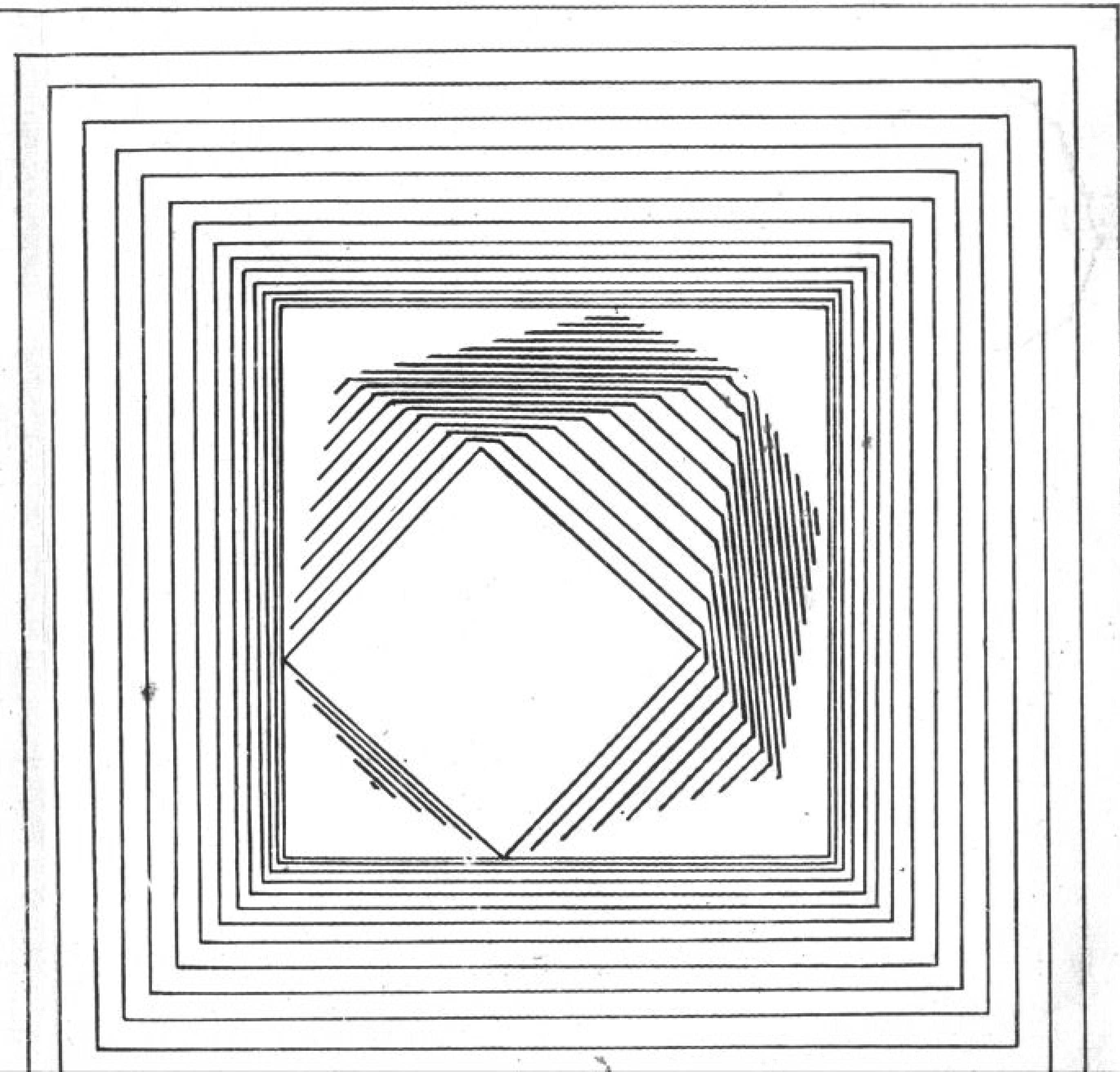
издательство харьковского университета

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск 13



РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
ТЕМАТИЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 13

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1973

513
У45

Значительная часть выпуска посвящена геометрии в целом: вопросам изгибания, жесткости, неразложимости по Минковскому выпуклых поверхностей, строения и ограниченности поверхностей и гиперповерхностей с отрицательной кривизной. В ряде статей исследуются обобщенные пространства, в частности, псевдоримановы физического и кинематического типа. Имеются статьи по линейчатой геометрии (о комплексах в евклидовом и неевклидовом пространствах), по топологии (о пространствах когомологий) и по другим вопросам геометрии.

Адрес редакционной коллегии:
Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

$\frac{0223—029}{М226(04)—73}$ — 213 — 73

Редактор *А. Л. Алиева*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Техредактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. П. Пипенко*

Сдано в набор 28/VI 1972 г. Подписано к печати 6/II 1973 г. БЦ 50058. Формат 60×90$^1/_{16}$. Объем: 11,75 физ. печ. л., 11,75 усл. печ. л., 13 уч. изд. л. Бум. листов 5,875. Зак. 2-220. Тираж 500. Цена 1 руб. 17 коп. Св. ТП 1973 г. п. 213. Бумага типографская № 3
Издательство Харьковского университета, Университетская, 16.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в городской типографии № 16. Харьков, 3, ул. Университетская, 16.
Зак. 3-612.

О ВНЕШНЕМ ДИАМЕТРЕ ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Ю. А. Аминов

Харьков

Рассматриваются поверхности отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве и устанавливаются некоторые внешние свойства поверхности исходя из внутренних. Доказывается

Теорема 1. *Если гауссова кривизна K полной поверхности класса C^2 удовлетворяет условию $-a^2 \leqslant K \leqslant 0$, где $a = \text{const}$, то поверхность не может содержаться в шаре, радиус которого меньше* $\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{a}$.

Теорема вытекает из оценки внешнего диаметра погружения геодезического круга поверхности (см. лемму 1). Для сравнения заметим, что в работе Э. Р. Розендорна [1] построен пример полной поверхности неположительной кривизны, которая содержится в некотором шаре. Регулярность поверхности — класс C^2, за исключением счетного числа изолированных во внутренней метрике точек, в которых поверхность принадлежит классу C^1, а ее гауссова кривизна может быть доопределена по непрерывности. В этом примере $\inf K = -\infty$.

Можно ли построить полную поверхность класса C^∞, ограниченную в пространстве, и с кривизной $-a^2 \leqslant K \leqslant 0$. В следующей теореме допускается перемена знака кривизны.

Теорема 2. *Если на полной поверхности класса C^2, неограниченной во внутреннем смысле, гауссова кривизна $K \to 0$ на бесконечности, то поверхность неограничена в пространстве.*

Далее устанавливаем свойство сферического образа геодезического круга поверхности с гауссовой кривизной $-b^2 \leqslant K \leqslant -a^2 < 0$.

Для доказательства утверждений используем уравнение [2]

$$\nabla_{22}\rho + 1 = \nabla_2\rho + K(2\rho - \nabla_1\rho),$$

где $\rho = \frac{x^2}{2}$; x — радиус-вектор поверхности; ∇_{22} — обобщенный оператор Монжа—Ампера; $\nabla_1\rho$, $\nabla_2\rho$ — первый и второй дифференциальные параметры Бельтрами, Другие условия неограниченности погружения стандартных областей отрицательной гауссовой кривизны получены в работах [3, 4].

1 **Интеграл от** $\nabla_{22}z$. Здесь будет проведено чисто внутреннее рассмотрение. Для двумерной метрики $ds^2 = g_{ij}\,du^i\,du^j$ класса C^2 и функции z класса C^2 можно ввести обобщенный оператор Монжа—Ампера

$$\nabla_{22}z = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

где $z_{ij} = z_{u^iu^j} - \Gamma_{ij}^1 z_{u^1} - \Gamma_{ij}^2 z_{u^2}$ — вторые ковариантные производные функции z. Пусть область D ограничена гладкой границей Γ. Устанавливаем следующую формулу:

$$\int\limits_D \nabla_{22}z\,dS = \int\limits_D \frac{K}{2}\nabla_1 z\,dS + \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \left\{z_r z_{ss} - z_s z_{rs} + \frac{\nabla_1 z}{\rho_g}\right\} ds, \qquad (1)$$

где $1/\rho_g$ — геодезическая кривизна границы Γ области D, причем знак ее взят таким, что для малого круга $1/\rho_g > 0$; z_r — производная по внешней нормали к Γ; dS — элемент площади; ds — элемент длины дуги Γ.

Цифрами снизу при z будем обозначать ковариантные производные. Имеем

$$\nabla_{22}z = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}^2}{\det\|g_{ij}\|} = \left(\frac{z_1 z_{22} - z_{12}z_2}{2\det\|g_{ij}\|}\right)_{,1} +$$
$$+ \left(\frac{z_2 z_{11} - z_{21}z_1}{2\det\|g_{ij}\|}\right)_{,2} - \frac{z_1(z_{221} - z_{212}) + z_2(z_{112} - z_{121})}{2\det\|g_{ij}\|},$$

где использовано равенство нулю ковариантной производной от метрического тензора. По определению гауссовой кривизны K имеем

$$z_{221} - z_{212} = -Kz^1\det\|g_{ij}\|,$$
$$z_{112} - z_{121} = -Kz^2\det\|g_{ij}\|.$$

Обозначим еще через ν вектор, ковариантные компоненты которого имеют вид

$$\nu_1 = \frac{z_1 z_{22} - z_{12}z_2}{2\det\|g_{ij}\|}, \quad \nu_2 = \frac{z_2 z_{11} - z_{21}z_1}{2\det\|g_{ij}\|}.$$

Вектор ν можно определить также инвариантным образом:

$$2\nu = \operatorname{grad} z\,\nabla_2 z - \frac{1}{2}\operatorname{grad}\nabla_1 z.$$

Итак, получим

$$\nabla_{22}z = \operatorname{div}\nu + \frac{K}{2}\nabla_1 z.$$

Пусть τ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ. По теореме Грина имеем

$$\int\limits_D \nabla_{22} z\, dS = \int\limits_\Gamma (\nu\tau)\, ds + \int\limits_D \frac{K}{2} \nabla_1 z\, dS. \tag{2}$$

В окрестности кривой Γ введем полугеодезическую систему координат $ds^2 = dr^2 + G d\varphi^2$ такую, что геодезические линии $\varphi = \mathrm{const}$ ортогональны к Γ. Кроме того, можем считать $G/\Gamma = 1$. Пусть индекс 1 в обозначении компонент векторов соответствует r, а индекс 2 — φ. Тогда $\tau^2 = 0$, $\tau^1 = 1$. Простыми вычислениями находим

$$(\nu\tau) = \frac{1}{2}\left[z_r z_{ss} - z_s z_{rs} + \frac{G_r}{2} \nabla_1 z\right],$$

где значком s обозначена производная по длине дуги Γ. Заметим, что геодезическая кривизна кривой Γ $\frac{1}{\rho_g} = G_r/2$. Следовательно,

$$\int\limits_\Gamma (\nu\tau)\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_\Gamma \left\{z_{ss} z_r - z_s z_{rs} + \frac{\nabla_1 z}{\rho_g}\right\} ds. \tag{3}$$

Используя (2), (3), получаем формулу (1). Далее возьмем семейство геодезически параллельных линий $\Gamma(r)$, ограничивающих области $D(r)$ и отстоящих от начальной линии $\Gamma(0)$ на расстоянии r. Тогда запишем

$$\int\limits_\Gamma (z_{ss} z_r - z_s z_{rs})\, ds = -2 \int\limits_\Gamma z_s z_{rs}\, ds = -\frac{d}{dr} \int\limits_{\Gamma(r)} z_s^2\, ds - \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_s^2}{\rho_g}\, ds.$$

Следовательно, формула (1) преобразуется так:

$$2 \int\limits_{D(r)} \nabla_{22} z\, dS = -\frac{d}{dr} \int\limits_{\Gamma(r)} z_s^2\, ds + \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_r^2}{\rho_g}\, ds + \int\limits_{D(r)} K \nabla_1 z\, dS. \tag{4}$$

В частном случае, когда ds^2 — метрика нулевой гауссовой кривизны $K \equiv 0$ и область D — круг, получаем формулу С. Н. Бернштейна [5, 93]. В процессе доказательства использовались третьи производные z, но в окончательную формулу входят лишь вторые производные z, поэтому от функции z, как обычно, достаточно требовать принадлежность классу C^2.

2. Оценка внешнего диаметра геодезического круга. Так как внешний диаметр и диаметр наименьшего шара, содержащего поверхность, связаны между собой простым соотношением, достаточно найти оценку снизу для радиуса такого шара.

Лемма. *Пусть геодезический круг радиуса r содержится в шаре радиуса R. Пусть K гауссова кривизна поверхности удовлетворяет неравенствам $-a^2 \leqslant K \leqslant 0$. Тогда*

$$R \geqslant \frac{r}{\sqrt{6 + \frac{3}{2} a^2 r^2}}. \tag{5}$$

Пусть $C(r)$ геодезические круги радиуса r с одним и тем же центром и $\Gamma(r)$ — их граничные окружности. Проинтегрируем уравнение

$$\nabla_{22}\rho + 1 = \nabla_2\rho + K(2\rho - \nabla_1\rho)$$

по кругу $C(r)$. Запишем

$$\int\limits_{C(r)} \nabla_2\rho\, dS = \int\limits_{\Gamma(r)} \rho_r\, ds = \frac{d}{dr}\int\limits_{\Gamma(r)} \rho\, ds - \int\limits_{\Gamma(r)} \rho \frac{ds}{\rho_g}.$$

Принимая во внимание это соотношение и формулу (4), получаем

$$\frac{d}{dr}\int\limits_{\Gamma(r)} \left(\frac{\rho_s^2}{2} + \rho\right) ds = \int\limits_{\Gamma(r)} \left(\frac{\rho_r^2}{2} + \rho\right)\frac{1}{\rho_g}\, ds + S(r) - \\ - \int\limits_{D} K\left(2\rho - \frac{3}{2}\nabla_1\rho\right) dS. \qquad (6)$$

Поскольку рассматривается поверхность отрицательной кривизны, геодезическая кривизна окружности $\frac{1}{\rho_g} > 0$. Введем функцию

$$f(r) = \int\limits_0^r \int\limits_{\Gamma(r)} \left(\frac{\rho_s^2}{2} + \rho\right) ds\, dr.$$

Так как имеет место соотношение $2\rho - \nabla_1\rho = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})^2$, где $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор поверхности, $\boldsymbol{n}$ — нормаль, то $\frac{\nabla_1\rho}{2} \leqslant \rho$. Следовательно,

$$f'(r) = \int\limits_{\Gamma(r)} \left(\frac{\rho_s^2}{2} + \rho\right) ds \leqslant 2\int\limits_{\Gamma(r)} \rho\, ds \leqslant R^2 L(r), \qquad (7)$$

где $L(r)$ — длина окружности $\Gamma(r)$. Далее оценим интеграл

$$-\int\limits_{C(r)} K\left(2\rho - \frac{3}{2}\nabla_1\rho\right) dS \geqslant -\frac{a^2}{2}\int\limits_{C(r)} \Delta_1\rho\, dS \geqslant -\frac{a^2}{2} R^2 S(r). \qquad (8)$$

Из формулы (6) и оценки (8) следует

$$f'' \geqslant \left(1 - \frac{a^2R^2}{2}\right) S(r).$$

Интегрируя это неравенство от 0 до r и используя (7), получаем

$$R^2 L(r) \geqslant f'(r) \geqslant \left(1 - \frac{a^2R^2}{2}\right)\int\limits_0^r S(r)\, dr. \qquad (9)$$

Легко найти неравенство

$$L(r) \leqslant 2\pi r + a^2\int\limits_0^r S(r)\, dr.$$

Тогда неравенство (9) усилим следующим образом:

$$\left[2\pi r + a^2 \int_0^r S(r)\,dr\right] R^2 \geqslant \left(1 - \frac{a^2R^2}{2}\right) \int_0^r S(r)\,dr.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{2\pi r} \int_0^r S(r)\,dr \leqslant \frac{R^2}{1 - \frac{3}{2}a^2R^2}. \tag{10}$$

Так как для поверхности неположительной кривизны площадь геодезического круга $S(r) \geqslant \pi r^2$, то из (10) следует оценка (5). Поскольку на полной поверхности неположительной кривизны существует геодезический круг сколь угодно большого радиуса, то из леммы вытекает теорема 1.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Пусть числовая последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Так как K стремится к нулю на бесконечности, то, устремляя центры кругов по последовательности точек к бесконечности, получаем на поверхности круги C_n сколь угодно большой площади и радиуса r_n, в которых $|K| \leqslant \varepsilon_n^2$. Выбором ε_n можно добиться, что в каждом таком круге геодезическая кривизна $1/\rho_g$ концентрических окружностей была положительна. Поэтому можем применить предыдущий метод для получения оценки R. Так как K может принимать и положительные значения, то неравенство (8) необходимо заменить на следующее:

$$-\int_{C(r)} K\left(2\rho - \frac{3}{2}\nabla_1\rho\right) dS \geqslant -\frac{3}{2}\varepsilon_n^2 R^2 S(r).$$

Аналогично (10) получим

$$\frac{1}{\pi} S\left(\frac{r_n}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2\pi r_n} \int_0^{r_n} S(r)\,dr \leqslant \frac{R^2}{1 - \frac{5}{2}\varepsilon_n^2 R^2}.$$

Так как $S\left(\frac{r_n}{2}\right) \to \infty$ при $n \to \infty$, то найдется такой круг, который не может содержаться в шаре радиуса меньше $\sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{\varepsilon_n}$. Поэтому на поверхности найдется последовательность точек, расстояние между которыми в пространстве будет больше произвольно заданного числа.

3. О сферическом образе. Рассмотрим поверхность строго отрицательной кривизны и покажем, что сферический образ геодезического круга не может целиком содержаться в сколь угодно малой окрестности одной точки, а обязательно выходит вне ее (если окрестность достаточно мала). Обозначим через $\boldsymbol{n}(P)$ нормаль в точке P.

Теорема 3. *Пусть в геодезическом круге радиуса r выполнено $-b^2 \leqslant K \leqslant -a^2 < 0$. Тогда для любого направления $\boldsymbol{e}$ найдется такая точка P из круга, что угол $\gamma(P)$ между $\boldsymbol{n}(P)$ и $\boldsymbol{e}$ удовлетворяет неравенству*

$$\gamma(P) \geqslant \arcsin \frac{ar}{\sqrt{3 + \frac{3a^2 + b^2}{2} r^2}}. \qquad (11)$$

Будем считать, что направление $\boldsymbol{e}$ задает ось z. Для доказательства используем уравнение Дарбу для координаты z

$$\nabla_{22} z = K(1 - \nabla_1 z). \qquad (12)$$

Интегрируя (12) по геодезическому кругу $C(r)$ (r — пока произвольный радиус) и используя (4), получаем

$$\frac{d}{dr} \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_s^2}{2} ds = \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{z_r^2}{2} \frac{ds}{\rho_g} - \int\limits_{C(r)} K \left(1 - \frac{3}{2} \nabla_1 z\right) dS. \qquad (13)$$

Имеет место равенство $\nabla_1 z = \sin^2 \gamma$, где γ — угол между нормалью к поверхности и осью z. Пусть γ_0 — наибольшее значение угла γ. Допустим, теорема не верна, тогда

$$1 - \frac{3}{2} \Delta_1 z = \frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{2} \cos^2 \gamma_0 - \frac{1}{2} > 0.$$

Далее запишем

$$z_s^2 \leqslant \nabla_1 z \leqslant \sin^2 \gamma_0.$$

Интегрируя (13) от 0 до r и используя эти оценки, получаем

$$\sin^2 \gamma_0 L(r) \geqslant a^2 (3 \cos^2 \gamma_0 - 1) \int\limits_0^r S(r)\, dr.$$

Имеет место неравенство

$$L(r) \leqslant 2\pi r + b^2 \int\limits_0^r S(r)\, dr.$$

Следовательно,

$$\sin^2 \gamma_0 2\pi r \geqslant \{(3a^2 + b^2) \cos^2 \gamma_0 - a^2 - b^2\} \int\limits_0^r S(r)\, dr.$$

Используя неравенство $\pi r^2 \leqslant S(r)$, находим

$$r^2 \leqslant 6 \sin^2 \gamma_0 [(3a^2 + b^2) \cos^2 \gamma_0 - a^2 - b^2]^{-1},$$

откуда следует доказываемое неравенство (11). Заметим, что при $a = b \neq 0$ и $r \to \infty$ эта оценка дает $\gamma(p) \geqslant \frac{\pi}{4}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Р. Розендорн. Построение ограниченной полной поверхности неположительной кривизны. УМН, 16, вып. 2, 1961.
2. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформации поверхностей. УМН, 3, вып. 2 (24), 1948.
3. А. Л. Вернер. Неограниченность гиперболического рога в евклидовом пространстве. «Сиб. матем. ж.», т. 11, № 1, 1970.
4. Ю. Д. Бураго. Неравенства изопериметрического типа в теории поверхностей ограниченной внешней кривизны. «Зап. науч. семинаров ЛОМИ», т. 10, Л., 1968.
5. С. Н. Бернштейн. Собр. соч., т. 3. Изд. АН СССР, 1960.

Поступила 20 января 1972 г.

О ДВУМЕРНЫХ МЕТРИКАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Ю. А. Аминов

Харьков

1. В статье обобщается теорема Н. В. Ефимова: если гауссова кривизна K дважды непрерывно дифференцируемой поверхности $z = z(x, y)$, заданной над квадратом в плоскости x, y со стороной a, удовлетворяет неравенству $K \leqslant -1$, то $a \leqslant 14$ [1]. Теорема распространяется на двумерные поверхности в n-мерном евклидовом пространстве E^n.

Естественно поставить вопрос: можно ли получить оценку сверху для стороны квадрата (или радиуса круга), если поверхность $F^2 \subset E^n$ с гауссовой кривизной $K \leqslant -1$ регулярно проектируется на квадрат (или круг) в некоторой двумерной плоскости?

Однако оказывается, что в E^5 для любого числа r существует поверхность F^2 с $K \leqslant -1$, которая регулярно проектируется на круг радиуса r, лежащий на некоторой двумерной плоскости. В E^6 регулярная поверхность F^2 с $K \leqslant -1$ существует над всей двумерной плоскостью (см. п. 4). Поэтому мы подходим к рассматриваемому вопросу несколько иначе.

Пусть кусок двумерной регулярной поверхности F^2 погружен в евклидово пространство E^n и регулярным образом спроектирован на некоторую гиперплоскость E^{n-1}. В проекции получим некоторую двумерную поверхность $\tilde{F}^2$. Будем считать, что поверхность $\tilde{F}^2$, лежащая в E^{n-1}, дана заранее, а F^2 строится над некоторым геодезическим кругом $C \subset \tilde{F}^2$ так, что n-я координата точки $P \in F^2$ есть регулярная функция точки поверхности $\tilde{F}^2$. В статье устанавливается оценка сверху для радиуса геодезического круга (явная или неявная), выраженная через гауссову кривизну F^2 и внутренние величины поверхности $\tilde{F}^2$.

В сущности, условие, что F^2 лежит в E^n, не используется. Можно считать, что абстрактно задана метрика $d\tilde{s}$ и над кругом C рассматривается другая метрика $ds^2 = d\tilde{s}^2 + du^2$, где u — функция класса C^2. Обозначим через R радиус геодезического круга C.

Теорема 1. *Пусть $d\tilde{s}$ — метрика постоянной отрицательной кривизны — a^2. Пусть гауссова кривизна K метрики ds удовлетворяет неравенству $K \leqslant -b^2$*, причем $b > 2a$ (a и b неотрицательные постоянные). *Тогда*

$$R \leqslant \frac{e\sqrt{3}}{b - 2a}.$$

Здесь установлена оценка для R при $b > \frac{3}{2}a$, но она несколько громоздка. Остается, однако, неясным, существует ли оценка для R лишь при естественном условии $b > a$. Аналогичный результат получен и для метрики $d\tilde{s}$ постоянной положительной кривизны.

Рассмотрим теперь произвольную метрику $d\tilde{s}$. Легко установить: если $d\tilde{s}$ задана на компактном многообразии, всегда найдется такая точка $P \in \tilde{F}^2$, что $K(P) \geqslant \tilde{K}(P)$.

Следующая теорема показывает, что для любого круга C найдется такое число $N(d\tilde{s}, C)$, что гауссова кривизна метрики $d\tilde{s}^2 + du^2$ не может быть меньше N во всем круге C.

Обозначим через $C(r)$ геодезический круг в метрике $d\tilde{s}$ радиуса r. Будем предполагать, что для любого $r \in [0, R]$ граница круга $C(r)$ имеет геодезическую кривизну $\frac{1}{\rho_g} \geqslant 0$. Это условие выполнено, если гауссова кривизна $d\tilde{s}$ неположительна или R достаточно мало. Обозначим через $\tilde{K}$ гауссову кривизну $\tilde{F}^2$, $S(r)$ — площадь геодезического круга $C(r)$, $L(r)$ — длину окружности. Определим величину, зависящую от метрики $d\tilde{s}$:

$$M(R) = \inf_{0 < r < R} \frac{S(r)}{L^2(r)}.$$

Теорема 2. *Пусть существует постоянная $K_0 > 0$, такая что для гауссовых кривизн K и $\tilde{K}$ выполнено*

$$\begin{aligned} &K \leqslant -K_0^2 + \tfrac{3}{2}\tilde{K} \ \text{ в тех точках, где } \tilde{K} \leqslant 0, \\ &K \leqslant -K_0^2 \ \text{ там, где } \tilde{K} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда

$$S(R)\,M(R) \leqslant 3e^2/4K_0^2.$$

Это неявная оценка для радиуса круга. Если $d\tilde{s}$ — метрика неотрицательной кривизны, то $M(R) \geqslant \frac{1}{4\pi}$ и тогда можно записать $S(R) \leqslant \frac{3\pi e^2}{K_0^2}$. Для метрики $d\tilde{s}$ неположительной кривизны $M(R) = \frac{S(R)}{L^2(R)}$. Поэтому оценка в этом случае имеет вид $\frac{S(R)}{L(R)} \leqslant \frac{e\sqrt{3}}{K_0}$.

Рассмотрим теперь проектирование на полные неограниченные поверхности. Тем же способом показывается, что если площадь $S(r)$ возрастает не слишком быстро, а именно

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{S(r)}} = \infty, \quad r_1 > 0 \tag{2}$$

то при любом $K_0 > 0$ поверхность F^2, удовлетворяющую условиям (1), нельзя спроектировать на все $\tilde{F}^2$. Например, для метрики $d\tilde{s}$ положительной кривизны условие (2) выполнено. Если же этот интеграл сходится, как, например, в случае метрики постоянной отрицательной кривизны, невозможность проектирования можно утверждать лишь для K_0, больших некоторого числа $N(d\tilde{s})$.

Существуют двумерные поверхности отрицательной кривизны, проекция которых есть поверхность положительной кривизны. Например, в E^4 (x, y, z, u) поверхность $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $u = 3(x^2 - y^2)$ имеет гауссову кривизну $K < 0$, а ее проекция на пространство (x, y, z) имеет положительную кривизну.

Теорема 3. *Если на многообразии с полной метрикой $d\tilde{s}$ и $\tilde{K} \geqslant 0$ существует точка без сопряженных и если K — гауссова кривизна метрики $d\tilde{s}^2 + du^2$, то* $\sup K \geqslant 0$.

