_m = 0$ исчерпан. Если в (15)

$$\tau_m \neq 0,$$

то в R_n существует такой вектор ε^m , что

$$\tau_m \varepsilon^m = 1.$$

Свертывая (15) с ε^m , находим

$$s_{ik} s_{jl} - s_{jk} s_{il} + 2s_{ij} s_{kl} = a (p_{ik} p_{jl} - p_{jk} p_{il}), \quad (80)$$

где

$$a = -a \tau_m \varepsilon^m. \quad (80')$$

Теперь (14) в силу (80) сводится к рассмотрению R_n , охарактеризованных в теореме 1.

Если же $s_{ik} s_{jl} - s_{jk} s_{il} - s_{ij} s_{kl} = 0$ при $\tau_m = 0$, то, как нетрудно видеть, s_{jl} определяется по формуле вида (71), поэтому в силу (30б) опять приходим к (78), (79). Итак, наше R_n ввиду (9), (78), (79) содержит инвариантное R_2 постоянной кривизны и R_n является в этом случае прямым произведением R_2 постоянной кривизны на R_{n-2} постоянной кривизны, ибо в R_{n-2} тензор (3) зависит лишь от тензора p_{ij} , поэтому постоянство кривизны R_{n-2} определяется теоремой 1.

Осталось рассмотреть последний случай

$$s_{ik} s_{jl} - s_{jk} s_{il} - s_{ij} s_{kl} = 0, \quad \tau_m \neq 0. \quad (81)$$

Предположим, что

$$s_{ik} \neq 0, \quad p_{ik} \neq 0,$$

так как в противном случае получается задача, рассмотренная в теореме 1.

Из (81) следует, что s_{ik} имеет вид

$$s_{ik} = f(a_i b_k - a_k b_i),$$

где f — скаляр; a_i, b_i — единичные ортогональные векторы. Подставляя s_{ik} в (4) и свертывая полученный результат сначала с a^i , затем с b^i , находим, что ковариантные производные $a_{i,k}, b_{i,k}$ имеют вид

$$a_{i,k} = a_{j,k} b^j b_i, \quad b_{i,k} = -a_{j,k} b^j a_i.$$

Отсюда следует, что в R_n существует инвариантное R_2 , натянутое на векторы a_i и b_i . Это R_2 в силу (9) имеет постоянную кривизну.

Рассмотрим любой вектор e^i , ортогональный к этому R_2 . Ковариантная производная e^i может быть представлена в виде

$$e^i_{;k} = A_k a^i + B_k b^i + \sum_{l=3}^n \varphi_k^l c_l^i, \quad (82)$$

где c_l — система из $n-2$ векторов (с компонентами c_l^i), образующих вместе с векторами a_i, b_i ортогональный базис.

Свертывая (82) последовательно с a_i и b_i и учитывая ортогональность базиса, получаем

$$A_k = B_k = 0.$$

Отсюда следует, что существует R_{n-2} , дополнительное к инвариантному R_2 . Тензор кривизны этого R_{n-2} , очевидно, зависит только от симметрического тензора ρ_{ik} . Поэтому в силу теоремы 1 это R_{n-2} является пространством постоянной кривизны или прямым произведением пространств постоянной кривизны. Таким образом, R_n , характеризуемое условиями (81), есть прямое произведение пространств постоянной кривизны. Этим самым теорема 4 полностью доказана.

Примечание. В отличие от [1] выполнение условия вида

$$s_{;k}^h s_{ih} = A \rho_{ik},$$

где A — скаляр, заранее не предполагается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Широков А. П. К теории симметрических пространств. «Уч. зап. Казанск. ун-та», 115, № 14, 1955, с. 3—19.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., ГИТТЛ, 1953, 635 с.
3. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. ИЛ, 1948, 316 с.
4. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1971, 271 с.

Поступила 17 апреля 1972 г.

О СОВПАДЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ В МОНЖЕВОМ МНОГООБРАЗИИ

М. А. Николаенко

Харьков

Задача о совпадении геодезических кривых с характеристическими на интегральных поверхностях нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка была поставлена Софусом Ли [1]. Как говорит автор, в полном объеме она не исчерпана. Им построен пример монжева уравнения

$$\Omega(x; dx) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\varphi(x, y, z)^2 = 0,$$

соответствующего нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка:

$$(p\varphi_x + q\varphi_y - \varphi_z)^2 - (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - 1)(p^2 + q^2 + 1) = 0,$$

в системе интегральных кривых которого геодезические линии совпадают с характеристическими, но геодезические линии понимаются С. Ли в классическом смысле. В неголономном монжевом многообразии они соответствуют геодезическим прямейшим (главная нормаль интегральной кривой совпадает с нормалью к «конусу Монжа»).

В монжевой геометрии геодезические линии расщепляются на геодезические «кратчайшие» и «прямейшие», согласно двум определениям классической теории поверхностей, и их дифференциальные уравнения в координатной форме запишем [2] в виде

$$x_i'' + \lambda'(s) \Omega_{x_i'} + \lambda(s) [(\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i}] = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

для геодезических «кратчайших», где $\lambda(s)$ — множитель Лагранжа.

Дифференциальные уравнения геодезических «прямейших» такие:

$$x_i' - \nu(s) \Omega_{x_i'} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

и дифференциальные уравнения характеристических линий [6] —

$$(\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i} = \mu \Omega_{x_i'} \quad i = 1, 2, 3.$$

Поэтому поставим вопрос об их совпадении в системе интегральных кривых монжева многообразия.

1. Пусть задано монжево дифференциальное уравнение

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; dx_1, dx_2, dx_3) = 0$$

обыкновенное, однородное степени $k > 1$ относительно дифференциалов.

Положив

$$\frac{dx_i}{ds} = x_i',$$

запишем его так:

$$\Omega(x_i; x_i') = 0. \quad (1)$$

С каждой интегральной кривой L монжева уравнения можно связать следующие векторы: r' — орт ее касательной; r'' — коллинеарный ее главной нормали; $N(\Omega_{x_i'})$ — вектор нормали к конусу Монжа.

Введем в рассмотрение вектор P с компонентами

$$P_i = (\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Докажем, что P ортогонален r' и, следовательно, векторы P , r'' и N компланарны и лежат в нормальной плоскости π интегральной кривой L .

Действительно, из условия

$$\sum x_i'^2 = 1 \quad (2)$$

следует

$$\sum x_i' x_i'' = 0. \quad (3)$$

В силу однородности монжева уравнения (1) относительно x_i'

$$\sum x_i' \Omega_{x_i'} = 0. \quad (4)$$

Дифференцируя (1), находим

$$\sum x_i' \Omega_{x_i} + \sum x_i'' \Omega_{x_i'} = 0. \quad (5)$$

Из (4) следует

$$\sum x_i'' \Omega_{x_i'} + \sum x_i' (\Omega_{x_i'})' = 0. \quad (6)$$

Из (5), (6) имеем

$$\sum x_i' [(\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i}] = 0, \quad (7)$$

что и требовалось доказать.

В силу компланарности векторов r'' , N , P

$$Ar'' + BN + CP = 0, \quad (8)$$

где A , B , C — функции дуги s интегральной кривой L , не равные нулю одновременно.

1. При $C = 0$ получаем дифференциальное уравнение геодезических «прямейших»

$$r'' - \nu N = 0. \quad (9)$$

2. При $A = 0$ получаем дифференциальные уравнения характеристических линий

$$P - \mu N = 0. \quad (10)$$

3. Если

$$\frac{C}{A} = \lambda(s), \quad \frac{B}{A} = \lambda'(s),$$

получаем дифференциальное уравнение геодезических «кратчайших»

$$r'' + \lambda'(s)N + \lambda(s)P = 0. \quad (11)$$

4. Найдем еще один класс интегральных кривых монжева уравнения (1), положив в (8) $B = 0$:

$$r'' - \sigma P = 0 \quad (12)$$

или в координатной форме:

$$x_i'' - \sigma [(\Omega_{x_i})' - \Omega_{x_i}] = 0. \quad (12_i)$$

У этих интегральных кривых вектор P коллинеарен главной нормали. Заметим, что он порождается совместным рассмотрением дифференциальных уравнений геодезических прямейших (9) и характеристических линий (10) при исключении вектора N ; множитель коллинеарности σ векторов r'' и P в (12) становится равным $-\frac{\nu}{\mu}$.

Позже увидим, что (12) адекватно дифференциальному уравнению геодезических кратчайших (11), если в последнем множитель Лагранжа есть константа $-\frac{\nu(s)}{\mu(s)}$ и $\frac{d\lambda}{ds} = 0$.

2. 1. Множество геодезических «прямейших» в монжевом многообразии зависит от трех произвольных постоянных.

Действительно, умножив уравнения (9) $i = 1, 2, 3$ на x'_i и просуммировав по i , получим тождество в силу (3), (4). Следовательно, одно из трех уравнений есть следствие двух других. Исключив из последних ν , найдем одно уравнение второго порядка

$$x''\Omega_{y'} - y'\Omega_{x'} = 0$$

на три функции $x_i(s)$. Присоединив к нему монжево уравнение (1) первого порядка и приняв x за независимую переменную вместо s , получим систему из двух уравнений, из которых одно — второго, другое — первого порядка на две функции $y(x)$, $z(x)$, которые, таким образом, зависят от трех произвольных констант.

Следовательно, геодезических прямейших в монжевом многообразии ∞^3 .

2. Множество характеристических линий (10_i) также зависит от трех констант. И здесь одно дифференциальное уравнение характеристических линий, например (10₃), из трех уравнений (10_i) есть следствие двух других, в чем убеждаемся, умножив их на x'_i соответственно и, сложив, получим тождественно нуль в обеих частях равенства.

Исключив μ из двух дифференциальных уравнений, находим одно уравнение второго порядка

$$[(\Omega_{x'})' - \Omega_{x'}]\Omega_{y'} - [(\Omega_{y'})' - \Omega_{y'}]\Omega_{x'} = 0.$$

Присоединяя к нему монжево уравнение (1) первого порядка и приняв за независимую переменную x вместо s , получаем систему из двух уравнений на две функции $y(x)$, $z(x)$, из которых одно вто-

рого порядка, другое — первого. Эти функции определены с произволом в три константы.

Таким образом, характеристических линий в монжевом многообразии — ∞^3 .

3. Точно так же доказывается, что множество интегральных кривых дифференциального уравнения (12) в монжевом многообразии — ∞^3 .

4. Рассмотрение множества геодезических кратчайших дифференциального уравнения (11) требует особого внимания, так как в него входит множитель Лагранжа $\lambda(s)$ и его производная $\lambda'(s)$ и потому в общем случае множество геодезических кратчайших в монжевом многообразии зависит от четырех констант [3—4].

Покажем это.

Так как векторы r'' , N , P дифференциального уравнения (11) компланарны, одно из трех уравнений в координатной форме (11_i) есть следствие двух других, например (11₃). С другой стороны, умножая векторное равенство (11) скалярно на $[r'N]$, получаем

$$(r''r'N) + \lambda(s)(Pr'N) = 0, \quad (13)$$

и обозначив

$$(r''r'N) = |x_i''x_i'\Omega_{x_i'}| = \Delta_1,$$

$$(Pr'N) = |(\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i}x_i'\Omega_{x_i'}| = \Delta,$$

запишем (13) в виде

$$\Delta_1 + \lambda(s)\Delta = 0. \quad (13')$$

Теперь можно, например (11₂) заменить (13') или (13). Таким образом, имеем систему из двух уравнений (11₁), (13'). Если смешанное произведение $(Pr'N)$, т. е. Δ не равно нулю, определяем множитель Лагранжа $\lambda(s)$ как функцию вторых производных и $\frac{d\lambda}{ds}$ — третьих. Полученные значения λ и $\frac{d\lambda}{ds}$ подставляем в (11₁) и получаем дифференциальное уравнение вообще третьего порядка. Интегрируя его с монжевым уравнением (1) первого порядка, принимая за независимую переменную x вместо (s) , находим функции $y(x)$, $z(x)$ с произволом в четыре константы.

Случай $\Delta = 0$, следовательно, и $\Delta_1 = 0$, что следует из (13'), рассмотрим позже.

3. Теорема. Если вдоль интегральной кривой L монжева многообразия векторы r'' , N , P взаимно коллинеарны, она является одновременно геодезической прямой, характеристической линией, принадлежит множеству интегральных кривых дифференциального уравнения (12) и служит геодезической «кратчайшей».

Доказательство. Пусть интегральная кривая L монжева уравнения (1) задана уравнением

$$r = r(s),$$

где s — длина ее дуги.

Так как вдоль нее векторы $r''(s)$ и $N(\Omega_{x_i})$ коллинеарны, то выполнено уравнение (9)

$$r'' - \nu N(s) = 0,$$

т. е. интегральная кривая L есть геодезическая прямейшая.

Вдоль нее векторы P и N также коллинеарны, и получаем уравнение (10)

$$P = \mu N,$$

а L служит одновременно и характеристической линией.

Из дифференциальных уравнений (9), (10) определяются $\nu(s)$ и $\mu(s)$ как функции s , и следует коллинеарность векторов r'' и P , т. е. имеет место дифференциальное уравнение (12), которое запишем так:

$$r'' - \frac{\nu(s)}{\mu(s)} P = 0.$$

Множеству его интегральных кривых принадлежит L .

Левая часть дифференциального уравнения геодезических кратчайших (11) для кривой L в силу коллинеарности векторов $r''PN$ вдоль нее, выраженной дифференциальными уравнениями (9), (10), принимает вид

$$r'' + \lambda'(s) N + \lambda(s) P = (\nu + \lambda' + \mu\lambda) N.$$

Приравняв множитель при N нулю, получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно одной неизвестной функции $\lambda(s)$:

$$\frac{d\lambda(s)}{ds} + \mu(s) \lambda(s) + \nu(s) = 0, \quad (14)$$

где $\nu(s)$ и $\mu(s)$ определены из (9), (10).

Если в левую часть дифференциального уравнения геодезических кратчайших (11) поставить вместо $\lambda(s)$ решение дифференциального уравнения (14), она обратится в нуль. Таким образом, интегральная кривая L удовлетворяет уравнениям (9), (10), (12') и обращает в тождество дифференциальное уравнение (11) геодезических кратчайших при полученном из (14) значении множителя Лагранжа.

Обратная теорема. Если интегральная кривая L монжева многообразия обладает одновременно двумя из трех свойств, т. е. свойством быть 1° — геодезической прямой, 2° — характеристической линией, 3° — геодезической кратчайшей, она обладает и третьим свойством.

Доказательство. Из свойств, поочередно приписываемых по два (1°, 2°), (1°, 3°), (2°, 3°) интегральной кривой L монжева многообразия, следует коллинеарность трех векторов r'' , N , P вдоль нее, что приводит к обладанию ею еще и третьим свойством.

При доказательстве учитывается (14).

Замечание. Попарно совместное рассмотрение двух дифференциальных уравнений из (9), (10), (11) при исключении вектора N

и использовании соотношения (14) приводит к дифференциальному уравнению (12).

4. В п. 2 было доказано, что множество геодезических кратчайших в общем случае зависит от четырех произвольных постоянных. При доказательстве этих утверждений предполагалось, что в уравнении (13') $\Delta \neq 0$.

Пусть теперь $\Delta = 0$. Векторы P, r', N связаны линейной зависимостью

$$aP + br' + cN = 0. \quad (15)$$

Умножая скалярно (15) на r' , имеем

$$br'^2 = 0,$$

т. е. $b = 0$.

Таким образом, (15) принимает вид

$$aP + cN = 0.$$

Здесь $a \neq 0$, поэтому

$$P(s) = \mu(s) N(s),$$

где $\mu = \frac{c}{a}$. Это значит, что геодезические «кратчайшие» служат также характеристическими линиями.

В силу предположения $\Delta = 0$ или смешанного произведения $(r''r'N) = 0$ следует, что и $\Delta_1 = 0$, т. е. векторы r'', r', N также компланарны:

$$\alpha r'' + \beta r' + \gamma N = 0. \quad (16)$$

Умножая (16) скалярно на r' , убеждаемся в том, что $\beta = 0$; так как $\alpha \neq 0$, то выполняется (9)

$$r''(s) = \nu(s) N(s),$$

где $\nu = \frac{\gamma}{\alpha}$. Следовательно, геодезические «кратчайшие» служат также геодезическими прямейшими.