2. Доказательство теорем 1 и 2 проводится одним и тем же методом, но при условиях теоремы 1 мы можем дать явные оценки для r. Если записать метрику $d\tilde{s}^2$ в некоторой специальной системе координат (например в полярной) и далее воспользоваться формулой (138) из [2], то получим

$$K(1 + \nabla_1 u)^2 = \tilde{K}(1 + \nabla_1 u) + \nabla_{22} u, \tag{3}$$

где $\nabla_1 u$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами в метрике $d\tilde{s}$; ∇_{22} — обобщенный оператор Монжа—Ампера [3]. Интегрируем уравнение (1) по кругу $C(r)$, при этом для интеграла от $\nabla_{22} u$ воспользуемся формулой (4) из [5]. Тогда получим

$$\frac{d}{dr}\int\limits_{\Gamma(r)} \frac{u_s^2}{2}\, ds = \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{u_r^2}{2}\frac{1}{\rho_g}\, ds - \int\limits_{C(r)} \left\{K(1 + \nabla_1 u)^2 - \tilde{K}\left(1 + \frac{3}{2}\nabla_1 u\right)\right\} dS, \tag{4}$$

где $\Gamma(r)$ — граница круга $C(r)$; $\frac{1}{\rho_g}$ — ее геодезическая кривизна; ds — элемент дуги $\Gamma(r)$. В дальнейшем для доказательства теорем используем метод Гайнца [4], видоизмененный применительно к нашему случаю. Введем функцию

$$f(r) = \int\limits_0^r \int\limits_{\Gamma(r)} u_s^2\, ds\, dr + S(r).$$

Ясно, что $f(r) \geqslant S(r)$. Применяя далее неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$f(r) \leqslant \Big[\int\limits_{C(r)} (1+\nabla_1 u)^2\, dS\Big]^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}(r). \tag{5}$$

Очевидно, $f'(r) > 0$ при $r > 0$. С помощью (4) находим

$$f''(r) = \frac{d}{dr}\int\limits_{\Gamma(r)} u_s^2\, ds + \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{ds}{\rho_g} \geqslant 2K_0 \int\limits_{C(r)} (1+\nabla_1 u)^2\, dS,$$

где учитывались $\frac{1}{\rho_g} \geqslant 0$ и условие теоремы 2: $K - \frac{3}{2}\tilde{K} \leqslant -K_0^2$ в тех точках, где $\tilde{K} \leqslant 0$ и $K \leqslant -K_0^2$ при $\tilde{K} \geqslant 0$. Используя (5), находим

$$f''(r) \geqslant 2K_0^2 \frac{f^2(r)}{S(r)}.$$

Умножим это неравенство на f' и проинтегрируем от 0 до r. Так как $f'(0) = f(0) = 0$, получим

$$\frac{f'^2(r)}{2} \geqslant \frac{2}{3} K_0^2 \frac{f^3(r)}{S(r)}.$$

Записав это неравенство в виде

$$\frac{f'(r)}{f^{3/2}(r)} \geqslant \frac{2K_0}{\sqrt{3}\sqrt{S(r)}},$$

проинтегрируем его от r_1 до r_2 $(0 < r_1 \leqslant r_2)$

$$f^{-\frac{1}{2}}(r_1) - f^{-\frac{1}{2}}(r_2) \geqslant \frac{K_0}{\sqrt{3}} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{S(r)}}.$$

Используем теперь неравенство $f(r_1) \geqslant S(r_1)$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{S(r_1)}} \geqslant \frac{K_0}{\sqrt{3}} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{S(r)}}. \tag{6}$$

Заметим, что

$$0 < \left(\sqrt{S(r)}\right)' = \frac{L(r)}{2\sqrt{S(r)}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{M(R)}}.$$

Используя это неравенство и оценку (6), в которой положим $r_2 = R$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{S(r_1)}} \geqslant \frac{K_0}{\sqrt{3}} \int\limits_{r_1}^{R} \frac{(\sqrt{S})'\, dr}{(\sqrt{S})'\sqrt{S}} \geqslant \frac{K_0 M^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \ln \frac{S(R)}{S(r_1)}.$$

Следовательно,

$$[S(r_1)]^{-\frac{1}{2}} + \frac{K_0 M^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \ln S(r_1) \geqslant \frac{K_0 M^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \ln S(R).$$

Поскольку минимум левой части достигается при $S(r_1)=\frac{3}{4MK_0^2}$, то

$$\ln\sqrt{3}+1-\ln 2-\frac{1}{2}\ln M-\ln K_0\geqslant\frac{1}{2}\ln S(R),$$

что и доказывает теорему 2.

Теорема 3 следует из того факта, что интеграл, стоящий в правой части 6), расходится при $r_2\to\infty$. Кроме того, отсутствие сопряженных точек для некоторой точки $\tilde{P}\in F^2$ и полнота $\tilde{F}^2$ влекут выпуклость геодезических окружностей с центром в точке $\tilde{P}$. Поэтому метод применим.

3. Для доказательства теоремы 1 уточним оценку (6). В этом случае метрика поверхности $\tilde{F}^2$ в полярных координатах имеет вид

$$d\tilde{s}^2=dr^2+\frac{\operatorname{sh}^2 ar}{a^2}d^2\varphi,$$

а площадь геодезического круга $S(r)=\frac{\pi}{a^2}e^{-ar}(e^{ar}-1)^2$. Положив $K_0^2=b^2-\frac{3}{2}a^2$, запишем неравенство (6)

$$\frac{e^{\frac{a}{2}r_1}}{e^{ar_1}-1}\geqslant\frac{K_0}{\sqrt{3}}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{e^{\frac{a}{2}r}dr}{e^{ar}-1}=\frac{K_0}{a\sqrt{3}}\ln\frac{e^{\frac{a}{2}r}-1}{e^{\frac{a}{2}r}+1}\Bigg|_{r_1}^{r_2}.$$

Обозначим через $x=e^{\frac{ar_1}{2}}$ и найдем минимум следующего выражения при $x\geqslant 1$:

$$\frac{\sqrt{3}\,ax}{K_0\,(x^2-1)}+\ln\frac{x-1}{x+1}.$$

Если выполнено условие $K_0^2>\frac{3}{4}a^2$ или $b>\frac{3}{2}a$, минимум достигается в конечной точке

$$x=(2K_0+\sqrt{3}a)^{\frac{1}{2}}(2K_0-\sqrt{3}a)^{-\frac{1}{2}},$$

и он меньше нуля. Обозначим

$$2\Pi=\left[\left(\frac{2K_0}{a\sqrt{3}}+1\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2K_0}{a\sqrt{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Элементарными преобразованиями и оценками найдем

$$R\leqslant 4ea^{-1}\,[\Pi-\exp(1-3a^2/4K_0^2)^{\frac{1}{2}}]^{-1}.$$

Эта оценка имеет место в случае $b>\frac{3}{2}a$. Пусть теперь $b>2b$.

Тогда

$$R \leqslant \frac{4e}{2a\left(\frac{9K_0^2}{3a^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}-ea} \leqslant \frac{e\sqrt{3}}{b-2a}.$$

Если метрика поверхности $\tilde{F}^2$ имеет постоянную положительную кривизну a^2 и гауссова кривизна F^2 удовлетворяет условию $K \leqslant \leqslant -b^2$, можно найти

$$R \leqslant \frac{4}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3a}}{4b} \exp\left(1+\frac{3a^2}{4b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Если метрика $d\tilde{s}$ задана на компактном многообразии, то в точке минимума или максимума функции u имеем $\nabla_1 u = 0$, $\Delta_{22} u \geqslant 0$. Следовательно, в этой точке, используя формулу (3), получаем $K \geqslant \tilde{K}$.

4. Теперь приведем пример поверхности в E^5 с $K \leqslant -1$, которая регулярно проектируется на круг с заданным радиусом, лежащий в двумерной плоскости. Для этого в трехмерном евклидовом пространстве (u_1, u_2, u_3) на псевдосфере с кривизной -4 возьмем геодезический круг. Пусть (α, β) — полугеодезические координаты на псевдосфере с началом в центре круга, в которых квадрат ее линейного элемента имеет вид

$$d\tilde{s}^2 = d\alpha^2 + \operatorname{ch}^2 2\alpha \, d\beta^2.$$

Геодезический круг возьмем столь большим, чтобы область параметров (α, β) содержала круг заданного радиуса. Пусть $u_i = u_i(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2, 3$ — параметрические уравнения псевдосферы. Тогда поверхность в E^5 $\{\alpha, \beta, u_1, u_2, u_3\}$ имеет метрику $2d\alpha^2 + (\operatorname{ch}^2 2\alpha + 1)\, d\beta^2$, гауссова кривизна которой

$$K = -4 + \frac{8}{(\operatorname{ch}^2 2\alpha + 1)^2} \leqslant -2.$$

Таким же способом построим двумерную поверхность в E^6 с $K \leqslant \leqslant -K_0^2$ над всей двумерной плоскостью. Для этого используем пример Э. Р. Розендорна [6] замкнутой поверхности в E^4, гауссова кривизна которой $\tilde{K}$ строго отрицательна. Обозначим $\max \tilde{K} = -4K_0^2$. На универсальной накрывающей этой поверхности введем полугеодезическую систему координат (α, β), в которой квадрат линейного элемента

$$d\tilde{s}^2 = d\alpha^2 + G(\alpha, \beta,)\, d\beta^2.$$

Тогда метрика $ds^2 = d\tilde{s} + d\alpha^2 + d\beta^2$ имеет гауссову кривизну

$$K = \tilde{K} \frac{G}{(G+1)\,2} - \frac{G_\alpha^2}{4G(G+1)}.$$

Кривую $\alpha = 0$ возьмем геодезической и положим $G(0, \beta) = 1$. Тогда в силу отрицательности $\tilde{K}$ всюду $G \geqslant 1$. Если $x_i = x_i(\alpha, \beta)$, $i = 1, \ldots, 4$ — параметрические уравнения поверхности Э. Р. Розендорна, то поверхность в E^6 $\{\alpha, \beta, x_1(\alpha, \beta), \ldots, x_4(\alpha, \beta)\}$ определена над всей плоскостью (α, β) и имеет $K \leqslant -K_0^2 < 0$.

Заметим также, что известная поверхность Блануши, реализующая плоскость Лобачевского в E^6, регулярно проектируется на некоторую двумерную плоскость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны. ДАН СССР, 93, № 4 (1953).

2. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия, т. 1. М.—Л., ОНТИ, 1935.

3. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформации поверхностей. УМН, т. 3, вып. 2 (24), 1948.

4. E. Heinz. Über Flächen mit eindeutiger Projection auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind, Math. Ann, 129, № 5, 451—454(1955).

5. Ю. А. Аминов. О внешнем диаметре поверхности отрицательной кривизны. См. статью настоящего сборника.

6. Э. Р. Розендорн. О полных поверхностях отрицательной кривизны $K \leqslant -1$ в евклидовых пространствах E_3 и E_4. «Матем. сб.», 58(100) : 4, 1961.

Поступила 13 сентября 1971 г.

О КЛАССЕ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СТРОГО ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

А. А. Борисенко

Харьков

Шур показал, что n-мерное пространство Лобачевского локально можно вложить в евклидово пространство размерности $2n - 1$ [1]. Либер доказал, что локальное изометрическое вложение n-мерного пространства Лобачевского невозможно в евклидово пространство размерности $2n - 2$ [2]. В настоящей статье этот результат обобщен для римановых пространств строго отрицательной кривизны.

Пусть R^n есть n-мерное риманово пространство, кривизна которого в каждой точке и в каждом двумерном направлении не больше $-c^2$, где c — произвольная фиксированная постоянная; такое риманово пространство будем называть пространством строго отрицательной кривизны. Пусть E^{2n-2} — евклидово пространство размерности $2n - 2$.

Теорема 1. *Риманово n-мерное пространство строго отрицательной кривизны нельзя локально изометрично вложить в E^{2n-2}.*

Доказательство теоремы существенно опирается на сформулированную ниже лемму.

Условимся, что индексы будут пробегать следующие значения: $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$; $1 \leqslant r \leqslant n - 2$; $1 \leqslant s \leqslant n - 1$; $1 \leqslant m \leqslant N$; $1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho \leqslant 2n - 2$.

Пусть задана система квадратичных уравнений с n неизвестными

$$A_{mij}x_i x_j = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $A(x, x)$ — вектор с компонентами $A_{mij}x_i x_j$; $A(x, y)$ — вектор с компонентами $A_{mij}x_i y_j$, где x, y — n-мерные векторы с компонентами x_i, y_i.

Лемма. *Если в системе N уравнений (1) $N \leqslant n-1$ и для любых x и y выполняется условие $A(x, x)A(y, y) \leqslant A^2(x, y)$, то система (1) имеет нетривиальное решение.*

Для $n = 3$ эту лемму доказали Черн и Кейпер [3], для произвольного n ее доказал Отзуки [4].

Доказательство теоремы. Пусть $z_r = A_{rij}t_i t_j$ есть n-мерная поверхность F неположительной кривизны в E^{2n-2}. Покажем, что в точке $t_i = 0$ найдется такая двумерная площадка, в направлении которой кривизна равна нулю.

Пусть $x = \sum x_i e_i$ и $y = \sum y_i e_i$ — единичные взаимно-перпендикулярные векторы в касательном пространстве точки O поверхности F, e_i — единичные векторы направлений осей t_i. Тогда кривизна $K(x, y)$ поверхности F в направлении двумерной площадки, натянутой на x, y, вычисляется по формуле

$$K(x, y) = 2[A(x, x)A(y, y) - A^2(x, y)]. \qquad (2)$$

Пусть $x_0 = \sum x_i^0 e_i$ — нетривиальное единичное решение системы $A_{rij}x_i x_j = 0$; оно существует, поскольку система удовлетворяет условию леммы. Так как $A(x_0, x_0) = 0$, из (2) следует, что

$$K(x_0, y) = -2A^2(x_0, y). \qquad (3)$$

Рассмотрим вектор $A(x_0, y)$, его компоненты $A_{rij}x_i^0 y_j$. Направление вектора x_0 возьмем за направление оси t_n. Тогда, поскольку $(x_0, y) = 0$, получим

$$A_{rij}x_i^0 y_j = A_{rns}y_s.$$

Введем вектор A_{ns} с компонентами A_{rns}; можно записать $A(x_0, y) = A_{ns}y_s$. Векторы A_{ns} имеют размерность $n-2$, всего таких векторов $n-1$, значит, векторы A_{ns} линейно зависимы. Поэтому можно подобрать y_s^0 такие, что $\sum y_s^{02} = 1$ и $A_{ns}y_s^0 = A(x_0, y_0) = 0$.

Из формулы (3) видно, что кривизна поверхности F в направлении двумерной площадки, натянутой на векторы x_0, y_0, равна нулю, чем утверждение теоремы доказано.

Используя этот результат, можно выяснить вопрос о непогружаемости риманова пространства R^n в риманово пространство R^{2n-2} при некоторых ограничениях на кривизны пространства R^n и R^{2n-2}.

Пусть R^{2n-2} — риманово пространство, кривизна которого в каждом двумерном направлении $\geqslant c_0$, где c_0 — произвольная постоянная; обозначим его через $R_{c_0}^{2n-2}$. Пусть R^n — риманово пространство, кривизна которого в направлении каждой двумерной площадки

$\leqslant c_0 - c^2$ (обозначим его через $R^n_{c_0-c^2}$) и пусть P — произвольная точка $R^n_{c_0-c^2}$, $Q(P)$ — произвольная окрестность точки P на $R^n_{c_0-c^2}$.

Как следствие теоремы 1, имеет место

Теорема 2. *Окрестность $Q(P)$ точки P пространства $R^n_{c_0-c^2}$ нельзя изометрично вложить в $R^{2n-2}_{c_0}$.*

Доказательство. Пусть $z_\rho = z_\rho(x)$ есть n-мерная поверхность $R^n_{c_0-c^2}$ в $R^{2n-2}_{c_0}$. Тогда

$$R_{ijkl} = (A_{rik}A_{rjl} - A_{ril}A_{rjk}) + \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} z^\alpha_i z^\beta_j z^\gamma_k z^\delta_l, \tag{4}$$

где R_{ijkl} — тензор кривизны $R^n_{c_0-c^2}$; $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны объемлющего пространства; A_{rij} — компоненты вторых квадратичных форм для $n-2$ взаимно-перпендикулярных единичных нормалей; $z^\alpha_i = \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}$.

В окрестности $R^n_{c_0-c^2}$ можно ввести такие координаты, что поверхность будет определяться уравнениями

$$z_{n+r} = 0; \quad z_i = x_i.$$

Тогда уравнения (4) примут вид

$$R_{ijkl} = A_{rik}A_{rjl} - A_{ril}A_{rjk} + \overline{R}_{ijkl}. \tag{5}$$

Вычислим кривизну $R^n_{c_0-c^2}$ в точке $z_\rho = 0$. Пусть x, y — единичные взаимно-перпендикулярные векторы, лежащие в касательном пространстве $R^n_{c_0-c^2}$ в точке O. Обозначим через $K(x, y)$, $\overline{K}(x, y)$ кривизны $R^n_{c_0-c^2}$, $R^{2n-2}_{c_0}$ в направлении двумерной площадки, натянутой на векторы x, y. Из (5) получим

$$K(x, y) = 2[A(x, x)A(y, y) - A^2(x, y)] + \overline{K}(x, y). \tag{6}$$

По условию теоремы для взаимно-перпендикулярных единичных векторов $K(x, y) \leqslant c_0 - c^2$, $\overline{K}(x, y) \geqslant c_0$; из (6) находим

$$2[A(x, x)A(y, y) - A^2(x, y)] \leqslant -c^2. \tag{7}$$

Но координаты x_i выбраны так, что компоненты метрического тензора пространства $R^n_{c_0-c^2}$ в точке O будут $g_{ij} = \delta_{ij}$; поэтому

$$\sum x_i^2 = 1, \sum y_i^2 = 1. \tag{8}$$

И если теперь в E^{2n-2} задать поверхность уравнением $z_r = A_{rij}x_i x_j$, то из (7) и (8) следует, что она в точке O будет иметь строго отрицательную кривизну; это противоречит теореме 1. Этим и доказана теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Schur. Über die Deformation der Räume constanter Riemannschen Krümmungsmasses. Math. Ann., B. 27, 170, 1886.

2. А. Е. Либер. О классе римановых пространств постоянной отрицательной кривизны. «Уч. зап. Саратов. ун-та, сер. физ.-матем.», 1(14). 2, 1938.

3. S. S. Chern, N. H. Kuiper. Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space. Ann. of Math., 56, 422—430, 1952.
4. T. Otsuki. On the existense of solutions of quadratic equation and its geometrical application. Proc. Japan. Acad., 29, 99—100, 1953.
5. Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ, 1948.

Поступила 10 января 1972 г.

О СТРОЕНИИ l-МЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ВЫРОЖДЕННОЙ ВТОРОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ В n-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Борисенко

Харьков

Черн и Лашоф в работе [1] изучали строение гиперповерхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n-мерном евклидовом пространстве. Они доказали: если в окрестности точки X_0 гиперповерхности F ранг второй квадратичной формы $r(X)$ локально постоянен и равен k, то через каждую точку окрестности проходит единственная $(n-k-1)$-мерная образующая π_{n-k-1}. Если $X \in \pi_{n-k-1}$, то $r(X)=k$, а в окрестности точки локально постоянен, для $X \in \overline{\pi}_{n-k-1}\, r(X) \geqslant k$.

Хартман и Ниренберг доказали: если гиперповерхность F полная и ранг второй квадратичной формы $\leqslant 1$, то гиперповерхность F является цилиндром с $(n-2)$-мерными образующими [2].

Ферус обобщил результаты Черна и Лашофа на пространства постоянной кривизны.

В этой статье для l-мерной поверхности в E^n мы введем определение ранга точки, типа точки и обобщим результаты Черна, Лашофа, Хартмана и Ниренберга на l-мерные поверхности в E^n.

Черн и Кейпер для l-мерной поверхности в E^n ввели индекс точки $\nu(X)$ [3].

Пусть F — невырожденная l-мерная поверхность в E^n, $A_{ls}(n, X)$ — вторая квадратичная форма для нормали n в точке X, $A(n, X)$ — матрица коэффициентов этой формы. Ядром $A(n, X)$ будем называть подпространство собственных векторов $A(n, X)$, отвечающих собственному значению, равному нулю. $\nu(X)$ — размерность максимального подпространства, каждый вектор которого принадлежит ядру $A(n, X)$ для произвольной нормали n в точке X.

Теорема 1. *Если $\nu(X) \geqslant \nu$ для каждой точки поверхности F, то через каждую точку F проходит ν-мерная образующая, вдоль которой касательная плоскость стационарна.*

Прежде чем доказывать теорему, введем определение ранга точки и докажем несколько лемм. Обозначим $r(n, X)$ — ранг $A(n, X)$.

Пусть $r(X) = \max_{n \in S^{n-l-1}} r(n, X)$, где S^{n-l-1} — сфера единичных нормалей в точках X.

Обозначим через $r^*(X)$ максимальный ранг для точек, близких к X:

$$r^*(X) = \min_{U \ni X} [\sup_{Z \in U} r(Z)],$$

где U — окрестность точки X: $r(X) \leqslant r^*(X)$.

Поверхность F зададим в виде

$$z_i = z_i(X), \quad i = 1, \ldots, n-l,$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x^s}(0) = 0, \quad s = 1, \ldots, l,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_l)$. Уравнение $z_1 = z_1(x)$ задает гиперповерхность F_1 в E^{l+1}, натянутом на оси $z_1, x_1, \ldots, x_l$. Гиперповерхность F_1 — ортогональная проекция F на E^{l+1}.

Лемма 1. *Нормаль $n(X)$ гиперповерхности F_1 будет нормалью поверхности F в точке X.*

Как вектор в E^n $n(X)$ будет иметь координаты

$$n(X) = \operatorname{grad} z_1 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{grad} z_1)^2}} a \right),$$

где $a = (-1, 0, \ldots, 0)$ — $(n-l)$-мерный вектор. Касательные векторы r_k в точке X поверхности F будут иметь координаты

$$r_k = \left(l_k, \frac{\partial Z}{\partial x^x} \right), \; k = 1, \ldots, l.$$

Здесь $Z = (z_1, \ldots, z_{n-l})$, а $l_k = (0, \ldots, 1, 0)$ — l-мерный единичный вектор, в котором единица стоит на месте координаты с номером k:

$$(r_k n) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{grad} z_1)^2}} \left(l_k \operatorname{grad} z_1 + \frac{\partial Z}{\partial x^k} \cdot a \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{grad} z_1)^2}} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x^k} - \frac{\partial z_1}{\partial x^k} \right) = 0.$$

Лемма 2. *Вторая квадратичная форма гиперповерхности F_1 будет второй квадратичной формой поверхности F относительно нормали $n(X)$.*

Компоненты A_{is} второй квадратичной гиперповерхности F_1 имеют вид

$$A_{is} = - \frac{z_{1is}}{\sqrt{1 + (\operatorname{grad} z_1)^2}},$$

где $z_{1is} = \frac{dz_1}{\partial x_i \partial x_s}$.

Для поверхности F компоненты второй квадратичной формы относительно нормали $n(X)$ гиперповерхности F_1 определяются по формуле

$$A_{ls}(n, X) = (r_{ls} n),$$

где r — радиус-вектор F, $r_{ls} = (0, Z_{ls})$.

Поэтому

$$A_{ls}(n, X) = -\frac{z_{1ls}}{\sqrt{1 + (\operatorname{grad} z_1)^2}}, \; A_{ls} = A_{ls}(n, X).$$

Нам понадобятся в дальнейшем некоторые очевидные факты, которые мы сформулируем в виде лемм.

Лемма 3. *Пусть E — подпространство. Если векторы n_1, n_2 ортогональны E, то $\lambda n_1 + \mu n_2$ ортогональны E при любом λ, μ.*

Лемма 4. *Ядру второй квадратичной формы гиперповерхности F_1 принадлежат те и только те касательные направления, для которых $dn = 0$.*

Это следствие теоремы Родрига.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Сначала мы будем доказывать ее для случая, когда ранг поверхности в окрестности точки 0 локально постоянен, т. е. $r^*(0) = r(0)$, как следует из условия теоремы $r \leqslant l - \nu$.

Направим ось z_1 по нормали в точке 0, для которой $r(n) = r(0)$.

Как следует из лемм 1, 2, гиперповерхность F_1 в окрестности 0 имеет локально постоянный ранг r. По теореме Черна—Лашофа, через точку 0 гиперповерхности F_1 проходит единственная $(l - r)$-мерная образующая, вдоль которой нормаль стационарна [1]. Эта образующая лежит также на поверхности F, из леммы 4 следует, что подпространство $L(0)$ принадлежит образующей.

Для нормалей $n(0)$, близких к направлению оси z_1, также проходят $l - r$-мерные образующие, которые лежат на поверхности F. Вдоль них нормали $n(0)$ стационарны, эти образующие также содержат в себе $L(0)$. А по лемме 3 совокупность нормалей, стационарных вдоль $L(0)$, заполняет подпространство, поэтому вдоль $L(0)$ будут стационарны все нормали $n(0)$.

Если $r^*(X_0) = k$, но $r(X_0) \neq r^*(X_0)$, то можно найти такую последовательность $X_l \to X_0$, что $r^*(X_l) = r(X_l) = k$. Для каждой из точек этой последовательности проходит ν-мерная образующая, вдоль которой касательное пространство стационарное. Переходя в случае надобности к подпоследовательности, мы можем считать, что эти образующие сходятся к ν-мерной образующей, проходящей через X_0. Так как касательное пространство постоянно на образующих, проходящих через X_l, то оно постоянно и на предельной образующей. Этим и завершается доказательство теоремы.

Теперь введем определение типа точки и выясним строение поверхности в зависимости от величины ранга и типа точки поверхности.

Квадратичная форма $A_{is}(n, X) x_i x_s$ имеет определенную сигнатуру. Пусть k — число положительных коэффициентов в каноническом виде формы, m — отрицательных:

$$j(n, X) = \min(k, m),$$

Типом точки X назовем целое число $j(X) = \min j(n, X)$ по всем нормалям в точке X, для которых $r(n, X) = r(X)$. Будем рассматривать поверхность F с локально постоянным рангом r и, значит, постоянным типом точек поверхности.

При задании F в виде $z_i = z_i(X)$ направим ось z_1 по нормали n, для которой $r(n, 0) = r(0)$ и $j(n, 0) = j(0)$. Оси x_k $k = 1, \ldots, l$ направим по главным направлениям гиперповерхности F_1, заданной уравнением $z_1 = z_1(x)$. При этом оси $x_{r+1}, \ldots, x_l$ направим по главным направлениям, соответствующим собственному значению, равному нулю.

Матрица коэффициентов второй квадратичной формы гиперповерхности F_1 в точке 0 будет иметь вид

$$A^1 = \left(\begin{array}{c|c} C^1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

где C^1 — квадратичная диагональная матрица порядка r, все диагональные элементы которой $c_i \neq 0$.

Мы утверждаем, что матрицы квадратичных форм для нормалей, направленных по осям $z_k (k = 2, \ldots, n - l)$, будут иметь вид

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} C^k & B^k \\ \hline (B^k)' & 0 \end{array}\right),$$

где C^k — квадратичная матрица $r \times r$; $(B^k)'$ — матрица, транспонированная к B^k.

Допустим противное. Пусть для определенности матрица, соответствующая нормали n_2, будет иметь вид

$$A^2 = \left(\begin{array}{c|c} C^2 & B^2 \\ \hline (B^2)' & D^2 \end{array}\right),$$

где D^2 матрица порядка $(l - 2) \times (l - r)$, отличная от нулевой. Возьмем нормаль вида

$$n = \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2.$$

Матрица второй квадратичной формы для нормали n будет следующей:

$$A(n) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2 & \lambda_2 B^2 \\ \hline \lambda_2 (B^2)' & \lambda_2 D^2 \end{array}\right).$$

Для определенности, не ограничивая при этом общности, будем считать, что d_{11}^2.

Рассмотрим минор M — $(r + 1)$-порядка, лежащий на пересечении $(r + 1)$ первых строк и $(r + 1)$ первых столбцов:

$$M = \lambda_2 \det\left(\frac{\lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2 \mid b_1^2}{\lambda_2 (b_1^2)' \mid d_{11}^2}\right),$$

где $b_m^k (m = 1, \ldots l - r)$ — столбцы матрицы B^k.

При $\lambda_2 = 0, \ \lambda_1 \neq 0$

$$\det\left(\frac{\lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2 \mid b_1^2}{\lambda_2 (b_1^2)' \mid d_{11}^2}\right) \neq 0.$$

А значит, при достаточно малых $\lambda_2 \neq 0$ $M \neq 0$ и $r(n, 0) = r + 1$, а $r(0) \geqslant r(n, 0) = r + 1$, что противоречит предположению.

Лемма 5.

$$\det \left\| \frac{C^1}{(b)'} \middle| \frac{b}{0} \right\| = -\det \| C^1 \| \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{b_k^2}{c_k} \right),$$

где b есть r-мерный вектор.

Лемма 6. *Векторы b_m^k удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^2}{c_i} = 0, \qquad (1)$$

где c_i — диагональные элементы матрицы C^1.

Мы должны доказать, что

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{(b_{mi}^k)^2}{c_i} = 0.$$

Допустим, это не так. Не теряя общности, можно предположить, что вектор b_1^2 не удовлетворяет уравнению (1). Возьмем нормаль вида $n = \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2$. Матрица второй квадратичной формы для нормали n будет иметь вид

$$A(n) = \left(\frac{\lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2}{\lambda_2 (B^2)'} \middle| \frac{\lambda_2 B^2}{0} \right).$$

Рассмотрим минор $(r + 1)$-го порядка, лежащий на пересечении $(r + 1)$ первых строк и $(r + 1)$ первых столбцов:

$$M = \det \left\| \frac{\lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2}{\lambda_2 (b_1^2)'} \middle| \frac{\lambda_2 b_1^2}{0} \right\| = \lambda_2^2 \det \left\| \frac{\lambda_1 C^1 + \lambda_2 C^2}{(b_1^2)'} \middle| \frac{b_1^2}{0} \right\|$$

При $\lambda_2 = 0$ он отличен от нуля, что следует из предположения и леммы 5. По непрерывности он будет отличен от нуля при достаточно малых λ_2. А значит, найдется нормаль n близкая к n_1 такая, что $r(n) = r + 1$. Это противоречит тому, что $r(X) = r$.

Пусть a, b — различные столбцы матрицы B^k для определенности $k = 2$.

Лемма 7.

$$D = \det \left\| \begin{array}{c|c} \dfrac{C^1}{(a)'} & \dfrac{a,\ b}{0} \\ (b)' & \end{array} \right\| = -\det \| C^1 \| \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i b_i}{c_i} \right)^2.$$

Вычисляя D по теореме Лапласа, получаем

$$D = \det \mid C^1 \| \left[\sum_{i<s}^{r} \frac{(a_i b_s - a_s b_i)^2}{c_i c_s} \right];$$

$$\sum_{i<s}^{r} \frac{(a_i b_s - a_s b_i)^2}{c_i c_s} = \sum_{i \neq s}^{r} \frac{a_i^2 b_s^2}{c_i c_s} - 2 \sum_{i<s}^{r} \frac{(a_i b_i)(a_s b_s)}{c_i c_s}. \tag{2}$$

По лемме 6

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{c_i} = 0; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{b_i^2}{c_i} = 0. \tag{4}$$

Отсюда, перемножив (3) и (4), найдем

$$\sum_{i \neq s}^{r} \frac{a_i^2 b_s^2}{c_i c_s} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2 b_i^2}{c_i^2}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (2), имеем

$$\sum_{i<s} \frac{(a_i b_s - a_s b_i)^2}{c_i c_s} = -\left(\sum \frac{a_i b_i}{c_i} \right)^2. \tag{6}$$

Это и доказывает лемму 7.

Лемма 8.

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i b_i}{c_i} = 0. \tag{7}$$

Доказательство леммы 8 аналогично доказательству леммы 6.

Пусть в конусе

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^2}{c_i} = 0 \tag{8}$$

$$c_i \neq 0;$$

j первых коэффициентов положительные; $r - j$ остальных—отрицательные, причем $j \leqslant r - j$.

Лемма 9. *Наибольшая размерность подпространства, проходящего через точку $x_i = 0$ и лежащего на конусе (8), равна j.*

Невырожденным афинным преобразованием пространства конус переведем в конус

$$\sum_{i=1}^{j} x_i^2 = \sum_{i=1}^{r-j} x_{j+i}^2. \tag{9}$$

При афинном преобразовании плоскости переходят в плоскости, поэтому утверждение достаточно доказать для конуса (9).

Допустим, что на конусе (9) через точку $x_i = 0$ проходит плоскость размерности $m > j$. Она задается уравнениями

$$x_i = a_{ik}t_k; \quad i = 1, \ldots j; \quad x_{j+i} = b_{ik}t_k; \quad i = 1, \ldots r-j.$$

Ранг матрицы коэффициентов равен $m > j$. Так как плоскость лежит на конусе (9), то

$$\sum_{i=1}^{j} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}t_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{r-j} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}t_k\right)^2. \tag{10}$$

Введем j-мерные векторы $a_k = (a_{1k}, \ldots, a_{jk})$, $r-j$-мерные векторы $b_k = (b_{1k}, \ldots, b_{r-j,\,k})$. Из (10) получаем следующие соотношения между a_k и b_k:

$$(a_i a_s) = (b_i b_s). \tag{11}$$

Пусть $C_k = (a_k, \ b_k)$ — r-мерный вектор. По условию, векторы C_k — линейно независимые. Так как a_k — j-мерные векторы, а их m, то они линейно зависимы.

Найдутся такие λ_k одновременно не равные нулю, что $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0$.

Из (11) следует, что $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k = 0$, а значит, и $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k c_k = 0$, что противоречит независимости c_k.

Лемма 10. *Ранг матрицы B^k меньше или равен j.*

Если a, b — различные столбцы из матрицы B^k, то

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{(\lambda a_i + \mu b_i)^2}{c_i} = \lambda^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{c_i} + 2\lambda\mu \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i b_i}{c_i} + \mu^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i^2}{c_i}, \tag{12}$$

и, как следует из лемм 6 и 8, левая часть равенства (12) равна нулю при любых λ, μ, т. е. плоскость, натянутая на векторы a, b, также лежит на конусе (8). Значит, на конусе будет лежать подпространство размерности ранга матрицы B^k. Но, по лемме 9, размерность такого подпространства не больше j.

Лемма 11. *Если ранг точки поверхности F равен r, а тип — j,* то

$$\nu \geqslant (l-r) - j(n-l-1),$$

где ν — размерность подпространства решений системы линейных уравнений

$$A^k x = 0,\ k = 1, \ldots, n-l. \tag{13}$$

Так как системе уравнений $A^1 x = 0$ удовлетворяют $x = (0, \ldots, 0 x_{r+1}, \ldots, x_l)$, то система (13) эквивалентна системе уравнений

$$B^k x = 0, \tag{14}$$

$k = 2, \ldots, n-l$; x — $(l-r)$-мерный вектор.

Как следует из леммы 10, ранг матрицы системы уравнений (14) $\leqslant j(n-l-1)$, поэтому размерность пространства решений системы (14)

$$\nu \geqslant (l-r) - j(n-l-1).$$

Как следствие теоремы 1 и леммы 11, получается следующая теорема.

Теорема 2. *Если ранг поверхности F равен r, а $j(x) = j$, то через каждую точку поверхности проходит $[(l-r) - j(n-l-1)]$-мерная образующая, вдоль которой касательное пространство стационарно.*

Конечно, теорема 2 имеет смысл, если $(l-r) - j(n-l-1) > 0$.

Следствие. *Если ранг поверхности F равен r, то через каждую точку поверхности проходит $\left[(l-r) - \left[\frac{r}{2}\right](n-l-1)\right]$-мерная образующая, вдоль которой касательное пространство стационарно.*

$\left[\frac{r}{2}\right]$ — целая часть $\frac{r}{2}$. Утверждение вытекает из теоремы 3 и очевидного неравенства $j \leqslant \left[\frac{r}{2}\right]$.

Теорема 3. *Если ранг полной поверхности равен r, а $j = 0$, то F является цилиндром с $(l-r)$-мерными образующими, вдоль которых касательные плоскости стационарны.*

Из теоремы 3 следует, что через каждую точку F проходит единственная $(l-r)$-мерная образующая, вдоль которой касательная плоскость стационарна.

Возьмем на поверхности F следующую окрестность точки 0. В ортогональном дополнении к образующей в $T(0)$ возьмем шар радиуса ε_0. Через точки F, соответствующие шару при ортогональном проектировании F на $T(0)$, проведем образующие. Эту окрестность обозначим $\overline{F}$, ее можно задать в виде $z_i = z_i(x)$. Направим ось z_1 по нормали n_0, для которой $r(n_0) = r$, $j(n_0) = 0$. Гиперповерхность $\overline{F}_1$, $z_1 = z_1(x)$ в окрестности точки O имеет ранг r, а, как следует из теоремы Черна-Лашофа, он будет равен r на всей гиперповерхности $\overline{F}_1$. В окрестности точки O на $\overline{F}_1$ $j=0$, но так как ранг постоянен на всей поверхности, то $j=0$ во всех точках $\overline{F}_1$, а значит, $\overline{F}_1$ — выпуклая гиперповерхность. Дополним $\overline{F}_1$ до полной гиперповерхности, $\tilde{F}_1$ — полная выпуклая гиперповерхность, которая является границей пересечения полупространств, ограниченных опорными гиперплоскостями к $\overline{F}_1$. Через каждую точку проходит $(l-r)$-мерная образующая. Это следует из того, что $(l-r)$-мерная образующая проходит через каждую точку $\overline{F}_1$, и того факта, что общая часть опорной гиперповерхности и выпуклой гиперповерхности — множество выпуклое.

Сферическое изображение полной выпуклой гиперповерхности — выпуклое. Допустим, что сферическое изображение $\tilde{F}_1$ лежит в сфере S^r и имеет в ней внутренние точки. Через точку 0 гиперповерхности $\tilde{F}_1$ проведем $E^{r+1} \supset S^r$. $F_r = E^{r+1} \cap \tilde{F}_1$ — выпуклая гиперповерхность со сферическим изображением на S^r, отличным от нуля. Кроме того, через каждую точку F_r проходит прямолинейная образующая, которая лежит в опорной гиперплоскости F_r. Но, как известно, сферическое изображение таких опорных гиперплоскостей равно нулю.

Мы доказали, что сферическое изображение $\tilde{F}_1$ лежит в S^{r-1}, и теперь ясно, что $\tilde{F}_1$ является цилиндром с $(l-r)$-мерными образующими. Если ось z_1 направлять по нормалям, близким к n_0, получается такой же результат. Из этого и следует, что образующие на поверхности F будут параллельными.

В [4] Шефель доказал: если для каждой нормали n регулярной l-мерной поверхности $j(n, X) = 0$, то F — выпуклая гиперповерхность в E^{l+1}. Обобщим этот результат на поверхности класса C^1.

Пусть $E^{l+1}(n, X)$ — подпространство, натянутое на $T(X)$ и n; $F(n, X)$ — ортогональная проекция некоторой окрестности точки X поверхности F на $E^{l+1}(n, X)$.

Теорема 4. *Если для каждой нормали n гиперповерхность $F(n, X)$ — выпуклая в точке X, то F — выпуклая гиперповерхность в E^{l+1}.*

Нормали в точке X можно разбить на три класса:

1) K_1 — нормали, которые с $F(n, X)$ лежат в различных полупространствах, определяемых $T(X)$;

2) K_2 — нормали, которые с $F(n, X)$ лежат в одном полупространстве, определяемым $T(x)$;

3) K_0 — нормали, для которых $F(n, X)$ лежит в $T(X)$.

Если $n_1, n_2 \in K_0$, то $(n_1 r) = 0$, $(n_2, r) = 0$, где r радиус-вектор поверхности F, а значит, $(\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 r) = 0$ при любом λ_1, λ_2. Этим показано, что K_0 будет подпространством.

Если единичные нормали K_0 заполняют сферу размерности меньше $n-l-2$, тогда точки $n_1 \in K_1 \cap S^{n-l-1}$, $(-n_1) \in K_2 \cap S^{n-l-1}$, где S^{n-l-1} — сфера единичных нормалей в точке X, можно соединить полуокружностью S_1, не пересекая $K_0 \cap S^{n-l-1}$. Но $K_1 \cap S^{n-l-1}$, $K_2 \cap S^{n-l-1}$ — области, поэтому на S_1 найдется точка X_0, не принадлежащая ни $K_1 \cap S^{n-l-1}$, ни $K_2 \cap S^{n-l-1}$, а значит, $K_0 \cap S^{n-l-1}$, и мы пришли к противоречию. Значит, K_0 будет подпространством размерности $n-l-1$ и для всех $n \in K_0 = E^{n-l-1}(rn) = 0$. Это значит, что окрестность точки X на F содержится в ортогональном дополнении K_0, в пространстве E^{l+1}.

Этим и доказано утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. S. Chern, R. K. Lashof. The total curvature of immersed manifolds. Amer. J. Math., 79, 1957.
2. P. Hartman, L. Nirenberg. On spherical image maps whose jacobians do not change sign. Amer. J. Math., 81, 1959.
3. S. S. Chern, N. H. Kuiper. Some theorems on the imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space. Ann. of Math., 56, 1952.
4. З. С. Шефель. О двух классах k-мерных поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве. «Сиб. матем. ж.,» т. X, № 2, 1969.
5. С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. Изд-во «Мир», 1970.
6. D. Ferus. On the type number of hypersurfaces in space of constant curvature. Math. Ann., B. 187, H. 4, 1970.
7. D. Ferus. Totally geodesic foliations. Math. Ann. B. 188, H. 4. 1970.

А. А. Борисенко. О строении гиперповерхности с нулевой мерой Хаусдорфа сферического изображения. «Укр. геометр. сб.,» вып. 12, Харьков, Изд-во ХГУ, 1970.

Поступила 17 января 1972 г.

ПРОСТРАНСТВА КОГОМОЛОГИЙ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ КОМПЛЕКСНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

В. Д. Головин

Харьков

Группы когомологий $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots)$ комплексного аналитического многообразия X с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке $\boldsymbol{F}$ целесообразно рассматривать как *топологические* векторные пространства над полем комплексных чисел. Действительно, определение групп $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ как групп когомологий Чеха содержит в себе естественный способ наделения их структурой топологического векторного пространства, поскольку А. Картан и Ж.-П. Серр показали, как следует топологизировать комплекс коцепей открытого покрытия с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке (см., например, [1]).

Далее, топологии пространств $H^k(X; \boldsymbol{F})$, определяемые с помощью комплекса коцепей открытого покрытия и соответственно с помощью комплекса бесконечно дифференцируемых внешних дифференциальных форм (при изоморфизмах Дольбо), совпадают; это доказал Ю.-Т. Сиу [2]. Наконец, имеет место теорема двойственности [3], которая не может быть даже сформулирована в достаточно общей форме, если не рассматривать группы когомологий как топологические векторные пространства.

Упомянутая теорема двойственности впервые доказана Ж.-П. Серром [4] для локально свободных пучков, а в частном случае голоморфно полного многообразия и свободного пучка — еще ранее А. Картаном и Л. Шварцем [5]; однако сильная топология в сопряженном пространстве была исследована лишь сравнительно недавно Г. Б. Лауфером [6]. Аналогичная теорема двойственности была доказана Ж.-П. Серром и в абстрактной алгебраической геометрии [7]. Дальнейший вклад был сделан А. Гротендиком, рассмотревшим произвольные когерентные алгебраические пучки на неособых проективных многообразиях [8]. Соответствующая теорема двойственности для когерентных аналитических пучков на компактных комплексных многообразиях была сформулирована Б. Мальгранжем [9] и доказана К. Суоминеном [10]. Она является частным случаем теоремы, доказанной в работе [11].

Топологические векторные пространства $H^k(X; \boldsymbol{F})$ подробно исследованы в [11]. Цель настоящей работы — изучение топологических векторных пространств $H_c^k(X; \boldsymbol{F})$ когомологий комплексного аналитического многообразия X с компактными носителями и с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке $\boldsymbol{F}$. Хотя полученные результаты аналогичны результатам работы [11], их доказательства оказались существенно более трудными.

Работа состоит из девяти параграфов. Первый параграф содержит определение *топологических* векторных пространств $H_c^k(X; \boldsymbol{F})$. Показано, что эти пространства канонически изоморфны топологическим векторным пространствам $H_c^k(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F})$, если $\boldsymbol{U}$ — локально конечное покрытие многообразия X относительно компактными, голоморфно полными открытыми множествами. § 2 содержит определение топологических векторных пространств $H_c^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$ когомологий локально конечного покрытия $\boldsymbol{M}$ многообразия X компактными множествами. Преимущество таких покрытий перед открытыми покрытиями состоит в том, что соответствующие пространства коцепей с коэффициентами в $\boldsymbol{F}$ являются сильными сопряженными к некоторым пространствам Фреше и Шварца. В § 3 показано, что топологические векторные пространства $H_c^k(X; \boldsymbol{F})$ и $H_c^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$ канонически изоморфны, если покрытие $\boldsymbol{M}$ локально конечно и состоит из компактных множеств, каждое из которых обладает фундаментальной системой голоморфно полных открытых окрестностей. Эти результаты анонсированы в заметке автора [12].

Результаты § 4, 5 основаны на исследованиях Б. Мальгранжа по делению распределений [13]. В § 4 рассмотрены топологические векторные пространства сечений с компактными носителями $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, где $\boldsymbol{E}^{p,\,q}$ — пучок ростков бесконечно дифференцируемых внешних дифференциальных форм двойной степени $(p,\ q)$. Показано, что топологические векторные пространства $H_c^q(X;\ \Omega^p \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, где Ω^p — пучок ростков голоморфных внешних дифференциальных форм степени p, канонически изоморфны соответственно пространствам $H^q\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ когомологий коцепного комплекса $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$.

Аналогично в § 5 рассмотрены топологические векторные пространства $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{p,\,q})$, где $\boldsymbol{D}^{p,\,q}$ — пучок ростков потоков двойной степени $(p,\ q)$ на X. Показано, что векторные пространства $\mathrm{Ext}^q_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^p)$ канонически изоморфны соответственно пространствам $H^q\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{p,\,*})$ когомологий коцепного комплекса $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{p,\,*})$. Пространства $\mathrm{Ext}^q_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^p)$ наделяются топологиями, индуцируемыми соответственно из пространств $H^q\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{p,\,*})$ при этих изоморфизмах.

В § 6 доказано, что топологические векторные пространства $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$, где n — комплексная размерность многообразия X, канонически изоморфны сильным сопряженным соответственно к топологическим векторным пространствам $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$.

Отсюда в § 7 получена следующая теорема двойственности: *отделимые пространства* $\overset{\frown}{\mathrm{Ext}}{}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p})$, *ассоциированные с топологическими векторными пространствами* $\mathrm{Ext}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p})$, *канонически изоморфны соответственно сильным сопряженным к отделимым пространствам* $\widetilde{H}_c^q(X;\ \Omega^p \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, *ассоциированным с топологическими векторными пространствами* $H_c^q(X;\ \Omega^p \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$. Верно также и обратное, причем $\overset{\frown}{\mathrm{Ext}}{}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p})$ есть пространства Фреше и Шварца. Эта теорема анонсирована в заметке автора [14]; в частном случае голоморфно полного многообразия она сводится к результату К. Баника и О. Станашила [15, 16].

§ 8, 9 содержат приложения теоремы двойственности. В § 8 рассмотрены локально свободные пучки; в частности, получены результаты Г. Б. Лауфера [6]. В § 9 показано, что $\mathrm{Ext}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^p) = 0$ при $p \geqslant 0,\ q \geqslant d+1$, где d — комплексная размерность носителя пучка $\boldsymbol{F}$; отсюда непосредственно следует один результат Г. Кернера [17].

Основные результаты настоящей работы были доложены автором на научной конференции сотрудников механико-математического факультета Харьковского госуниверситета (апрель 1971 г.).

§ 1. Открытые покрытия

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, счетное в бесконечности, комплексной размерности n, и $\boldsymbol{F}$ — когерентный аналитический пучок на X. По определению каждая точка многообразия X обладает голоморфно полной открытой окрестностью U, над которой может быть определен эпиморфизм пучков

$$\pi : \boldsymbol{O}^m \to \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций на X, а m — некоторое целое положительное число. Следовательно, имеет место точная последовательность комплексных векторных пространств непрерывных сечений соответствующих пучков:

$$0 \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{R}) \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^m) \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) \to 0,$$

где $\boldsymbol{R}$ — ядро эпиморфизма π.

Известно, что пространство $\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})$ всех голоморфных функций в U, наделенное обычной топологией, является пространством Фреше и Шварца (см., например, [18]). Пространство $\Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^m) = (\Gamma(U;\ \boldsymbol{O}))^m$ наделим топологией произведения, а пространство $\Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) \approx \Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^m)/\Gamma(U;\ \boldsymbol{R})$ — топологией факторпространства, причем легко показать, что последняя не зависит от выбора эпиморфизма π. Так как подпространство $\Gamma(U;\ \boldsymbol{R})$ замкнуто в $\Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^m)$ [19] то $\Gamma(U;\ \boldsymbol{F})$ — пространство Фреше и Шварца (ср. [1]).

Если U — произвольное открытое множество в X и $\boldsymbol{U} = (U_i)$ — его достаточно мелкое, локально конечное покрытие голоморфно полными открытыми множествами, то наделим пространство $\Gamma(U; \boldsymbol{F})$ слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения сужения

$$\Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) \to \Gamma(U_i;\ \boldsymbol{F}).$$

Эта топология в $\Gamma(U;\ \boldsymbol{F})$ не зависит от выбора покрытия $\boldsymbol{U}$ и является топологией пространства Фреше и Шварца.

Пусть $\boldsymbol{U} = (U_i)$ — произвольное открытое покрытие многообразия X. Пространство коцепей с компактными носителями покрытия $\boldsymbol{U}$ степени k и с коэффициентами в пучке $\boldsymbol{F}$

$$C_c^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) = \varinjlim \prod \Gamma_K(U_{i_0 \ldots i_k};\ \boldsymbol{F}),$$

где $U_{i_0 \ldots i_k} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}$, наделим топологией локально выпуклого индуктивного предела относительно фильтрующегося множества компактных подмножеств K в X. Векторное пространство когомологий с компактными носителями покрытия $\boldsymbol{U}$ степени k и с коэффициентами в $\boldsymbol{F}$

$$H_c^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) = \operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{U})/\operatorname{Im} \delta_{k-1}(\boldsymbol{U})$$

наделим топологией факторпространства, где $\delta_k(\boldsymbol{U}) : C_c^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) \to C_c^{k+1}(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})$ — кограничный оператор комплекса $C_c^*(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})$, очевидно, непрерывный.

Наконец, пространство $H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$ когомологий Чеха с компактными носителями многообразия X степени k и с коэффициентами в $\boldsymbol{F}$ наделим топологией локально выпуклого индуктивного предела

$$H_c^k(X;\ \boldsymbol{F}) = \varinjlim H_c^k(U;\ \boldsymbol{F})$$

относительно фильтрующегося множества классов попарно эквивалентных (т. е. вписанных друг в друга) открытых покрытий.

Открытое покрытие многообразия X будем называть *адаптированным*, если это покрытие локально конечно и состоит из относительно компактных, голоморфно полных множеств. Для адаптированного покрытия $\boldsymbol{U}$ пространство коцепей $C_c^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})$ канонически отождествимо с топологической прямой суммой пространств $\Gamma(U_{i_0 \ldots i_k};\ \boldsymbol{F})$.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{U} = (U_i)$ и $\boldsymbol{V} = (V_j)$ — адаптированные открытые покрытия многообразия X. Тогда при каждом $k = 0, 1, \ldots$ топологические векторные пространства $H_c^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})$ и $H_c^k(\boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F})$ канонически изоморфны, а кограничные операторы $\delta_k(\boldsymbol{U})$ и $\delta_k(\boldsymbol{V})$ могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.*

Доказательство. Для произвольных целых положительных p и q определим векторное пространство коцепей

$$C_c^{p,\,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}) = \sum \Gamma\,(U_{i_0 \ldots i_p} \cap V_{j_0 \ldots j_q};\ \boldsymbol{F})$$

и наделим его топологией прямой суммы. Так как при любом фиксированном i (соответственно j) пересечение $U_i \cap V_j$ не пусто лишь для конечного числа значений j (соответственно i), то естественным образом можно определить инъективные отображения

$$\begin{aligned} &C_c^p(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) \to C_c^{p,\,0}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}),\\ &C_c^q(\boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}) \to C_c^{0,\,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}) \end{aligned} \tag{2}$$

и кограничные операторы

$$\begin{aligned} &C_c^{p,\,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}) \to C_c^{p+1,\,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}),\\ &C_c^{p,\,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}) \to C_c^{p,\,q+1}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V};\ \boldsymbol{F}). \end{aligned} \tag{3}$$

Все эти отображения, очевидно, непрерывны.

Отображения сужения

$$\Gamma(U_{i_0 \ldots i_p};\ \boldsymbol{F}) \to \sum_j \Gamma\,(U_{i_0 \ldots i_p} \cap V_j;\ \boldsymbol{F}),$$

$$\Gamma(V_{j_0 \ldots j_q};\ \boldsymbol{F}) \to \sum_i \Gamma\,(U_i \cap V_{j_0 \ldots j_q};\ \boldsymbol{F})$$

представляют собой мономорфизмы пространств Фреше. Следовательно, мономорфизмами являются и отображения (2).

Далее, поскольку множество $V_{j_0 \ldots j_q}$ (соответственно $U_{i_0 \ldots i_p}$) голоморфно полно и его покрытие множествами $U_i \cap V_{j_0 \ldots j_q}$ (соответственно множествами $U_{i_0 \ldots i_p} \cap V_j$) конечно, то кограничные операторы

$$C_c^p (U \cap V_{j_0 \ldots j_q};\, F) \to C_c^{p+1} (U \cap V_{j_0 \ldots j_q};\, F),$$
$$C_c^q (U_{i_0 \ldots i_p} \cap V;\, F) \to C_c^{q+1} (U_{i_0 \ldots i_p} \cap V;\, F),$$

где $U \cap V_{j_0 \ldots j_q} = (U_i \cap V_{j_0 \ldots j_q})_i$, $U_{i_0 \ldots i_p} \cap V = (U_{i_0 \ldots i_p} \cap V_j)_j$, имеют замкнутые образы и потому являются гомоморфизмами пространств Фреше. Отсюда следует, что и отображения (3) — гомоморфизмы.

Таким образом, в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Gamma_c(X;\, F) & \to & C_c^0(V;\, F) & \to & C_c^1(V;\, F) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C_c^0(U;\, F) & \to & C_c^{0,0}(U, V;\, F) & \to & C_c^{0,1}(U, V;\, F) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C_c^1(U,\, F) & \to & C_c^{1,0}(U, V;\, F) & \to & C_c^{1,1}(U, V;\, F) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

все строки и столбцы, начиная со вторых, точны и входящие в них отображения — гомоморфизмы топологических векторных пространств. Справедливость утверждений теоремы вытекает теперь из следующей леммы (ср. [12]).

Лемма 1. *Пусть в коммутативной диаграмме топологических векторных пространств и непрерывных линейных отображений*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & B^0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d] & B^1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A^0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"'] & C^{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & C^{0,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A^1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"'] & C^{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & C^{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

все строки и столбцы, начиная со вторых, точны и входящие в них отображения являются гомоморфизмами. Тогда первый столбец и первая строка определяют соответственно коцепные комплексы A^* и B^*, для которых при каждом $k = 0, 1, \ldots$ топологические векторные пространства когомологий $H^k A^*$ и $H^k B^*$ канонически изоморфны, а кограничные операторы α_k и β_k могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.

Доказательство. Все утверждения леммы проверяются непосредственно с помощью диаграммного поиска, аналогичного доказательству А. Вейля теоремы де Рама (ср. [20]).

Следствие. *Если U — адаптированное открытое покрытие многообразия X, то каноническое отображение*

$$H_c^k(U;\ F) \to H_c^k(X;\ F)$$

при каждом $k = 0, 1, \ldots$ является изоморфизмом топологических векторных пространств.

Доказательство. Так как многообразие X счетно в бесконечности, то в каждое его открытое покрытие можно вписать адаптированное покрытие. С другой стороны, согласно теореме 1, для каждого адаптированного покрытия V, вписанного в U, каноническое отображение

$$H_c^k(U;\ F) \to H_c^k(V;\ F)$$

есть изоморфизм топологических векторных пространств.

§ 2. Замкнутые покрытия

Пусть M — компактное множество в многообразии X. Пространство $\Gamma(M;\ F)$ сечений пучка F над M наделим топологией локально выпуклого индуктивного предела

$$\Gamma(M;\ F) = \varinjlim \Gamma(U;\ F)$$

относительно фильтрующегося множества открытых окрестностей U множества M. Если открытое множество U относительно компактно и его замыкание $\overline{U}$ содержится в открытом множестве U', то отображение сужения

$$\Gamma(U';\ F) \to \Gamma(U;\ F)$$

вполне непрерывно (ср. [1]). Отсюда вытекает, что пространство $\Gamma(M;\ F)$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца (ср. [18]; это следует также из результатов, содержащихся в [21] и [22]).

Для произвольного локально конечного прикрытия $M = (M_i)$ многообразия X компактными множествами наделим пространство коцепей с компактными носителями и с коэффициентами в F

$$C_c^k(M;\ F) = \sum \Gamma(M_{i_0 \ldots i_k};\ F),$$

где $M_{i_0 \ldots i_k} = M_{i_0} \cap \ldots \cap M_{i_k}$, топологией прямой суммы. Ясно, что это также топология сильного сопряженного к некоторому пространству Фреше и Шварца. Пространство $H_c^k(M;\ F)$ когомологий с компактными носителями покрытия M степени k и с коэффициентами в F наделим топологией факторпространства $\operatorname{Ker} \delta_k(M)/\operatorname{Im} \delta_{k-1}(M)$, где $\delta_k(M) : C_c^k(M;\ F) \to C_c^{k+1}(M;\ F)$ — кограничный оператор комплекса $C_c^*(M;\ F)$, очевидно, непрерывный.

Замкнутое покрытие многообразия X будем называть *адаптированным*, если оно локально конечно и состоит из компактных множеств, каждое из которых обладает фундаментальной системой голоморфно полных открытых окрестностей.

Теорема 2. *Пусть* $M=(M_i)$ *и* $N=(N_j)$ — *адаптированные замкнутые покрытия многообразия* X. *Тогда при каждом* $k=0, 1, \ldots$ *топологические векторные пространства когомологий* $H_c^k(M; F)$ *и* $H_c^k(N; F)$ *канонически изоморфны, а кограничные операторы* $\delta_k(M)$ *и* $\delta_k(N)$ *могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.*

Доказательство. При любых целых положительных p и q наделим векторное пространство

$$C_c^{p,q}(M, N; F)=\sum \Gamma(M_{i_0\ldots i_p}\cap N_{j_0\ldots j_q}; F)$$

топологией прямой суммы. Очевидным образом определяются в силу адаптированности покрытий M и N инъективные отображения

$$C_c^p(M; F)\to C_c^{p,0}(M, N; F),$$

$$C_c^q(N; F)\to C_c^{0,q}(M, N; F)$$

и кограничные операторы

$$\delta'_{p,q}(M, N): C_c^{p,q}(M, N; F)\to C_c^{p+1,q}(M, N; F),$$

$$\delta''_{p,q}(M, N): C_c^{p,q}(M, N; F)\to C_c^{p,q+1}(M, N; F),$$

которые имеют замкнутые образы и потому являются гомоморфизмами сильных сопряженных к пространствам Фреше и Шварца. Таким образом, в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \Gamma_c(X; F) & \to & C_c^0(N; F) & \to & C_c^1(N; F) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & C_c^0(M; F) & \to & C_c^{0,0}(M, N; F) & \to & C_c^{0,1}(M, N; F) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & C_c^1(M; F) & \to & C_c^{1,0}(M, N; F) & \to & C_c^{1,1}(M, N; F) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

все строки и столбцы, начиная со вторых, точны и входящие в них отображения — гомоморфизмы топологических векторных пространств. Для завершения доказательства достаточно теперь воспользоваться леммой 1.

Лемма 2. *Пусть* M — *произвольное локально конечное покрытие многообразия* X *компактными множествами. Тогда ядро* $\operatorname{Ker}\delta_k(M)$ *кограничного оператора* $\delta_k(M)$ *является локально выпуклым индуктивным пределом ядер* $\operatorname{Ker}\delta_k(U)$ *кограничных операторов* $\delta_k(U)$ *относительно фильтрующегося множества локально конечных открытых покрытий* U, *в которые вписано* M.