Из сказанного следует: если для каждой геодезической «кратчайшей» выполняется условие $\Delta = 0$, а стало быть и $\Delta_1 = 0$ из (13'), то множество геодезических «кратчайших» совпадает с множеством характеристических линий и множеством геодезических «кратчайших», и тогда оно будет зависеть от трех констант, как и множество последних.

Пример 1. Пусть

$$\Omega(x; x') = Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 0, \quad (1.1)$$

где A, B, C — постоянные

$$A \neq B \neq C \neq 0.$$

За параметр взята длина s дуги интегральной кривой:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \quad (1.2)$$

Здесь

$$\Omega_{x'} = 2Ax', \quad \Omega_{y'} = 2By', \quad \Omega_{z'} = 2Cz', \\ (\Omega_{x'})' = 2Ax'', \quad (\Omega_{y'})' = 2By'', \quad (\Omega_{z'})' = 2Cz''.$$

Подставляя эти значения в дифференциальное уравнение (11) геодезических кратчайших в координатной форме, имеем

$$x'' + \lambda' 2Ax' + \lambda 2Ax'' = 0, \\ y'' + \lambda' 2By' + \lambda 2By'' = 0, \\ z'' + \lambda' 2Cz' + \lambda 2Cz'' = 0.$$

Эти уравнения можно переписать так:

$$x'' + 2A(\lambda x')' = 0, \\ y'' + 2B(\lambda y')' = 0, \\ z'' + 2C(\lambda z')' = 0. \quad (1.3)$$

Проинтегрировав их, находим

$$x'(1 + 2A\lambda) = C_1, \\ y'(1 + 2B\lambda) = C_2, \\ z'(1 + 2C\lambda) = C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные.

Принимая во внимание (1.2), имеем

$$\frac{C_1^2}{(1 + \lambda A)^2} + \frac{C_2^2}{(1 + \lambda B)^2} + \frac{C_3^2}{(1 + \lambda C)^2} = 1.$$

Следовательно, множитель Лагранжа $\lambda(s)$ — постоянная, $\frac{d\lambda}{ds} = 0$ и уравнения (1.3) принимают вид

$$x'' = y'' = z'' = 0.$$

Таким образом, все геодезические «кратчайшие» — прямые. Они зависят от трех параметров. Если прямая

$$x = \alpha z + p, \quad y = \beta z + q$$

служит интегральной кривой уравнения (1.1), то ее параметры связаны зависимостью

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C = 0.$$

В этом случае для каждой геодезической «кратчайшей» $\Delta \equiv 0$. Следовательно, по доказанному в предыдущем она служит геодезической «прямейшей» и характеристической линией, причем $\nu = \mu = 0$, в чем убеждаемся из уравнений (9), (10) в силу (1.3).

5. В общем случае в множестве геодезических «кратчайших» дифференциального уравнения (11), в системе интегральных кривых множества многообразия содержится ∞^4 , как видно из 2.4, тогда как каждое из множеств геодезических «прямейших» дифференциального уравнения (9) и характеристических линий (10) состоит из ∞^3 .

Отсюда следует, что если все три типа приведенных выше интегральных кривых одновременно совпадают, то множество геодезических «кратчайших» выделяет подмножество κ , состоящее из ∞^k «кратчайших» ($k < 4$ — натуральное), совпадающих с геодезическими «прямейшими» и характеристическими линиями соответствующих дифференциальных уравнений (9), (10).

Пример 2.

Рассмотрим пример монжева уравнения

$$\Omega(x, x') = 4yy'z' + y^2x'^2 - 4zy'^2 = 0, \quad (2.1)$$

соответствующего нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка:

$$qy - p^2 - z = 0 \quad \frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

Множество характеристических линий монжева уравнения (1) [6, с. 109]

$$\begin{aligned} x &= C_1y + C_2, \\ z &= -\frac{C_1^2}{4}y^2 + C_3y \end{aligned} \quad (2.2)$$

есть ∞^3 парабол, полученных сечениями плоскостями $x = C_1y + C_2$ параболических цилиндров

$$z = -\frac{C_1^2}{4}y^2 + C_3y.$$

Можно убедиться, что они не являются геодезическими прямейшими и, следовательно, не являются также геодезическими «кратчайшими». По п. 2 геодезические «кратчайшие» образуют четырехпараметрическое множество. Множитель Лагранжа $\lambda(s)$ их дифференциального уравнения (11) не есть константа и $\frac{d\lambda}{ds} \neq 0$.

Вместе с тем множество ∞^3 характеристических линий содержит двухпараметрическое подмножество κ прямых в том случае, когда $C_1 = 0$:

$$x = C_2, \quad z = C_3y. \quad (2.2')$$

Эти прямые образуют множество ∞^2 и являются геодезическими «прямейшими» и геодезическими кратчайшими.

Вычислим значения функций $\gamma(s)$, $\mu(s)$, $\lambda(s)$. Из (2.2') следует

$$x' = 0, \quad x'' = 0, \quad z' = C_3y',$$

а так как

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= 1, \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{1+C_3^2}}, \quad y'' = z'' = 0. \end{aligned}$$

Из (2.1) находим следующие значения:

$$\Omega_{x'} = 0, \Omega_{y'} = -4C_3 y y', \Omega_{z'} = 4y y', \\ (\Omega_{x'})' - \Omega_{x'} = 0, (\Omega_{y'})' - \Omega_{y'} = -8C_3 y'^2, (\Omega_{z'})' - \Omega_{z'} = 8y'^2. \quad (2.3)$$

Подставляя их в дифференциальные уравнения геодезических прямейших (9), записанные в координатной форме

$$x_i'' = \nu \Omega_{x_i'},$$

находим, что и они удовлетворяются при

$$\nu = 0.$$

Подставляя (2.3) в дифференциальные уравнения характеристических линий (10)

$$(\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i} = \mu \Omega_{x_i'},$$

находим, что первое уравнение (10) обращается в тождество:

$$8y'^2 = 4\mu y y',$$

откуда следует, что

$$\mu = \frac{2y'}{y} = \frac{2}{y \sqrt{1 + C_3^2}}.$$

Подставив же значения (2.3) в дифференциальные уравнения геодезических кратчайших (11)

$$x_i'' + \lambda' \Omega_{x_i'} + \lambda [(\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i}] = 0,$$

видим, что это уравнение обращается в тождество, а уравнения (11) приводятся к виду

$$\lambda' y + 2\lambda y' = 0$$

и, следовательно, удовлетворяются следующим значением множителя Лагранжа:

$$\lambda = \frac{C_4}{y^2}.$$

Таким образом, при найденном значении множителя Лагранжа из геодезических кратчайших выделяется двупараметрическое подмножество κ интегральных кривых, служащих одновременно геодезическими прямейшими и характеристическими линиями.

Дифференциальные уравнения (12) также обращаются в нуль:

$$x_i'' - \frac{\nu}{\mu} [(\Omega_{x_i'})' - \Omega_{x_i}] = 0.$$

Они удовлетворены множеством ∞^2 прямых, определяемых уравнениями (2.2'), которые являются подмножеством κ , выделенного из множества ∞^3 характеристических линий дифференциального уравнения (2.1), геодезическими прямейшими дифференциального уравнения (9) и множеством ∞^4 геодезических кратчайших диффе-

ренциальных уравнений (11) (в координатной форме). Как и должно быть при множителе Лагранжа $\lambda(s) \neq \text{const}$, являющемся некоторой функцией от s и $\frac{d\lambda(s)}{dx} \neq 0$ в дифференциальном уравнении геодезических кратчайших (11).

С другой стороны, надо иметь в виду, что существуют такие монжевы уравнения, у которых дифференциальные уравнения геодезических кратчайших обращаются в тождество для любой его интегральной кривой при соответствующем выборе множителя Лагранжа $\lambda(s)$.

Пример 3. 1. Рассмотрим монжево уравнение

$$\Omega(x; dx) = dx^2 + dy^2 - dz^2 = 0 \quad (3.1)$$

или

$$\Omega(x; x') = x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0, \quad (3.1')$$

соответствующее нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка:

$$p^2 + q^2 - 1 = 0, \quad p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}$$

или

$$\text{grad } z^2 = 1$$

(уравнение распространения световых лучей в однородной среде [5, стр. 97]).

Примем за параметр длину дуги s интегральной кривой, тогда

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \quad (3.2)$$

Из (3.1') и (3.2) следует

$$x'^2 + y'^2 = z'^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Для геодезических прямейших уравнения (9) имеют вид

$$\begin{aligned} x'' &= \nu \Omega_{x'} = 2\nu x', \\ y'' &= \nu \Omega_{y'} = 2\nu y', \\ z'' &= \nu \Omega_{z'} = -2\nu z'. \end{aligned}$$

Из (3.3) и (9) следует

$$\nu = 0,$$

т. е.

$$x'' = y'' = z'' = 0.$$

Геодезическими прямейшими служит множество ∞^3 прямых линий.

Определим характеристические линии. В нашем примере (3.1') их уравнения (10) принимают следующий вид

$$x'' = \mu x', \quad y'' = \mu y', \quad z'' = \mu z'.$$

По (3.3)

$$z'' = 0, \quad z' = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

следовательно,

$$\mu = 0,$$

и снова

$$x'' = y'' = z'' = 0,$$

т. е. характеристические линии также образуют множества ∞^3 прямых, совпадающих с геодезическими прямейшими.

Геодезические кратчайшие определяются дифференциальными уравнениями (11), которые в данном случае таковы:

$$x''(1 + 2\lambda) + 2\lambda'x' = 0, \quad (3.4)$$

$$y''(1 + 2\lambda) + 2\lambda'y' = 0, \quad (3.5)$$

$$z''(1 - 2\lambda) - 2\lambda'z' = 0. \quad (3.6)$$

Так как по (3.3) $z' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z'' = 0$, из (3.6) следует

$$\lambda' = 0,$$

и по (3.4), (3.5)

$$x''(1 + 2\lambda) = 0, \quad y''(1 + 2\lambda) = 0.$$

Если

$$\lambda \neq \frac{1}{2},$$

то

$$x'' = y'' = 0.$$

Присоединяя сюда и $z'' = 0$ из (3.6), получаем ∞^3 геодезических кратчайших, совпадающих с множествами ∞^3 характеристических линий и геодезических прямейших.

Все они прямые.

Если же положить множитель Лагранжа

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

то дифференциальные уравнения (3.4)–(3.6) удовлетворяются любой интегральной кривой уравнения (3.1').

Имеем функциональный произвол в одну функцию, что видно из (3.1'), (3.2). Действительно, полагая в $x'^2 + y'^2 = \frac{1}{2}$ координату x какой угодно функцией от s , получаем

$$y = \int \sqrt{\frac{1}{2} - (\varphi'(x))^2} ds = \psi(s).$$

Таким образом, в монжевом уравнении (3.1') любая интегральная кривая может рассматриваться как геодезическая кратчайшая. Это объясняется тем, что уравнение Монжа (3.1) можно записать

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2dz^2$$

или

$$ds^2 = 2dz^2,$$

откуда

$$ds = \pm \sqrt{2} dz. \quad (3.7)$$

Поскольку правая часть (3.7) есть полный дифференциал, длины дуг всех интегральных кривых, заключенных между плоскостями $z = c_1$, $z = c_2$, равны между собой.

Рассмотрим монжево уравнение, приведенное С. Ли:

$$\Omega(x; dx) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\varphi(x, y, z)^2 = 0. \quad (3.8)$$

Пример (3.1) есть частный случай этого уравнения, когда

$$\varphi = \sqrt{2z}.$$

Геометрические прямейшие и характеристические линии представляют прямые и образуют трехпараметрическое подмножество геодезических кратчайших. С другой стороны, каждая интегральная кривая уравнения является геодезической кратчайшей.

Этими же свойствами обладает и общее монжево уравнение

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^k - d\varphi(x, y, z)^{2k} = 0,$$

где k — натуральное число. Если $k = 1$, приходим к дифференциальному уравнению (3.8).

Приведенные выше монжевы уравнения представляют класс в неголономной дифференциальной геометрии монжева многообразия, обладающий таким свойством: дифференциал дуги ds интегральной кривой есть полный дифференциал $d\varphi(x, y, z)$ произвольной функции точки (x, y, z) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Lie S. Geometrie der Berührungstransformationen, B. I, Teubner, Leipzig, 1896.
2. Синцов Д. М. Геометрія монжевих рівнянь. «Наук. зап. Харківськ. матем. т-ва», 4, т. 3, 1929, с. 121—132.
3. Синцов Д. М. Исследования по теории пфаффовых многообразий. «Зап. Харьковск. матем. об-ва», 4, XVI, 1940, с. 62—81.
4. Wagner V. Differential geometry of nonlinear nonholonomic manifolds in the three-dimensional Euclidian space. «Матем. сб.», т. 8, 50:1, 48, 1940, р. 3—39.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964, 830 с.
6. Николаенко М. А. О характеристиках монжевых уравнений. «Вестн. Харьковск. ун-та», т. 31, Изд-во Харьковск. ун-та, 1965, с. 101—110.

Поступила 11 апреля 1972 г.

ОБРАЗЫ СИММЕТРИИ И АНТИСИММЕТРИИ ТРЕХМЕРНОГО ПСЕВДОИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА

Р. Г. Проскурина

Орел

1. Псевдоизотропное пространство

Псевдоизотропное пространство 1I_3 является пространством с проективной метрикой, абсолют которого состоит из плоскости и пары вещественных прямых на ней. Это пространство является гиперболическим аналогом изотропного пространства I_3 Штрубеккера [1, стр. 187; 2, стр. 311]. Пространство 1I_3 можно рассматривать как метризованное аффинное пространство E_3 .

В пространстве 1I_3 можно выбрать такую аффинную систему координат, в которой точка пересечения прямых абсолюта — бесконечно удаленная точка координатной оси $x = y = 0$, а прямые абсолюта являются бесконечно удаленными прямыми плоскостей $x^2 - y^2 = 0$. В этом случае расстояние d между точками $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2,$$

а если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, расстояние d' определяется по формуле

$$d' = |z_2 - z_1|.$$

Движениями пространства 1I_3 будем называть аффинные преобразования этого пространства, при которых сохраняются расстояния d и d' между точками. Движения пространства 1I_3 в однородных проективных координатах x^i , связанных с аффинными координатами x, y, z соотношениями

$$x = \frac{x^1}{x^0}, \quad y = \frac{x^2}{x^0}, \quad z = \frac{x^3}{x^0},$$

имеют вид

$$\begin{aligned} x^0 &= x^0, \\ x^1 &= ax^0 \pm (x^1 \operatorname{ch} \varphi + x^2 \operatorname{sh} \varphi), \\ x^2 &= bx^0 \pm (x^1 \operatorname{sh} \varphi + x^2 \operatorname{ch} \varphi), \\ x^3 &= cx^0 + Ax^1 + Bx^2 \pm x^3. \end{aligned} \quad (1)$$

В пространстве 1I_3 в силу того, что это пространство соответствует само себе по принципу двойственности, имеются *кодвижения*, т. е. корреляции, переводящие каждую пару точек в пару плоскостей, угол между которыми равен расстоянию между точками [2, стр. 322]. Кодвижения в 1I_3 следующие:

$$\begin{aligned} U_0 &= ax^0 + bx^1 + cx^2 \pm x^3, \\ U_1 &= Ax^0 \pm (x^1 \operatorname{ch} \varphi + x^2 \operatorname{sh} \varphi), \\ U_2 &= Bx^0 \pm (x^1 \operatorname{sh} \varphi + x^2 \operatorname{ch} \varphi), \\ U_3 &= \pm x^0. \end{aligned} \quad (2)$$

Одной из особенностей пространства 1I_3 , отличающей его от пространства I_3 , является наличие в нем *антидвижений*, т. е. коллинеаций, переводящих всякие две точки с расстоянием d в две точки с расстоянием $\tilde{d}$, связанным с расстоянием d соотношением $\tilde{d}^2 = -d^2$ [3, с. 543; 4, с. 17]. Примером антидвижения является антиповорот на прямой угол

$$'x^0 = x^0, \quad 'x^1 = x^2, \quad 'x^2 = x^1, \quad 'x^3 = x^3. \quad (3)$$

Произвольное антидвижение является произведением движения на антиповорот (3), откуда следует, что антидвижения пространства 1I_3 в рассматриваемых нами координатах имеют вид

$$\begin{aligned} 'x^0 &= x^0, \\ 'x^1 &= ax^0 \pm (x^1 \operatorname{sh} \varphi + x^2 \operatorname{ch} \varphi), \\ 'x^2 &= bx^0 \pm (x^1 \operatorname{ch} \varphi + x^2 \operatorname{sh} \varphi), \\ 'x^3 &= cx^0 + Ax^1 + Bx^2 \pm x^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Произведения кодвижений на антидвижения будем называть *коантидвижениями*. Произвольное коантидвижение можно представить как произведение кодвижения на антиповорот (3), откуда следует, что коантидвижения пространства 1I_3 в рассматриваемых нами координатах имеют вид

$$\begin{aligned} U_0 &= ax^0 + bx^1 + cx^2 \pm x^3, \\ U_1 &= Ax^0 \pm (x^1 \operatorname{sh} \varphi + x^2 \operatorname{ch} \varphi), \\ U_2 &= Bx^0 \pm (x^1 \operatorname{ch} \varphi + x^2 \operatorname{sh} \varphi), \\ U_3 &= \pm x^0. \end{aligned} \quad (5')$$

Сильно изотропной прямой называется прямая, проходящая через точку пересечения прямых абсолюта, т. е. абсолютную точку, а *изотропной прямой* — прямая, пересекающаяся с одной из прямых абсолюта, но не проходящая через абсолютную точку. *Сильно изотропной плоскостью* называется плоскость, проходящая через прямую абсолюта, а *изотропной плоскостью I* (соответственно *II*) рода — плоскость, проходящая через абсолютную точку, но не проходящая через прямую абсолюта и при этом содержащая прямую вещественной (соответственно мнимой) длины [5, с. 9].