Доказательство. Пространство $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$ алгебраически отождествимо с индуктивным пределом пространств $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{U})$, а так как канонические отображения

$$\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{U}) \to \operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$$

непрерывны, топология пространства $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$ мажорируется топологией локально выпуклого индуктивного предела пространств $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{U})$.

Пространство $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$ — замкнутое подпространство в $C_c^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$, а последнее совпадает с сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца. Пусть M — компактное множество в X и $C_M^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$ — подпространство в $C_c^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$, состоящее из коцепей с носителями в M. Тогда пространство $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$ алгебраически отождествимо с индуктивным пределом пространств

$$Z_M^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F}) = C_M^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F}) \cap \operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$$

относительно фильтрующегося по включению множества компактных подмножеств M в X. Поскольку локально выпуклый индуктивный предел пространств $Z_M^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца, он и топологически отождествим с $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$.

С другой стороны, пространство $Z_M^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$ алгебраически отождествимо с индуктивным пределом пространств

$$Z_M^k(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}) = C_M^k(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}) \cap \operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{U})$$

относительно фильтрующегося множества локально конечных открытых покрытий $\boldsymbol{U}$, в которые вписано $\boldsymbol{M}$. Так как локально выпуклый индуктивный предел пространств $Z_M^k(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F})$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца, то пространство $Z_M^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$ отождествимо с индуктивным пределом пространств $Z_M^k(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F})$ топологически.

Итак, топология пространства $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$ является сильнейшей из локально выпуклых топологий, для которых непрерывны канонические отображения

$$Z_M^k(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}) \to \operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})$$

для произвольного компактного множества M в X и для любого открытого покрытия $\boldsymbol{U}$, в которое вписано $\boldsymbol{M}$. Эта топология мажорирует топологию локально выпуклого индуктивного предела пространств $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{U})$, и, как следует из предыдущего, они совпадают. Лемма доказана.

Пусть $\boldsymbol{M}$ — адаптированное замкнутое покрытие многообразия X. Из леммы 2 вытекает, что топологическое векторное пространство когомологий $H_c^k(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})$ отождествимо с локально выпуклым индуктивным пределом пространств $H_c^k(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F})$ относительно фильтрующегося множества адаптированных открытых покрытий $\boldsymbol{U}$, в которые вписано $\boldsymbol{M}$. Согласно теореме 1, каноническое отображение

$$H_c^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) \to H_c^k(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{F})$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств. Еще раз воспользовавшись теоремой 1, получаем первое утверждение следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $\boldsymbol{U}$ *и* $\boldsymbol{M}$ *— адаптированные (соответственно открытое и замкнутое) покрытия многообразия* X. *Тогда при каждом* $k = 0, 1, \ldots$ *топологические векторные пространства когомологий* $H_c^k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F})$ *и* $H_c^k(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{F})$ *канонически изоморфны, а кограничные операторы* $\delta_k(\boldsymbol{U})$ и $\delta_k(\boldsymbol{M})$ *могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.*

Следствие. *Если* $\boldsymbol{M}$ *— адаптированное замкнутое покрытие многообразия* X, *то каноническое отображение*

$$H_c^k(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{F}) \to H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Пусть U и M — соответственно открытое и замкнутое множества в X. Векторное пространство сечений пучка $\boldsymbol{F}$ над $U \cap M$ наделим топологией проективного предела пространств $\Gamma(K \cap M; \boldsymbol{F})$ относительно фильтрующегося множества компактных подмножеств K в U. В частных случаях, когда M компактно и содержится в U или когда M содержит U, эта топология совпадает с определенной ранее соответственно в $\Gamma(M; \boldsymbol{F})$ и $\Gamma(U; \boldsymbol{F})$.

Достаточно рассмотреть последний случай. Очевидно, отображение сужения

$$\Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) \to \Gamma(K;\ \boldsymbol{F}) \tag{4}$$

непрерывно для каждого компактного множества K в U.

Пусть $U = (U_i)$ — локально конечное покрытие множества U относительно компактными открытыми множествами U_i, замыкания которых $\overline{U}_i$ содержатся в U. Если T — топология в $\Gamma(U; \boldsymbol{F})$, для которой все отображения (4) непрерывны, то в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma(U_i;\ \boldsymbol{F}) \\
 & \Gamma(\overline{U}_i;\ \boldsymbol{F}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

горизонтальная стрелка непрерывна при каждом i. Так как топология пространства $\Gamma(U; \boldsymbol{F})$ является по определению слабейшей из топологий, обладающих этим свойством, то она мажорируется топологией T и потому является слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения (4).

Пусть U и M — адаптированные (соответственно открытое и замкнутое) покрытия многообразия X. Для целых $p,\ q \geqslant 0$ пространство коцепей с компактными носителями

$$C_c^{p,q}(U,\ M;\ F) = \sum \Gamma(U_{i_0 \ldots i_p} \cap M_{j_0 \ldots j_q};\ F)$$

наделим топологией прямой суммы. Тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & & \Gamma_c(X;\ F) & \to & C_c^0(M;\ F) & \to & C_c^1(M;\ F) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & & C_c^0(U;\ F) & \to & C_c^{0,0}(U, M; F) & \to & C_c^{0,1}(U, M; F) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & & C_c^1(U;\ F) & \to & C_c^{1,0}(U, M; F) & \to & C_c^{1,1}(U, M; F) \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

все отображения непрерывны, а все строки и столбцы, начиная со вторых, точны. Оба утверждения теоремы 3 будут следовать из леммы 1, если покажем, что инъективные отображения

$$\begin{gathered} C_c^p(U;\ F) \to C_c^{p,0}(U,\ M;\ F), \\ C_c^q(M;\ F) \to C_c^{0,q}(U,\ M;\ F) \end{gathered} \tag{5}$$

и кограничные операторы

$$\begin{gathered} C_c^{p,q}(U,\ M;\ F) \to C_c^{p+1,q}(U,\ M;\ F), \\ C_c^{p,q}(U,\ M;\ F) \to C_c^{p,q+1}(U,\ M;\ F) \end{gathered} \tag{6}$$

есть гомоморфизмы топологических векторных пространств.

Лемма 3. *Пусть U и M — соответственно открытое и замкнутое адаптированные покрытия многообразия X. Тогда для любых целых $p,\ q \geqslant 0$ пространство коцепей $C_c^{p,q}(U,\ M;\ F)$ является проективным пределом пространств $C_c^{p,q}(N,\ M;\ F)$ относительно фильтрующегося множества адаптированных замкнутых покрытий N, вписанных в U.*

Доказательство. Поскольку непосредственно очевидно, что пространство $C_c^{p,q}(U,\ M;\ F)$ алгебраически отождествимо с проективным пределом пространств $C_c^{p,q}(N,\ M;\ F)$, достаточно доказать, что топология в $C_c^{p,q}(U,\ M;\ F)$ — слабейшая из топологий, для которых непрерывны отображения сужения

$$C_c^{p,q}(U,\ M;\ F) \to C_c^{p,q}(N,\ M;\ F), \tag{7}$$

где N — произвольное замкнутое адаптированное покрытие, вписанное в U. Так как покрытие U не более чем счетно, то каждая окрестность нуля V в $C_c^{p,q}(U,\ M;\ F)$ содержит сумму окрестностей нуля $V_{i_0\dots i_p,\, j_0\dots j_q}$ из соответствующих пространств $\Gamma(U_{i_0\dots i_p} \cap M_{j_0\dots j_q}; F)$, топологической прямой суммой которых является $C_c^{p,\,q}(U, M; F)$. По самому определению топологии в $\Gamma(U_{i_0\dots i_p} \cap M_{j_0\dots j_q}; F)$ найдется адаптированное замкнутое покрытие $N = (N_i)$, вписанное в U, такое что при любых $i_0, \dots i_p; j_0, \dots j_q$ окрестность $V_{i_0\dots i_p,\, j_0\dots j_q}$ — прообраз некоторой окрестности нуля $W_{i_0\dots i_p,\, j_0\dots j_q}$ из пространства $\Gamma(N_{i_0\dots i_p} \cap M_{j_0\dots j_q}; F)$ относительно отображения сужения

$$\Gamma(U_{i_0\dots i_p} \cap M_{i_0\dots j_q}; F) \to \Gamma(N_{i_0\dots i_p} \cap M_{j_0\dots j_q}; F).$$

Следовательно, окрестность V содержит прообраз окрестности нуля $W = \sum W_{i_0\dots i_p,\, j_0\dots j_q}$ пространства $C_c^{p,\,q}(N, M; F)$ относительно отображения (7). Лемма доказана.

Следствие. *Если U — адаптированное открытое покрытие многообразия X, то пространство $C_c^p(U; F)$ является проективным пределом пространств $C_c^p(N; F)$ относительно фильтрующегося множества замкнутых адаптированных покрытий N, вписанных в U.*

Доказательство. Пространство $C_c^p(U; F)$ есть подпространство в $C_c^{p,\,0}(U, M; F)$, где M — произвольное покрытие, в которое вписано U. Отсюда следует утверждение.

Обозначим через $\delta'_{p,\,q}(U, M)$ и $\delta''_{p,\,q}(U, M)$ кограничные операторы (6) соответственно комплексов $C_c^{*,\,q}(U, M; F)$ и $C_c^{p,\,*}(U, M; F)$. Так как покрытия U и M предполагаются адаптированными, то комплексы $C_c^{*,\,q}(U, M; F)$, $C_c^{p,\,*}(U, M; F)$ ацикличны, т. е. $\operatorname{Im} \delta'_{p,\,q}(U, M) = \operatorname{Ker} \delta'_{p+1,\,q}(U, M)$ и $\operatorname{Im} \delta''_{p,\,q}(U, M) = \operatorname{Ker} \delta''_{p,\,q+1}(U, M)$. Аналогично для замкнутого адаптированного покрытия N, вписанного в U, $\operatorname{Im} \delta'_{p,\,q}(N, M) = \operatorname{Ker} \delta'_{p+1,\,q}(N, M)$ и $\operatorname{Im} \delta''_{p,\,q}(N, M) = \operatorname{Ker} \delta''_{p,\,q+1}(N, M)$. Из леммы 3 следует, что пространства $\operatorname{Ker} \delta'_{p,\,q}(U, M)$ и $\operatorname{Ker} \delta''_{p,\,q}(U, M)$ есть проективные пределы соответственно пространств $\operatorname{Ker} \delta'_{p,\,q}(N, M)$ и $\operatorname{Ker} \delta''_{p,\,q}(N, M)$. Тем самым доказана следующая лемма

Лемма 4. *Если U и M — соответственно открытое и замкнутое адаптированные покрытия многообразия X, то пространства $\operatorname{Im} \delta'_{p,\,q}(U, M)$ и $\operatorname{Im} \delta''_{p,\,q}(U, M)$ являются проективными пределами соответственно пространств $\operatorname{Im} \delta'_{p,\,q}(N, M)$ и $\operatorname{Im} \delta''_{p,\,q}(N, M)$ относительно фильтрующегося множества адаптированных замкнутых покрытий N, вписанных в U.*

Лемма 5. *Если U и M — адаптированные (соответственно открытое и замкнутое) покрытия многообразия X, то канонические инъективные отображения* (5) *являются мономорфизмами топологических векторных пространств.*

Доказательство. Для каждого адаптированного замкнутого покрытия N, вписанного в U, имеют место изоморфизмы топологических векторных пространств:

$$C^p_c(N;\ F) \approx \operatorname{Ker} \delta''_{p,\,0}(N,\ M),$$
$$C^q_c(M;\ F) \approx \operatorname{Ker} \delta'_{0,\,q}(N,\ M).$$

С другой стороны, проективными пределами пространств $C^p_c(N; F)$, $\operatorname{Ker} \delta''_{p,\,0}(N, M)$, $\operatorname{Ker} \delta'_{0,\,q}(N, M)$ относительно фильтрующегося множества адаптированных замкнутых покрытий N, вписанных в U, являются соответственно пространства $C^p_c(U; F)$, $\operatorname{Ker} \delta''_{p,\,0}(U, M)$, $\operatorname{Ker} \delta'_{0,\,q}(U, M)$. Лемма доказана.

В силу теоремы 1 достаточно доказать теорему 3 для какого-нибудь одного покрытия U. До сих пор покрытие U было произвольным. Выберем его теперь некоторым специальным образом.

Каждая точка x в X имеет открытую окрестность U, обладающую тем свойством, что для каждого сечения $f \in \Gamma(U; F)$ из $f_x = 0$ следует $f = 0$. Действительно, по свойству модулей голоморфных функций [19] $f \mid V = 0$ для каждой окрестности V точки x с $\overline{V} \subset U$.

Пусть $N = (N_i)$ — произвольное замкнутое адаптированное покрытие многообразия X. Для каждого пересечения $N_{i_0 \ldots i_p} \cap M_{j_0 \ldots j_q}$ выберем конечное покрытие окрестностями, о которых говорилось выше, и обозначим объединение элементов этого покрытия через $V_{i_0 \ldots i_p,\, j_0 \ldots j_q}$. При каждом i выберем теперь относительно компактную, голоморфно полную открытую окрестность U_i множества N_i так, чтобы имели место включения

$$U_{i_0 \ldots i_p} \cap M_{j_0 \ldots j_q} \subset V_{i_0 \ldots i_p,\, j_0 \ldots j_q}$$

для любых $i_0, \ldots i_p;\ j_0, \ldots j_q$. Множества U_i образуют адаптированное открытое покрытие многообразия X; обозначим это покрытие через U. Так как покрытия M и N локально конечны, каждое U_i должно удовлетворять лишь конечному числу соотношений и потому покрытие U существует.

По самому выбору покрытия U отображения сужения

$$C^{p,\,q}_c(U,\ M;\ F) \to C^{p,\,q}_c(N,\ M;\ F)$$

инъективны при любых $p,\ q \geqslant 0$. До конца этого параграфа будем считать, что покрытие U выбрано таким специальным образом.

Лемма 6. *Пусть U и M — адаптированные (соответственно открытое и замкнутое) покрытия многообразия X. Тогда при любых $p,\ q \geqslant 0$ пространства*

$$C^{p,\,q}_c(U,\ M;\ F)/\operatorname{Ker} \delta'_{p,\,q}(U,\ M) \tag{8}$$

и

$$C^{p,\,q}_c(U,\ M;\ F)/\operatorname{Ker} \delta''_{p,\,q}(U,\ M)$$

являются проективными пределами соответственно пространств

$$C^{p,\,q}_c(N,\ M;\ F)/\operatorname{Ker} \delta'_{p,\,q}(N,\ M) \tag{9}$$

а

$$C_c^{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M};\ F)/\operatorname{Ker}\delta''_{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M})$$

относительно фильтрующегося множества адаптированных замкнутых покрытий $\boldsymbol{N}$, *вписанных в* $\boldsymbol{U}$.

Доказательство. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} C_c^{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M};\ F)/\operatorname{Ker}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M}) & \to & \operatorname{Im}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_c^{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M};\ F)/\operatorname{Ker}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M}) & \to & \operatorname{Im}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}) \end{array} \qquad (10)$$

горизонтальные стрелки являются изоморфизмами векторных пространств, каким бы ни было адаптированное замкнутое покрытие $\boldsymbol{N}$, вписанное в $\boldsymbol{U}$. С другой стороны, по лемме 4 пространство $\operatorname{Im}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M})$ отождествимо с проективным пределом пространств $\operatorname{Im}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M})$.

Следовательно, пространство (8) алгебраически отождествимо с проективным пределом пространств (9). Пусть $\dot{V}$ — окрестность нуля в пространстве (8), являющаяся каноническим образом окрестности нуля V пространства $C_c^{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M};\ F)$. Тогда, согласно лемме 3, существует такое адаптированное замкнутое покрытие $\boldsymbol{N}$, вписанное в $\boldsymbol{U}$, что отображение

$$C_c^{p+1,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M};\ U)\to C_c^{p+1,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M};\ F)$$

инъективно, а окрестность V содержит прообраз некоторой окрестности нуля W пространства $C_c^{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M};\ F)$ относительно отображения

$$C_c^{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M};\ F)\to C_c^{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M};\ F).$$

В таком случае отображение
$C_c^{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M};\ F)/\operatorname{Ker}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M})\to C_c^{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M};\ F)/\operatorname{Ker}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M})$ также инъективно и потому окрестность $\dot{V}$ содержит прообраз относительно этого отображения окрестности нуля $\dot{W}$ пространства (9). Тем самым доказано, что топологические векторные пространства (8) и $\varprojlim C_c^{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M};\ F)/\operatorname{Ker}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M})$ канонически изоморфны. Аналогично доказывается второе утверждение.

Лемма 7. *Если* $\boldsymbol{U}$ *и* $\boldsymbol{M}$ — *адаптированные (соответственно открытое и замкнутое) покрытия многообразия* X, *то кограничные операторы* $\delta'_{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M})$ *и* $\delta''_{p,q}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{M})$ *являются гомоморфизмами топологических векторных пространств.*

Доказательство. Если $\boldsymbol{N}$ — произвольное адаптированное замкнутое покрытие, вписанное в $\boldsymbol{U}$, то подпространство $\operatorname{Im}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M}) = \operatorname{Ker}\delta'_{p+1,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M})$ замкнуто в $C_c^{p+1,q}(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{M};F)$ и является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца.

Следовательно, каноническое отображение

$$C_c^{p,q}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})/\operatorname{Ker}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M}) \to \operatorname{Im}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M})$$

есть изоморфизм топологических векторных пространств. Переходя в этих изоморфизмах к проективному пределу по фильтрующемуся множеству покрытий $\boldsymbol{N}$, получаем в силу лемм 4 и 6 канонический изоморфизм топологических векторных пространств

$$C_c^{p,q}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{M}; \boldsymbol{F})/\operatorname{Ker}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{M}) \text{ и } \operatorname{Im}\delta'_{p,q}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{M}).$$

Другими словами, доказано, что кограничный оператор $\delta'_{p,q}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{M})$ является гомоморфизмом. Аналогично доказывается, что гомоморфизмом является кограничный оператор $\delta''_{p,q}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{M})$.

§ 4. Дифференциальные формы

Пусть $\boldsymbol{E}^{p,q}$ для любых целых $p, q \geqslant 0$ — пучок ростков бесконечно дифференцируемых внешних дифференциальных форм двойной степени (p, q) на многообразии X. Каждая точка многообразия X обладает открытой окрестностью U, над которой при некотором целом положительном m определен эпиморфизм пучков $\pi: \boldsymbol{O}^m \to \boldsymbol{F}$, и, следовательно, имеет место точная последовательность

$$0 \to \boldsymbol{E}^{p,q}\boldsymbol{R} \to (\boldsymbol{E}^{p,q})^m \to \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F} \to 0,$$

где $\boldsymbol{R} = \operatorname{Ker}\pi$.

Так как $\boldsymbol{E}^{p,q}\boldsymbol{R}$ — тонкий пучок, то эпиморфизм π индуцирует изоморфизм

$$\Gamma(U; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \approx \Gamma(U; (\boldsymbol{E}^{p,q})^m)/\Gamma(U; \boldsymbol{E}^{p,q}\boldsymbol{R}).$$

Векторное пространство $\Gamma(U; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ наделим топологией индуцируемой при этом изоморфизме обычной топологией пространства $\Gamma(U; (\boldsymbol{E}^{p,q})^m) = (\Gamma(U; \boldsymbol{E}^{p,q}))^m$. Эта топология в $\Gamma(U; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ не зависит на самом деле от выбора эпиморфизма π. Так как подпространство $\Gamma(U; \boldsymbol{E}^{p,q}\boldsymbol{R})$ замкнуто в $\Gamma(U; (\boldsymbol{E}^{p,q})^m)$ (см. [13]), то $\Gamma(U; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ есть пространство Фреше и Шварца.

Пусть $\boldsymbol{U}$ — достаточно мелкое, локально конечное покрытие многообразия X открытыми множествами. Пространство $\Gamma(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ наделим слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения сужения

$$\Gamma(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \to \Gamma(U; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \, (U \in \boldsymbol{U}).$$

Эта топология в $\Gamma(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ не зависит от выбора покрытия $\boldsymbol{U}$ и является топологией пространства Фреше и Шварца.

Для каждого компактного множества K в X наделим векторное пространство $\Gamma_K(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ сечений пучка $\boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}$ с носителями в K топологией, индуцированной из $\Gamma(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$.

Векторное пространство $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ сечений с компактными носителями наделим топологией локально выпуклого индуктивного предела пространств $\Gamma_K(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ относительно фильтрующегося множества компактных подмножеств K в X. Пространство $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ есть, таким образом, строгий индуктивный предел пространств Фреше и Шварца; в частности, оно является пространством Монтеля и потому рефлексивно.

При фиксированном p рассмотрим комплекс $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ топологических векторных пространств $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ $(q=0,$ $1,\ \ldots)$ с непрерывными когра́ничными операторами

$$d_q'' : \Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}) \to \Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q+1}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}),$$

индуцированными внешним дифференциалом

$$d'' : \boldsymbol{E}^{p,\,q} \to \boldsymbol{E}^{p,\,q+1}$$

(точнее, гомоморфизмом пучков $d''\otimes 1$). Векторное пространство

$$H^q\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}) = \operatorname{Ker} d_q''/\operatorname{Im} d_{q-1}''$$

когомологий комплекса $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ наделим топологией факторпространства.

Через Ω^p будем обозначать при каждом целом положительном p пучок ростков голоморфных внешних дифференциальных форм степени p на многообразии X.

Лемма 8. *Для любого (не обязательно когерентного) аналитического пучка* $\boldsymbol{A}$ *на* X *последовательность пучков и их гомоморфизмов*

$$0 \to \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E}^{p,\,0}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{A} \xrightarrow{d''\otimes 1} \boldsymbol{E}^{p,\,1}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{A} \to \cdots$$

точна.

Доказательство. По лемме Дольбо — Гротендика точна последовательность

$$0 \to \Omega^p \to \boldsymbol{E}^{p,\,0} \xrightarrow{d''} \boldsymbol{E}^{p,\,1} \to \cdots$$

Иначе говоря, при каждом $q=0,\ 1,\ \ldots$ точна последовательность

$$0 \to \boldsymbol{Z}^{p,\,q} \to \boldsymbol{E}^{p,\,q} \to \boldsymbol{Z}^{p,\,q+1} \to 0,$$

где $\boldsymbol{Z}^{p,\,q}$ — ядро внешнего дифференциала $d'' : \boldsymbol{E}^{p,\,q} \to \boldsymbol{E}^{p,\,q+1}$. Отсюда для каждой точки x на X и любого $k=0,\ 1,\ \ldots$ получаем точную последовательность $\boldsymbol{O}_x$-модулей

$$\operatorname{Tor}_{k+1}^{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{Z}_x^{p,\,q+1},\ \boldsymbol{A}_x) \to \operatorname{Tor}_k^{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{Z}_x^{p,\,q},\ \boldsymbol{A}_x) \to \operatorname{Tor}_k^{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{E}_x^{p,\,q},\ \boldsymbol{A}_x).$$

Так как $\boldsymbol{E}_x^{p,\,q}$ является плоским $\boldsymbol{O}_x$-модулем [13],

$$\operatorname{Tor}_k^{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{E}_x^{p,\,q},\ \boldsymbol{A}_x) = 0\ \ (k \geqslant 1).$$

С другой стороны, $Z^{p,n} = E^{p,n}$, поэтому нисходящая индукция по q дает

$$\operatorname{Tor}_k^{O_x}(Z_x^{p,q},\ A_x) = 0 \quad (k \geqslant 1).$$

Следовательно, при каждом $q = 0, 1, \ldots$ последовательность

$$0 \to Z^{p,q} \otimes_O A \to E^{p,q} \otimes_O A \to Z^{p,q+1} \otimes_O A \to 0$$

точна. Лемма доказана.

Теорема 4. *Если U — адаптированное открытое покрытие многообразия X, то при каждом $q = 0, 1, \ldots$ топологические векторные пространства $H_c^q(U;\ \Omega^p \otimes_O F)$ и $H^q\Gamma_c(X;\ E^{p,*} \otimes_O F)$ канонически изоморфны, а кограничные операторы $\delta_q(U)$ и d_q'' соответственно комплексов $C_c^*(U;\ \Omega^p \otimes_O F)$ и $\Gamma_c(X;\ E^{p,*} \otimes_O F)$ могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.*

Доказательство. Для целых положительных k, p, q определим пространство

$$C_c^k(U;\ E^{p,q} \otimes_O F) = \sum \Gamma(U_{i_0 \ldots i_k};\ E^{p,q} \otimes_O F)$$

коцепей покрытия U с компактными носителями и с коэффициентами в пучке $E^{p,q} \otimes_O F$. Наделим это пространство топологией прямой суммы. Тогда кограничные операторы

$$\delta_k : C_c^k(U;\ E^{p,q} \otimes_O F) \to C_c^{k+1}(U;\ E^{p,q} \otimes_O F),$$

$$d_q'' : C_c^k(U;\ E^{p,q} \otimes_O F) \to C_c^k(U;\ E^{p,q+1} \otimes_O F)$$

непрерывны. Покажем, что они являются гомоморфизмами топологических векторных пространств.

Действительно, если $f \in C_c^{k+1}(U;\ E^{p,q} \otimes_O F)$ и $\delta_{k+1} f = 0$, то для любого разбиения единицы (e_i), подчиненного покрытию U и состоящего из бесконечно дифференцируемых функций, формулой

$$(s_{k+1} f)_{i_0 \ldots i_k} = \sum_i e_i f_{ii_0 \ldots i_k}$$

определяется непрерывное линейное отображение

$$s_{k+1} : \operatorname{Ker} \delta_{k+1} \to C_c^k(U;\ E^{p,q} \otimes_O F),$$

для которого $\delta_k s_{k+1} f = f$. Тем самым доказано, что кограничный оператор δ_k является гомоморфизмом пространства $C_c^k(U;\ E^{p,q} \otimes_O F)$ на пространство $\operatorname{Ker} \delta_{k+1}$. С помощью аналогичного рассуждения можно доказать, что каноническое отображение

$$\Gamma_c(X;\ E^{p,q} \otimes_O F) \to C_c^0(U;\ E^{p,q} \otimes_O F)$$

является мономорфизмом.

Далее, для любых $i_0, \ldots i_k$ отображение

$$d'' : \Gamma(U_{i_0 \ldots i_k};\ E^{p,q} \otimes_O F) \to \Gamma(U_{i_0 \ldots i_k};\ E^{p,q+1} \otimes_O F)$$

имеет замкнутый образ и потому является гомоморфизмом пространств Фреше. Отсюда следует, что кограничный оператор d_q'' комплекса $C_c^k(U;\ E^{p,*}\otimes_O F)$ — гомоморфизм топологических векторных пространств. В силу аналогичных соображений каноническое инъективное отображение

$$C_c^k(U;\ \Omega^p\otimes_O F)\to C_c^k(U;\ E^{p,0}\otimes_O F)$$

есть мономорфизм топологических векторных пространств.

Итак, в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \Gamma_c(X; & \Omega^p\otimes_O F) \to & \Gamma_c(X; & E^{p,0}\otimes_O F) \to & \Gamma_c(X; & E^{p,1}\otimes_O F)\to\cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & C_c^0(U; & \Omega^p\otimes_O F) \to & C_c^0(U; & E^{p,0}\otimes_O F) \to & C_c^0(U; & E^{p,1}\otimes_O F)\to\cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & C_c^1(U; & \Omega^p\otimes_O F) \to & C_c^1(U; & E^{p,0}\otimes_O F) \to & C_c^1(U; & E^{p,1}\otimes_O F)\to\cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

все строки и столбцы, начиная со вторых, точны и входящие в них отображения являются гомоморфизмами топологических векторных пространств. Таким образом, доказательство завершается применением леммы 1.

Следствие 1. *При любых целых положительных p и q топологические векторные пространства $H_c^q(X;\ \Omega^p\otimes_O F)$ и $H^q\Gamma_c(X;\ E^{p,*}\otimes_O F)$ канонически изоморфны.*

Следствие 2. *Нижеследующие утверждения равносильны:*

а) *кограничный оператор*

$$d_q'':\Gamma_c(X;\ E^{p,q}\otimes_O F)\to\Gamma_c(X;\ E^{p,q+1}\otimes_O F)$$

является гомоморфизмом топологических векторных пространств;

б) *подпространство $d_q''\Gamma_c(X;\ E^{p,q}\otimes_O F)$ пространства $\Gamma_c(X;\ E^{p,q+1}\otimes_O F)$ замкнуто;*

в) *пространство когомологий $H_c^{q+1}(X;\ \Omega^p\otimes_O F)$ отделимо.*

Доказательство. В силу теорем 3 и 4 утверждение а) равносильно утверждению

а′) *кограничный оператор*

$$\delta_q(M): C_c^q(M;\ \Omega^p\otimes_O F)\to C_c^{q+1}(M;\ \Omega^p\otimes_O F)$$

есть гомоморфизм топологических векторных пространств (здесь M — произвольное адаптированное замкнутое покрытие многообразия X).

Утверждение б) равносильно утверждению

б′) *подпространство $\delta_q(M)\,C_c^q(M;\ \Omega^p\otimes_O F)$ замкнуто* в $C_c^{q+1}(M;\ \Omega^p\otimes_O F)$.

Наконец, утверждение в) равносильно утверждению

в′) *пространство* $H_c^{q+1}(M; \Omega^p \otimes_O F)$ *отделимо.*

Так как пространство $C_c^q(M; \Omega^p \otimes_O F)$ представляет собой при любых целых положительных p и q сильное сопряженное к некоторому пространству Фреше и Шварца, то утверждение а′) равносильно утверждениям б′) и в′). Следствие доказано.