2. Образы симметрии

В пространстве 1I_3 , так же как и в других пространствах с проективной метрикой, можно определить образы симметрии, т. е. геометрические образы, переходящие в себя при инволюционных движениях пространства [2, с. 470]. Требуя, чтобы матрица

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & \pm \operatorname{ch} \varphi & \pm \operatorname{sh} \varphi & 0 \\ b & \pm \operatorname{sh} \varphi & \pm \operatorname{ch} \varphi & 0 \\ c & A & B & \pm 1 \end{pmatrix}$$

движения (1) удовлетворяла условию инволюционности $U^2 = I$, находим, что матрица U , удовлетворяющая этому условию, приводится к следующим каноническим видам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В прямоугольных координатах движения с этими матрицами имеют соответственно вид

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y, \\ z' = -z \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y, \\ z' = -z \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y, \\ z' = -z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y, \\ z' = z \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y, \\ z' = -z \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y, \\ z' = z \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z. \end{cases}$$

В первом случае инволюционное движение является отражением от точки $(1, 0, 0, 0)$, во втором — от прямой вещественной длины $y = z = 0$, в третьем — от прямой мнимой длины $x = z = 0$, в четвертом — от сильно изотропной прямой $x = y = 0$ и бесконечно удаленной прямой $x^0 = x^3 = 0$, в пятом — от плоскости $z = 0$, в шестом — от изотропной плоскости I рода $y = 0$ и от бесконечно удаленной точки $(0, 0, 1, 0)$, в седьмом — от изотропной плоскости II рода $x = 0$ и от бесконечно удаленной точки $(0, 1, 0, 0)$.

Поэтому образами симметрии пространства 1I_3 являются точка, прямая, плоскость, а также сильно изотропная прямая, к которой присоединена бесконечно удаленная прямая, не проходящая через абсолютную точку (рис. 1, а), и изотропная плоскость, к которой присоединена бесконечно удаленная точка, не совпадающая с абсолютной точкой и находящаяся на бесконечно удаленной прямой, которая проходит через абсолютную точку и является четвертой гармонической для абсолютных прямых и бесконечно удаленной прямой данной плоскости (рис. 1, б). Без указанных добавлений

сильно изотропные прямые и изотропные плоскости не являются образами симметрии.

Будем называть добавляемые нами к сильно изотропной прямой и изотропной плоскости бесконечно удаленную прямую и точку соответственно полярной сильно изотропной прямой и полюсом изотропной плоскости, а сильно изотропные прямые и изотропные плоскости с добавлением этих поляр и полюсов будем называть соответственно поляризованными сильно изотропными прямыми и поляризованными изотропными плоскостями.

Заметим, что многообразие поляризованных сильно изотропных прямых зависит от четырех вещественных параметров, так же как многообразие всех прямых (многообразие сильно изотропных

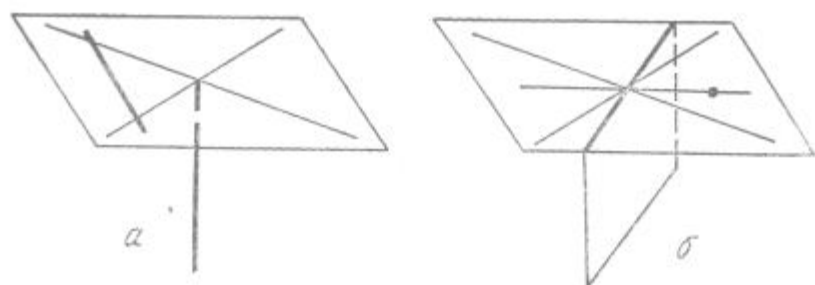


Рис. 1.

прямых зависит от двух параметров, а многообразие поляр сильно изотропных прямых также зависит от двух параметров), многообразие поляризованных изотропных плоскостей зависит от трех вещественных параметров, так же как многообразие всех плоскостей (многообразие изотропных плоскостей зависит от двух параметров, а многообразие полюсов изотропных плоскостей зависит от одного).

В пространстве I_3 имеются также образы косимметрии, т. е. геометрические образы, определяемые инволюционными кодвижениями [2, с. 475]. Требуя, чтобы матрица

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c & \pm 1 \\ A & \pm \operatorname{ch} \varphi & \pm \operatorname{sh} \varphi & 0 \\ B & \pm \operatorname{sh} \varphi & \pm \operatorname{ch} \varphi & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

кодвижения (2) была матрицей инволюционной корреляции, находим, что матрица U , удовлетворяющая этому условию, приводится к следующим каноническим видам:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В первом и втором случаях инволюционные кодвижения являются полярными преобразованиями относительно овальных квадров, а в третьем и четвертом — полярными преобразованиями относительно линейчатых квадров; будем называть эти квадрики соответственно *овальными и линейчатыми метрическими квадриками*.

3. Образы антисимметрии

Одной из особенностей пространства 1I_3 , отличающей его от пространства I_3 , является наличие в нем образов антисимметрии, т. е. геометрических образов, определяемых инволюционными антидвижениями.

Требуя, чтобы матрица

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & \pm \operatorname{sh} \varphi & \pm \operatorname{ch} \varphi & 0 \\ b & \pm \operatorname{ch} \varphi & \pm \operatorname{sh} \varphi & 0 \\ c & A & B & \pm 1 \end{pmatrix}$$

антидвижения (4) удовлетворяла условию инволюционности $U^2 = I$, находим, что матрица U , удовлетворяющая этому условию, приводится к следующим каноническим видам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В прямоугольных координатах антидвижения с этими матрицами имеют соответственно вид

$$x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z, \quad (5)$$

$$x' = -y, \quad y' = -x, \quad z' = z, \quad (6)$$

$$x' = y, \quad y' = x, \quad z' = -z, \quad (7)$$

$$x' = -y, \quad y' = -x, \quad z' = -z. \quad (8)$$

Антидвижения (5), (6) есть инволюционные гомологии, плоскостями которых являются соответственно сильно изотропные плоскости

$$y = x; \quad y = -x \quad (9)$$

и соответственно бесконечно удаленные точки с проективными координатами (см. рис. 2)

$$(0, 1, -1, 0); \quad (0, 1, 1, 0). \quad (10)$$

Антидвижения (7), (8) являются гиперболическими инволюциями, осями которых служат соответственно изотропные прямые

$$x = y, \quad z = 0; \quad x = -y, \quad z = 0 \quad (11)$$

и абсолютные прямые (рис. 3), не пересекающиеся с прямыми (11).

Поэтому образы антисимметрии пространства 1I_3 — это сильно изотропная плоскость, к которой присоединена точка абсолютной прямой, не лежащей на этой плоскости, и изотропная прямая,

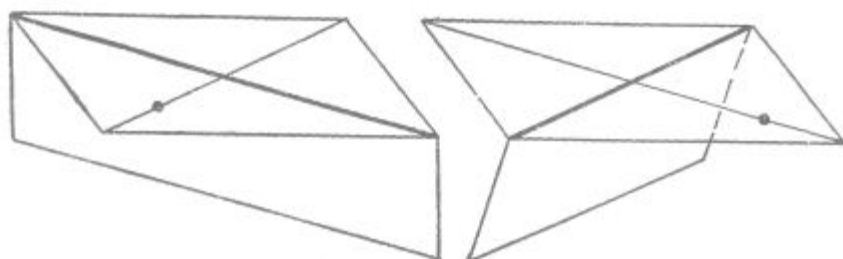


Рис. 2.

к которой присоединена абсолютная прямая, с ней не пересекающаяся; без указанных добавлений сильно изотропная плоскость и изотропная прямая не являются образами антисимметрии.

Будем называть добавляемые нами бесконечно удаленную точку и абсолютную прямую соответственно полюсом сильно изотропной плоскости и полярной изотропной прямой, а сильно изотропные плоскости и изотропные прямые с добавлением этих полюсов и поляр — *поляризованными сильно изотропными плоскостями и поляризованными изотропными прямыми*.

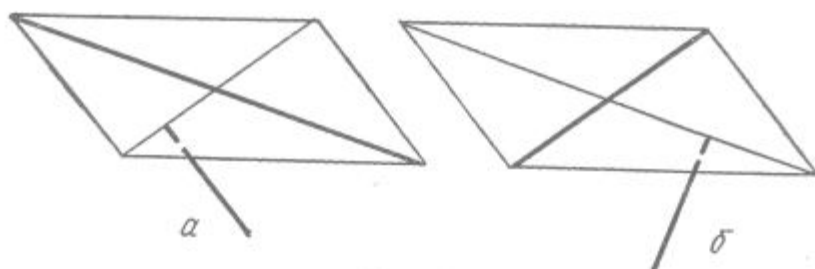


Рис. 3.

Заметим, что многообразие поляризованных сильно изотропных плоскостей зависит от двух вещественных параметров, а многообразие поляризованных изотропных прямых зависит от трех вещественных параметров.

В пространстве 1I_3 имеются также образы коантисимметрии, т. е. геометрические образы, определяемые инволюционными коантидвижениями. Требуя, чтобы матрица

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c & \pm 1 \\ A & \pm \operatorname{sh} \varphi & \pm \operatorname{ch} \varphi & 0 \\ B & \pm \operatorname{ch} \varphi & \pm \operatorname{sh} \varphi & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

коантидвижения (5') была матрицей инволюционной корреляции, находим, что матрица U , удовлетворяющая этому условию, приводится к следующим каноническим видам:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В первом и втором случаях инволюционные коантидвижения являются полярными преобразованиями относительно линейчатых квадратик, которые мы будем называть *антиметрическими квадратиками*, а в третьем и четвертом — инволюционные коантидвижения являются нуль-системами, определяющими линейные комплексы, которые мы будем называть *антиметрическими линейными комплексами*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strubecker K. Casi limiti di geometrie non-euclidee. Rendiconti del S'eminario matematico dell'università e del Politecnico di Torino, 21, 1961, 141—142.
2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., 1969, 548 с.
3. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства, М., 1966, 647 с.
4. Розенфельд Б. А., Адамушко Н. Н., Карпова Л. М., Львова Л. В. Образы симметрии и антисимметрии вещественных квазинеевклидовых пространств. «Уч. зап. МОПИ», т. 259, вып. 3, М., 1969, с. 3—22.
5. Парнасский И. В. Аксиматическое построение трехмерной параболической геометрии. «Уч. зап. Орловск. гос. пед. ин-та», т. XI, вып. II, 1957, с. 3—39.

Поступила 5 мая 1972 г.

О ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ С ПРАВИЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

Ю. А. Пряхин

Томари

Выпуклый многогранник в E^3 называют правильным, если все его грани — правильные многоугольники. Такой многогранник называем простым, если его нельзя расsects проходящей только через ребра плоскостью на многогранники, также имеющие правильные грани. В исследовании В. А. Залгаллера [1] доказано, что, кроме правильных призм и антипризм, существует ровно 28 таких простых многогранников. Из них, а также упо-

мянутых призм и антипризм составляют все 92 многогранника, найденные эмпирически Н. Джонсоном [2]. В [1] доказано также, что при допущении условных ребер, т. е. ребер, для которых смежные грани лежат в одной плоскости, число простых правильных многогранников остается конечным. При этом вершинами считаются только истинные вершины многогранника.



Рис. 1.

Б. А. Иванов [3], продолжив исследования В. Л. Залгаллера [1], разобрал 57 мест, рассуждения о которых в [1] обрывались из-за возникновения условных ребер. Б. А. Иванов нашел пять простых правильных многогранников $Q_1, \dots, Q_5$ с условными ребрами и считал доказанным отсутствие других. Однако в [3] пропущено еще несколько мест работы [1], где рассуждения также обрываются из-за появления условных ребер. В одном из таких мест Б. А. Иванов пропустил существование еще одного многогранника Q_6 .

Уточним результат Б. А. Иванова, доказав две теоремы.

Теорема 1. Кроме $Q_1, \dots, Q_5$ [3] существует простой правильный многогранник Q_6 с условными ребрами. Его развертка приведена на рис. 1, условные ребра заштрихованы.

Теорема 2. Кроме $Q_1, \dots, Q_6$ не существует простых правильных многогранников с условными ребрами.

1. Существование Q_6 . На одну из пятиугольных граней многогранника M_{20} (см. [1]) поставим пятиугольную пирамиду M_3 . Затем плоскостью, проходящей через ребро шестиугольной грани M_{20} , отсечем M_3 . Получим Q_6 . Появление условных ребер и правомерность отсечения M_3 легко проверяются на основании тождеств п. 5 [1].

2. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим места работы [1], связанные с появлением условных ребер, которые были пропущены Б. А. Ивановым. Начнем с места, где был допущен пропуск Q_6 .

58) [стр. 57, строка 4 снизу]. В $\angle HGP$ возможно вклеивание $3+3$ (рис. 2) с условным ребром GL . При этом в $\angle KIH = 120^\circ$ возможны вклеивания $6, 3+4$; $4+3$; $3+3$. Вклеивание 6 ведет к невозможности подклеиваний в H ; вклеивание $3+4$ ведет к $\widehat{KI} > 180^\circ$; вклеивание $4+3$ требует затем $H = (3^4, 5)$ и дает $\widehat{HL} > 180^\circ$. Значит, и в $\angle KIH$ вклеивается $3+3$ с условным реб-

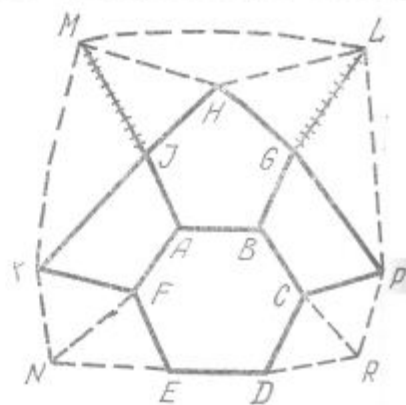


Рис. 2.

ром MI . Тогда в $\angle MHL = 60^\circ$ вклеивается треугольник (возможное по составу H вклеивание $3 + 3$ дает $\widehat{MH} = \widehat{LH} = 180^\circ$ и лишает строгой выпуклости вершины M и L).

В $\angle DCP = 180^\circ$ возможны вклеивания 5 и $3 + 3$, вклеивание 5 оставляет в P свободный угол 60° , в него вклеивается 3 и возникает противоречие в L . Поэтому в $\angle DCP$ и $\angle EFK$ вклеивается по $3 + 3$. Мы приходим к жесткому набору граней (рис. 2), который удобно представлять себе наложенным на Q_6 .

В $\angle LPR = 108^\circ$ возможны вклеивания $3 + 3$ и 5. Вклеивание $3 + 3$ ведет к противоречию в L . Поэтому в $\angle LPR$ и $\angle NKM$ вклеивается по 5. Остающиеся в M и L свободные углы по 60° необходимо заклеиваются одним треугольником, при этом $\widehat{ML} = 180^\circ$. Дальнейшее однозначно приводит к Q_6 .

59) [стр. 42, последняя строка]. В [1] не оговорены причины, по которым для Δ исключены типы $(3^4 \cdot 5)$, $(3^4 \cdot 4)$, (3^5) . Дело в том, что для вершин типов $(3^4 \cdot 5)$ и $(3^4 \cdot 4)$ исключена возможность $\angle CLD = 60^\circ$ (см., например [1, стр. 32]). Иначе для типа (3^5) . Этот тип возможен, но именно при условных ребрах CL и LD . В этом случае при C остается свободный угол $\gamma > \alpha_7$, в который невозможны подклеивания.

60) [стр. 43, строка 2]. При $n = 4$ возникает условное ребро: $\widehat{GL} = 180^\circ$. Но тогда в $\angle GCM \approx 165^\circ 38'$ невозможны дальнейшие подклеивания.

61) [стр. 54, строка 5 снизу]. Здесь при вершине F возможно еще вклеивание $3 + 3$ с появлением двух условных ребер. Но тогда в свободный угол γ при вершине C ввиду $\alpha_6 < \gamma < \alpha_7$ невозможны дальнейшие подклеивания.

Аналогично исключается вклеивание $3 + 3$ в вершине G (стр. 55, строка 12).

62) [стр. 58, строка 18]. При $n = 12$ в $\angle HGP$ (рис. 3) возможны еще вклеивания $4 + 3$ и $3 + 4$ с появлением условного ребра. Вклеивание $4 + 3$ ведет к вклеиванию $4 + 3 + 4$ по контуру $HGPL$, что создает невыпуклую грань. Остается $3 + 4$. Если в $\angle KIH$ вклеивается 12, приходим к противоречию в H . Значит, остается рассмотреть полный рис. 3. Но здесь в $\angle SHR \approx 87^\circ 25'$ невозможны дальнейшие подклеивания.

63) [стр. 62, строка 7]. В $\angle F'EI = 120^\circ$ можно еще вклеить $3 + 3$ с появлением условного ребра. Но тогда в $\angle KF'L = 108^\circ$ возможны вклеивания $3 + 3$ и 5. Первое дает $\widehat{KF'} > 180^\circ$, а второе содержится в [2, случай 16].

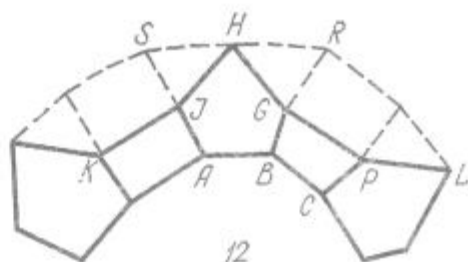


Рис. 3.

64) [стр. 63, строки 13 и 19]. При $n = 6$ в $\angle FBC = 120^\circ$ возможно вклеивание $3 + 3$ с появлением условного ребра (рис. 4). В $\angle DCI \approx 128^\circ 10'$ возможны вклеивания $3 + 7$, $7 + 3$, $6 + 3$, $4 + 4$, $5 + 3$, $3 + 5$, $3 + 4$, $4 + 3$, $3 + 3 + 3$. Первые три нарушают выпуклость на ребрах. Следующие два дают $\widehat{CI} = 180^\circ$ и нарушают строгую выпуклость в I . Каждое из трех следующих оставляет при I свободный угол γ , в который по его значению невозможны подклеивания.

При вклеивании $4 + 3$ в $\angle FIL \approx 156^\circ 41'$ возможны вклеивания $3 + 5$ и $5 + 3$, и при L или F остается свободный угол, в который по его значению невозможны подклеивания.

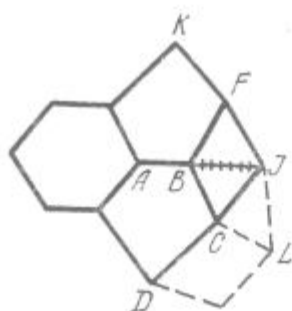


Рис. 4.

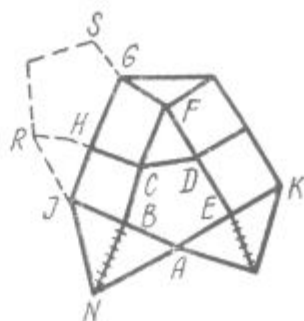


Рис. 5.

Остается предположить, что в $\angle DCI$ и $\angle KFI$ вклеивается по $3 + 3 + 3$, тогда $\min \gamma \approx 116^\circ 08' > 108^\circ$, что исключает замыкание вокруг I .

65) [стр. 83, строка 6]. При $\angle CDI = \angle IFG = 120^\circ$ сочетание вклеиваний в эти углы 6 и $3 + 3$ ведет к жесткой симметричной позиции, и вокруг E отсекается M_3 .

66) [стр. 96, строка 17]. В углы $\angle IBA = \angle AEK = 120^\circ$ вклеиваем по $3 + 3$ с появлением условных ребер (рис. 5). Тогда в $\angle ING \approx 165^\circ 38'$ возможны включения $3 + 5$ и $5 + 3$. Первое влечет вклейку $3 + 3$ в $\angle NIR \approx 80^\circ 21'$, что дает $\widehat{NI} > 180^\circ$.

Второе требует в $\angle NIR = 60^\circ$ вклеивания 3, при котором $\widehat{NI} = 180^\circ$, что нарушает строгую выпуклость в вершине. Аналогично на стр. 121, строка 2. При $\angle BC'D' = \angle C'D'E = 120^\circ$ вклеивание в них по $3 + 3$ ведет к появлению вершины с двумя условными ребрами, что нарушает строгую выпуклость в этой вершине.

Теорема 2 доказана.

3. Добавления. Приведем опечатки работы [1], не отмеченные в [3] (см. таблицу).

К тождествам [1, § 5; 2, стр. 33] можно добавить

$$A(3; 4; 5) + A(5; 3; 5) = A(6; 4; 5) + A(3; 3; 5).$$

Воспользуемся возможностью пополнить библиографию работ [1, 3] о правильных многогранниках и их обобщениях:

Страницы	Напечатано	Следует читать
38 (строка 5)	$\geq$	$>$
43 (строка 3)	$>$	$=$
61 (строка 7)	$3 + 3$	$3 + 5$
61 (строка 11)	EK	EH
62 (рис. 58)	$ABCDD$	$ABCDE$
68 (рис. 63)	FG	GF
68 (строка 11)	G и $\varphi =$	F и $\varphi_1 = \varphi_2$
83 (строка 6)	F	I
89 (строка 2)	$3 + 3$	$3 + 5$
42 (строка 15)	Слова: « $3 + 4$ » и «Вклеивание $3 + 4$ дает $BD > 180^\circ$ » — лишние.	
42 (низ)	См. наш. п. 2 пункт 59.	
50 (строка 7,8)	Слова: «а вклеивание $5 + 3$ при всех $n = 8, 9, 10, 11$ дает $\widehat{BC} > 180^\circ$ » — лишние	

118. Богомолов С. А. Изогоны и изоэдры. «Уч. зап. Ленинградск. пед. ин-та», 28, Л., 1939.
119. Дорфман А. Г. Ромбокубооктаэдры и взаимные им многогранники. «Матем. просвещение», 6. М., 1961.
120. Ефремович В. А. Трехмерные правильные многогранники. УМН, 2: 5, 1947.
121. Ефремович В. А., Ильяшенко Ю. С. Правильные многоугольники в E^n . «Вестн. МГУ, сер. матем.», 5. М., 1962.
122. Мордухай-Болтовский Д. Д. О полуправильных телах. «Уч. зап. НИИ матем. и физ. ун-та Ростова-на-Дону», 4, 1940.
123. Перепелкин Д. И. Об одном построении правильного додекаэдра, «Матем. просвещение», 12. М., 1937.
124. Поляков А. Н. О построении изображений правильного додекаэдра. «Уч. зап. пед. ин-та Ростова-на-Дону», 3, 1955.
125. Русанов А. М., Заморзаев А. М. Правильные многогранники, описанные около сферы и орисферы в пространстве Лобачевского. «Уч. зап. Кишиневск. ун-та», 50, Кишинев, 1962.
126. Сопов С. П. Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников. «Укр. геометр. сб.», вып. 8, Харьков. Изд-во Харьковск. ун-та, 1970.
127. Berman M. Regular-faced convex polyhedra. J. of the Franklin Inst., 291, 5, 329—352 (1971).
128. Coxeter H. S. M. Affinely regular polygons. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 34, 1—2, 38—58 (1969).
129. Crowe D. W. Nearly regular polyhedra with two exceptional faces. Lest. Notes Math., 63—76 (1969).
130. Emde H. Homogene Polytope. Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math.—Naturwiss. Kl., 89 (1958).
131. Gheorghiu A. Studiul poliedrelor regulate și semiregulate în perspectivă paralelă. Bul. știint. Inst. constr. București, 11, 3, 9—24 (1968).
132. Gleichgewicht B. Wielościany foremne wypukłe. Matematyka, 11, 6, 23—35 (1958).
133. Halsey E. Characterizing a family of complex polytopes without using complex coordinates. Math. Mag., 41, 5, 273—276 (1968).
134. Hohenberg F. Die Hexaeder und Tetraeder im Dodekaeder, Elem. Math., 25, 5, 97—101 (1970).

135. Kieffer L. Sur les solides convexes limités par les cônes de révolution circonscrits aux angles solides d'un polyèdre régulier. Inst. Grand-Ducal Luxembourg, Sect. Sci. Nat. Phys. Math. Arch. N. S., 19, 221—234 (1950).
136. Krötenheerdt O. Die homogenen Mosaike n-ter Ordnung in der euklidischen Ebene. Wiss. Z. Martin—Luther Univ. Halle—Wittenberg Math.—naturwiss. R, I, 1969, 18, 4, 273—290; II, 1970, 19, 2, 19—38; III, 1970, 19, 6, 97—122. (1970).
137. Luke D. Stellations of the rhombic dodecaedron. Math. Gaz., 41, N 337, 180—194 (1957).
138. Mc. Mullen P. Regular star-polytopes and a theorem of Hess. Proc. London Math. Soc., 18, 4, 577—596. (1968).
139. Mc. Mullen P. Polytopes with an axis of symmetry. Can. J. Math., 22, 2, 265—287 (1970).
140. Neumann M., Vişa A. Reprezentarea substituțiilor din S_4 și A_5 prin rotațiile corpurilor regulate. Eucrările științ. Inst. ped. Timișoara, Mat.—fiz. 1959, Timișoara. 103—110 (1960).
141. Robinson R. Finite sets of points on a sphere with each nearest to five others. Math. Ann., 179, 4, 296—318 (1969).
142. Seidel J. J. Polytopen. Rept. Math. centrum, 1966, N 5.
143. Stewart B. M. Adventures among the Toroides. Okemos (Mich. USA) 1970.
144. Valette G. Les polyèdres inscriptibles à faces régulières. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 55, 10, 916—928 (1969).

ЛИТЕРАТУРА

1. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями. «Зап. научн. сем. Ленинградск. отд. матем. ин-та им. В. А. Стеклова», АН СССР, т. 2. М., «Наука», 1967, 217 с.
2. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces. Canad. J. Math., 18, 1, 169—200 (1966).
3. Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников. «Укр. геометр. сб.», вып. 10. Харьков, Изд-во ХГУ, 1961, с. 20—34.

Поступила 9 марта 1972.

О СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЯХ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ V_3^2 В P_3 . II

М. Р. Роговой

Харьков

Относительно канонического репера $R(M_0M_1M_2M_3)$ с компонентами инфинитезимального преобразования

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega_o^j \quad (i, k = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Неголономное многообразие V_3^2 в P_3 задается уравнением

$$\omega_0^3 = 0, \quad (2)$$

условия полной интегрируемости которого не выполняются:

$$\Gamma_{12}^3 \neq \Gamma_{21}^3. \quad (3)$$

Здесь имеют место следующие условия:

$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad (4)$$

которые фиксируют следующие прямые: M_0M_1 и M_0M_2 — асимптотические касательные; M_0M_3 — инвариантная прямая, не лежащая в касательной плоскости $M_0M_1M_2$ многообразия V_3^2 (ей отводится роль проективной нормали многообразия) [3]

Условия (4) закрепляют также точки M_1 и M_2 на асимптотических касательных.

Остается произвольным выбор вершины M_3 и нормирование вершин.

Формы ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k] \quad (i, j, k = 0, 1, 2, 3), \quad (5)$$

1. Инвариантная соприкасающаяся поверхность S_2

В статье [4] введено понятие соприкасающейся поверхности неголономного многообразия V_3^2 в данной точке M_0 пространства: это поверхность, образованная однопараметрическим семейством кривых многообразия V_3^2 , инцидентных точке M_0 . Инвариантная прямая M_0M_3 , получившая назначение проективной нормали, позволяет ввести понятие проективно-геодезической линии многообразия V_3^2 как кривой многообразия V_3^2 , соприкасающаяся плоскость которой проходит через эту прямую. Через точку M_0 в данном направлении, принадлежащем касательной плоскости многообразия V_3^2 , проходит одна геодезическая линия. Соприкасающаяся поверхность, образованная однопараметрическим семейством проективно-геодезических линий многообразия V_3^2 , инцидентных точек M_0 инвариантно связана с V_3^2 ; она обозначена через S_2 [4].

Уравнение инвариантной соприкасающейся поверхности S_2 в неоднородных координатах x, y, z относительно канонического репера в окрестности точки M_0 записывается в виде следующего разложения:

$$z = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} x^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} x^2 y + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} xy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} y^3 \right) + \dots, \quad (6)$$

где производные вычисляются в точке M_0 и имеют такие значения [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3); \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= -\Gamma_{11}^2 (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3); \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{1}{3} \Gamma_{12}^3 \left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3} \right)_1; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{3} \Gamma_{21}^3 \left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3} \right)_2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -\Gamma_{22}^1 (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3).$$

(Здесь используется обозначение $d\Gamma = (\Gamma)_1 \omega_0^1 + (\Gamma)_2 \omega_0^2 + (\Gamma)_3 \omega_0^3$).

2. Деривационные формулы для поверхности S_2

Компоненты инфинитезимального преобразования канонического репера $R(M_0 M_1 M_2 M_3)$ для многообразия V_3^2 заданы формулой (1) и условиями (4), (5). Обозначим через $\tilde{\omega}_i^k$ компоненты инфинитезимального преобразования этого репера при перемещении по поверхности S_2 .