§ 5. Потоки

Пусть $D^{p,q}$ — пучок ростков потоков двойной степени (p, q) на многообразии X. Над достаточно малой открытой окрестностью U произвольной точки из X эпиморфизм $\pi: O^m \to F$ определяет мономорфизм пучков

$$\mathrm{Hom}_O(F, D^{p,q}) \to (D^{p,q})^m.$$

Тем самым векторное пространство

$$\mathrm{Hom}_O(U; F, D^{p,q}) = \Gamma(U; \mathrm{Hom}_O(F, D^{p,q}))$$

можно отождествить с подпространством в $\Gamma(U; (D^{p,q})^m)$. Пространство $\Gamma(U; D^{p,q})$ потоков двойной степени (p, q) на U по определению является сопряженным к топологическому векторному пространству $\Gamma_c(U; E^{n-p, n-q})$. Наделим пространство $\Gamma(U; D^{p,q})$ сильной топологией, а пространство $\Gamma(U; (D^{p,q})^m) = (\Gamma(U; D^{p,q}))^m$ — топологией произведения. Пространство $\mathrm{Hom}_O(U; F, D^{p,q})$ наделим топологией, индуцируемой из $\Gamma(U; (D^{p,q})^m)$. Непосредственно проверяется, что эта топология в $\mathrm{Hom}_O(U; F, D^{p,q})$ не зависит от выбора эпиморфизма π.

Пусть $\mathbf{U}$ — достаточно мелкое, локально конечное покрытия многообразия X открытыми множествами. Векторное пространство $\mathrm{Hom}_O(X; F, D^{p,q}) = \Gamma(X; \mathrm{Hom}_O(F, D^{p,q}))$ наделим слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения сужения

$$\mathrm{Hom}_O(X; F; D^{p,q}) \to \mathrm{Hom}_O(U; F, D^{p,q})$$

при любых U из $\mathbf{U}$. На самом деле эта топология в пространстве $\mathrm{Hom}_O(X; F, D^{p,q})$ не зависит от выбора покрытия $\mathbf{U}$.

Для произвольного (но фиксированного) целого положительного p рассмотрим комплекс $\mathrm{Hom}_O(X; F, D^{p,*})$ топологических векторных пространств $\mathrm{Hom}_O(X; F, D^{p,q})$ $(q = 0, 1, \ldots)$ с непрерывным кограничным оператором

$$d_q'': \mathrm{Hom}_O(X; F, D^{p,q}) \to \mathrm{Hom}_O(X; F, D^{p,q+1}),$$

индуцированным внешним дифференциалом

$$d'': D^{p,q} \to D^{p,q+1}.$$

Векторное пространство $H^q\,\mathrm{Hom}_O(X; F, D^{p,*})$ когомологий комплекса $\mathrm{Hom}_O(X; F, D^{p,*})$ наделим топологией факторпростанства $\mathrm{Ker}\, d_q''/\mathrm{Im}\, d_{q-1}''$.

На категории $\boldsymbol{O}$-модулей определен ковариантный функтор

$$\boldsymbol{L} \mapsto \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}),$$

принимающий значения в категории векторных пространств. Его правые производные функторы обозначаются, как известно, следующим образом:

$$\boldsymbol{L} \mapsto \mathrm{Ext}^k_{\mathrm{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Если

$$0 \to \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}^0 \to \boldsymbol{L}^1 \to \cdots$$

— инъективная резольвента $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$, то по определению $\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L})$ есть векторное пространство $H^k \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}^*)$ когомологий комплекса $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}; \boldsymbol{L}^*)$.

Лемма 9. *Если*

$$0 \to \boldsymbol{D}^{p,q} \to \boldsymbol{L}^{0,q} \to \boldsymbol{L}^{1,q} \to \cdots$$

— инъективная резольвента пучка $\boldsymbol{D}^{p,q}$, то последовательность пучков и их гомоморфизмов

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{p,q}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}^{0,q}) \to \cdots$$

точна.

Доказательство. Так как пучок $\boldsymbol{F}$ когерентен, то слой $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L})_x$ пучка $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L})$ над произвольной точкой x из X канонически изоморфен $\boldsymbol{O}_x$-модулю $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{L}_x)$, каким бы ни был $\boldsymbol{O}$-модуль $\boldsymbol{L}$ (см. например, [23]). С другой стороны, при каждом целом положительном i имеет место точная последовательность

$$0 \to \boldsymbol{Z}^i \to \boldsymbol{L}^{i,q} \to \boldsymbol{Z}^{i+1} \to 0,$$

где $\boldsymbol{Z}^i$ — ядро отображения $\boldsymbol{L}^{i,q} \to \boldsymbol{L}^{i+1,q}$.

Следовательно, для каждой точки x из X и любого целого $k \geqslant 0$ точна последовательность

$$\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{L}^{i,q}_x) \to \mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{Z}^{i+1}_x) \to \mathrm{Ext}^{k+1}_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{Z}^i_x).$$

Так как $\boldsymbol{Z}^0_x = \boldsymbol{D}^{p,q}_x$ и $\boldsymbol{L}^{i,q}_x$ $(i \geqslant 0)$ являются инъективными $\boldsymbol{O}_x$-модулями (см. соответственно [13, 23]), то

$$\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{Z}^0_x) = 0$$

и

$$\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{L}^{i,q}_x) = 0$$

при $i \geqslant 0$, $k \geqslant 1$. Индукцией по i получаем

$$\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{Z}^i_x) = 0 \quad (i \geqslant 0,\ k \geqslant 1).$$

Отсюда следует точность последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{Z}^i_x) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{L}^{i,q}_x) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{Z}^{i+1}_x) \to 0,$$

и лемма доказана.

Предложение 1. *При любых целых положительных p и q векторные пространства $H^q \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{D}^{p,\, *})$ и $\operatorname{Ext}^q_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \Omega^p)$ канонически изоморфны.*

Доказательство. По лемме Дольбо-Гротендика имеет место точная последовательность

$$0 \to \Omega^p \to \boldsymbol{D}^{p,\,0} \to \boldsymbol{D}^{p,\,1} \to \cdots$$

Вложим эту последовательность в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Omega^p & \to & \boldsymbol{D}^{p,\,0} & \to & \boldsymbol{D}^{p,\,1} & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \boldsymbol{L}^0 & \to & \boldsymbol{L}^{0,\,0} & \to & \boldsymbol{L}^{0,\,1} & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \boldsymbol{L}^1 & \to & \boldsymbol{L}^{1,\,0} & \to & \boldsymbol{L}^{1,\,1} & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

с точными строками и столбцами и с инъективными $\boldsymbol{O}$-модулями $\boldsymbol{L}^i$, $\boldsymbol{L}^{i,\,q}$ $(i,\, q \geqslant 0)$. С помощью леммы 9 получаем отсюда коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \Omega^p) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{D}^{p,\,0}) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{D}^{p,\,1}) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^0) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{0,\,0}) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{0,\,1}) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^1) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{1,\,0}) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{1,\,1}) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

в которой все строки и столбцы, начиная со вторых, точны. Так как пучки $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{D}^{p,\,m})$ — мягкие, а пучки $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^i)$, $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{i,\,q})$ — вялые [24], то в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \Omega^p) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{D}^{p,\,0}) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{D}^{p,\,1}) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^0) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{0,\,0}) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{0,\,1}) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^1) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{1,\,0}) & \to & \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{L}^{1,\,1}) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

все строки и столбцы, начиная со вторых, точны. Отсюда, с помощью леммы 1 получаем канонический изоморфизм векторных пространств $H^q \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{L}^*)$ и $H^q \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{p,*})$. Предложение доказано.

При любых целых положительных p и q векторное пространство $\operatorname{Ext}^q_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^p)$ наделим локально выпуклой топологией, индуцируемой топологией пространства $H^q \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{p,*})$ при каноническом изоморфизме предложения 1.

§ 6. Дифференциальные формы и потоки

В настоящем параграфе изучается двойственность, существующая между топологическими векторными пространствами $\Gamma_c(x;\ \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ и $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 10. *Для каждой достаточно малой голоморфно полной открытой окрестности U произвольной точки многообразия X каноническое отображение*

$$\Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q}) \otimes_{\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})} \Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$$

является изоморфизмом $\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})$-модулей.

Доказательство. Голоморфно полную открытую окрестность U можно выбрать так, чтобы пучок $\boldsymbol{F}$ над U допускал свободную резольвенту

$$\ldots \to \boldsymbol{O}^{m_1} \to \boldsymbol{O}^m \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{F} \to 0.$$

Переходя к сечениям, получаем в силу теоремы В. Картана точную последовательность $\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})$-модулей

$$\ldots \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^{m_1}) \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^m) \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) \to 0.$$

Так как $\Gamma(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{E}^{p,q})$ есть плоский $\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})$-модуль, то последовательность

$$\ldots \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q}) \otimes_{\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})} \Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^m) \to$$
$$\to \Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q}) \otimes_{\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})} \Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) \to 0$$

также точна. С другой стороны, канонические отображения

$$\Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q}) \otimes_{\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})} \Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^{m_i}) \to \Gamma(U;\ (\boldsymbol{E}^{p,q})^{m_i})$$

являются изоморфизмами $\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})$-модулей. Поскольку в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q}) \otimes_{\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})} \Gamma(U;\ \boldsymbol{O}^m) & \to & \Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q}) \otimes_{\Gamma(U;\ \boldsymbol{O})} \Gamma(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{F}) \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\ldots \to \Gamma(U;\ (\boldsymbol{E}^{p,q})^m) & \longrightarrow & \Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \to 0
\end{array}$$

нижния строка точна, то лемма доказана.

Лемма 11. *Для каждой достаточно малой, голоморфно полной открытой окрестности U произвольной точки многообразия X топология пространства $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ есть сильнейшая из* *локально выпуклых топологий, для которых при каждом* ξ *из* $\Gamma(U;\ F)$ *непрерывно отображение*

$$\omega \to \omega \otimes \xi$$

пространства $\Gamma_c(U;\ E^{p,q})$ в $\Gamma_c(U;\ E^{p,q} \otimes_O F)$.

Доказательство. Пусть U — достаточно малая, голоморфно полная открытая окрестность некоторой точки многообразия X. Тогда, согласно § 4, топологическое векторное пространство $\Gamma_c(U;\ E^{p,q} \otimes_O F)$ отождествимо с факторпространством $\Gamma_c(U;\ (E^{p,q})^m)/\Gamma_c(U;\ E^{p,q}R)$. С другой стороны, топология пространства $\Gamma_c(U;\ (E^{p,q})^m)$ представляет собой сильнейшую из локально выпуклых топологий, для которых при каждом ξ из $\Gamma(U;\ O^m)$ непрерывно отображение $\omega \mapsto \omega\xi$ пространства $\Gamma_c(U;\ E^{p,q})$ в $\Gamma_c(U;\ (E^{p,q})^m)$. Лемма доказана.

Следствие. *Для каждой достаточно малой, голоморфно полной открытой окрестности* U *произвольной точки многообразия* X *топологическое векторное пространство* $\Gamma_c(U;\ E^{p,q} \otimes_O F)$ *канонически отождествимо с локально выпуклым топологическим тензорным произведением* $\Gamma(U;\ O)$-модулей $\Gamma_c(U;\ E^{p,q})$ и $\Gamma(U;\ F)$.

Доказательство. В силу леммы 10 достаточно доказать, что топология пространства $\Gamma_c(U;\ E^{p,q} \otimes_O F)$ является сильнейшей из локально выпуклых топологий, для которых непрерывно каноническое $\Gamma(U;\ O)$-билинейное отображение

$$\Gamma_c(U;\ E^{p,q}) \times \Gamma(U;\ F) \to \Gamma_c(U;\ E^{p,q} \otimes_O F),$$

а это следует из леммы 11.

Предложение 2. *Для любых целых положительных* p, q *векторное пространство* $\Gamma_c'(X;\ E^{p,q} \otimes_O F)$, сопряженное к $\Gamma_c(X;\ E^{p,q} \otimes_O F)$, *канонически изоморфно векторному пространству* $\mathrm{Hom}_O(X;\ F,\ D^{n-p,\ n-q})$.

Доказательство. Пусть f — непрерывная линейная форма на топологическом векторном пространстве $\Gamma_c(X;\ E^{p,q} \otimes_O F)$. Если U — произвольное открытое множество в X, то для любых ω из $\Gamma_c(U;\ F^{p,q})$ и ξ из $\Gamma(U;\ F)$ имеем сечение

$$x \to \omega_x \otimes \xi_x$$

с компактным носителем в U пучка $E^{p,q} \otimes_O F$.

Это сечение тривиальным образом продолжается до сечения пучка $E^{p,q} \otimes_O F$ над X. Зафиксировав ξ, в силу леммы 11 и определения топологии пространства $\Gamma_c(X;\ E^{p,q} \otimes_O F)$ получим непрерывную линейную форму

$$\omega \mapsto f(\omega \dot{\otimes} \xi) \tag{11}$$

на пространстве $\Gamma_c(U;\ E^{p,q})$. Тем самым определен гомоморфизм $\Gamma(U;\ O)$-модулей

$$\varphi_U : \Gamma(U;\ F) \mapsto \Gamma(U;\ D^{n-p,\ n-q}),$$

который сечению ξ пучка F над U сопоставляет непрерывную линейную форму (11) на топологическом векторном пространстве $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q})$, т. е. поток двойной степени $(n-p,\ n-q)$ на U. Таким образом, для любых ω из $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q})$ и ξ из $\Gamma(U;\ \boldsymbol{F})$ имеет место равенство

$$\langle\omega,\ \varphi_U(\xi)\rangle = f(\omega\otimes\xi). \tag{12}$$

Для любых открытых множеств $V\subset U$ в X выполняется условие совместимости отображений φ_U и φ_V, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(U;\ \boldsymbol{F}) & \xrightarrow{\varphi_u} & \Gamma(U;\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(V;\ \boldsymbol{F}) & \xrightarrow{\varphi_v} & \Gamma(V;\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})\end{array}$$

коммутативна. Другими словами, семейством (φ_U) определяется некоторый гомоморфизм $\boldsymbol{O}$-модулей

$$\varphi:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q}.$$

Сопоставляя таким образом каждой непрерывной линейной форме f на $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ гомоморфизм пучков φ, получаем каноническое линейное отображение векторных пространств

$$\theta:\Gamma_c'(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})\to\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q}).$$

Покажем, что θ является изоморфизмом векторных пространств.

Прежде всего с помощью подходящего разбиения единицы любое сечение с компактным носителем пучка $\boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}$ можно представить в виде конечной суммы сечений $\omega\otimes\xi$, где $\omega\in\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q})$, $\xi\in\Gamma(U;\ \boldsymbol{F})$ и U — некоторое открытое множество в X. Следовательно, если $\theta(f)=0$ для некоторой формы $f\in\Gamma_c'(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$, то $f=0$, так как в силу соотношения (12) $f(\omega\otimes\xi)=0$. Другими словами, отображение θ инъективно.

Далее, пусть $\varphi:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q}$ — произвольный гомоморфизм $\boldsymbol{O}$-модулей. Каждое сечение с компактным носителем в X пучка $\boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}$ представим в виде некоторой суммы сечений $\omega_i\otimes\xi_i$ $(i=1,\ \ldots\ k)$, где при каждом $i=1,\ \ldots,\ k$ сечение ω_i принадлежит $\Gamma_c(U_i;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q})$, ξ_i принадлежит $\Gamma(U_i;\ \boldsymbol{F})$, а U_i — некоторое открытое множество в X (предполагается, что сечение $\omega_i\otimes\xi_i$ продолжено как нулевое за пределы множества U_i). Покажем, что соответствие

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i\otimes\xi_i\mapsto\sum_{i=1}^{k}\langle\omega_i,\ \varphi_{U_i}(\xi_i)\rangle \tag{13}$$

определяет линейную форму на $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$. Для этого достаточно, чтобы из $\sum\omega_i\otimes\xi_i=0$ следовало $\sum\langle\omega_i,\ \varphi_{U_i}(\xi_i)\rangle=0$.

Какой бы ни была точка x множества $U=U_1\cup\ldots\cup U_k$, существует достаточно малая, голоморфно полная открытая окрестность V этой точки, обладающая следующими свойствами: $V\subset U_i$ при $x\in U_i$ и $V\cap\operatorname{supp}\omega_i=\varnothing$ при $x\notin U_i$ для каждого $i=1,\ \ldots,\ k$. Выберем локально конечное покрытие множества U такими окрестностями V и обозначим через (e_V) разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Так как

$$\langle e_V\omega_i, \varphi_{U_i}(\xi_i)\rangle = \langle e_V\omega_i, \varphi_V(\xi_i)\rangle,$$

то достаточно рассмотреть случай, когда $U_1 = \ldots = U_k = V$.

Итак, пусть V — достаточно малая, голоморфно полная открытая окрестность некоторой точки многообразия X. Пусть $\omega_i \in \Gamma_c(V; \boldsymbol{E}^{p,q})$, $\xi_i \in \Gamma(V; \boldsymbol{F})$ $(i = 1, \ldots, k)$ и пусть $\sum \omega_i \otimes \xi_i = 0$. Нам нужно показать, что $\sum \langle \omega_i, \varphi_V(\xi_i)\rangle = 0$. В силу леммы 10 для этого достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\langle \sigma + \tau, \varphi_V(\xi)\rangle = \langle \sigma, \varphi_V(\xi)\rangle + \langle \tau, \varphi_V(\xi)\rangle,$$

$$\langle \sigma, \varphi_V(\xi + \eta)\rangle = \langle \sigma, \varphi_V(\xi)\rangle + \langle \sigma, \varphi_V(\eta)\rangle,$$

$$\langle \alpha\sigma, \varphi_V(\xi)\rangle = \langle \sigma, \varphi_V(\alpha\xi)\rangle$$

при любых $\alpha \in \Gamma(V; \boldsymbol{O})$; $\sigma, \tau \in \Gamma_c(V; \boldsymbol{E}^{p,q})$; $\xi, \eta \in \Gamma(V; \boldsymbol{F})$. Все эти условия выполняются очевидным образом. Тем самым доказано, что с помощью соответствия (13) определена некоторая линейная форма f на топологическом векторном пространстве $\Gamma_c(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$.

Для каждой достаточно малой, голоморфно полной открытой окрестности U произвольной точки из X сужение формы f на подпространство $\Gamma_c(U; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ непрерывно, так как в силу леммы 11 это вытекает из очевидной непрерывности при любом $\xi \in \Gamma(U; \boldsymbol{F})$ линейной формы

$$\omega \mapsto \langle \omega, \varphi_U(\xi)\rangle = f(\omega \otimes \xi)$$

на $\Gamma_c(U; \boldsymbol{E}^{p,q})$. С помощью достаточно мелкого локально конечного покрытия многообразия X голоморфно полными открытыми множествами и разбиения единицы, подчиненного этому покрытию, получаем непрерывность f на $\Gamma_c(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$. Наконец, ввиду (12) $\theta(f) = \varphi$, т. е. отображение θ сюръективно. Предложение доказано.

Предложение 3. *Отображение* ${}^t d''_q : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{n-p,\, n-q-1}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{n-p,\, n-q})$, *отождествимое с сопряженным к кограничному оператору*

$$d''_q : \Gamma_c(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \to \Gamma_c(X; \boldsymbol{E}^{p,q+1} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}),$$

индуцировано гомоморфизмом $\boldsymbol{O}$-модулей

$$(-1)^{p+q+1} d'' : \boldsymbol{D}^{n-p,\, n-q-1} \to \boldsymbol{D}^{n-p,\, n-q}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{D}^{n-p,\, n-q-1}$ — произвольный гомоморфизм $\boldsymbol{O}$-модулей и $f = \theta^{-1}(\varphi)$ — соответствующая непрерывная линейная форма на $\Gamma_c(X; \boldsymbol{E}^{p,q+1} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$. Тогда для произвольного открытого множества U в X и любых $\omega \in \Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q})$, $\xi \in \Gamma(U;\ \boldsymbol{F})$

$$\langle \omega,\ ({}^t d_q'' \varphi)_U(\xi)\rangle = \langle \omega \otimes \xi,\ {}^t d_q'' f\rangle = \langle d''\omega \otimes \xi,\ f\rangle =$$
$$= \langle d''\omega,\ \varphi_U(\xi)\rangle = (-1)^{p+q+1}\langle \omega,\ d''(\varphi_U(\xi))\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Предложение 4. *Топология пространства* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$ *канонически отождествима с сильной топологией пространства* $\Gamma_c'(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, *т. е. отображение* θ *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U}$ — достаточно мелкое, локально конечное покрытие многообразия X голоморфно полными открытыми множествами. Тогда топология пространства $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$ является по определению (см. § 5) слабейшей из топологий, для которых при каждом U из $\boldsymbol{U}$ и каждом $\xi \in \Gamma(U;\ \boldsymbol{F})$ непрерывно отображение $\varphi \mapsto \varphi_U(\xi)$ пространства $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X);\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$ в $\Gamma(U:\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$.

Так как при $\theta(f) = \varphi$ справедливо равенство $\langle \omega,\ \varphi_U(\xi)\rangle = f(\omega \otimes \xi)$ для любых $\omega \in \Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q})$, $\xi \in \Gamma(U;\ \boldsymbol{F})$, то отображение θ непрерывно, ибо образ каждого ограниченного множества из $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q})$ при отображении $\omega \mapsto \omega \otimes \xi$ есть ограниченное множество в $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$.

Для каждого $U \in \boldsymbol{U}$ при $\theta(f) = \varphi$ и любых $\omega_i \in \Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q})$, $\xi_i \in \Gamma(U;\ \boldsymbol{F})$ имеет место равенство

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i \otimes \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \langle \omega_i \otimes \varphi_U(\xi_i)\rangle. \tag{14}$$

С другой стороны, существуют сечения $\xi_1, \ldots \xi_m$ пучка $\boldsymbol{F}$ над U, для которых отображение

$$(\omega_1, \ldots, \omega_m) \mapsto \omega_1 \otimes \xi_1 + \ldots + \omega_m \otimes \xi_m$$

пространства $(\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}))^m$ в $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ сюръективно. Каждое ограниченное множество в $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ содержится и ограничено в одном из пространств $\Gamma_K(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, где K — некоторое компактное множество в U, и потому оно является каноническим образом некоторого ограниченного множества B из пространства $\Gamma(U;\ (\boldsymbol{E}^{p,\,q})^m)$ при отображении последнего в $\Gamma(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$. Умножая множество B на подходящую функцию с компактным носителем, получаем, что каждое ограниченное множество в $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ является образом некоторого ограниченного множества из $\Gamma_c(U;\ (\boldsymbol{E}^{p,\,q})^m)$. Отсюда и из равенства (14) с помощью разбиения единицы, подчиненного покрытию $\boldsymbol{U}$, следует, что отображение $\theta^{-1}\colon \varphi \mapsto f$ непрерывно. Предложение доказано.

Следствие. *Для любых целых положительных* p *и* q *топологическое векторное пространство* $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ *канонически* *отождествимо с сильным сопряженным к топологическому векторному пространству* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\ n-q})$.

§ 7. Теоремы двойственности

Обозначим через $\tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимое топологическое векторное пространство, ассоциированное с пространством когомологий $H^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ многообразия X с компактными носителями и с коэффициентами в пучке $\boldsymbol{F}$. По определению $\tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ — факторпространство пространства $H^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ по замыканию нуля в последнем. Так как, согласно следствию из теоремы 3, пространство $H^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ канонически изоморфно пространству $H^k_c(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{F})$, где $\boldsymbol{M}$ — произвольное адаптированное замкнутое покрытие многообразия X, то пространство $\tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ канонически изоморфно факторпространству $\mathrm{Ker}\,\delta_k(\boldsymbol{M})/\overline{\mathrm{Im}\,\delta_{k-1}(\boldsymbol{M})}$.

С другой стороны, $\mathrm{Ker}\,\delta_k(\boldsymbol{M})$ есть замкнутое подпространство пространства $C^k_c(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{F})$, являющегося сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца. Следовательно, пространство $\mathrm{Ker}\,\delta_k(\boldsymbol{M})$ само является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца. Отсюда получаем следующее утверждение.

Предложение 5. *При каждом целом положительном k пространство $\tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца.*

В частности, пространство $\tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ полно, бочечно, ограниченно замкнуто, рефлексивно и представляет собой пространство Монтеля.

Лемма 12. *Каждое ограниченное множество пространства $\tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ является образом при каноническом отображении*

$$\tilde{H}^k_c(U;\ \boldsymbol{F}) \to \tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$$

некоторого ограниченного множества из пространства $\tilde{H}^k_c(U;\ \boldsymbol{F})$, где U — некоторое относительно компактное открытое множество в X.

Доказательство. Пусть $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ — последовательность относительно компактных открытых множеств, объединение которых совпадает с X. Топологическая прямая сумма $\sum \tilde{H}^k_c(U_n;\ \boldsymbol{F})$ пространств $\tilde{H}^k_c(U_n;\ \boldsymbol{F})$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца. Поэтому каноническое отображение

$$\sum \tilde{H}^k_c(U_n;\ \boldsymbol{F}) \to \tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F}) \tag{15}$$

является гомоморфизмом топологических векторных пространств, так как оно непрерывно и сюръективно. Следовательно, каждое ограниченное множество в $\tilde{H}^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ является образом при отображении (15) некоторого ограниченного множества из $\sum \tilde{H}^k_c(U_n; \boldsymbol{F})$. Наконец, каждое ограниченное множество в $\sum \tilde{H}^k_c(U_n; \boldsymbol{F})$ содержится в сумме конечного числа пространств $\tilde{H}^k_c(U_n; \boldsymbol{F})$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 13. *Для любых целых положительных p и q каждое ограниченное множество в пространстве*

$$\tilde{H}^q\Gamma_c(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) = \operatorname{Ker} d''_q / \overline{\operatorname{Im} d''_{q-1}}$$

есть канонический образ некоторого ограниченного множества из $\operatorname{Ker} d''_q$.

Доказательство. Пусть B — ограниченное множество в пространстве $\tilde{H}^q\Gamma_c(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$. Так как в силу следствия 1 из теоремы 4 пространство $\tilde{H}^q\Gamma_c(U; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ для любого открытого множества U в X канонически изоморфно пространству $\tilde{H}^q_c(U; \Omega^p \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, то по лемме 12 множество B является образом при каноническом отображении

$$\tilde{H}^q\Gamma_c(U; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \to \tilde{H}^q\Gamma_c(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$$

некоторого ограниченного множества B' из пространства $H^q\Gamma_c(U; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, где U — некоторое относительно компактное открытое множество в X. Рассмотрим отделимое топологическое векторное пространство $\tilde{H}^q\Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, ассоциированное с пространством $H^q\Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ когомологий комплекса $\Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$, состоящего из пространств сечений $\Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ пучков $\boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}$ с носителями в компактном множестве $\overline{U}$. Так как каноническое отображение

$$\tilde{H}^q\Gamma_c(U; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \to \tilde{H}^q\Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}).$$

непрерывно, образ B'' множества B' относительно этого отображения является ограниченным множеством в пространстве $\tilde{H}^q\Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$. Обозначим через $Z^{p,q}_{\overline{U}}$ ядро кограничного оператора

$$d''_q : \Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \to \Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,q+1} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}),$$

а через $B^{p,q}_{\overline{U}}$ — образ кограничного оператора

$$d''_{q-1} : \Gamma_U(X; \boldsymbol{E}^{p,q-1} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \to \Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,q} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}).$$

Тогда пространство

$$\tilde{H}^q\Gamma_{\overline{U}}(X; \boldsymbol{E}^{p,*} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) = Z^{p,q}_{\overline{U}} / \overline{B^{p,q}_{\overline{U}}}.$$

есть факторпространство пространства Фреше и Шварца $Z^{p,q}_{\overline{U}}$.

Следовательно, множество B'' является каноническим образом некоторого ограниченного множества A из $Z_U^{p,q}$. Так как диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^q\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{E}^{p,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \tilde{H}^q\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}) \\
& \tilde{H}^q\Gamma_{\overline{U}}(X;\ \boldsymbol{E}^{p,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}), \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

составленная из канонических отображений, коммутативна, то множество $\boldsymbol{B}$ является каноническим образом множества A, которое содержится и ограничено в $\operatorname{Ker} d_q''$. Тем самым лемма доказана.

Обозначим через $\widetilde{\operatorname{Ext}}_{\boldsymbol{O}}^q(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^p)$ отделимое пространство, ассоциированное с топологическим векторным пространством $\operatorname{Ext}_{\boldsymbol{O}}^q \times$ $\times (X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^p)$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 5. *Для любых целых положительных p и q топологическое векторное пространство $\widetilde{\operatorname{Ext}}_{\boldsymbol{O}}^{n-q}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p})$ канонически изоморфно сильному сопряженному к топологическому векторному пространству $\tilde{H}_c^q(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$.*

Доказательство. Так как пространство $\tilde{H}_c^q(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ изоморфно факторпространству $\operatorname{Ker} d_q''/\overline{\operatorname{Im} d_{q-1}''}$ (по следствию 1 из теоремы 4), где d_q'' — кограничный оператор комплекса $\Gamma_c(X;$ $\boldsymbol{E}^{p,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$, то сопряженное пространство $\{\tilde{H}_c^q(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})\}'$ изоморфно факторпространству $(\operatorname{Im} d_{q-1}'')^0/(\operatorname{Ker} d_q'')^0$, где поляры берутся в пространстве $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$, отождествляемом с сопряженным к пространству $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ (предложение 2). Если гомоморфизм пучков $\varphi: \boldsymbol{F}\to \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q}$ принадлежит поляре $(\operatorname{Im} d_{q-1}'')^0$, то

$$\langle d_{q-1}''\omega,\ \varphi\rangle = \langle\omega, {}^t d_{q-1}''\varphi\rangle = 0$$

для любого $\omega\in\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q-1}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ и, значит, ${}^t d_{q-1}''\varphi = 0$. Наоборот, из ${}^t d_{q-1}''\varphi = 0$ следует, что $\varphi\in(\operatorname{Im} d_{q-1}'')^0$. Другими словами, поляра $(\operatorname{Im} d_{q-1}'')^0$ совпадает с ядром $\operatorname{Ker} d_{n-q}''$ кограничного оператора d_{n-q}'' комплекса $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,*})$ (см. предложение 3).