Для многообразия V_3^2

$$dM_i = \omega_i^k M_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3); \quad (8)$$

для поверхности S_2

$$\delta M_i = \tilde{\omega}_i^k M_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3). \quad (9)$$

Считая ω_i^k заданными, определим $\tilde{\omega}_i^k$; при этом можно положить $\tilde{\omega}_0^1 = \omega_0^1$, $\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2$, $\tilde{\omega}_0^3 = 0$. Возьмем на поверхности S_2 произвольную фиксированную точку M с неоднородными координатами x, y, z относительно репера $R(M_0 M_1 M_2 M_3)$

$$M = M_0 + xM_1 + yM_2 + zM_3. \quad (10)$$

При перемещении точки M_0 и репера R по поверхности S_2 будет, очевидно, меняться только общий множитель четырех однородных координат точки M ; поэтому

$$\delta M = \delta \lambda \cdot M. \quad (11)$$

Дифференцируем (10)

$$\delta M = \delta M_0 + x \delta M_1 + y \delta M_2 + z \delta M_3 + \delta x M_1 + \delta y M_2 + \delta z M_3$$

и подставляем выражения для δM_i из (9)

$$\delta M = \tilde{\omega}_0^k M_k + x \tilde{\omega}_1^k M_k + y \tilde{\omega}_2^k M_k + z \tilde{\omega}_3^k M_k + \delta x M_1 + \delta y M_2 + \delta z M_3. \quad (12)$$

Подставив (10), (12) в (11) и приравняв множители при соответствующих M_k в левой и правой частях, получим такие уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0^0 + x \tilde{\omega}_1^0 + y \tilde{\omega}_2^0 + z \tilde{\omega}_3^0 &= \delta \lambda, \\ \delta x + \omega_0^1 + x \tilde{\omega}_1^1 + y \tilde{\omega}_2^1 + z \tilde{\omega}_3^1 &= x \delta \lambda, \\ \delta y + \omega_0^2 + x \tilde{\omega}_1^2 + y \tilde{\omega}_2^2 + z \tilde{\omega}_3^2 &= y \delta \lambda, \\ \delta z + x \tilde{\omega}_1^3 + y \tilde{\omega}_2^3 + z \tilde{\omega}_3^3 &= z \delta \lambda. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь, исключая из (13) $\delta\lambda$, находим

$$\begin{aligned}\delta x &= -\omega_0^1 - x\tilde{\omega}_1^1 - y\tilde{\omega}_2^1 - z\tilde{\omega}_3^1 + x(\tilde{\omega}_0^0 + x\tilde{\omega}_1^0 + y\tilde{\omega}_2^0 + z\tilde{\omega}_3^0), \\ \delta y &= -\omega_0^2 - x\tilde{\omega}_1^2 - y\tilde{\omega}_2^2 - z\tilde{\omega}_3^2 + \\ &\quad + y(\tilde{\omega}_0^0 + x\tilde{\omega}_1^0 + y\tilde{\omega}_2^0 + z\tilde{\omega}_3^0), \\ \delta z &= -x\tilde{\omega}_1^3 - y\tilde{\omega}_2^3 - z\tilde{\omega}_3^3 + z(\tilde{\omega}_0^0 + x\tilde{\omega}_1^0 + y\tilde{\omega}_2^0 + z\tilde{\omega}_3^0)\end{aligned}\quad (14)$$

и вносим их в

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y.$$

Если заменить z его разложением (6), получим тождество относительно x, y . Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и y этого тождества, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1^3 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \omega_0^2, \\ \tilde{\omega}_2^3 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \omega_0^1, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \tilde{\omega}_1^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \omega_0^1 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \omega_0^2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \tilde{\omega}_2^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y} \omega_0^1 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \omega_0^2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (\tilde{\omega}_0^0 - \tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^3) &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \omega_0^1 + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \omega_0^2;\end{aligned}\quad (15)$$

или, принимая во внимание значения производных (7),

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1^3 &= \frac{1}{2} (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3) \omega_0^2, \\ \tilde{\omega}_2^3 &= \frac{1}{2} (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3) \omega_0^1, \\ \tilde{\omega}_1^2 &= \Gamma_{11}^2 \omega_0^1 - \frac{\Gamma_{12}^3}{3(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)} \left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3} \right)_1 \omega_0^2, \\ \tilde{\omega}_2^1 &= -\frac{\Gamma_{21}^3}{3(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)} \left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3} \right)_2 \omega_0^1 + \Gamma_{22}^1 \omega_0^2, \\ \tilde{\omega}_0^0 - \tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^3 &= \frac{2\Gamma_{12}^3}{3(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)} \left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3} \right)_1 \omega_0^1 + \\ &\quad + \frac{2\Gamma_{21}^3}{3(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)} \left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3} \right)_2 \omega_0^2.\end{aligned}\quad (16)$$

Можно также определить компоненты $\tilde{\omega}_1^3$ и $\tilde{\omega}_2^3$; для этого пришлось бы рассмотреть окрестность четвертого порядка точки M_0 и продлить разложение (6) до членов четвертой степени относительно x и y включительно.

3. Уравнение поверхности S_2 относительно репера С. П. Финикова

Воспользуемся обозначениями С. П. Финикова [1] и отметим, что если поверхность задана разложением

$$z = xy + \frac{1}{3!} (a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots, \quad (17)$$

то уравнение пучка поверхностей Дарбу имеет вид [1]

$$xy - z + \frac{1}{2} a_{21}xz + \frac{1}{2} a_{12}yz + \nu z^2 = 0. \quad (18)$$

Уравнение (6) поверхности S_2 , в которое подставим значения производных (7), приобретает вид

$$z = \frac{1}{2} (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3) xy + \frac{1}{3!} \left[-\Gamma_{11}^2 (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3) x^3 + \Gamma_{12}^3 \left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3} \right)_1 x^2 + \right. \\ \left. + \Gamma_{21}^3 \left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3} \right)_2 xy^2 - \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3) y^3 \right] + \dots \quad (19)$$

Разделив обе части уравнения (19) на $\frac{1}{2} (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)$ и изменив масштаб по оси z , получим

$$z = xy + \frac{1}{3} \left[-\Gamma_{11}^2 x^3 + \frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3} \left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3} \right)_1 x^2 y + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3} \left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3} \right)_2 xy^2 - \Gamma_{22}^1 y^3 \right] + \dots \quad (20)$$

Сравнивая (20) и (17), находим

$$a_{30} = -2\Gamma_{11}^2, \quad a_{21} = \frac{2\Gamma_{12}^3}{3(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)} \left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3} \right)_1, \\ a_{12} = \frac{2\Gamma_{21}^3}{3(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)} \left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3} \right)_2, \quad a_{03} = -2\Gamma_{22}^1. \quad (21)$$

Подставив значения a_{21} , a_{12} и (21) в (18), получим уравнение пучка Дарбу для поверхности S_2 . Как было отмечено [4], этот пучок поверхностей может служить обобщением пучка поверхностей Дарбу для многообразия V_3^2 .

Компоненты $\tilde{\omega}_i^k$ инфинитезимального преобразования репера $R(M_0M_1M_2M_3)$ для поверхности S_2 (20), если учесть проведенное изменение масштаба по оси z и обозначения (21), принимают вид

$$\tilde{\omega}_1^3 = \omega_0^2, \quad \tilde{\omega}_2^3 = \omega_0^1, \quad \tilde{\omega}_1^2 = \Gamma_{11}^2 \omega_0^1 - \frac{1}{2} a_{21} \omega_0^2, \\ \tilde{\omega}_2^1 = -\frac{1}{2} a_{12} \omega_0^1 + \Gamma_{22}^1 \omega_0^2, \quad \tilde{\omega}_0^0 = \tilde{\omega}_1^1 = \tilde{\omega}_2^2 = \omega_3^3 = \\ = a_{21} \omega_0^1 + a_{12} \omega_0^2. \quad (22)$$

Для дальнейшего будет удобно отнести поверхность S_2 к реперу С. П. Финикова [1]. Чтобы построить этот репер, запишем уравнение полярной плоскости, соответствующей полюсу (x, y, z) , относительно поверхности (18):

$$\left(y + \frac{1}{2} a_{21} z\right) X + \left(x + \frac{1}{2} a_{12} z\right) Y + \left(\frac{1}{2} a_{21} x + \frac{1}{2} a_{12} y + \right. \\ \left. + 2\gamma z - 1\right) Z - z = 0,$$

где X, Y, Z — текущие координаты.

В этом полярите прямые $M_0 M_1$ и $M_0 M_2$ сами себе сопряжены. Прямой $M_0 M_3$ соответствует одна и та же прямая

$$\frac{1}{2} a_{21} X + \frac{1}{2} a_{12} Y - 1 = 0, \quad Z = 0 \quad (23)$$

независимо от значения параметра γ , определяющего поверхность Дарбу. Эта прямая лежит в касательной плоскости $M_0 M_1 M_2$ поверхности S_2 и пересекает прямые $M_0 M_1$ и $M_0 M_2$ соответственно в точках $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ с координатами

$$X_1 = \frac{2}{a_{21}}, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \\ X_2 = 0, \quad Y_2 = \frac{2}{a_{12}}, \quad Z_2 = 0,$$

следовательно,

$$\bar{M}_1 = \frac{a_{21}}{2} M_0 + M_1, \\ \bar{M}_2 = \frac{a_{12}}{2} M_0 + M_2. \quad (24)$$

Выберем точки $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ за вершины репера. Относительно этого репера $\bar{R}(M_0 \bar{M}_1 \bar{M}_2 M_3)$ уравнение (17) приобретает вид

$$z = xy - \frac{1}{3} (\beta x^3 + \gamma y^3) + \dots, \quad (25)$$

а уравнение (20) поверхности S_2 следующее:

$$z = xy - \frac{1}{3} (\Gamma_{11}^2 x^3 + \Gamma_{22}^1 y^3) + \dots \quad (26)$$

Компоненты инфинитезимального преобразования $\bar{\omega}_i^k$ репера $\bar{R}(M_0 \bar{M}_1 \bar{M}_2 M_3)$ для поверхности S_2 можно получить из формул (9), если вместо точек M_1 и M_2 ввести точки $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ по формулам (24):

$$\delta M_0 = \left(\tilde{\omega}_0^0 - \frac{1}{2} a_{21} \omega_0^1 - \frac{1}{2} a_{12} \omega_0^2\right) M_0 + \omega_0^1 \bar{M}_1 + \omega_0^2 \bar{M}_2, \\ \delta \bar{M}_1 = \left[\tilde{\omega}_1^0 + \frac{1}{2} \delta a_{21} + \frac{1}{2} a_{21} (\tilde{\omega}_0^0 - \tilde{\omega}_1^1) - \frac{1}{2} a_{12} \tilde{\omega}_1^2 - \frac{1}{2} a_{21} \times\right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{2} a_{21} \omega_0^1 + \frac{1}{2} a_{12} \omega_0^2 \right) M_0 + \left(\frac{1}{2} a_{21} \omega_0^1 + \tilde{\omega}_1^1 \right) \bar{M}_1 + \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} a_{21} \omega_0^2 + \tilde{\omega}_1^2 \right) M_2 + \tilde{\omega}_1^3 M_3, \\
\delta \bar{M}_2 = & \left[\tilde{\omega}_2^0 + \frac{1}{2} \delta a_{12} + \frac{1}{2} a_{12} (\tilde{\omega}_0^0 - \tilde{\omega}_2^2) - \frac{1}{2} a_{21} \tilde{\omega}_2^1 - \frac{1}{2} a_{12} \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{1}{2} a_{21} \omega_0^1 + \frac{1}{2} a_{12} \omega_0^2 \right) \right] M_0 + \left(\frac{1}{2} a_{12} \omega_0^1 + \tilde{\omega}_2^1 \right) \bar{M}_1 + \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} a_{12} \omega_0^2 + \tilde{\omega}_2^2 \right) \bar{M}_2 + \tilde{\omega}_2^3 M_3, \\
\delta M_3 = & \left(\tilde{\omega}_3^0 - \frac{1}{2} a_{21} \tilde{\omega}_3^1 - \frac{1}{2} a_{12} \tilde{\omega}_3^2 \right) M_0 + \tilde{\omega}_3^1 \bar{M}_1 + \tilde{\omega}_3^2 \bar{M}_2 + \tilde{\omega}_3^3 M_3.
\end{aligned} \tag{27}$$

Принимая во внимание (22), находим интересующие нас компоненты:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1^3 = \tilde{\omega}_1^3 = \omega_0^1, \quad \bar{\omega}_2^3 = \tilde{\omega}_2^3 = \omega_0^2, \quad \bar{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_1^2 + \\
+ \frac{1}{2} a_{21} \omega_0^2 = \Gamma_{11}^2 \omega_0^1,
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_2^1 = \tilde{\omega}_2^1 + \frac{1}{2} a_{12} \omega_0^1 = \Gamma_{22}^1 \omega_0^1, \quad \bar{\omega}_0^0 - \bar{\omega}_1^1 - \bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_3^3 = 0; \\
\bar{\omega}_1^0 = \tilde{\omega}_1^0 + \frac{1}{2} \delta a_{21} + \frac{1}{2} a_{21} (\tilde{\omega}_0^0 - \tilde{\omega}_1^1) - \frac{1}{2} a_{12} \tilde{\omega}_1^2 - \frac{1}{2} a_{21} \times \\
\times \left(\frac{1}{2} a_{21} \omega_0^1 + \frac{1}{2} a_{12} \omega_0^2 \right),
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_2^0 = \tilde{\omega}_2^0 + \frac{1}{2} \delta a_{12} + \frac{1}{2} a_{12} (\tilde{\omega}_0^0 - \tilde{\omega}_2^2) - \frac{1}{2} a_{21} \tilde{\omega}_2^1 - \frac{1}{2} a_{12} \times \\
\times \left(\frac{1}{2} a_{21} \omega_0^1 + \frac{1}{2} a_{12} \omega_0^2 \right), \\
\bar{\omega}_3^1 = \tilde{\omega}_3^1, \quad \bar{\omega}_3^2 = \tilde{\omega}_3^2.
\end{aligned}$$

Нормируем вершину M_0 таким образом, чтобы

$$\bar{\omega}_0^0 + \bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_3^3 = 0; \tag{30}$$

тогда из последнего равенства (29) следует

$$\bar{\omega}_0^0 + \bar{\omega}_3^3 = 0, \quad \bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2 = 0. \tag{31}$$

Из уравнений структуры (5) находим

$$\bar{\Gamma}_{01}^0 + \bar{\Gamma}_{11}^1 = 0, \quad \bar{\Gamma}_{02}^0 + \bar{\Gamma}_{22}^2 = 0, \tag{32}$$

что вместе с (31) приводит к следующим условиям:

$$\bar{\Gamma}_{01}^0 = -\bar{\Gamma}_{11}^1 = \bar{\Gamma}_{21}^2 = -\bar{\Gamma}_{31}^3; \quad \bar{\Gamma}_{02}^0 = -\bar{\Gamma}_{22}^2 = \bar{\Gamma}_{12}^1 = -\bar{\Gamma}_{32}^3.$$

Уравнения структуры (5) дают, между прочим, еще такие условия:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{21}^0 - \bar{\Gamma}_{31}^1 &= \bar{\Gamma}_{12}^0 - \bar{\Gamma}_{32}^2, \\ \bar{\Gamma}_{12}^1 &= \frac{\bar{\Gamma}_{11}^0 - \bar{\Gamma}_{31}^2}{2\bar{\Gamma}_{11}^2} + \frac{1}{2} (\ln \Gamma_{11}^2)_2, \\ \bar{\Gamma}_{21}^2 &= \frac{\bar{\Gamma}_{22}^0 - \bar{\Gamma}_{32}^1}{2\bar{\Gamma}_{22}^1} + \frac{1}{2} (\ln \bar{\Gamma}_{22}^1)_1.\end{aligned}\quad (33)$$

Введенный таким образом репер $\bar{R}(M_0, \bar{M}_1, \bar{M}_2, M_3)$ — это репер, которым пользовался С. П. Фиников при построении канонического пучка прямых для поверхности [1].

4. Канонический пучок прямых многообразия V_3^2

Теперь можно в каждой точке M_0 пространства P_3 построить канонический пучок прямых многообразия V_3^2 . Этим пучком может служить канонический пучок соприкасающейся поверхности S_2 , инвариантно связанной с многообразием V_3^2 .

В неоднородных координатах $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ относительно репера С. П. Финикова уравнения канонического пучка прямых для поверхности S_2 записываются в виде [1]

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\Gamma}_{11}^0 - \bar{\Gamma}_{31}^2}{\bar{\Gamma}_{11}^2} + \lambda (\ln \bar{\Gamma}_{22}^1 (\Gamma_{11}^2)^2)_2 \right] \bar{z}, \\ \bar{y} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\Gamma}_{22}^0 - \bar{\Gamma}_{32}^1}{\bar{\Gamma}_{22}^1} + \lambda (\ln \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1)^2)_1 \right] \bar{z}.\end{aligned}\quad (34)$$

Воспользовавшись формулами преобразования координат (24), нетрудно убедиться в том, что в неоднородных координатах x, y, z относительно канонического репера $R(M_0, M_1, M_2, M_3)$ многообразия V_3^2 эти уравнения запишутся точно так же:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\Gamma}_{11}^0 - \bar{\Gamma}_{31}^2}{\bar{\Gamma}_{11}^2} + \lambda (\ln \bar{\Gamma}_{22}^1 (\bar{\Gamma}_{11}^2)^2)_2 \right] z, \\ y &= \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\Gamma}_{22}^0 - \bar{\Gamma}_{32}^1}{\bar{\Gamma}_{22}^1} + \lambda (\ln \bar{\Gamma}_{11}^2 (\bar{\Gamma}_{22}^1)^2)_1 \right] z,\end{aligned}\quad (35)$$

где величины $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ определяются формулами (28), (29) и имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{11}^2 &= \Gamma_{11}^2, \quad \bar{\Gamma}_{22}^1 = \Gamma_{22}^1, \quad \bar{\Gamma}_{31}^2 = \tilde{\Gamma}_{31}^2, \quad \bar{\Gamma}_{32}^1 = \tilde{\Gamma}_{32}^1; \\ \bar{\Gamma}_{11}^0 &= \tilde{\Gamma}_{11}^0 + \frac{1}{2} (a_{21})_1 + \frac{1}{2} a_{21} (\tilde{\Gamma}_{01}^0 - \tilde{\Gamma}_{11}^1) - \frac{1}{2} a_{12} \Gamma_{11}^2 - \frac{1}{2} a_{21}^2; \\ \bar{\Gamma}_{22}^0 &= \tilde{\Gamma}_{22}^0 + \frac{1}{2} (a_{12})_2 + \frac{1}{2} a_{12} (\tilde{\Gamma}_{01}^0 - \tilde{\Gamma}_{22}^1) - \frac{1}{2} a_{21} \Gamma_{22}^1 - \frac{1}{2} a_{12}^2.\end{aligned}\quad (36)$$

В случае голономности, когда $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3$, из формул (21) получаем

$$a_{12} = a_{21} = 0,$$

и пучок прямых (35) совпадает с каноническим пучком для обычной поверхности. При этом из формул (24) следует также, что репер С. П. Финикова совпадает с каноническим репером многообразия V_3^2 .