Аналогично, если форма $\omega\in\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ принадлежит поляре $(\operatorname{Im} d_{n-q-1}'')^0$, где d_{n-q-1}'' — кограничный оператор комплекса $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,*})$, то

$$\langle\omega,\ d_{n-q-1}''\varphi\rangle = \langle {}^t d_{n-q-1}''\omega,\ \varphi\rangle = 0$$

для любого гомоморфизма пучков φ: $\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q-1}$, т. е. $d_q''\omega = 0$ (предложение 3), и, наоборот, поляра $(\operatorname{Im} d_{n-q-1}'')^0$ совпадает с ядром $\operatorname{Ker} d_q''$ кограничного оператора d_q'' комплекса $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$. Следовательно, поляра $(\operatorname{Ker} d_q'')^0$ этого ядра совпадает с замыканием в слабой топологии пространства $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$, определяемой двойственностью между $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$ и $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ подпространства $\mathrm{Im}\, d''_{n-q-1} = d''_{n-q-1}\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q-1})$. В силу следствия из предложения 4 исходная топология пространства $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$ согласуется с двойственностью между $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$ и $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$, поэтому слабое замыкание подпространства $\mathrm{Im}\, d''_{n-q-1}$ совпадает с замыканием в исходной топологии. Итак, доказано, что векторные пространства $\{\widetilde{H}^q_c(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})\}'$ и $\widetilde{\mathrm{Ext}}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p})$ канонически изоморфны. Так как пространство $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ рефлексивно, то в силу леммы 13 сильная топология пространства $\{\widetilde{H}^q_c(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})\}'$ отождествима при этом каноническом изоморфизме с топологией пространства $\widetilde{\mathrm{Ext}}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p})$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любых целых положительных p и q $\widetilde{\mathrm{Ext}}^q_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^p)$ есть пространство Фреше и Шварца.*

Следствие 2. *Для любых целых положительных p и q топологическое векторное пространство $\widetilde{H}^{n-q}_c(X;\ \Omega^{n-p}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ канонически изоморфно сильному сопряженному к топологическому векторному пространству $\widetilde{\mathrm{Ext}}^q_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^p)$.*

Предложение 6. *Если кограничный оператор*

$$d''_q : \Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}) \to \Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,q+1}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$$

комплекса $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ является гомоморфизмом топологических векторных пространств, то пространства $H^{q+1}_c(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ и $\mathrm{Ext}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-n})$ отделимы и, следовательно, совпадают соответственно с пространствами $\widetilde{H}^{q+1}_c(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ и $\widetilde{\mathrm{Ext}}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p})$.

Доказательство. Отделимость пространства $H^{q+1}_c(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ вытекает из следствия 2 теоремы 4. Далее, так как кограничный оператор d''_q есть гомоморфизм, то кограничный оператор

$$d''_{n-q-1} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q-1}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,n-q})$$

комплекса $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-p,\,*})$ имеет замкнутый образ (см. предложение 3), а потому пространство $\mathrm{Ext}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p})$ отделимо.

Предложение 7. *Если векторное пространство когомологий $H^{q+1}_c(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ конечномерно, то кограничный оператор d''_q комплекса $\Gamma_c(X;\ \boldsymbol{E}^{p,\,*}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ является гомоморфизмом топологических векторных пространств.*

Доказательство. Так как пространство $H^{q+1}_c(X;\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$ канонически изоморфно пространству $H^{q+1}_c(\boldsymbol{M};\ \Omega^p\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$, где $\boldsymbol{M}$ — произвольное замкнутое адаптированное покрытие многообразия X (следствие из теоремы 3), то отображение

$$\delta_q(M) : C_c^q(M;\, \Omega^p \otimes_O F) \to \operatorname{Ker} \delta_{q+1}(M),$$

индуцированное кограничным оператором $\delta_q = \delta_q(M)$ комплекса $C_c^*(M;\, \Omega^p \otimes_O F)$, имеет образ конечной факторразмерности в $\operatorname{Ker} \delta_{q+1}(M)$. Следуя работе [4], рассмотрим отображение

$$\gamma : (f,\, g) \mapsto \delta_q(f) + g$$

произведения $C_c^q(M;\, \Omega^p \otimes_O F) \times E$ в $\operatorname{Ker} \delta_{q+1}(M)$, где E — алгебраическое дополнение к подпространству

$$\delta_q C_c^q(M;\, \Omega^p \otimes_O F) \text{ в } \operatorname{Ker} \delta_{q+1}(M)$$

(очевидно, конечномерное). Так как γ непрерывно и сюръективно, а пространства $C_c^q(M;\, \Omega^p \otimes_O F) \times E$ и $\operatorname{Ker} \delta_{q+1}(M)$ являются сильными сопряженными к некоторым пространствам Фреше и Шварца то γ является гомоморфизмом топологических векторных пространств, Отсюда следует, что $\delta_q(M)$, а потому и d_q'' есть гомоморфизм топологических векторных пространств.

Теорема 6. *Если многообразие X компактно, то векторные пространства $H^q(X;\, \Omega^p \otimes_O F)$ и $\operatorname{Ext}_O^{n-q}(X;\, F,\, \Omega^{n-p})$ конечномерны, отделимы и канонически двойственны друг к другу.*

Доказательство. По известной теореме Картана—Серра [1] пространства когомологий $H_c^q(X;\, \Omega^p \otimes_O F) = H^q(X;\, \Omega^p \otimes_O F)$ $(q = 0,\, 1,\, \ldots)$ конечномерны. Утверждение следует поэтому из предложений 6, 7 и теоремы 5.

Замечание. В абстрактной алгебраической геометрии теорема, аналогичная теореме 6, для неособых проективных многообразий была доказана А. Гротендиком [8]. В приведенной здесь форме она была высказана Б. Мальгранжем [9] и доказана (см. также [3]) К. Суоминеном [10].

Нижеследующая теорема принадлежит К. Баника и О. Станашила (см. [15], а также [16]).

Теорема 7. *Если многообразие X голоморфно полно, то топологическое векторное пространство $\operatorname{Ext}_O^{n-q}(X;\, F,\, \Omega^{n-p})$ канонически изоморфно сильному сопряженному к топологическому векторному пространству $H^q(X;\, \Omega^p \otimes_O F)$.*

Доказательство. Для любых аналитических пучков F и G имеет место спектральная последовательность [23]

$$E_2^{p,q} = H^p(X;\, \operatorname{Ext}_O^q(F,\, G)) \Rightarrow \operatorname{Ext}_O^{p+q}(X;\, F,\, G).$$

Следовательно, каноническое непрерывное линейное отображение

$$\operatorname{Ext}_O^{n-q}(X;\, F,\, \Omega^{n-p}) \to \Gamma(X;\, \operatorname{Ext}_O^{n-q}(F,\, \Omega^{n-p}))$$

биективно. Поэтому пространства $\operatorname{Ext}_O^{n-q}(X;\, F,\, \Omega^{n-p})$ и $H^q(X;\, \Omega^p \otimes_O F)$ отделимы. Утверждение следует из теоремы 5.

§ 8. Локально свободные пучки

Аналогично предыдущему можно рассмотреть пространства когомологий $H^q(X; \Omega^p \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ многообразия X с коэффициентами в пучке $\Omega^p \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}$ и с произвольными носителями. Топологии в этих пространствах, определяемые с помощью открытых порытий и дифференциальных форм, как в § 1 и 4, совпадают [11]. Ассоциированные отделимые топологические векторные пространства $\tilde{H}^q(X; \Omega^p \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ являются пространствами Фреше и Шварца.

Можно рассмотреть также векторные пространства

$$\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O},c}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) = \Gamma_c(X; \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}))$$

гомоморфизмов $\boldsymbol{O}$-модулей $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{L}$ с компактными носителями. Соответствующие производные функторы обозначаются через

$$\boldsymbol{L} \mapsto \operatorname{Ext}^k_{\boldsymbol{O},c}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Векторные пространства $\operatorname{Ext}^q_{\boldsymbol{O},c}(X; \boldsymbol{F}, \Omega^p)$ можно наделить естественным образом с помощью комплекса потоков, как в § 5, локально выпуклыми топологиями. Пусть $\widetilde{\operatorname{Ext}}^q_{\boldsymbol{O},c}(X; \boldsymbol{F}, \Omega^p)$ обозначает отделимое пространство, ассоциированное с топологическим векторным пространством $\operatorname{Ext}^q_{\boldsymbol{O},c}(X; \boldsymbol{F}, \Omega^p)$. Тогда имеет место следующая теорема двойственности, аналогичная теореме 5.

Для любых целых положительных p и q топологическое векторное пространство $\widetilde{\operatorname{Ext}}^{n-q}_{\boldsymbol{O},c}(X; \boldsymbol{F}, \Omega^{n-p})$ канонически изоморфно сильному сопряженному к топологическому векторному пространству $\tilde{H}^q(X; \Omega^p \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F})$ [11].

Ниже воспользуемся этим результатом. Кроме того, понадобятся следующие леммы.

Лемма 14. *Пусть E — топологическое векторное пространство, M — замыкание нуля в E, $\tilde{E} = E/M$ — ассоциированное с E отделимое топологическое векторное пространство и $\varphi: E \to \tilde{\boldsymbol{E}}$ — каноническое отображение. Тогда для любого линейного проектора p пространства E на M биективное линейное отображение*

$$(\varphi, p): E \to \tilde{E} \times M$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств.

Доказательство. Так как топология пространства E индуцирует в M тривиальную топологию, то проектор p непрерывен. Если e — тождественное отображение пространства E на себя и $q = e - p$, то отображение $(x, y) \mapsto q(x) + y$ пространства $\tilde{E} \times M$ в E непрерывно и обратно к отображению (φ, p). Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть $f: E \to F$ — биективное непрерывное линейное отображение топологических векторных пространств. Если ассоциированное с ним отображение $\tilde{f}: \tilde{E} \to \tilde{F}$ отделимых топологических векторных пространств является изоморфизмом, то и отображение f есть изоморфизм топологических векторных пространств.*

Доказательство. Пусть M и N — замыкания нуля соответственно в E и F. Так как отображение f непрерывно, то $f(M) \subset N$. Из коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \tilde{E} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & F \arrow[r] & \tilde{F} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

и из леммы о пяти гомоморфизмах следует, что отображение f индуцирует изоморфизм векторных пространств M и N.

Следовательно, если p_E — линейный проектор пространства E на M, то существует линейный проектор p_F пространства F на N, для которого $p_F \cdot f = f \cdot p_E$. Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ \tilde{E} \times M \arrow[r, "(\tilde{f}, f)"] & \tilde{F} \times N \end{tikzcd}$$

в которой по лемме 14 вертикальные стрелки будут изоморфизмами топологических векторных пространств. Поскольку очевидно, что отображение $(\tilde{f}, f): \tilde{E} \times M \to \tilde{F} \times N$ также является изоморфизмом топологических векторных пространств, то лемма доказана.

Пучок $\boldsymbol{F}$ называется *локально свободным*, если для каждой точки многообразия X существует открытая окрестность, над которой пучок $\boldsymbol{F}$ изоморфен, как $\boldsymbol{O}$-модуль, пучку $\boldsymbol{O}^m$ при некотором целом положительном m.

Предложение 8. *Если пучок $\boldsymbol{F}$ локально свободен, то существуют канонические биективные отображения*

$$\begin{aligned} &H^q(X; \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \Omega^p)) \to \operatorname{Ext}^q_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{F}, \Omega^p), \\ &H^q_c(X; \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \Omega^p)) \to \operatorname{Ext}^q_{\boldsymbol{O}, c}(X; \boldsymbol{F}, \Omega^p), \end{aligned} \tag{16}$$

являющиеся изоморфизмами топологических векторных пространств.

Доказательство. По лемме Дольбо — Гротендика имеет место точная последовательность пучков

$$0 \to \Omega^p \to \boldsymbol{D}^{p, 0} \xrightarrow{d''} \boldsymbol{D}^{p, 1} \to \dots$$

Так как пучок $\boldsymbol{F}$ локально свободен, то последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \Omega^p) \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{p, 0}) \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{p, 1}) \to \dots$$

также точна и, следовательно, является мягкой резольвентой пучка $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \Omega^p)$. Тем самым определены канонические биективные отображения векторных пространств

$$\begin{aligned} &H^q(X; \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \Omega^p)) \to H^q \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{p, *}), \\ &H^q_c(X; \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \Omega^p)) \to H^q \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{O}, c}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{D}^{p, *}), \end{aligned} \tag{17}$$

с помощью которых и получаем алгебраические изоморфизмы (16).

Отображения (17) непрерывны (см. § 4). Следовательно, переходя к отделимым пространствам, получаем сюръективные и непрерывные отображения

$$\begin{gathered}\tilde{H}^{q}(X;\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\ \Omega^{p}))\to\widetilde{\mathrm{Ext}}^{q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{p}),\\ \tilde{H}^{q}_{c}(X;\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\ \Omega^{p}))\to\widetilde{\mathrm{Ext}}^{q}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^{p}).\end{gathered}\tag{18}$$

Сопряженные к ним отображения

$$\tilde{H}^{n-q}_{c}(X;\ \Omega^{n-p}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})\to\widetilde{\mathrm{Ext}}^{n-q}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\ \Omega^{p}),\ \Omega^{n}),$$
$$\tilde{H}^{n-q}(X;\ \Omega^{n-p}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})\to\widetilde{\mathrm{Ext}}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\ \Omega^{p}),\ \Omega^{n})$$

также сюръективны, поскольку имеет место канонический изоморфизм $\boldsymbol{O}$-модулей

$$\Omega^{n-p}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F}\approx\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\ \Omega^{p}),\ \Omega^{n}),$$

так как пучок $\boldsymbol{F}$ локально свободен. Отсюда находим, что отображения (18) биективны и потому являются изоморфизмами соответственно пространств Фреше и сильных сопряженных к пространствам Фреше. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 15.

Полагая в предложении 8 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O}$, получаем результат Г. Б. Лауфера [6, теорема 2.1]. В качестве следствия из предложения 8 и теоремы 5 получаем.

Предложение 9. *Если пучок $\boldsymbol{F}$ локально свободен, то для любых целых положительных p и q топологическое векторное пространство $\tilde{H}^{n-q}(X;\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F},\ \Omega^{n-p}))$ канонически изоморфно сильному сопряженному к топологическому векторному пространству $\tilde{H}^{q}_{c}(X;\ \Omega^{p}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{F})$.*

Полагая в этом предложении $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O}$, с помощью леммы 14 получаем результат Г. Б. Лауфера [6, теорема 3.1].

Пусть V — аналитическое расслоенное пространство с векторным слоем и с базой X (см. например, [4]). Если $\boldsymbol{O}(V)$ — пучок ростков голоморфных сечений пространства V, то

$$\Omega^{p}(V)=\Omega^{p}\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{O}(V)$$

и

$$\Omega^{p}(V')=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{O}(V),\ \Omega^{p})$$

— пучки ростков голоморфных внешних дифференциальных форм степени p со значениями соответственно в V и в аналитическом расслоенном пространстве V', сопряженном к V.

Таким образом, предложение 9 допускает следующую равносильную формулировку, по существу принадлежащую Ж.-П. Серру [4].

Предложение 10. *Для любых целых положительных p и q топо-*

логическое векторное пространство $\tilde{H}^{n-q}(X; \Omega^{n-p}(V'))$ *канонически изоморфно сильному сопряженному к топологическому векторному пространству* $\tilde{H}^q_c(X; \Omega^p(V))$.

§ 9. Одно приложение

Нам понадобится следующее утверждение, являющееся частным случаем одной теоремы Г.-Ё. Рейффена [25].

Лемма 16. *Если* M — *аналитическое множество комплексной размерности* d *на многообразии* X, *то*

$$H^k_c(M; \boldsymbol{F}) = 0 \quad (k \geqslant d+1)$$

для любого когерентного аналитического пучка $\boldsymbol{F}$ *на* $\boldsymbol{X}$.

Доказательство. Пусть M' — многообразие регулярных точек множества M. Так как когомологическая размерность имеет, по существу, локальный характер (ср. [24]), то при доказательстве равенств

$$H^k_c(M'; \boldsymbol{F}) = 0 \quad (k \geqslant d+1) \tag{19}$$

можно считать, что M' — аналитическое множество в области U пространства $\boldsymbol{C}^n$, задаваемое уравнениями $z_{d+1} = \dots = z_n = 0$. Поскольку при этом каждая голоморфная функция на M' продолжается естественным образом до голоморфной функции в некоторой открытой окрестности множества M', то пучок $\boldsymbol{O}_{M'}$ можно считать подпучком в $\boldsymbol{O}|M'$. Но тогда пучок $\boldsymbol{F}|M'$ допускает мягкую резольвенту

$$0 \to \boldsymbol{F}|M' \to (\boldsymbol{F}|M') \otimes_{\boldsymbol{O}_{M'}} \boldsymbol{E}_{M'} \xrightarrow{1 \otimes d''} \cdots$$

длины d, определяемую дифференциальными формами на M'. Тем самым утверждение (19) доказано. Рассуждая по индукции, можно считать, что утверждение леммы доказано для аналитических множеств размерности, меньшей d. Тогда, в частности,

$$H^k_c(M \setminus M'; \boldsymbol{F}) = 0 \quad (k \geqslant d). \tag{20}$$

Ввиду (19) и (20) утверждение леммы следует теперь из точной последовательности когомологий, связанной с замкнутым множеством $M \setminus M'$.

Обозначим через $\operatorname{Supp} \boldsymbol{F}$ *носитель* пучка $\boldsymbol{F}$, т. е. множество тех x в X, для которых $\boldsymbol{F}_x \neq 0$. Если $\boldsymbol{I}$ — наибольший подпучок идеалов в $\boldsymbol{O}$, обладающий тем свойством, что $\boldsymbol{IF} = 0$, то $\operatorname{Supp} \boldsymbol{F}$ совпадает с множеством тех x в X, для которых $\boldsymbol{I}_x \neq \boldsymbol{O}_x$. Так как пучок $\boldsymbol{I}$ когерентен, то $\operatorname{Supp} \boldsymbol{F}$ является аналитическим множеством в X.

Предложение 11. *Пусть носитель* $\operatorname{Supp} \boldsymbol{F}$ *пучка* $\boldsymbol{F}$ *имеет комплексную размерность* d. *Тогда*

$$\operatorname{Ext}^{n-q}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \Omega^p) = 0$$

при любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant d+1$.

Доказательство. Прежде всего при любых целых положительных p и q имеют место канонические изоморфизмы

$$H_c^q(X; \Omega^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}} F) \approx H_c^q(\operatorname{Supp} F; \Omega^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}} F).$$

С другой стороны, по лемме 16

$$H_c^q(\operatorname{Supp} F; \Omega^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}} F) = 0$$

при $p \geqslant 0$, $q \geqslant d+1$. Следовательно, при каждом $q \geqslant d$ кограничный оператор

$$d_q'': \Gamma_c(X; E^{n-p, q} \otimes_{\mathcal{O}} F) \to \Gamma_c(X; E^{n-p, q+1} \otimes_{\mathcal{O}} F)$$

есть гомоморфизм топологических векторных пространств, и потому пространства $\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}}^{n-q}(X; F, \Omega^p)$ $(q \geqslant d)$ отделимы. Таким образом, наше утверждение следует из теоремы 5.

Возьмем теперь вместо всего X какую-нибудь открытую окрестность произвольной точки. Переходя к индуктивному пределу по фильтрующемуся множеству всех таких окрестностей (фиксированной точки), получим следующий результат Г. Кернера (ср. [17]).

Если d — комплексная размерность носителя пучка F, то

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}}^{n-q}(F, \Omega^p) = 0$$

при любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant d+1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Cartan, J.-P. Serre, Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, **237**, № **2**, 1953.
2. Y.—T. Siu. Non — countable dimensions of cohomology groups of analytic sheaves and domains of holomorphy, Math. Zs., **102**, № 1, 1967.
3. В. Д. Головин. Двойственность для когерентных аналитических пучков. ДАН СССР, **191**, № 4, 1970.
4. J.-P. Serre. Un théorème de dualité, Comm. Math. Helv., **29**, № 1, 1955.
5. Ж.-П. Серр. Некоторые задачи, связанные с изучением в целом многообразий Штейна. Сб. «Расслоенные пространства». ИЛ, 1958.
6. H. B. Laufer. On Serre duality and envelopes of holomorphy, Trans Amer. Math. Soc., **128**, № 3, 1967.
7. О. Зариский. Теория алгебраических пучков. Сб. «Математика», **4**, № 2, 1960.
8. A. Grothendieck. Théorèmes de dualité pour les faisceaux algebriques cohérents. Séminaire Bourbaki, **9**, 149/I—149/25, 1956—1957.
9. B. Malgrange. Systemes différentils a coefficients constants, Séminaire Bourbaki, **15**, 1962—1963.
10. K. Suominen. Duality for coherent sheaves on analytic manifolds, Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. AI, № **424**, 1968.
11. В. Д. Головин. Теоремы двойственности для когомологий комплексных многообразий. Сб. «Функциональный анализ и его приложения», **4**, № 1, 1970.
12. В. Д. Головин. О пространствах когомологий с компактными носителями. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 15, Харьков, Изд-во ХГУ, 1971.
13. Б. Мальгранж. Идеалы дифференцируемых функций. Изд-во «Мир», 1968.

14. В. Д. Головин. Двойственность для когомологий с компактными носителями. ДАН СССР, **199**, № 4, 1971.
15. C. Bănică, O. Stanasilă. Sur la profondeur dun faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein, C. R. Acad. Sci. Paris, **269**, № 15, A636—A639, 1969.
16. C. Bănică, O. Stănăşilă. Some results on the extension of analytic entities defined out of a compact, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, **25**, № 2 (1971), 347—376.
17. H. Kerner. Kohärente analytische Garben mit niederdimensionalem Träger, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.—naturwiss. Kl., (1966), 41—51.
18. А. Гротендик. О пространствах (F) и (DF). Сб. «Математика», **2**: 3, 1958.
19. H. Cartan. Ideaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **61** (1944), 149—197.
20. A. Weil. Sur les théorémes de de Rham, Comm. Math. Helv., **26**, № 2 (1952), 119—145.
21. Ж. Себаштьян-и-Силва. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях. Сб. «Математика», **1**: 1, 1957.
22. Д. А. Райков. О двух классах локально выпуклых пространств., Труды Воронежск. семинара по функц. анализу, **5**, 1957.
23. А. Гротендик. О некоторых вопросах гомологической алгебры. ИЛ, 1961.
24. Р. Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. ИЛ, 1961.
25. H.—J. Reiffen. Riemannsche Hebbarkeits sätze für Cohomologieklassen mit kompaktem Träger, Math. Ann., **164**, 3, 1966.

Поступила 5 мая 1971 г.

ПО ПОВОДУ ОДНОЙ РАБОТЫ В. ВИЛЛАНИ

В. Д. Головин

Харьков

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, счетное в бесконечности, $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ — возрастающая последовательность открытых множеств в X такая, что $\bigcup X_p = X$, и $\boldsymbol{F}$ — когерентный аналитический пучок на X. Тогда при каждом $k = 0, 1, \ldots$ определено каноническое отображение

$$H^k(X;\ \boldsymbol{F}) \to \varprojlim H^k(X_p;\ \boldsymbol{F}), \tag{1}$$

которое, вообще говоря, не биективно. В настоящей работе исследуются условия, при которых отображение (1) является изоморфизмом.

1. Будем считать, что пространства $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ и $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F}.)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ наделены их обычными топологиями [1]. Через $\widetilde{H}^k(X;\ \boldsymbol{F})$ и $\widetilde{H}^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ обозначим отделимые топологические векторные пространства, ассоциированные соответственно с пространствами $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ и $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$.

Теорема 1. *При каждом* $k = 0, 1, \ldots$ *каноническое отображение*

$$\check{H}^k(X;\ \boldsymbol{F}) \to \varprojlim \check{H}^k(\boldsymbol{X}_p;\ \boldsymbol{F}) \tag{2}$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств.

Доказательство. Топологические векторные пространства $\mathrm{Ext}^{n-k}_{\boldsymbol{O},\,c}(X_p;\ \boldsymbol{F}\Omega^n)$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$, где Ω^n — пучок ростков голоморфных внешних дифференциальных форм степени $n=\dim_C X$, образуют индуктивную систему, индуктивный предел которой алгебраически отождествим с пространством $\mathrm{Ext}^{n-k}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n)$. С другой стороны, топология пространства $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k})$, где $\boldsymbol{D}^{n-k}$ — пучок ростков потоков двойной степени $(n,\ n-k)$, есть сильнейшая из локально выпуклых топологий, для которых непрерывны отображения

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\,c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k})$$

$(p=1,\ 2,\ \ldots)$. Так как пространства $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k})$, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\,c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k})$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$ являются сильными сопряженными к некоторым пространствам Фреше и Шварца и так как

$$\mathrm{Ext}^{n-k}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n) = H^{n-k}\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^*),$$
$$\mathrm{Ext}^{n-k}_{\boldsymbol{O},\,c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n) = H^{n-k}\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\,c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^*),$$

то канонические отображения

$$\varinjlim \mathrm{Ext}^{n-k}_{\boldsymbol{O},\,c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n) \to \mathrm{Ext}^{n-k}_{\boldsymbol{O},\,c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n)$$

являются изоморфизмами топологических векторных пространств. В силу теоремы двойственности [1, теорема 1] отсюда следует, что сопряженные отображения (2) также будут изоморфизмами топологических векторных пространств. Теорема доказана.

Следствие. *Если пространства* $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ и $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$ *отделимы, то отображение* (1) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Замечание. В. Виллани доказал следующую теорему [2, теорема 3]: *если пространства* $H^i(X;\ \boldsymbol{F})$, $H^i(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(i=0,\ 1,\ \ldots\ k;$ $p=1,\ 2,\ \ldots)$ *отделимы и* $H^i(X_p;\ \boldsymbol{F})=0$ $(i=k,\ k+1,\ \ldots,\ p=1,\ 2,\ \ldots)$, *то* $H^k(X;\ \boldsymbol{F})=0$ (здесь X — комплексное аналитическое пространство, являющееся объединением открытых множеств $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$). Сформулированное выше следствие из теоремы 1 показывает, что на самом деле по крайней мере для комплексных многообразий имеет место более точный результат: *если при некотором k пространство* $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ *отделимо и* $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F})=0$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$, *то* $H^k(X;\ \boldsymbol{F})=0$.

2. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пространство* $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ *отделимо тогда и только тогда, когда отделимо пространство* $\mathrm{Ext}^{n-k+1}_{\boldsymbol{O},\,c}(X);\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n)$.

Доказательство. Пространство $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо тогда и только тогда, когда внешний дифференциал

$$d'' : \Gamma(X;\ \boldsymbol{E}^{k-1} \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}) \to \Gamma(X;\ \boldsymbol{E}^k \otimes_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{F}),$$

где E^k — пучок ростков бесконечно дифференцируемых внешних дифференциальных форм двойной степени $(0, k)$, имеет замкнутый образ, т. е. является гомоморфизмом топологических векторных пространств (считаем, что $k \geqslant 1$, так как при $k = 0$ утверждение тривиально). Это равносильно тому, что сопряженное отображение

$$ {}^t d'' : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k+1}) $$

имеет замкнутый образ, т. е. равносильно отделимости пространства $\mathrm{Ext}^{n-k+1}_{\boldsymbol{O},\, c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n)$.

Теорема 2. *Пусть при некотором $k \geqslant 1$ пространства $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ отделимы и пусть при каждом $p = 1, 2, \ldots$ образ пространства $H^{k-1}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$ всюду плотен в $H^{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$. Тогда пространство $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо и, следовательно, отображение* (1) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Доказательство. Согласно лемме, из отделимости пространств $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ следует отделимость пространств $\mathrm{Ext}^{n-k+1}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n)$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Так как при каждом $p = 1, 2, \ldots$ отображение сужения

$$ H^{k-1}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F}) \to H^{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F}) $$

имеет всюду плотный образ, то сопряженное отображение

$$ \mathrm{Ext}^{n-k+1}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n) \to \mathrm{Ext}^{n-k+1}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F},\ \Omega^n) $$

инъективно. Это означает, что

$$ d''\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k}) \cap \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k+1}) = \\ = d''\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k}). $$

Поэтому пересечение

$$ d''\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k}) \cap \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k+1}) = \\ = d''\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k}) $$

при каждом $p = 1, 2, \ldots$ замкнуто в пространстве $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_p;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k+1})$. Так как каждое ограниченное множество из $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k+1})$ содержится в одном из пространств $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X_p;\ \boldsymbol{F};\ \boldsymbol{D}^{n-k+1})$, то по известной теореме Банаха подпространство $d''\,\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k})$ замкнуто в $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O},\, c}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{D}^{n-k+1})$.

Следовательно, пространство $\mathrm{Ext}^{n-k+1}_{\boldsymbol{O},\, c}(X;\ \boldsymbol{F};\ \Omega^n)$ отделимо, а тогда и $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо. Теорема доказана.

Следствие. *Если при некотором $k \geqslant 1$ пространства $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ отделимы и $H^{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F}) = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то пространство $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо и отображение* (1) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Замечание. Частным случаем предыдущего следствия является хорошо известное утверждение [2, теорема 1]: *если $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F}) = 0$ и $H^{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F}) = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то $H^k(X;\ \boldsymbol{F}) = 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Головин. Теоремы двойственности для когомологий комплексных многообразий. Сб. «Функциональный анализ и его приложения», 4, № 1, 1970.

2. V. Villani. Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi, Rend. Accad. Naz. Lincei, 43, № 3—4 (1967).

Поступила 20 октября 1971 г.

ЖЕСТКОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Т. А. Горзий

Харьков

В работе [1] были указаны преобразования, которые сопоставляют каждой паре изометричных фигур пространства постоянной кривизны R_3 пару фигур евклидова пространства E_3, находящегося с R_3 в геодезическом соответствии. С их помощью доказана теорема жесткости для общих замкнутых выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве R_3.

В настоящей работе для случая эллиптического пространства n измерений с помощью таких преобразований доказаны

Теорема 1. *Общая замкнутая выпуклая гиперповерхность эллиптического пространства, целиком лежащая в полугиперсфере, не содержащая плоских областей размерности $n-1$, жесткая. В случае, если гиперповерхность содержит плоские области, она жесткая вне этих областей.*

Теорема 2. *Выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности $n-1$, жесткая в окрестности каждой своей точки строгой выпуклости. Если гиперповерхность содержит плоские области, то она жесткая вне плоских областей.*

Рассмотрим n-мерное эллиптическое пространство с кривизной $1 - R_n$. Введем вейерштрассовы координаты

$$x_i \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

Удалим из R_n плоскость $x_0 = 0$, оставшуюся часть пространства обозначим R_n^0. Тогда результаты § 3 работы [1] с очевидными изменениями переносятся на случай пространства R_n^0.

Пусть Φ — общая выпуклая гиперповерхность в E_n^0, y — радиус-вектор, $z(y)$ — изгибающее поле. По теореме Александрова о дифференциальном свойстве изгибающего поля [3, 4] z удовлетворяет условию Липшица в каждой компактной области на поверхности и почти везде $dz\,dy = 0$. Поставим в соответствие гиперповерхности Φ евклидова пространства гиперповерхность F эллиптического пространства, радиус-вектор которой

$$x = \frac{y + e_0}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Изгибающему полю $z(y)$ поставим в соответствие векторное поле

$$\zeta(x) = \frac{z - e_0(yz)}{\sqrt{1 + y^2}};$$

$\zeta(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $x\zeta = 0$. Легко показать, что ζ — изгибающее поле гиперповерхности F в эллиптическом пространстве. Если z тривиальное, то поле ζ тоже будет тривиальным [1, лемма 6, § 3].

Рассмотрим теперь изгибающее поле ζ $(x\zeta = 0)$ гиперповерхности F эллиптического пространства. Пусть $x(s)$ — произвольная спрямляемая кривая γ на гиперповерхности F. По определению бесконечно малого изгибания кривая γ_t, заданная уравнением $x_t = x + t\zeta$, тоже должна быть спрямляемой. Отсюда получается, что ζ должно удовлетворять условию Липшица. Длина кривой γ_t

$$l_\gamma(t) = \int |x_s' + t\zeta_s'|\, ds.$$

А поскольку функции x и ζ удовлетворяют условию Липшица и ζ — изгибающее поле, то

$$\lim_{t \to 0} \frac{e_\gamma(t) - e_\gamma}{t} = \int x'\zeta'\, ds = 0.$$

Так как равенство имеет место для любой дуги кривой, то почти всюду на l $x'\zeta' = 0$. Покажем, что векторное поле z является изгибающим для гиперповерхности Φ в E_n^0. На поверхности Φ кривой $x(s)$ соответствует кривая

$$y = \frac{x - e_0(xe_0)}{(e_0 x)}$$

длины L_γ. Кривой x_t соответствует кривая

$$y_t = y + t\,\frac{\zeta - e_0(\zeta e_0)}{(e_0 x)}$$

длины $L_\gamma(t)$;

$$\lim_{t \to 0} \frac{L_\gamma(t) - L_\gamma}{t} = \int \frac{y'z'}{|y'|}\, ds.$$

Принимая во внимание, что $x\zeta = 0$ и $x'\zeta' = 0$, получаем

$$\lim_{t \to 0} \frac{L_\gamma(t) - L_\gamma}{t} = 0,$$

т. е. z — поле бесконечно малого изгибания гиперповерхности Φ. Если поле ζ тривиально, то поле z тоже тривиально [1, лемма 5, § 3].

Таким образом, между бесконечно малыми изгибаниями соответствующих общих выпуклых гиперповерхностей пространств R_n и E_n существует связь, устанавливаемая теоремой [2]:

Если ζ является полем бесконечно малого изгибания общей выпуклой гиперповерхности F пространства R_n, то

$$z = \frac{\zeta - e_0(\zeta e_0)}{(e_0 x)}$$

будет полем бесконечно малого изгибания гиперповерхности $y = \frac{x - e_0(e_0 x)}{(e_0 x)}$ *евклидова пространства E_n. Поле z тривиально тогда и только тогда, когда тривиально поле ζ.*

Докажем теорему 1.

Рассмотрим замкнутые выпуклые гиперповерхности эллиптического пространства, целиком лежащие в открытой полугиперсфере. Соответствие поверхностей эллиптического и евклидова пространств, определяемое теоремой, осуществляется вне зависимости от их бесконечно малых изгибаний и получается при геодезическом отображении одного пространства на другое. При геодезическом отображении эллиптического пространства на евклидово выпуклые гиперповерхности переходят в выпуклые, а так как замкнутые выпуклые гиперповерхности евклидова пространства, не содержащие плоских кусков размерности $n-1$, жесткие [3], то по теореме замкнутые выпуклые гиперповерхности эллиптического пространства, не содержащие плоских кусков размерности $n-1$,— жесткие.

Докажем теперь теорему 2. Рассмотрим выпуклую гиперповерхность F в эллиптическом пространстве. Пусть P — точка строгой выпуклости. Нужно доказать, что F — жесткая в окрестности точки P вне плоских областей.

В евклидовом пространстве точке P соответствует точка P^*, также являющаяся точкой строгой выпуклости. Действительно, преобразования Погорелова геодезические; и если предположить, что через P^* проходит прямолинейный отрезок, то обратным преобразованием в эллиптическом пространстве получим, что отрезок должен проходить и через точку P; это противоречит условию строгой выпуклости точки P.

По теореме 4 [3] изгибающее поле z в окрестности точки строгой выпуклости является тривиальным, тогда ζ будет тривиальным и в окрестности точки P.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве. Харьков, Изд-во ХГУ, 1960.

2. А. В. Погорелов. Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей. Харьков, Изд-во ХГУ, 1959.

3. Е. П. Сенькин. Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей. «Укр. геометр. сб.», вып. 12, Харьков, Изд-во ХГУ, 1972.

4. А. Д. Александров. О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей. «Матем. сб.», 1(43) : 3, 1936.

Поступила 24 января 1972 г.

О ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОТРЕЗКАХ НА ГРАНИЦЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Б. А. Иванов

Ленинград

1. В работе Эвальда, Лармана, Роджерса[1] показано, что направления всех отрезков, лежащих на границе ∂K выпуклого тела K в R^n имеют заведомо неполную меру на S^{n-1}, точнее σ-конечную $(n-2)$-мерную меру на S^{n-1}. Используя построения указанной работы, докажем следующее.

Теорема. *Если продлить в R^n все отрезки ненулевой длины, лежащие на границе выпуклого тела K в R^n, то полученные прямые заполняют в R^n множество σ-конечной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа.*

Назовем точку O вне тела K особой, если конус, образованный лучами, проведенными из O в точки тела K, имеет на своей границе хотя бы один луч, контактирующий с границей тела K более чем в одной точке. Из теоремы следует, что *в этом смысле почти все точки $R^n \setminus K$ не особые.*

2. Перейдем к доказательству теоремы. Если K бесконечно, разобьем его на счетное число компактных выпуклых тел. Поэтому считаем далее K компактным. Внутри K фиксируем точку O и вместо всего R^n рассматриваем все прямые только в пределах содержащего K шара $B(O, R)$ с центром в O и радиусом R. Придавая R значения N, $N+1$, ..., исчерпаем все R^n.

Как и в названной работе, рассмотрим здесь не все отрезки на поверхности K, а лишь отрезки, пересекающие пару параллельных плоскостей, проходящих через внутренние точки тела K. Выбор счетного количества таких пар плоскостей охватит все отрезки. Докажем, что продолжения отрезков, ассоциированных в этом смысле с конкретной парой гиперплоскостей π_0, π_1, заполняют в пределах шара $B(0, R)$ множество конечной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа.

3. Аналогично указанной работе без ограничения общности можно ввиду подобия считать, что гиперплоскости π_0, π_1 имеют уравнения $x_1 = 0$, $x_1 = 1$. Это только заставит нас изменить радиус шара R на $R\delta^{-1}$, где δ — прежнее расстояние между π_0 и π_1. Для простоты сохраним за радиусом прежнее обозначение R.

Пусть $K_0 = K \cap \pi_0$, $K_1 \cap \pi_1$ и $x_0 \in \partial K_0$, $x_1 \in \partial K_1$ такие, что отрезок x_0x_1 лежит на границе K. Для доказательства теоремы достаточно показать: объединение множеств $\bigcup\limits_{-R \leqslant t \leqslant R} \{x_0 + t(x_1 - x_0)\}$ по всем таким x_0 и x_1 имеет $(n-1)$-мерную конечную меру. Можно положить $t \geqslant 0$; затем, поменяв ролями K_0 и K_1, учтем и случай

---

[1] G. Ewald, D. G. Larman and C. A. Rogers. The directions of the line segments and of the r-dimensional balls on the boundary of a convex body in Euclidean space. Mathematika, 33, 1970.

$t \leqslant 0$. Достаточно считать, что $t > 1$ (при $0 \leqslant t \leqslant 1$ наше множество лежит на ∂K).

Из построений работы Эвальда и др. следует, что при каждом $\varepsilon > 0$ границу $(n-1)$-мерного тела $K_0 + K_1$ можно покрыть конечным числом шапочек[1] $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, причем минимальная ширина Γ_i лежит между 2ε и $36(n-1)\varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots, m$ и $\sum_{i=1}^{m} V_{n-1}(\Gamma_i) \leqslant C_1\varepsilon$, где C_1 не зависит от ε.

Пусть $\Gamma_i^{(0)}$, $\Gamma_i^{(1)}$ — соответствующие шапочки тел K_0, K_1 (см. названную работу).

Зафиксируем конкретное t $(1 \leqslant t \leqslant R)$ и рассмотрим множество $F_i(t) = \{x_0 + t(x_1 - x_0)\}$, где на этот раз x_0, x_1 пробегают все точки из $\Gamma_i^{(0)}$, $\Gamma_i^{(1)}$.

4. Наша ближайшая цель — показать, что $F_i(t)$ можно покрыть набором N_i шаров диаметра d_i, причем $8t\sqrt{n-1}\,\varepsilon \leqslant d_i \leqslant 144nt\sqrt{n-1}\,\varepsilon$, а $\bigcup_{i=1}^{m} F_i(t)$ можно покрыть системой N_1 шаров диаметра $d_1, \ldots, N_m$ шаров диаметра d_m так, что $\sum_{i=1}^{m} N_i d_i^{n-2} \leqslant C_2 R^n$, где C_2 не зависит от ε.

Подобно тому как при доказательстве теоремы 1 (работа Эвальда и др.) установим, что $F_i(t) \subset \Gamma_i^{(0)} + t(\Gamma_i^{(1)} - \Gamma_i^{(0)})$.

Обозначив буквой T операции параллельного перенесения, заключаем:

$$F_i(t) \subset T_1(\Gamma_i) + tT_2(D\Gamma_i),$$

где $D\Gamma_i$ — разностное тело шапочки Γ_i. Далее

$$F_i(t) \subset T_3(D\Gamma_i) + tT_2(D\Gamma_i) = T_4\, 1 + t)\, D\Gamma_i \subset T_2\, 2tD\Gamma_i.$$

Для $(n-1)$-объема V_{n-1} и ширины w тела $2tD\Gamma_i = D^i$ имеем

$$V_{n-1}(D_i) \leqslant 2^{3n-1} t^{n-1} V_{n-1}(\Gamma_i),$$

$$8t\varepsilon \leqslant w(D_i) \leqslant 144nt\varepsilon.$$

Тело D_i можно покрыть набором N_i шаров диаметра $d_i = w(D_i)\sqrt{n-1}$, причем, согласно названной работе,

$$N_i w(D_i)\, d_i^{n-2} \leqslant (2\sqrt{n})^n (n!)\, V_{n-1}(D_i).$$

Следовательно, $\bigcup_{i=1}^{m} F_i(t)$ можно покрыть системой N_1 шаров диаметра d_1, N_2 шаров диаметра $d_2, \ldots, N_m$ шаров диаметра d_m так, что $\sum_{i=1}^{m} N_i d_i^{n-2} \leqslant C_2 R^n$, где C_2 не зависит от ε.

---

[1] Было бы точнее говорить «горбушки», так как имеются в виду $(n-1)$-мерные тела шапочек.

5. Проведем на расстояниях ε гиперплоскости π_k параллельные π_0, пересекающие шар $B(O, R)$. Таких плоскостей конечное число $p = C_3\varepsilon^{-1}$, где C_3 зависит только от R. Рассмотрим множество $F_i(t)$ при значениях $t = t_k = 1 + k\varepsilon$, где $k = 1, 2, \ldots, p$. Множество $F_i(t_k)$ по доказанному в 4 покроем набором N_i шаров с диаметрами d_i, а затем увеличим их до $\tilde{d}_i = 36n^2Rd_i = C_4d_i$. Тогда $\Phi_i(t) = \bigcup\limits_{1 \leqslant t \leqslant R} F_i(t)$ покрывается набором pN_i шаров диаметра $\tilde{d}_i$, а $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \Phi_i(t)$ покрывается системой pN_1 шаров диаметра $\tilde{d}_1, \ldots, pN_m$ шаров диаметра $\tilde{d}_m$ так, что

$$\sum_{i=1}^{m} pN_i(\tilde{d}_i)^{n-1} \leqslant pC_4^{n-1}C_1R^n\, 144\, nt\sqrt{n-1}\,\varepsilon \leqslant C_5R^{n+1}.$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

Автор благодарит В. А. Залгаллера за помощь в работе.

Поступила 10 декабря 1971 г.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С СИММЕТРИЕЙ ПРАВИЛЬНОГО 600-ГРАННИКА В ПРОСТРАНСТВЕ E^4

В. Ф. Игнатенко

Симферополь

А. С. Лейбин

Харьков

Пусть G^{60} — группа симметрий правильного 600-гранника в четырехмерном евклидовом пространстве E^4, ее 60 плоскостей симметрии проходят через начало координат и имеют нормированные уравнения $\eta_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, 60)$; F_n^{60} — трехмерная алгебраическая поверхность порядка n, инвариантная относительно группы G^{60}, т. е. переходящая в себя при отражении в любой плоскости $\eta_s = 0$; φ — многочлен от четырех переменных.

В этой заметке будет показано, что общее уравнение поверхности F_n^{60}, не содержащей своих плоскостей симметрии, имеет вид

$$\varphi\left(\sum_{s=1}^{60} \eta_s^{12}, \quad \sum_{s=1}^{60} \eta_s^{20}, \quad \sum_{s=1}^{60} \eta_s^{30}, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) = 0.$$

Доказательство этого приведено в пп. 2°—4°; в п. 1° отмечены некоторые свойства элементов симметрии группы [1].

1°. Обозначим через L_h^{60} $(h = 1, 2, 3)$ элементы симметрии группы G^{60}, отличные от сферического элемента симметрии $L_4 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$. Если n_h — степень однородного многочлена L_h^{60}, то, согласно [1],

$$\sum_{h=1}^{3} n_h \geqslant 62. \tag{1}$$

Напомним, что элементы симметрии данной группы при заданных плоскостях ее симметрии определяются, вообще говоря, неоднозначно. Например, в работах [2, 3] для группы тетраэдра в E^3 с плоскостями симметрии $x_i \pm x_j = 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i < j)$ приводятся такие элементы симметрии 4-й степени:

$$L_2^6 = \sum_{i=1}^{3} x_i^4 - 2 \sum_{\substack{i, j=1\\ i<j}}^{3} x_i^2 x_j^2, \quad \tilde{L}_2^6 = \sum_{\substack{i, j=1\\ i<j}}^{3} x_i^2 x_j^2;$$

если $L_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$ (сферический элемент симметрии), то, очевидно,

$$L_2^6 = (L_3)^2 - 4\tilde{L}_2^6.$$

2°. Зададим плоскости симметрии группы G^{60} правильного 600-гранника уравнениями

$$x_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0; \tag{2}$$
$$x_i \pm \lambda x_j \pm \mu x_k = 0,$$

где $i, j, k = (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 2)$ или $(2, 4, 3)$; скобки здесь означают, что индексы i, j, k пробегают все циклические перестановки чисел, стоящих в скобках; $\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $\mu = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Будем искать элементы симметрии L_h^{60} степеней $n_h < 60$. Уравнение $L_h^{60} = 0$ определяет 3-конус порядка n_h с вершиной в начале координат. Проходящая через начало координат 3-плоскость пересекает этот 3-конус по 2-конусу порядка n_h.

Рассмотрим 3-конусы $L_1^{60} = 0$ и $L_2^{60} = 0$. Они пересекаются друг с другом по 2-конусу K_{12} порядка $n_1 n_2$, инвариантному относительно группы G^{60}. Пересечем конус K_{12} плоскостью $x_4 = 0$; пересечение будет состоять из конечного множества Q_2 2-плоскостей, общих обоим 3-конусам, и из множества Q_1 прямых, не лежащих в этих 2-плоскостях и также общих обоим 3-конусам (одно из множеств Q_1, Q_2 может оказаться пустым). Пусть Q_1 и Q_2 имеют ровно q_1 и q_2 элементов соответственно. Тогда $q_1 + q_2 = n_1 n_2$.

Поскольку плоскость $x_4 = 0$ ортогональна плоскостям симметрии

$$x_i = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$
$$x_i \pm \lambda x_j \pm \mu x_k = 0, \quad i, j, k = (1, 2, 3), \tag{3}$$

множества Q_1 и Q_2 инвариантны относительно отражений в плоскостях (3); уравнения (3) вместе с $x_4 = 0$ являются уравнениями 2-плоскостей симметрии правильного икосаэдра, лежащего в плоскости $x_4 = 0$. Если прямая p, принадлежащая Q_1, не лежит ни в одной из этих 2-плоскостей, то все ее 59 отражений в них также принадлежат Q_1, — вместе с p получаем 60 прямых из Q_1.

Если прямая p лежит в одной из 2-плоскостей симметрии икосаэдра и только в одной, то она имеет 29 отражений, — всего получаем 30 прямых из Q_1; если p лежит в пересечении двух, трех или пяти 2-плоскостей, то всего (со всеми отражениями) получаем соответственно 15, 10 или 6 прямых из Q_1. В случае, когда прямых 15, каждая принадлежит двум 2-плоскостям, и поэтому должна считаться дважды (двойной); если их 10 — каждая тройная, если их 6 — каждая прямая пятикратная. Следовательно, в любом случае число q_1 кратно 15. Аналогично убеждаемся, что и число q_2 кратно 15.

Так как степени n_1 и n_2 четны [4, п. 10°], произведение $n_1 n_2$ кратно 60. Такова же кратность, очевидно, и произведений $n_1 n_3$ и $n_2 n_3$. В работе [1] доказано, что $n_1 = 12$. Поэтому порядки элементов симметрии, большие 12, могут иметь значения только 20, 30, 60 и т. д. Из неравенства (1) находим, что $n_2 + n_3 \geqslant 50$. Поэтому L_2^{60} и L_3^{60} будем искать соответственно степени 20 и 30.

3°. Запишем функцию

$$\Theta_1 = \sum_{s=1}^{60} \eta_s^{12};$$

в работе [4] доказано, что $\Theta_1 \neq (L_4)^6$, поэтому ее можно взять в качестве элемента симметрии L_1^{60}. В развернутой записи функцию Θ_1 можно представить в виде

$$\Theta_1 = (L_4)^6 + 4L_1^{60},$$

где в качестве L_1^{60} взята более простая функция, чем Θ_1:

$$L_1^{60} = 15 \sum x_i^{10} x_j^2 + 120 \sum x_i^8 x_j^4 + 226 \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + 735 \sum_{j<k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 +$$
$$+ 3450 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 + 8640 \sum_{i<j<k\to} x_i^4 x_j^4 x_k^4 + 20\,760 \sum_{j<k<l\to} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 +$$
$$+ 51\,930 \sum_{\substack{i<j\\ k<l}} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2$$

(здесь $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ и все различны).

4°. Рассмотрим функцию

$$\Theta_2 = \sum_{s=1}^{60} \eta_s^{20} = 30\,753 \sum_{i=1}^{4} x_i^{20} + 7993 \sum_{i,\,j=1}^{4} x_i^{18} x_j^2 +$$
$$+ 11\,431 \sum_{i,\,j=1}^{4} x_i^{16} x_j^4 + \cdots, \qquad (4)$$

инвариантную, очевидно, относительно группы G^{60}. При этом ее нельзя представить в виде

$$\Theta_2 = a_1 (L_4)^{10} + a_2 (L_4)^4 L_1^{60}, \qquad (5)$$

так как, сравнивая коэффициенты при x_1^{20}, $x_1^{18} x_2^2$ и $x_1^{16} x_2^4$, получаем для a_1 и a_2 несовместную систему

$$a_1 = 30\,753, \quad 10a_1 + 15a_2 = 7993, \quad 45a_1 + 180a_2 = 11\,431.$$

Поэтому функция Θ_2 может быть взята в качестве L_2^{60}, и $n_2 = 20$.

Аналогично находим, что $n_3 = 30$ (это следует также из теоремы (В) работы [5]), и в качестве L_3^{60} можно взять функцию

$$\Theta_3 = \sum_{s=1}^{60} \eta_s^{30}.$$

Заметим, что последние два элемента симметрии L_2^{60} и L_3^{60} могут быть упрощены отбрасыванием подходящих выражений, аналогичных правой части равенства (5).

Таким образом, записанное в начале заметки общее уравнение поверхности F_n^{60} можно записать в виде

$$\varphi(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, L_4) = 0.$$

5°. Как в работах [2, 3], а также и в наших [1, 6] мы искали общее уравнение поверхности F_n^{60}, не содержащей своих плоскостей симметрии как компонент. Если же предположить, как в [7], что плоскости симметрии входят в состав поверхности F_n^{60} — это будет поверхность F_n^{*60}, то общее ее уравнение запишется так:

$$\varphi(L_1^{60}, L_2^{60}, L_3^{60}, L_4) \prod_{s=1}^{60} \eta^{r_s} = 0,$$

где $r_s \geqslant 0$ целое.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. Об алгебраических поверхностях в E^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника. «Укр. геометр. сб.», вып. 11, Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.

2. L. Lecornu. Sur les surfaces possèdant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. Acta Math., 10, 201—280, 1887.

3. E. Goursat. Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. Ann. sc. de l'Éc. Norm. (3), IV, 159—200, 1887.

4. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях ортогональной симметрии поверхностей евклидова пространства E^m. «Укр. геометр. сб.», вып. 8, Харьков, Изд-во ХГУ, 1970.

5. C. Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. Amer. J. of Math. LXXVII, 4, 778—782, 1955.

6. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. К общему уравнению алгебраической поверхности в E^4 с симметрией правильного 24-гранника. «Укр. геометр. сб.», вып. 12, Харьков, изд-во ХГУ, 1972.

7. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. Алгебраические поверхности с симметрией пирамид и бипирамид в E^4. «Укр. геометр. сб.», вып. 12, Харьков, Изд-во ХГУ, 1972.

Поступила 14 ноября 1971 г.

КОМПЛЕКСЫ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, У КОТОРЫХ ЦЕНТРЫ ЛУЧА СОВПАДАЮТ С КРАТНЫМИ ИНФЛЕКЦИОННЫМИ ЦЕНТРАМИ

В. Я. Ильяшенко

Луцк

§ 1. Предварительные соотношения

Рассмотрим гиперболическое пространство H_3, которое интерпретируется как внутренняя область овальной поверхности второго порядка (абсолюта), заданной в трехмерном проективном пространстве P_3.

Деривационные уравнения пространства H_3 имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

где A_α — аналитические вершины подвижного репера. При этом

$$\omega_i^0 = \frac{1}{R^2}\omega^i \quad (\omega_0^i = \omega^i), \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3),$$

$\omega_\alpha^\alpha = 0$, R — радиус кривизны пространства.

Уравнения структуры гиперболического пространства [1] имеют вид

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i],$$
$$D\omega_i^j = \frac{1}{R^2}[\omega^i\omega^j] + [\omega_i^k \omega_k^j].$$

Пусть K — произвольный комплекс пространства H_3. Поместим точки $A_0 = A$, A_3 в центры луча. Плоскости, соответствующие точкам A и A_3 в нормальной корреляции, совместим соответственно с плоскостями AA_3A_2, AA_3A_1. Уравнение комплекса в этом репере имеет вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1. \tag{1}$$

Продолжив (1), найдем

$$\begin{aligned} \omega^3 + k\omega_2^1 &= p\omega_3^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^1, \\ -\frac{k}{R^2}\omega^3 + \omega_2^1 &= \alpha\omega_3^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^1, \\ -dk &= \beta\omega_3^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^1. \end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы определить второе продолжение, дифференцируем внешним образом (2), и, использовав лемму Картана, получим

$$\begin{aligned} -dp + 2\beta\omega_2^1 &= p_1\omega_3^2 + p_2\omega^1 + p_3\omega_3^1, \\ -d\alpha + \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)\omega_3^1 + \gamma\omega_2^1 - \frac{\beta}{R^2}\omega^3 &= p_2\omega_3^2 + p_4\omega^1 + p_5\omega_3^1, \\ -d\beta + (r + \alpha k - p)\,\omega_2^1 - \frac{pk + \alpha R^2}{R^2}\omega^3 &= p_3\omega_3^2 + p_5\omega^1 + p_6\omega_3^1. \end{aligned} \tag{3}$$

$$-d\alpha + \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)\omega_3^1 - \frac{\beta}{R^2}\omega^3 + \gamma\omega_2^1 = q_1\omega_3^2 + q_2\omega^1 + q_3\omega_3^1,$$
$$-dq - \frac{2\gamma}{R^2}\omega^3 = q_2\omega_3^2 + q_4\omega^1 + q_5\omega_3^1, \tag{4}$$
$$-d\gamma + (qk - \alpha)\omega_2^1 - \frac{\alpha k + r + qR^2}{R^2}\omega^3 = q_3\omega_3^2 + q_5\omega^1 + q_6\omega_3^1.$$

$$-d\beta + r\omega_2^1 = r_1\omega_3^2 + r_2\omega^1 + r_3\omega_3^1,$$
$$-d\gamma - \frac{r}{R^2}\omega^3 = r_2\omega_3^2 + r_4\omega^1 + r_5\omega_3^1, \tag{5}$$
$$-dr + (\gamma k - \beta)\omega_2^1 - \frac{\beta k + \gamma R^2}{R^2}\omega^3 = r_3\omega_3^2 + r_5\omega^1 + r_6\omega_3^1.$$

Сравнивая (3_2) и (4_1), получаем

$$p_2 = q_1, \ p_4 = q_2, \ p_5 = q_3.$$

Отнимая от (3_3) равенство (5_1) и от (5_2) равенство (4_3), находим

$$r_3 = p_6 - \frac{(k^2 - R^2)(\alpha\beta + p\gamma) + 2k(\alpha\gamma R^2 - p\beta)}{R^2 + k^2}, \tag{A}$$
$$r_5 = q_6 - \frac{(k^2 - R^2)(\alpha\gamma + q\beta) + 2k(q\gamma R^2 - \alpha\beta)}{R^2 + k^2}.$$

Таким образом, второе продолжение имеет вид

$$-dp + 2\beta\omega_2^1 = p_1\omega_3^2 + p_2\omega^1 + p_3\omega_3^1,$$
$$-d\alpha + \gamma\omega_2^1 - \frac{\beta}{R^2}\omega^3 = p_2\omega_3^2 + p_4\omega^1 + \left(p_5 - \frac{k^2 + R^2}{R^2}\right)\omega_3^1,$$
$$-d\beta + (r - p + \alpha k)\omega_2^1 - \frac{pk + \alpha R^2}{R^2}\omega^3 = p_3\omega_3^2 + p_5\omega^1 + p_6\omega_3^1,$$
$$-dq - \frac{2\gamma}{R^2}\omega^3 = p_4\omega_3^2 + q_4\omega^1 + q_5\omega_3^1. \tag{6}$$
$$-d\gamma + (qk - \alpha)\omega_2^1 - \frac{\alpha k + r + qR^2}{R^2}\omega^3 = p_5\omega_3^2 + q_5\omega^1 + q_6\omega_3^1,$$
$$-dr + (\gamma k - \beta)\omega_2^1 - \frac{\beta k + \gamma R^2}{R^2}\omega^3 = r_3\omega_3^2 + r_5\omega^1 + r_6\omega_3^1.$$

Уравнение, определяющее инфлекционные центры, в этом репере следующее:

$$qt^4 - 2\gamma t^3 + (r + 2\alpha k)t^2 - 2\beta kt + pk^2 = 0 \tag{7}$$

(см. [1, формула 12]), где нужно положить $a = b = 0$).