5. Об одной инвариантной дифференциальной форме многообразия V_3^2

Переместимся из точки M_0 в бесконечно близкую точку M_0^* . При этом для многообразия V_3^2 репер $R(M_0 M_1 M_2 M_3)$ преобразуется в репер $R^*(M_0^* M_1^* M_2^* M_3^*)$, где

$$M_i^* = M_i + dM_i, \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (37)$$

а для поверхности S_2 — в репер $\tilde{R}^*(M_0^* \tilde{M}_1^* \tilde{M}_2^* M_3^*)$, где

$$\tilde{M}_i^* = M_i + \delta M_i, \quad (38)$$

принимая во внимание (8) и (9), (37), (38) запишем так:

$$M_i^* = (\delta_i^k + \omega_i^k) M_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3) \quad (39)$$

и

$$\tilde{M}_i^* = (\delta_i^k + \tilde{\omega}_i^k) M_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3) \quad (40)$$

(δ_i^k — символ Кронеккера).

Нам понадобятся формулы преобразования репера $R^*(M_0^* M_1^* M_2^* M_3^*)$ в репер $\tilde{R}^*(M_0^* \tilde{M}_1^* \tilde{M}_2^* M_3^*)$. Мы их получим, если определим преобразование, обратное преобразованию (39):

$$M_k = (\delta_k^i - \omega_k^i) M_i^* \quad (i, k = 0, 1, 2, 3) \quad (41)$$

и подставим в (40):

$$\tilde{M}_i^* = (\delta_i^k + \tilde{\omega}_i^k - \omega_i^k) M_k^* \quad (i, k = 0, 1, 2, 3). \quad (42)$$

В точке M_0 поверхность S_2 , как и любая другая соприкасающаяся поверхность, содержит окрестность второго порядка многообразия V_3^2 . Поэтому касательная плоскость и асимптотические направления поверхности S_2 в точке M_0 совпадают с касательной плоскостью и асимптотическими направлениями многообразия V_3^2 .

В бесконечно-близкой к M_0 точке M_0^* касательная плоскость и асимптотические направления поверхности S_2 уже не совпадают с соответствующими образами многообразия V_3^2 . В самом деле, для многообразия V_3^2 касательная плоскость — это плоскость $(M_0^* M_1^* M_2^*)$, а асимптотические направления — это

$$(M_0^* M_1^*), (M_0^* M_2^*). \quad (43)$$

Для поверхности S_2 касательная плоскость в точке M_0^* — это плоскость $(M_0^* M_1^* M_2^*)$, а асимптотические направления — это, если учесть (42), направления

$$\begin{aligned}(M_0^* \tilde{M}_1^*) &= (1 + \tilde{\omega}_1^1 - \omega_1^1) (M_0^* M_1^*) + (\tilde{\omega}_1^2 - \omega_1^2) (M_0^* M_2^*) + \\ &\quad + (\tilde{\omega}_1^3 - \omega_1^3) (M_0^* M_3^*), \\ (M_0^* \tilde{M}_2^*) &= (\tilde{\omega}_2^1 - \omega_2^1) (M_0^* M_1^*) + (1 + \tilde{\omega}_2^2 - \omega_2^2) (M_0^* M_2^*) + \\ &\quad + (\tilde{\omega}_2^3 - \omega_2^3) (M_0^* M_3^*).\end{aligned}\quad (44)$$

Спроектируем прямые (44) из вершины M_3^* на плоскость $(M_0^* M_1^* M_2^*)$; их проекциями будут прямые

$$\begin{aligned}(1 + \tilde{\omega}_1^1 - \omega_1^1) (M_0^* M_1^*) + (\tilde{\omega}_1^2 - \omega_1^2) (M_0^* M_2^*), \\ (\tilde{\omega}_2^1 - \omega_2^1) (M_0^* M_1^*) + (1 + \tilde{\omega}_2^2 - \omega_2^2) (M_0^* M_2^*);\end{aligned}\quad (45)$$

ангармоническое отношение четверки прямых (43) и (45) приводит к инвариантной дифференциальной форме

$$D = (\tilde{\omega}_1^2 - \omega_1^2) (\tilde{\omega}_2^1 - \omega_2^1). \quad (46)$$

В развернутом виде, если в (46) подставить выражения для $\tilde{\omega}_1^2$, ω_1^2 , $\tilde{\omega}_2^1$, ω_2^1 из (1) и (16), с учетом (4), форма D приобретает вид

$$D = \frac{\Gamma_{12}^3 \Gamma_{21}^3}{9 (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)} \left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3} \right)_1 \left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3} \right)_2 \omega_0^1 \omega_0^2. \quad (47)$$

Если ввести проективную характеристику неголономности Бомпиани [2]

$$I = - \frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3},$$

формула (47) переписывается так:

$$D = \frac{(I)_1 (I)_2}{9I(1-I)^2} \omega_0^1 \omega_0^2. \quad (48)$$

В направлении асимптотических линий многообразия V_3^2 форма D обращается в нуль.

В случае голономности $I = -1$ форма D исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия. М., ОНТИ, 1937, 432 с.
2. Bompiani E. Sulle varietà analonome. Rend. dei Lincei, V. XXVII, F. 6, 1938.
3. Роговой М. П. К проективно-дифференциальной геометрии неголономных поверхностей в трехмерном пространстве. «Укр. матем. ж.», т. II, № 2, Киев, 1950, с. 102—106.

Поступила 21 апреля 1972 г.

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА, РАСПАДАЮЩИХСЯ В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КОНГРУЭНЦИЙ С ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ НУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

М. А. Солейман

Киев

1. Предварительные соотношения

Трехмерное эллиптическое пространство будем интерпретировать как трехмерное проективное пространство с заданным в нем абсолют (невыврожденная мнимая поверхность второго порядка). За подвижной репер такого пространства выберем репер, автополярный относительно абсолюта, при этом координаты его вершин пронормированы так, как это сделано в [1]. Из этой работы возьмем необходимые формулы и уравнения. В частности, уравнения инфинитезимального смещения репера

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3); \quad (1)$$

уравнения структуры эллиптического пространства

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_k^i], \quad D\omega_j^i = [\omega_j^k \omega_k^i] - [\omega^j \omega^i] \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

При этом положим, что $\omega_0^i = \omega^i$, $A_0 = A$ и кривизна пространства равна единице. Между формами ω_α^β имеют место следующие соотношения:

$$\omega_0^0 = 0, \quad \omega_i^0 = -\omega^i, \quad \omega_j^i = -\omega_i^j. \quad (3)$$

Пусть дан некоторый комплекс прямых K . Если поместить вершины A, A_3 репера в центры его луча, а координатные плоскости AA_3A_2 и AA_3A_1 совместить с плоскостями, соответствующими этим центрам в нормальной корреляции, то формы ω_α^β будут связаны соотношением

$$\omega_3^1 = k\omega^2. \quad (4)$$

Продолжая это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} dk &= p\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2, \\ -k\omega_1^2 + \omega^3 &= \alpha\omega^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega_1^2 + k\omega^3 &= \beta\omega^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Инфлекционные центры луча определяются уравнением (см. [2])

$$k^2 q t^4 - 2k a t^3 + (2k\gamma + p) t^2 - 2\beta t + r = 0. \quad (6)$$

Сопровождающий репер комплекса является каноническим, следовательно, все формы ω_a^β инвариантны. Это означает, что приравнивание нулю любой из этих форм имеет инвариантный смысл.

Особую роль играет уравнение

$$\omega^2 = 0. \quad (7)$$

В общем случае это уравнение определяет неголономную конгруэнцию. Фокусы такой конгруэнции, как легко показать, совпадают с точками A , A_3 , а фокальные плоскости — с плоскостями AA_1A_3 , AA_2A_3 . Следовательно, эти конгруэнции могут быть определены и чисто геометрически, без привлечения заранее предписанного уравнения.

В настоящей работе внимание сосредоточено на комплексах, у которых конгруэнции (7) являются голономными, т. е. на комплексах, распадающихся в однопараметрические семейства таких конгруэнций. Для указанных комплексов дан способ безынтегрального представления и предварительно показано, что фокальными поверхностями конгруэнций (7), составляющих эти комплексы, являются поверхности нулевой гауссовой кривизны.

Таким образом, здесь рассматривается не произвольный комплекс, распадающийся в однопараметрическое семейство конгруэнций с фокальными поверхностями нулевой гауссовой кривизны, а достаточно широкий некоторый класс таких комплексов. Если для произвольного комплекса, распадающегося в указанные конгруэнции, построение очевидно, то для выделенного класса оно перестает быть очевидным. Этот класс комплексов является более общим по сравнению с тем, который был рассмотрен в работе [2]. Целый ряд свойств, которыми обладал частный класс комплексов, переносится теперь на класс более общий.

Дифференцируя (7) внешним образом, получаем

$$[\omega^1 \omega_1^2] + [\omega^3 \omega_3^2] = 0.$$

Отсюда (см. (5)) находим

$$q - r = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) характеризует рассматриваемый нами класс комплексов.

Для голономных конгруэнций (7)

$$dA = \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3,$$

значит, точка A (центр луча) описывает фокальную поверхность (обозначим ее σ) конгруэнции (7). Равенство

$$dA_3 = -\omega^3 A + \omega_3^2 A_2$$

означает, что точка A_3 (второй центр) описывает вторую фокальную поверхность (σ_3) конгруэнции (7).

Из равенств

$$dA_1 = -\omega^1 A + \omega_1^2 A_2 \quad (\omega^2 = 0)$$

$$dA_2 = \omega_2^1 A_1 + \omega_2^3 A_3$$

следует, что прямая $A_1 A_2$ также описывает конгруэнцию, фокальными поверхностями которой являются поверхности σ_1 , σ_2 , описываемые точками A_1 и A_2 ; а из равенств

$$\begin{aligned} dA &= \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3 \\ dA_1 &= -\omega^1 A + \omega_1^2 A_2 \end{aligned} \quad (\omega^2 = 0)$$

получим, что σ и σ_1 — фокальные поверхности конгруэнции, описанной лучом AA_1 .

Наконец, равенства

$$\begin{aligned} dA_3 &= -\omega^3 A + \omega_3^2 A_2 \\ dA_2 &= \omega_2^1 A_1 + \omega_2^3 A_3 \end{aligned} \quad (\omega^2 = 0)$$

показывают, что поверхности σ_3 и σ_2 являются фокальными поверхностями конгруэнции, описанной лучом $A_3 A_2$.

Таким образом, четверка поверхностей σ , σ_1 , σ_2 , σ_3 порождает четверку конгруэнций $\{AA_1\}$, $\{A_1 A_2\}$, $\{A_2 A_3\}$, $\{A_3 A\}$, для которых они являются фокальными поверхностями с фокусами A , A_1 , A_2 , A_3 .

Из двух последних уравнений (5) при $\omega^2 = 0$, $q - r = 0$ находим

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \frac{q - k\gamma}{1 - k^2} \omega^1 + \frac{\gamma - kq}{1 - k^2} \omega_3^2, \\ \omega_1^2 &= \frac{\gamma - kq}{1 - k^2} \omega^1 - \frac{q - k\gamma}{1 - k^2} \omega_3^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Докажем, что все четыре конгруэнции $\{AA_1\}$, $\{A_1 A_2\}$, $\{A_2 A_3\}$, $\{A_3 A\}$ являются конгруэнциями W . Действительно, возьмем, например, конгруэнцию $\{AA_1\}$.

Для нее имеем

$$\begin{aligned} dA &= \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3, \\ d^2 A &= -\{(\omega^1)^2 + (\omega^3)^2\} A + (\omega^1 \omega_1^2 + \omega^3 \omega_3^2) A_2 + d\omega^1 A_1 + d\omega^3 A_3, \\ dA_1 &= -\omega^1 A + \omega_1^2 A_2, \\ d^2 A_1 &= -\{(\omega^1)^2 + (\omega_1^2)^2\} A_1 - (\omega^1 \omega^3 + \omega_1^2 \omega_3^2) A_3 - d\omega^1 A + d\omega_1^2 A_2. \end{aligned}$$

Поскольку касательной плоскостью поверхности σ служит плоскость $AA_1 A_3$, то уравнение асимптотических линий поверхности σ будет таким:

$$\omega^1 \omega_1^2 + \omega^3 \omega_3^2 = 0. \quad (10)$$

Касательной плоскостью поверхности σ_1 является плоскость AA_1A_2 . Следовательно, получим уравнение асимптотических линий этой поверхности:

$$\omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2 = 0. \quad (11)$$

Учитывая уравнения (9), приводим уравнения (10), (11) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - kq}{1 - k^2} \{(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2\} &= 0, \\ \frac{q - k\gamma}{1 - k^2} \{(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2\} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Возьмем тот общий случай, когда выполняются неравенства

$$\gamma - kq \neq 0, \quad q - k\gamma \neq 0, \quad q \neq \gamma. \quad (13)$$

Уравнение асимптотических линий будет иметь вид

$$(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2 = 0. \quad (14)$$

Уравнения асимптотических линий на обеих поверхностях совпадают, следовательно, конгруэнция $\{AA_1\}$ есть конгруэнция W . Аналогично доказывается утверждение и для других конгруэнций. При этом на всех фокальных поверхностях этих конгруэнций уравнения асимптотических линий имеют вид (14). Утверждение доказано.

Имеет место следующая

Теорема. Четверка поверхностей $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, порождающая четверку конгруэнций $\{AA_1\}, \{A_1A_2\}, \{A_2A_3\}, \{A_3A\}$, для которых они являются фокальными с фокусами A, A_1, A_2, A_3 , есть поверхности нулевой гауссовой кривизны.

Доказательство. Возьмем, например, поверхность σ . Система уравнений, которая определяет указанную в теореме четверку конгруэнций, имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 0, \quad \omega_3^1 = 0, \\ \omega^3 &= \frac{q - k\gamma}{1 - k^2} \omega^1 + \frac{\gamma - kq}{1 - k^2} \omega_3^2, \\ \omega_1^2 &= -\frac{\gamma - kq}{1 - k^2} \omega^1 - \frac{q - k\gamma}{1 - k^2} \omega_3^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Касательная плоскость к поверхности σ является плоскостью AA_1A_3 , полюс этой плоскости лежит в вершине A_2 . Следовательно, AA_2 служит нормалью к поверхности σ .

За базисные формы поверхности σ берем формы ω^1 и ω^3 , поэтому систему уравнений (15) перепишем так:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 0, \quad \omega_3^1 = 0, \\ \omega_1^2 &= -\frac{q - k\gamma}{\gamma - kq} \omega^3 + \frac{q^2 - \gamma^2}{\gamma - kq} \omega^1, \\ \omega_3^2 &= \frac{1 - k^2}{\gamma - kq} \omega^3 - \frac{q - k\gamma}{\gamma - kq} \omega^1. \end{aligned} \quad (16)$$

Первая и вторая квадратичные формы поверхности σ определяются формулами

$$\begin{aligned} (dA)^2 &= (\omega^1)^2 + (\omega^3)^2, \\ - (dA dA_2) &= \omega^1 \omega_1^2 + \omega^3 \omega_3^2 = \\ &= \frac{(q^2 - \gamma^2)(\omega^1)^2 - 2(q - k\gamma)\omega^1 \omega^3 + (1 - k^2)(\omega^3)^2}{\gamma - kq}. \end{aligned} \quad (17)$$

Нормальная кривизна поверхности σ задается формулой

$$\frac{1}{R_n} = - \frac{(dA dA_2)}{(dA)^2}.$$

Внося сюда значения (17), получаем

$$\frac{1}{R_n} = \frac{(q^2 - \gamma^2)(\omega^1)^2 - 2(q - k\gamma)\omega^1 \omega^3 + (1 - k^2)(\omega^3)^2}{(\gamma - kq)\{(\omega^1)^2 + (\omega^3)^2\}}$$

или

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{R_n} (\gamma - kq) - (q^2 - \gamma^2) \right\} (\omega^1)^2 + 2(q - k\gamma) \omega^1 \omega^3 + \\ + \left\{ \frac{1}{R_n} (\gamma - kq) - (1 - k^2) \right\} (\omega^3)^2 = 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем это уравнение по ω^1 и ω^3 :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{R_n} (\gamma - kq) - (q^2 - \gamma^2) \right\} \omega^1 + (q - k\gamma) \omega^3 &= 0, \\ (q - k\gamma) \omega^1 + \left\{ \frac{1}{R_n} (\gamma - kq) - (1 - k^2) \right\} \omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда формы ω^1 и ω^3 , находим уравнение, определяющее главные кривизны поверхности σ :

$$\frac{1}{R_n^2} - \frac{1 - k^2 + q^2 - \gamma^2}{\gamma - kq} \cdot \frac{1}{R_n} - 1 = 0. \quad (18)$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{R_n' R_n''} = -1, \quad \frac{1}{R_n'} + \frac{1}{R_n''} = \frac{1 - k^2 + q^2 - \gamma^2}{\gamma - kq}. \quad (19)$$

Гауссова и средняя кривизны K_a , H поверхности σ определяются такими выражениями (см. [3]):

$$K_a = 1 + \frac{1}{R_n' R_n''}, \quad 2H = \frac{1}{R_n'} + \frac{1}{R_n''} \quad (20)$$

(кривизна эллиптического пространства $\frac{1}{R^2} = 1$). Учитывая (19), для поверхности σ получаем

$$K_{a_0} = 0, \quad 2H_0 = \frac{1 - k^2 + q^2 - \gamma^2}{\gamma - kq}.$$

Следовательно, поверхность σ имеет нулевую гауссову кривизну. Таким образом, конгруэнции

$$\omega^2 = 0, \quad (q - r = 0)$$

являются конгруэнциями W с фокальными поверхностями нулевой гауссовой кривизны.

Рассматриваемые комплексы определяются системой уравнений

$$\omega_3^1 = k\omega^2, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} dk &= p\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2, \\ -k\omega_1^2 + \omega^3 &= \alpha\omega^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega_1^2 + k\omega^3 &= \beta\omega^2 + \gamma\omega^1 + q\omega_3^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Два последних уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2} \omega^2 + \frac{q - k\gamma}{1 - k^2} \omega^1 + \frac{\gamma - kq}{1 - k^2} \omega_3^2, \\ \omega_1^2 &= \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2} \omega^2 - \frac{\gamma - kq}{1 - k^2} \omega^1 - \frac{q - k\gamma}{1 - k^2} \omega_3^2. \end{aligned} \quad (23)$$

2. Теорема существования рассматриваемых комплексов

Найдем широту класса комплексов (22). Продифференцируем систему (22) внешним образом и учтем систему (23):

$$\begin{aligned} [\Delta p \omega^2] + [d\alpha \omega^1] + [d\beta \omega_3^2] &= 0, \\ [\Delta \alpha \omega^2] + [\Delta q \omega^1] + [d\gamma \omega_3^2] &= 0, \\ [\Delta \beta \omega^2] + [\Delta \gamma \omega^1] + [dq \omega_3^2] &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta p &= dp + \frac{1}{1 - k^2} \{p(k\alpha - \beta) + \alpha(2kq - \gamma(1 + k^2)) - \beta(q(1 + k^2) - \\ &\quad - 2k\gamma)\} \omega^1 + \frac{1}{1 - k^2} \{p(k\beta - \alpha) + \alpha(2k\gamma - q(1 + k^2)) - \\ &\quad - \beta(\gamma(1 + k^2) - 2kq)\} \omega_3^2; \\ \Delta \alpha &= d\alpha + \frac{1}{1 - k^2} \{2\alpha(k\alpha - \beta) + q(2kq - \\ &\quad - (1 + k^2)\gamma) - \gamma((1 + k^2)q - 2k\gamma) - \\ &\quad - p(kq - \gamma)\} \omega^1 + \frac{1}{1 - k^2} \{\alpha(k\beta - \alpha) + q(2k\gamma - \\ &\quad - (1 + k^2)q) - \gamma((1 + k^2)\gamma - 2kq) + \beta(k\alpha - \beta) - \\ &\quad - p(k\gamma - q) - (1 - k^2)^2\} \omega_3^2; \\ \Delta q &= dq + \frac{1}{1 - k^2} \{\beta(kq - \gamma) - \alpha(k\gamma - q)\} \omega_3^2; \\ \Delta \beta &= d\beta + \frac{1}{1 - k^2} \{\beta(k\alpha - \beta) + \gamma(2kq - (1 + k^2)\gamma) - \\ &\quad - \alpha(\alpha - k\beta) - q((1 + k^2)q - 2k\gamma) + p(q - k\gamma) - \\ &\quad - (1 - k^2)^2\} \omega^1 + \frac{1}{1 - k^2} \{2\beta(k\beta - \alpha) + \gamma(2k\gamma - \\ &\quad - (1 + k^2)q) + p(\gamma - kq) - q((1 + k^2)\gamma - 2kg)\} \omega_3^2; \\ \Delta \gamma &= d\gamma - \frac{1}{1 - k^2} \{\beta(q - k\gamma) - \alpha(\gamma - kq)\} \omega_3^2. \end{aligned}$$

Раскрывая систему (24) по лемме Картана, получаем

$$\begin{aligned}
 dp &= x_1 \omega^2 + (x_2 - \lambda_1) \omega^1 + (x_3 - \lambda_2 \omega_3^2), \\
 d\alpha &= x_2 \omega^2 + x_4 \omega^1 + x_5 \omega_3^2, \\
 d\beta &= x_3 \omega^2 + x_5 \omega^1 + x_6 \omega_3^2, \\
 d\alpha &= y_1 \omega^2 + (y_2 - \mu_1) \omega^1 + (y_3 - \mu_2) \omega_3^2, \\
 dq &= y_2 \omega^2 + y_4 \omega^1 + (y_5 - \mu_3) \omega_3^2, \\
 d\gamma &= y_3 \omega^2 + y_5 \omega^1 + y_6 \omega_3^2, \\
 d\beta &= z_1 \omega^2 + (z_2 - \nu_1) \omega^1 + (z_3 - \nu_2) \omega_3^2, \\
 d\gamma &= z_2 \omega^2 + z_4 \omega^1 + (z_5 - \nu_3) \omega_3^2, \\
 dq &= z_3 \omega^2 + z_5 \omega^1 + z_6 \omega_3^2,
 \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{1}{1-k^2} \{p(k\alpha - \beta) + \alpha(2kq - \gamma(1+k^2)) - \\
 &\quad - \beta(q(1+k^2) - 2k\gamma)\}; \\
 \lambda_2 &= \frac{1}{1-k^2} \{p(k\beta - \alpha) + \alpha(2k\gamma - q(1+k^2)) - \\
 &\quad - \beta(\gamma(1+k^2) - 2kq)\}; \\
 \mu_1 &= \frac{1}{1-k^2} \{2\alpha(k\alpha - \beta) + q(2kq - (1+k^2)\gamma) - \\
 &\quad - \gamma(q(1+k^2) - 2k\gamma) - p(kq - \gamma)\}; \\
 \mu_2 &= \frac{1}{1-k^2} \{\alpha(k\beta - \alpha) + \beta(k\alpha - \beta) + q(2k\gamma - (1+k^2)q) - \\
 &\quad - \gamma(\gamma(1+k^2) - 2kq) - p(k\gamma - q) - (1-k^2)^2\}; \\
 \mu_3 &= \frac{1}{1-k^2} \{\beta(kq - \gamma) - \alpha(k\gamma - q)\}; \\
 \nu_1 &= \mu_2; \\
 \nu_2 &= \frac{1}{1-k^2} \{2\beta(k\beta - \alpha) + \gamma(2k\gamma - (1+k^2)q) - \\
 &\quad - q(\gamma(1+k^2) - 2kq) + p(\gamma - kq)\}; \\
 \nu_3 &= -\frac{1}{1-k^2} \{\beta(q - k\gamma) - \alpha(\gamma - kq)\}.
 \end{aligned}$$

Сравнивая значения дифференциалов $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, dq системы (25), находим

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_2, \quad y_2 - \mu_1 = x_4, \quad y_3 - \mu_2 = x_5, \\
 z_1 &= x_3, \quad z_2 - \nu_1 = x_5, \quad z_3 - \nu_2 = x_6, \\
 z_3 &= y_2, \quad z_5 = y_4, \quad z_6 = y_5 - \mu_3, \\
 z_2 &= y_3, \quad z_4 = y_5, \quad z_5 - \nu_3 = y_6.
 \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$y_2 = x_6 + \nu_2 = x_4 + \mu_1, \quad z_5 = y_6 + \nu_3 = y_4.$$

Следовательно, независимыми коэффициентами являются лишь коэффициенты $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_4, y_5$. Их число $N = 7$. Пользуясь

известным приемом (см. [4]), находим $q = 5$ ($dp, da, d\beta, d\gamma, dq$), $s_1 = 3$, $s_2 = q - s_1 = 2$. Число Картана $Q = s_1 + 2s_2 = 7 = N$. Система в инволюции. Ее решение существует с произволом в две функции двух аргументов. Доказана

Теорема. *Комплексы, характеризуемые равенством $q - r = 0$, существуют с произволом в две функции двух аргументов.*

3. Две теоремы о нормальных конгруэнциях эллиптического пространства

Пусть точка A описывает поверхность (обозначим ее символом (A)) нулевой гауссовой кривизны; касательная плоскость к этой поверхности в точке A является плоскостью AA_1A_3 . Тогда прямая AA_2 служит нормалью к поверхности (A) и описывает нормальную конгруэнцию. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Фокусы нормальной конгруэнции AA_2 совпадают с центрами главных кривизн нормальных сечений поверхности (A) в точке A .*

Доказательство. Система уравнений, определяющая поверхность (A) , следующая:

$$\omega^2 = 0, \quad \omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^3, \quad \omega_3^2 = b\omega^1 + c\omega^3, \quad 1 + ac - b^2 = 0. \quad (26)$$

Последнее равенство означает, что поверхность (A) есть поверхность нулевой гауссовой кривизны.

Легко проверить, что уравнение, определяющее главные кривизны поверхности (A) , имеет вид (см. [5])

$$\frac{1}{R_n^2} - (a + c) \frac{1}{R_n} - 1 = 0$$

(R_n — абсцисса центра кривизны).

Это уравнение можно переписать в виде

$$R_n^2 + (a + c) R_n - 1 = 0. \quad (27)$$

Центры главных кривизн нормального сечения поверхности (A) в точке A таковы:

$$C_1 = A + R'_n A_2, \quad C_2 = A + R''_n A_2,$$

где R'_n, R''_n — радиусы кривизны, которые служат абсциссами центров главных кривизн.

Система уравнений, определяющая конгруэнцию AA_2 :

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = -\frac{b}{c} \omega^1 + \frac{1}{c} \omega_3^2, \quad \omega_1^2 = -\frac{1}{c} \omega^1 + \frac{b}{c} \omega_3^2.$$

Найдем фокусы этой конгруэнции. Пусть $F = A + tA_2$, тогда

$$dF = (\omega^1 + t\omega_2^1) A_1 + (\omega^3 + t\omega_2^3) A_3 + \{ (1 + t^2) \omega^2 + dt \} A_2 - t\omega^2 F,$$

где F — фокус конгруэнции, если выполняются равенства

$$\omega^1 + t\omega_2^1 = 0, \quad \omega^3 + t\omega_2^3 = 0.$$

Внося в это уравнение значения ω^3 , ω_1^2 , имеем

$$(c + t)\omega^1 - bt\omega_3^2 = 0, \quad -b\omega^1 + (1 - ct)\omega_3^2 = 0.$$

Исключая отсюда формы ω^1 , ω_3^2 , находим уравнение, определяющее абсциссы фокусов конгруэнции:

$$t^2 + (a + c)t - 1 = 0. \quad (28)$$

Уравнения (27), (28) совпадают, и теорема доказана.

Как известно, любая точка M , лежащая на нормали к поверхности нулевой гауссовой кривизны на заданном постоянном расстоянии от поверхности, описывает поверхность (M) нулевой гауссовой кривизны (см. [5]).

Теорема. *Каждая из поверхностей M является поверхностью, у которой центры главных кривизн совпадают с фокусами конгруэнции, описываемой нормалью к этим поверхностям.*

Доказательство. Пусть $M = A + \lambda A_2$ ($\lambda = \text{const}$) — точка на нормали к поверхности (A) . Легко проверить, что уравнение, определяющее главные кривизны поверхности, описываемой точкой M [5], имеет вид

$$\frac{1}{\bar{R}_n^2} - \frac{4\lambda + (1 - \lambda^2)(a + c)}{1 - \lambda^2 - (a + c)\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{R}_n} - 1 = 0$$

или

$$\bar{R}_n^2 + \frac{4\lambda + (1 - \lambda^2)(a + c)}{1 - \lambda^2 - (a + c)\lambda} \cdot \bar{R}_n - 1 = 0. \quad (29)$$

Здесь по-прежнему $\bar{R}_n$ — абсцисса центра кривизны [теперь уже поверхности (M)], но не в базисе AA_2 , а в базисе MM_2 . Точки MM_2 , как и точки AA_2 , гармонически разделяют точки пересечения прямой MM_2 с абсолют. Легко видеть, что такими точками являются $M = A + \lambda A_2$ и $M_2 = -\lambda A + A_2$.

Для центра кривизны имеем

$$C = M + \bar{R}_n M_2 = (1 - \lambda \bar{R}_n) A + (\lambda + \bar{R}_n) A_2.$$

Положим

$$R_n = \frac{\lambda + \bar{R}_n}{1 - \lambda \bar{R}_n}.$$

Если это значение подставить в уравнение (27), придем к уравнению (29). Теорема доказана.

4. Построение конгруэнции по одной фокальной поверхности

Пусть произвольная поверхность нулевой гауссовой кривизны описана точкой A , ее касательная плоскость в этой точке совпадает с плоскостью AA_1A_3 , а нормалью является прямая AA_2 . Эта нормаль описывает нормальную конгруэнцию. Полярно сопряжен-

ная с ней прямая A_1A_3 также описывает нормальную конгруэнцию. Среди поверхностей, ортогональных лучам этой конгруэнции, выберем произвольно одну (добавляется одна функция одного аргумента). С точкой этой поверхности совместим вершину A_3 . Поверхность (A_3) назовем поверхностью, полярно сопряженной с поверхностью (A) . Покажем, что прямая AA_3 касается поверхностей (A) , (A_3) и конгруэнция этих прямых есть конгруэнция W , а поверхность (A_3) есть поверхность нулевой гауссовой кривизны.

Прежде всего найдем поверхность, секущую ортогонально лучи конгруэнции A_3A_1 . Пусть $N = A_3 + \nu A_1$ — точка луча конгруэнции, тогда

$$dN = -(\omega^3 + \nu\omega^1)A + (\omega_3^2 + \nu\omega_1^2)A_2 + \{(1 + \nu^2)\omega_3^1 + d\nu\}A_1 - \nu\omega_3^1N.$$

Следовательно, точка N описывает поверхность

$$\omega_3^1 + \frac{d\nu}{1 + \nu^2} = 0.$$

Это уравнение в силу системы (26) вполне интегрируемо. При $\nu = 0$ точка N совпадает с точкой A_3 , в этом случае имеем

$$\omega_3^1 = 0, \quad dA_3 = -\omega^3A + \omega_3^2A_2.$$

Таким образом, прямая AA_3 лежит в касательной плоскости к поверхности (A_3) , описываемой точкой A_3 . Прямая AA_3 касается поверхностей (A) и (A_3) . Легко проверить, что уравнения асимптотических линий на поверхностях (A) и (A_3) имеют вид соответственно

$$\omega^1\omega_1^2 + \omega^3\omega_3^2 = 0, \quad \omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2 = 0.$$

Внося сюда значения ω_1^2 , ω_3^2 из системы (26), получаем

$$\begin{aligned} a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^3 + c(\omega^3)^2 &= 0, \\ ab(\omega^1)^2 + (1 + ac + b^2)\omega^1\omega^3 + bc(\omega^3)^2 &= 0. \end{aligned}$$

В силу последнего равенства системы (26) эти уравнения совпадают и, следовательно, конгруэнция $\{AA_3\}$ есть конгруэнция W .

Первая и вторая квадратичные формы поверхности (A_3) определяются формулами

$$\begin{aligned} (dA_3)^2 &= (\omega^3)^2 + (\omega_3^2)^2, \\ -(dA_1dA_3) &= -(\omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2). \end{aligned}$$

Из системы (26) следует

$$\omega^1 = -\frac{c}{b}\omega^3 + \frac{1}{b}\omega_3^2, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{b}\omega^3 + \frac{a}{b}\omega_3^2.$$

Нормальная кривизна $\frac{1}{R_n}$ поверхности (A_3) определяется формулой

$$\frac{1}{R_n} = -\frac{(dA_1dA_3)}{(dA_3)^2} = -\frac{\omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2}{(\omega^3)^2 + (\omega_3^2)^2}.$$

Внося сюда значения ω^1 и ω_1^2 , получаем

$$\left(\frac{1}{R_n} - \frac{c}{b}\right)(\omega^3)^2 + \frac{2}{b}\omega^3\omega_3^2 + \left(\frac{1}{R_n} + \frac{a}{b}\right)(\omega_3^2)^2 = 0.$$

Продифференцируем по ω^3 и ω_3^2 :

$$\left(\frac{1}{R_n} - \frac{c}{b}\right)\omega^3 + \frac{1}{b}\omega_3^2 = 0,$$

$$\frac{1}{b}\omega^3 + \left(\frac{1}{R_n} + \frac{a}{b}\right)\omega_3^2 = 0.$$

Исключая отсюда формы ω^3 , ω_3^2 , находим

$$\frac{1}{R_n^2} + \frac{a-c}{b} \cdot \frac{1}{R_n} - \frac{1+ac}{b^2} = 0,$$

или, в силу последнего равенства (26),

$$\frac{1}{R_n^2} + \frac{a-c}{b} \cdot \frac{1}{R_n} - 1 = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{R_n' R_n''} = -1.$$

Внося это в формулу (20) для гауссовой кривизны, находим $K_a = 0$, т. е. (A_3) есть поверхность нулевой гауссовой кривизны.

5. Безынтегральное представление комплексов

Поверхность нулевой гауссовой кривизны определяется с произволом в две функции одного аргумента [5]. Однопараметрическое семейство таких поверхностей устанавливается с произволом в две функции двух аргументов. Чтобы получить такое семейство, надо указанные выше функции одного аргумента заменить функциями двух аргументов, где вторым аргументом будет параметр, определяющий положение поверхности в семействе.

Из найденного выше выведем следующее утверждение о безынтегральном представлении комплексов, распадающихся в однопараметрические семейства конгруэнций с фокальными поверхностями нулевой гауссовой кривизны (о характере такого расслоения сказано в п. 1).

Чтобы построить произвольный комплекс, расслаивающийся в однопараметрическое семейство конгруэнций W с фокальными поверхностями нулевой гауссовой кривизны (с уточнениями, содержащимися в п. 1), следует взять произвольное однопараметрическое семейство поверхностей нулевой гауссовой кривизны (произвол — две функции двух аргументов), для каждой поверхности семейства построить соответствующую ей полярно сопряженную поверхность и принять эти две поверхности за фокальные поверхности неко-

торой конгруэнции. Однопараметрическое семейство таких конгруэнций и составит рассматриваемый комплекс.

Доказательство. Выбираем репер так, как это было сделано выше. Точку A совместим с текущей точкой поверхности нулевой гауссовой кривизны, плоскость AA_1A_3 — с касательной плоскостью этой поверхности, точку A_3 — с текущей точкой поверхности, полярно сопряженной с поверхностью (A) ; тогда плоскость A_3AA_2 будет необходимо касаться поверхности (A_3) , и уравнения поверхностей (A) и (A_3) будут соответственно

$$\omega^2 = 0, \quad \omega_3^1 = 0. \quad (30)$$

По построению ребро AA_3 совпадает с текущим лучом комплекса. Следовательно, главными формами смещения репера будут формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$. Так как одно из равенств (30) влечет за собой другое, то формы ω^2, ω_3^1 будут связаны соотношением

$$\omega_3^1 = k\omega^2. \quad (31)$$

Отсюда, между прочим, следует, что точки A, A_3 являются центрами луча построенного комплекса. Продолжая (31), получаем

$$\begin{aligned} dk &= p\omega^2 + a\omega^1 + \beta\omega_3^2, \\ -k\omega_1^2 + \omega^3 &= a\omega^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega_1^2 + k\omega^3 &= \beta\omega^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^2. \end{aligned}$$

Поскольку каждое из уравнений (30) вполне интегрируемо, то

$$[\omega^1\omega_1^2] + [\omega^3\omega_3^2] = 0,$$

а в таком случае

$$q - r = 0.$$

Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кованцов Н. И. Теория комплексов в эллиптическом пространстве. *Ap. ştiinţ., univ. Toşi*, sec. 1, 9, 1 (1963).
2. Солейман М. А. Об одном классе комплексов в эллиптическом пространстве. «Укр. геометр. сб.», вып. 10, Харьков, Изд-во ХГУ, 1971, с. 71—80.
3. Roşca R. Geometria diferenţială a Congruenţelor în spaţiul eliptic. Bucureşti, 1969.
4. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., ГИТТЛ, 1948, 432 с.
5. Солейман М. А. Об одном классе конгруэнций в эллиптическом пространстве. «Укр. геометр. сб.», вып. 13, Харьков, Изд-во ХГУ, 1972, с. 155—172.

Поступила 22 марта 1972 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Ю. А. Аминов. Свойства в целом кривых в трехмерном евклидовом пространстве, связанные с кручением	3
Я. П. Бланк, Н. А. Загайный, В. С. Ищенко. Поверхности переноса в изотропном пространстве	11
А. А. Борисенко. О строении непрерывной поверхности, содержащей прямую	21
П. И. Ковалев. Об одном классе тройных систем Ли	24
Н. И. Кованцов, Т. В. Носаль. Расслоение комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве в нормальные конгруэнции	28
В. В. Макаров. Об ограниченной полноте некоторых космологических моделей	45
А. Д. Милка. Особенность у конца кратчайшей на выпуклой поверхности. I	48
И. Г. Мулин. О некоторых классах римановых пространств со специальной структурой тензора кривизны	55
М. А. Николаенко. О совпадении геодезических линий с характеристическими в монжевом многообразии	65
Р. Г. Проскурина. Образы симметрии и антисимметрии трехмерного псевдоизотропного пространства	77
Ю. А. Прякин. О выпуклых многогранниках с правильными гранями	83
М. Р. Роговой. О соприкасающихся поверхностях не голономного многообразия V^3 в P_3 . II	88
М. А. Солейман. Безынтегральное представление комплексов эллиптического пространства, распадающихся в однопараметрические семейства конгруэнций с фокальными поверхностями нулевой гауссовой кривизны	98

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский межведомственный
тематический научный сборник

В ы п у с к 14

Редактор *А. Л. Алиева*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Техредактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Н. С. Калинина*

Сдано в набор 12/II 1973 г. Подписано к печати 20/VII 1973 г. БЦ 50442.
Формат бумаги $60 \times 90^{1/16}$. Бумага типографская № 1. Объем: 7,25 усл. печ. л.,
7,25 физ. печ. л., 6,5 уч.-изд. л. Тираж 600. Заказ № 3-48. Цена 65 коп.
Издательство издательского объединения «Вища школа» при Харьковском
государственном университете.
310003, Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. М. В. Фрунзе в Харьковской
городской тип. № 16. Харьков, ул. Университетская, 16.
Зак. 3-3346.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Свойства в целом кривых в трехмерном евклидовом пространстве, связанные с кручением. Аминов Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 14, 1973, с. 3—10.

Устанавливаются достаточные условия неограниченности в пространстве кривой с положительным кручением. Если регулярная кривая бесконечной длины имеет кривизну $k > 0$, кручение $\tau \geq \text{const} > 0$ и расположена на замкнутом строго выпуклом цилиндре, то она неограничена в пространстве. Строится пример замкнутой кривой с кручением $\tau \geq \text{const} > 0$ и локально выпуклой проекцией, кривизна которой отделена от нуля и от ∞ . Пусть кривая Γ бесконечной длины регулярно проектируется в локально выпуклую кривую γ с кривизной $0 < \frac{1}{\rho} < \text{const}$. Пусть у кривой Γ кручение $\tau \geq \frac{\sup \frac{1}{\gamma}}{2\rho}$. Тогда кривая Γ неограничена. Пусть кривая Γ с бесконечной длиной и кручением τ имеет локально выпуклую проекцию, радиус кривизны которой ρ удовлетворяет неравенствам $0 < \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$ (ρ_0 и ρ_1 — постоянные). Пусть $\inf \tau \rho (\rho_1/\rho_0)^{1/2} / \sqrt{2\sqrt{3}e}$. Тогда кривая Γ неограничена в пространстве.

Рисунков 1. Библиографических ссылок 3.

УДК 513

Поверхности переноса изотропного пространства. Бланк Я. П., Загайный Н. А., Ищенко В. С., «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1972, с. 11—21.

Изотропным называется пространство I_3 с абсолютным, состоящим из плоскости и принадлежащей ей пары комплексно-сопряженных прямых. I_3 обладает двумя трехчленными подгруппами клиффордовых переносов. В работе вводится понятие клиффордовой сопряженности для поверхностей в I_3 и доказывается теорема: Чтобы сеть на поверхности в I_3 служила сетью переноса, необходимо и достаточно, чтобы она была клиффордово-сопряженной и чебышевской. В работе определены все поверхности переноса в I_3 в классе поверхностей вращения.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

О строении непрерывной поверхности, содержащей прямую. Борисенко А. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 14, 1973, с. 21—24.

Установлено условие, при котором непрерывная поверхность в n -мерном евклидовом пространстве будет цилиндром. Аналогичный результат с большими требованиями на регулярность поверхности был получен Ф. Хартманом.

Библиографических ссылок 4.

Изучено алгебраическое строение тройных систем Ли, удовлетворяющих условию $[[x, y, z], u, v] = 0$.

Такие тройные системы Ли названы автором нильсистемами. Дана классификация нильсистем и рассмотрены алгебры Ли, порожденные нильсистемами. Рассматриваются также пространства аффинной связности, тензор кривизны которых индуцирует в любом касательном пространстве структуру нильсистемы. Приведены примеры таких пространств.

Библиографических ссылок 3.

Рассматривается задача, связанная с расслоением комплекса в нормальные конгруэнции с заранее предписанными свойствами для поверхностей, ортогональных лучам конгруэнций. Задача приводит к выделению геометрически интересных точек на луче, а это дает возможность исследовать строение комплексов по поведению этих точек. Точки на луче комплекса, которые могут описывать поверхности постоянной кривизны, ортогональные лучам конгруэнции, названы точками ортогональности постоянной кривизны. Исследование строения класса комплексов, у которого уравнение точек ортогональности постоянной кривизны совпадает с уравнением инфлекссионных центров, показало, что такое совпадение возможно лишь для класса комплексов, широта которого — две функции одного аргумента. Для указанного класса комплексов дано безынтегральное представление.

Библиографических ссылок 9.

Рассмотрен вопрос о полноте пространства — времени с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - f^2(t)e^{\lambda(x_1, x_2)}(dx_1^2 + dx_2^2) - \psi^2(t)e^{\lambda(x_3)}dx_3^2$$

по изотропным геодезическим. Обосновав одно из уравнений геодезической, автор получил условия полноты изотропных геодезических. Полученный критерий полноты может быть применен к изучению космологических решений однородных моделей.

Библиографических ссылок 4.

Построен пример выпуклой поверхности, на которой существует кратчайшая, обладающая свойством: опорные плоскости поверхности в точках кратчайшей при приближении этих точек к концу этой линии не имеют предела. Сферическое изображение указанной кратчайшей, очевидно, не есть простая кривая и не спрямляемо. Это дополняет результат, полученный ранее В. А. Залгаллером.

Библиографических ссылок 3.

О некоторых классах римановых пространств со специальной структурой тензора кривизны. Мулин И. Г. «Украинский геометрический сборник», вып. 14, 1973, с. 55—64.

Выясняются структуры в малом римановых пространств со специальным видом тензора кривизны:

$$R_{ijke} = \alpha (g_{ik}g_{jl} - g_{lk}g_{ji}) + \beta (u_{ik}u_{je} - u_{jk}u_{il}) + \gamma (v_{ik}v_{je} - v_{jk}v_{ie}).$$

Приводится шесть теорем, представляющих собой различные частные случаи поставленной задачи.

Библиографических ссылок 4.

О совпадении геодезических линий с характеристическими в монжевом многообразии. Николаенко М. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, с. 65—76.

С каждой интегральной кривой монжева многообразия, заданного уравнением $\Omega(x, y, z; x', y', z') = 0$, связаны три компланарных вектора: орт главной нормали, нормаль к конусу Монжа и вектор $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x'}\right)' - \frac{\partial \Omega}{\partial x}$. Если эти век-

торы коллинеарны, интегральная кривая служит характеристической линией, геодезической прямой, геодезической кратчайшей.

Обратная теорема: при выполнении двух из перечисленных трех свойств выполняется и третье. Множество геодезических кратчайших в общем случае зависит от четырех параметров, тогда как множество кривых остальных двух типов — трехпараметрические. Приведены примеры.

Библиографических ссылок 6.

Образы симметрии и антисимметрии трехмерного псевдоизотропного пространства. Проскурина Р. Г. «Украинский геометрический сб.», вып. 14, 1973, с. 77—83.

Для псевдоизотропного пространства I_3 вводятся понятия: расстояние между точками, движение, ко-, анти- и коантидвижение, прямая изотропная и сильно изотропная, плоскость изотропная I и II рода и сильно изотропная. Определяются образы симметрии и антисимметрии, связанные с инволюционными коллинеациями и корреляциями I_3 .

Библиографических ссылок 5.

О выпуклых многогранниках с правильными гранями. Прякин Ю. А. «Украинский геометрический сб.», вып. 14, 1973, с. 83—88.

Доказывается, что в трехмерном евклидовом пространстве существует шесть и только шесть простых выпуклых правильных многогранников с условными ребрами. Уточняется результат Б. А. Иванова («Украинский геометрический сб.», вып. 10, где было найдено пять таких многогранников).

Библиографических ссылок 3.

УДК 513.71

О соприкасающихся поверхностях неголономного многообразия V^2 в P_3 . И. М. Р. Роговой. «Украинский геометрический сборник», вып. 14, 1973, с. 88—98.

Определяются компоненты инфинитезимального преобразования канонического репера многообразия V^2 при перемещении по инвариантной соприкасающейся поверхности S_2 . Строится канонический пучок прямых для многообразия V^2 . Получена инвариантная дифференциальная форма, коэффициенты которой выражаются через проективную характеристику неголономности Бомпиани.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

Безынтегральное представление комплексов эллиптического пространства, распадающихся в однопараметрические семейства конгруэнций с фокальными поверхностями нулевой гауссовой кривизны. Солейман М. А. «Украинский геометрический сб.», вып. 14, 1973, с. 98—109.

Рассматривается комплекс K в эллиптическом пространстве, отнесенный к реперу, вершины которого A и A_3 совмещены с центрами луча комплекса, а плоскости AA_3A_2 и AA_3A_1 соответствуют центрам луча в нормальной корреляции, определяемой комплексом. Изучаются свойства класса комплексов K , распадающихся в однопараметрическое семейство конгруэнций, определяется широта класса. дается способ геометрического построения таких комплексов.

Библиографических ссылок 5.