§ 2. Комплексы, у которых один двойной инфлекционный центр совпадает с центром луча

Пусть точка A (центр луча) совпадает с двойным инфлекционным центром. Тогда из (7) получим

$$p = \beta = 0, \quad r + 2\alpha k \neq 0. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6_1), находим

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0.$$

Решим первые два уравнения (2) относительно ω^3, ω_2^1:

$$\omega^3 = \frac{(p - \alpha k) R^2}{R^2 + k^2} \omega_3^2 + \frac{(\alpha - kq) R^2}{R^2 + k^2} \omega^1 + \frac{(\beta - k\gamma) R^2}{R^2 + k^2} \omega_3^1,$$

$$\omega_2^1 = \frac{kp + \alpha R^2}{R^2 + k^2} \omega_3^2 + \frac{\alpha k + qR^2}{R^2 + k^2} \omega^1 + \frac{\beta k + \gamma R^2}{R^2 + k^2} \omega_3^1. \qquad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (6_3), получаем

$$\frac{\alpha R^2 (r + 2\alpha k)}{R^2 + k^2} = 0, \quad p_6 = \frac{\gamma R^2 (r + 2\alpha k)}{R^2 + k^2},$$

$$p_5 = \frac{qR^2 (r + 2\alpha k) + r\alpha k + \alpha^2 (k^2 - R^2)}{R^2 + k^2}. \qquad (10)$$

Из первого равенства (10) следует

$$\alpha = 0.$$

Таким образом, если двойной инфлекционный центр совпадает с центром луча, то

$$p = \alpha = \beta = 0, \quad r \neq 0. \qquad (11)$$

Уравнения (1), (2) принимают вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1,$$
$$\omega^3 + k\omega_2^1 = 0,$$
$$-\frac{k}{R^2} \omega^3 + \omega_2^1 = q\omega^1 + \gamma\omega_3^1, \qquad (12)$$
$$-dk = \gamma\omega^1 + r\omega_3^1.$$

Учитывая (11), из уравнения (6_2) находим

$$p_4 = \frac{q\gamma R^2}{R^2 + k^2}, \quad p_5 = \frac{\gamma^2 R^4 + (k^2 + R^2)^2}{R^2 (R^2 + k^2)}. \qquad (13)$$

Сравнивая значения p_5 из (10) и (13), получаем соотношения между параметрами второй дифференциальной окрестности

$$rq - \gamma^2 = \left(\frac{k^2 + R^2}{R^2}\right)^2. \qquad (14)$$

Последние три равенства (6) примут вид

$$-dq - \frac{2\gamma}{R^2} \omega^3 = p_4\omega_3^2 + q_4\omega^1 + q_5\omega_3^1,$$
$$-d\gamma + kq\omega_2^1 - \frac{r + qR^2}{R^2} \omega^3 = p_5\omega_3^2 + q_5\omega^1 + q_6\omega_3^1, \qquad (15)$$
$$-dr + \gamma k\omega_2^1 - \gamma\omega^3 = r_3\omega_3^2 + r_5\omega^1 + r_6\omega_3^1,$$

где p_4, p_5, p_6 определяются из (10), (13).

В принятых обозначениях [2]

$$s_1 = 2, \quad q = 2, \quad Q = s_1 = 2$$

(здесь q — первое характеристическое число).

Дифференцируя (14) и подставляя dr, dq, $d\gamma$ из (15), получаем два соотношения на параметры q_4, q_5, q_6, r_6, поэтому независимых параметров два ($N = 2$)

$$Q = N = 2.$$

Класс комплексов, у которых центр луча совпадает с двойным инфлекционным центром, существует с произволом в две функции одного аргумента. Обозначим исследуемый класс через C_{2c}.

Простые инфлекционные центры комплекса C_{2c} определяются уравнением

$$qt^2 - 2\gamma t + r = 0. \tag{16}$$

Для такого комплекса имеет место равенство

$$\Delta = \gamma^2 - rq = -\left(\frac{k^2 + R^2}{R^2}\right)^2. \tag{16'}$$

Вместе с тем Δ — дискриминант квадратного уравнения (16). Следовательно, простые инфлекционные центры у такого комплекса всегда мнимы.

Пусть (PQ) — аналитическая прямая, определяемая аналитическими точками P, Q. Дифференцированием находим

$$d(A_2A_3) = \left\{\frac{k}{R^2}(AA_3) + (A_2A_1) + \frac{\gamma R^2}{R^2 + k^2}\left[-\frac{k}{R^2}(A_2A) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (A_1A_3)\right]\right\}\omega_3^1 + \frac{qR^2}{R^2 + k^2}\left[-\frac{k}{R^2}(A_2A) + (A_1A_3)\right]\omega^1.$$

Дифференциал $d(A_2A_3)$ зависит от двух форм ω_3^1, ω^1, поэтому ребро A_2A_3 описывает некоторую конгруэнцию. Найдем ее фокусы. Обычным путем составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \omega^2 + t\omega^3 = 0, \\ \omega_2^1 + t\omega_3^1 = 0. \end{cases}$$

Подставляя значения ω^2, ω^3, ω_2^1 из (1) и (9) при $p = \alpha = \beta = 0$, получаем

$$\begin{cases} [(R^2 + k^2) - t\gamma R^2]\,\omega_3^1 - tqR^2\omega^1 = 0, \\ [(R^2 + k^2)\,t + \gamma R^2]\,\omega_3^1 + qR^2\omega^1 = 0. \end{cases}$$

Исключая независимые формы ω_3^1, ω^1 из последней системы, находим уравнение, определяющее фокусы конгруэнции $\{A_2A_3\}$:

$$\begin{vmatrix} R^2 + k^2 - t\gamma R^2 & -tq \\ (R^2 + k^2)\,t + \gamma R^2 & q \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Если $q \neq 0$, то уравнение (17) принимает вид

$$t^2 + 1 = 0. \qquad (18)$$

(Если $q = 0$, то фокусы конгруэнции $\{A_2A_3\}$ будут неопределенными, т. е. прямая A_2A_3 опишет плоскость).

Фокусы

$$F_1 = A_2 + iA_3, \quad F_2 = A_2 - iA_3$$

этой конгруэнции являются точками пересечения прямой A_2A_3 с абсолютом. Конгруэнция $\{A_2A_3\}$ эллиптическая.

Так как каждый из дифференциалов

$$dF_1 = (\omega_2^1 + i\omega_3^1)\left(A_1 - \frac{ik}{R^2}A\right) + i\omega_3^2 F_1,$$

$$dF_2 = (\omega_2^1 - i\omega_3^1)\left(A_1 + \frac{ik}{R^2}A\right) - i\omega_3^2 F_2$$

зависит от одной существенной формы, то точки F_1, F_2 описывают кривые, лежащие на абсолюте, причем эти кривые комплексно сопряжены. Касательные к этим кривым пересекают прямую AA_1 в комплексно сопряженных точках

$$M_1 = A_1 - \frac{ik}{R^2}A, \quad M_2 = A_1 + \frac{ik}{R^2}A.$$

Точки A, A_1 гармонически разделяют пары M_1, M_2 и $L_1 = A + RA_1$, $L_2 = A - RA_1$.

Следовало ожидать, что конгруэнция $\{A_2A_3\}$ существует с произволом в две функции одного аргумента, так как она есть совокупность прямых, пересекающих две комплексно сопряженные кривые на абсолюте. Пара же комплексно сопряженных кривых на действительной поверхности задается с произволом в две действительные функции одного аргумента.

Возьмем на абсолюте произвольную мнимую кривую l. Если u, v — внутренние координаты точки абсолюта, то уравнение такой кривой может быть записано в виде

$$v = f(u),$$

где $u = x + iy$; $v = X(x, y) + iy(x, y)$; X и Y — гармонические функции (а уравнение Лапласа, как известно, имеет решение, зависящее от двух произвольных функций одного действительного переменного).

Кривая l однозначно определяет на абсолюте комплексно сопряженную с ней кривую l', определяемую уравнением

$$\bar{v} = f(\bar{u}),$$

где $\bar{u} = x - iy$; $\bar{v} = X - iY$.

Можно предположить, что всякий комплекс C_{2c} определяется некоторой конгруэнцией $\{A_2A_3\}$, причем его можно построить так.

Возьмем на кривых l и l' пару комплексно сопряженных точек F и F'. Найдем полярно сопряженную с прямой FF' относительно абсолюта прямую f. Пусть касательные к кривым l и l' в точках F и F' пересекают прямую f в точках P и P'. Прямая $PP' = f$ пересекает абсолют в паре точек L и L'. Построим пару точек A, A_1, гармонически разделяющих пары P, P' и L, L'. Такая пара будет единственной и действительной. Последнее утверждение следует из известной теоремы: *если на прямой даны две инволюции, из которых по крайней мере одна эллиптическая, то они всегда имеют общую действительную пару*. При этом одна точка найденной пары будет конечной, другая — идеальной. Пусть конечной точкой является точка A. Прямая FF' описывает конгруэнцию K_1, поскольку ее положение определяется двумя параметрами x, y.

Неподвижность прямой A_2A_3 обеспечивается равенствами $\omega_3^1 = \omega^1 = 0$. Легко видеть, что в этом случае точка A также неподвижна. Точка A_3 будет перемещаться по неподвижной прямой A_2A_3. Следовательно, луч AA_3 опишет пучок прямых.

Когда прямая FF' описывает конгруэнцию K_1, построенный пучок прямых описывает искомый компл:кс. Это лишь предположение. Оно должно быть обосновано с помощью аналитических выкладок.

Пусть дана произвольная конгруэнция $\{FF'\}$ (F, F' — ее фокусы, определяемые парой комплексно сопряженных кривых l, l' на абсолюте). Точки A_2, A_3 поместим на луч конгруэнции $\{FF'\}$. В таком случае

$$F = A_2 + iA_3, \quad F' = A_2 - iA_3.$$

Чтобы точки F и F' описывали кривые, необходимо и достаточно, чтобы дифференциалы

$$dF = \frac{1}{R^2}(\omega^2 + i\omega^3) A + (\omega_2^1 + i\omega_3^1) A_1 + i\omega_3^2 F,$$

$$dF' = \frac{1}{R^2}(\omega^2 - i\omega^3) A + (\omega_2^1 - i\omega_3^1) A_1 - i\omega_3^2 F'$$

зависели от одной существенной формы. Тогда

$$[\omega^2 + i\omega^3,\ \omega_2^1 + i\omega_3^1] = 0$$

или, учитывая, что формы ω^i, ω_i^j действительны,

$$[\omega^2\omega_2^1] - [\omega^3\omega_3^1] = 0,$$
$$[\omega^3\omega_2^1] - [\omega^2\omega_3^1] = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= \mu\omega^3 + \lambda\omega_3^1, \\ \omega^2 &= \lambda\omega^3 + \nu\omega_3^1, \\ \nu\mu &- \lambda^2 - 1 = 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Точки пересечения касательных к кривым l, l' в точках F, F' с прямой, полярно сопряженной FF', обозначим через P, P'. Тогда

$$dF = mF + nP,\ dF' = m'F' + n'P'.$$

В этом случае

$$P = \frac{\omega^2 + i\omega^3}{R^2} A + (\omega_2^1 + i\omega_3^1) A_1,$$

$$P' = \frac{\omega^2 - i\omega^3}{R^2} A + (\omega_2^1 - i\omega_3^1) A_1.$$

Точки A, A_1 на прямой PP' берем так, чтобы

$$(AA_1PP') = -1.$$

Отсюда следует, что

$$\omega^2\omega_2^1 + \omega^3\omega_3^1 = 0. \tag{19}$$

Из способа, с помощью которого сконструирован комплекс, вытекает, что конус лучей этого комплекса, имеющий вершину в точке A, вырождается в плоскость AA_3A_2. Если точка A_3 неподвижна, то из равенства

$$dA_3 = \frac{\omega^3}{R^2} A + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2$$

получим

$$\omega^3 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0.$$

При этом прямая AA_1 также неподвижна, так как дифференциал

$$d(AA_1) = \omega^2 (A_2A_1) + \omega^3 (A_3A_1) + \omega_1^2 (AA_2) + \omega_1^3 (AA_3)$$

выражается через формы ω^3, ω_3^1 (учитываем (а)).

Таким образом, конус лучей с вершиной в точке A_3 вырождается в плоскость AA_3A_1.

В таком случае уравнение комплекса следующее:

$$\omega^2 = k\omega_3^1.$$

Первое дифференциальное продолжение этого равенства имеет вид (2). Теперь из (19) получим

$$\omega^3 + k\omega_2^1 = 0. \tag{19'}$$

Учитывая (19′), из равенств (2) находим

$$p = \alpha = \beta = 0.$$

Эти равенства приводят к (12), характеризуя рассматриваемый класс комплексов. Стало быть, доказана

Теорема 1. *Чтобы построить комплекс C_{2c}, следует взять конгруэнцию K_1 и через точку A, определяемую условиями*

$$(AA_1LL') = (AA_1PP') = -1,$$

на прямой, полярно сопряженной лучу k_1 конгруэнции, в плоскости (Ak_1) провести пучок прямых.

Примечание. Мы выражали произвол существования конгруэнции через две произвольные функции одного аргумента, а не через одну функцию одного аргумента комплексного, так как рассматриваемый нами комплекс действительный.

§ 3. Комплексы, у которых один двойной и один простой инфлекционные центры совпадают с центрами луча

Пусть двойной инфлекционный центр совпадает с точкой A, а простой инфлекционный центр — с точкой A_3. В таком случае

$$p = \beta = q = 0, \ r + 2\alpha k \neq 0.$$

Из равенств (6_1)—(6_5) теперь находим

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = q_4 = 0, \ \alpha = 0, \ \gamma^2 = -\left(\frac{k^2 + R^2}{R^2}\right)^2,$$

$$q_5 = -\frac{2k(k^2 + R^2)}{R^4}, \ q_6 = r_5 = \frac{3kr\gamma}{R^2 + k^2},$$

$$r_3 = p_6 = \frac{r\gamma R^2}{R^2 + k^2}.$$

Равенство (6_6) принимает вид

$$-dr = \frac{r\gamma R^2}{R^2 + k^2}\omega_3^2 + \frac{3kr\gamma}{R^2 + k^2}\omega^1 + \left[r_6 + \frac{2k(k^2 + R^2)}{R^2}\right]\omega_3^1.$$

Таким образом, в обозначениях работы [2] имеем

$$s_1 = 1, \ q = 1, \ Q = N = 1.$$

Класс комплексов, определяемых уравнениями

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1, \\ \omega^3 + k\omega_2^1 &= 0, \\ -\frac{k}{R^2}\omega^3 + \omega_2^1 &= \gamma\omega_3^1, \\ -dk &= \gamma\omega^1 + r\omega_3^1, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\gamma = \pm\frac{R^2 + k^2}{R^2} i,$$

существует с произволом в одну функцию одного аргумента.

Возьмем для γ верхний знак.

Ребро A_2A_3 описывает в этом случае развертывающуюся поверхность Σ_{23}, которая касается плоскости

$$\sigma_2 = \left(A_3A_2, \ A_1 - \frac{ik}{R^2}A\right),$$

а ребро AA_1 описывает плоскость

$$\sigma_1 = (AA_1,\ A_2 - iA_3).$$

Действительно, дифференциалы

$$d(A_2A_3) = \omega_3^1 \left\{(A_2A_1) - i(A_3A_1) + \frac{k}{R^2}[(AA_3) + i(AA_2)]\right\},$$
$$d(AA_1) = \omega_3^1 \{k[(A_2A_1) - i(A_3A_1)] + (A_3A) + i(A_2A)\}$$

зависят от одной формы ω_3^1. Следовательно, ребра A_2A_3, AA_1 описывают линейчатые поверхности Σ_{23}, Σ_{01} соответственно. Но из равенств

$$dA = \omega^1 A_1 + k\omega_3^1 (A_2 - iA_3),$$

$$dA_3 = \omega_3^1 \left(A_1 - \frac{ik}{R^2} A\right) + \omega_3^2 A_2$$

следует, что точки A, A_3 описывают поверхности, касающиеся уже плоскостей σ_1, σ_2 соответственно. Это означает, что названные поверхности и есть поверхности Σ_{23}, Σ_{01}. Из равенств

$$d\sigma_1 = -i\omega_3^2\sigma_1,\ d\sigma_2 = -\frac{ik}{R^2}\omega^1\sigma_2 - \frac{ir}{R^2}\omega_3^1(A_3AA_2)$$

заключаем, что поверхность Σ_{01} вырождается в плоскость σ_1, а поверхность Σ_{23} развертывающаяся.

Точка $F = A_2 - iA_3$ неподвижна, так как $dF = i\omega_3^2 F$. Поэтому поверхность Σ_{23} является конусом с вершиной в точке F.

Конгруэнция

$$\omega_3^1 = 0 \tag{b}$$

голономна (ибо $D(\omega_3^1) \equiv 0 \pmod{\omega_3^1}$), фокусы ее совпадают с центрами A, A_3 и описывают прямые AA_1, A_2A_3.

Таким образом, комплекс в этом случае представляет собой однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций (b).

Теорема 2. *Чтобы построить комплекс, у которого двойной и один простой инфлекционные центры совпадают с центрами луча, следует взять произвольный конус с вершиной в мнимой точке абсолюта и принять за директрисы линейных конгруэнций образующую конуса и полярно сопряженную с ней относительно абсолюта прямую. Комплекс представляет собой совокупность таких конгруэнций.*

Доказательство. Возьмем произвольный конус с вершиной в мнимой точке абсолюта (произвол — одна функция одного комплексного аргумента). Вершины A_2, A_3 репера поместим на образующую конуса, A, A_1 — на полярно сопряженную ей прямую.

Построим комплекс прямых как однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций, директрисами которых являются прямые AA_1, A_2A_3.

Чтобы прямая A_2A_3 описывала поверхность, необходимо и достаточно, чтобы правая часть равенства

$$d(A_2A_3) = \frac{\omega^2}{R^2}(AA_3) + \omega_2^1(A_1A_3) + \frac{\omega^3}{R^2}(A_2A) + \omega_3^1(A_2A_1)$$

зависела от одной существенной формы, пусть ω_3^1. Но тогда и формы ω^2, ω^3, ω_2^1 будут зависеть от ω_3^1. Следовательно, будет справедливо равенство (1), а потому и его продолжение (2). Из равенств (2) получим

$$p = \alpha = q = 0.$$

Вершина конуса имеет координаты

$$F = A_2 - iA_3.$$

Из того факта, что $dF = \lambda F$, получим

$$\omega^3 + k\omega_2^1 = 0.$$

Таким образом,

$$p = \alpha = \beta = q = 0.$$

Эти равенства приводят к уравнениям (20). Утверждение доказано. Изменение знака i в представлении точки F приводит к изменению знака γ в равенствах (20).

§ 4. Комплексы, у которых центр луча совпадает с тройным инфлекционным центром

Пусть точка A совпадает с тройным инфлекционным центром. Тогда

$$p = \beta = r + 2\alpha k = 0, \ \gamma \neq 0. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (6_1), (6_3), (6_6), получаем

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_6 = 0, \ p_5 = -\alpha^2, \ r_3 = \frac{4\alpha\gamma k R^2}{R^2 + k^2},$$
$$r_5 = -2kp_4 + \frac{4kq\gamma R^2 - \alpha\gamma(3R^2 - k^2)}{R^2 + k^2}, \tag{22}$$
$$r_6 = \frac{2k[(k^2 + R^2)^2 + \gamma R^4]}{R^2(R^2 + k^2)}.$$

Но при условии (21) и при $p_6 = 0$ имеем

$$r_3 = -\frac{2k\alpha\gamma R^2}{R^2 + k^2}.$$

Сравнивая это с найденным ранее значением r_3, получаем

$$\alpha = 0.$$

Теперь из (6_2) найдем

$$p_4 = \frac{\gamma q R^2}{R^2 + k^2}, \ \gamma^2 = -\left(\frac{k^2 + R^2}{R^2}\right)^2, \tag{23}$$

а из (6_5)

$$q_5 = \frac{2k\,[q^2R^6 - (R^2+k^2)^2]}{R^4(R^2+k^2)}, \quad q_6 = \frac{2kq\gamma R^2}{R^2+k^2}. \tag{24}$$

Из (22) находим

$$r_5 = \frac{2kq\gamma R^2}{R^2+k^2},$$

а из (A)

$$r_5 = 0; \text{ поэтому } q = 0, \text{ откуда следует}$$

Теорема 3. *Если тройной инфлекционный центр на каждом луче комплекса совпадает с центром луча, то простой инфлекционный центр будет совпадать со вторым центром луча.*

Таким образом, у комплексов с тройным инфлекционным центром, совпадающим с центром луча, параметры второй дифференциальной окрестности удовлетворяют равенствам

$$p = \alpha = \beta = r = q = 0, \quad \gamma = \pm \frac{k^2+R^2}{R^2}\, i.$$

Обозначим исследуемый класс комплексов через C_{3_c}.

Уравнения (1), (2) для комплексов C_{3_c} принимают вид

$$\begin{gathered} \omega^2 = k\omega_3^1, \\ \omega^3 + k\omega_2^1 = 0, \\ -\frac{k}{R^2}\,\omega^3 + \omega_2^1 = \gamma\omega_3^1, \\ -dk = \gamma\omega^1. \end{gathered} \tag{25}$$

Система (25) имеет решение, произвол которого — четыре постоянные.

Возьмем для параметра γ верхний знак. Как и в предыдущем параграфе, можно показать, что ребро AA_1 описывает плоскость

$$\sigma_1 = (AA_1,\ A_2 - iA_3).$$

Но конус, описанный ребром A_2A_3, теперь вырождается в плоский пучок с носителем

$$\sigma_2 = \left(A_3A_2,\ A_1 - \frac{ik}{R^2}A\right).$$

Действительно, в этом случае

$$d\sigma_2 = -\frac{ik}{R^2}\,\omega^1\sigma_2, \quad d\sigma_1 = -i\omega_3^2\sigma_1.$$

Точки $N = A - ikA_1$, $F = A_2 - iA_3$, как легко проверить, неподвижны.

Комплекс представляет собой однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций (b), директрисы которых проходят через точки N, F.

Конгруэнции

$$\omega^1 = 0, \tag{c}$$

$$\omega_3^2 = 0 \tag{d}$$

голономны (это имеет место и в предыдущем случае).

Конгруэнции (c), (d) параболические. Фокус первой совпадает с центром A, фокус второй — с центром A_3. Их директрисами являются соответственно прямые

$$l = (A,\ A_2 - iA_3),\ m = \left(A_3,\ A_1 - \frac{ik}{R^2} A\right).$$

Таким образом, комплекс C_{3c} тремя способами расслаивается в однопараметрическое семейство конгруэнций (b), (c), (d).

Теорема 4. *Чтобы построить комплекс C_{3c}, следует взять плоскость, касательную к абсолюту в мнимой точке, фиксировать в этой плоскости некоторую точку N и принять за директрисы линейных конгруэнций прямую этой плоскости, проходящую через точку N, и прямую, полярно сопряженную ей относительно абсолюта. Комплекс представляет собой однопараметрическую совокупность таких конгруэнций.*

Доказательство. Берем на абсолюте мнимую точку F и через нее проводим плоскость, касательную к абсолюту (произвол — две комплексные постоянные). В этой плоскости берем комплексную точку N (еще две постоянные) и через нее проводим прямую n в этой же плоскости. На n поместим точки A, A_1. Прямой n соответствует полярно сопряженная относительно абсолюта прямая f, которая обязательно пройдет через точку F. На эту прямую поместим точки A_2, A_3. Принимая прямые n и f за директрисы линейных конгруэнций, построим комплекс как однопараметрическое семейство этих конгруэнций.

Точке A соответствует пучок прямых, пересекающих прямую A_2A_3, а точке A_3 — пучок прямых, пересекающих прямую AA_1. Следовательно, уравнение комплекса имеет вид (1).

Пусть

$$N = A + aA_1.$$

Очевидно,

$$F = A_2 \pm iA_3.$$

В таком случае из условия неподвижности точек F и N легко получим $a = \pm ki$. Условия неподвижности указанных точек также приводят к соотношениям

$$p = \alpha = \beta = q = r = 0,\ \gamma = \pm \frac{R^2 + k^2}{R^2} i,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Комплексы, у которых два двойных инфлекционных центра совпадают с центрами луча, не существуют.*

Доказательство. Если центры луча комплекса A, A_3 совпадают с двойными инфлекционными центрами, то в таком случае

$$p = \beta = q = \gamma = 0, \quad r + 2\alpha k \neq 0.$$

Уравнения (1), (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1, \\ \omega^3 + k\omega_2^1 &= \alpha\omega^1, \\ -\frac{k}{R^2}\omega^3 + \omega_2^1 &= \alpha\omega_3^2, \\ -dk &= r\omega_3^1. \end{aligned} \tag{26}$$

Дифференцируя внешним образом второе равенство (26), получаем

$$D(\omega^3 + k\omega_2^1 - \alpha\omega^1) = -\frac{\alpha R^2(r + 2\alpha k)}{R^2 + k^2}[\omega_3^1\omega_3^2] - [d\alpha\omega^1] +$$

$$+ \left[\frac{k^2 + R^2}{R^2} + \frac{\alpha^2(R^2 - k^2) - r\alpha k}{R^2 + k^2}\right][\omega_3^1\omega^1] = 0.$$

Так как формы ω_3^2, ω^1, ω_3^1 независимы, то

$$\frac{\alpha R^2(r + 2\alpha k)}{R^2 + k^2} = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = 0,$$

следовательно, $r \neq 0$ (случай линейного комплекса исключаем).

Тогда

$$k^2 + R^2 = 0,$$

следовательно, $k = \text{const}$, а потому $r = 0$, что невозможно. Это и доказывает, что комплексы с двумя двойными инфлекционными центрами, совпадающими с центрами луча, не существуют.

Теорема 6. *Комплексы, у которых четырехкратный инфлекционный центр совпадает с центром луча, не существуют.*

Доказательство. Пусть четырехкратный инфлекционный центр совпадает с центром луча A комплекса. Тогда из (7) получим

$$p = \beta = \gamma = r + 2\alpha k = 0, \quad q \neq 0.$$

Уравнения (1), (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1, \\ \omega^3 + k\omega_2^1 &= \alpha\omega^1, \\ -\frac{k}{R^2}\omega^3 + \omega_2^1 &= \alpha\omega_3^2 + q\omega^1, \\ -dk &= -2\alpha k\omega_3^1. \end{aligned} \tag{27}$$

Как и в предыдущей теореме, при внешнем дифференцировании равенств (27) получим

$$k^2 + R^2 = 0.$$

Отсюда

$$\alpha k = 0.$$

При $\alpha = 0$ из (27) получаем $q = 0$, что невозможно. При $k = 0$ имеем $R = 0$, что также невозможно. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Ильяшенко. Безынтегральное представление некоторых классов комплексов в гиперболическом пространстве. «Укр. геометр. сб.», вып. 12, Харьков, Изд-во ХГУ, 1972.

2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.

Поступила 12 июля 1971 г.

КВАЗИСПЕЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_3

Н. И. Кованцов, Е. Н. Ищенко

Киев

Основное содержание статьи сводится к доказательству теоремы. Если через каждую точку фокальной поверхности σ нормальной конгруэнции K в фокальной плоскости π, перпендикулярной к этой поверхности, провести пучок прямых, то образуется квазиспециальный комплекс, для которого указанные точки являются двойными инфлекционными центрами. Наоборот, если через каждую точку некоторой поверхности σ провести пучок прямых в плоскости π, перпендикулярной к этой поверхности, и потребовать, чтобы указанная точка была двойным инфлекционным центром построенного таким образом квазиспециального комплекса, то конгруэнция K, образованная линиями пересечения плоскости π с касательными плоскостями поверхности σ, является нормальной.

В теории комплексов известно понятие специального комплекса. Так называют комплекс, образованный касательными к произвольной поверхности. Если специальный комплекс линейный, то он представляет собой совокупность прямых, пересекающих некоторую ось. Каждый специальный комплекс представляет собой, как это следует из его определения, двупараметрическую совокупность плоских пучков прямых. При этом центры пучков описывают поверхность, а плоскости пучков касаются ее в этих центрах. Квазиспециальным называется произвольный комплекс, представляющий собой двупараметрическое семейство плоских пучков, центры которых образуют одну поверхность (σ), а плоскости огибает вторая поверхность (σ_1). Каждый специальный комплекс является и квазиспециальным, при этом поверхности σ и σ_1 совпадают между собой. Однако не всякий квазиспециальный комплекс является и специальным, т. е. плоскости пучков в общем случае не огибает поверхность, описываемая центрами этих пучков.

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве E_3 квазиспециальные комплексы, у которых плоскости пучков прямых перпендикулярны к поверхности, описываемой инфлекционным центром луча комплекса.

Для дальнейшего нам понадобится уравнение инфлекционных центров в произвольном неканонизированном трехграннике. Пусть главные формы ω^1, ω^2, ω_3^1, ω_3^2 связаны условием

$$\omega^2 = k\omega_3^1 + q\omega^1 + p\omega_3^2. \tag{1}$$

(Вершина ортонормированного трехгранника $AI_1I_2I_3$ помещена на луч комплекса, вектор I_3 параллелен этому лучу).

Пусть

$$M = A + tI_3 \tag{2}$$

произвольная точка луча. Плоскость π, соответствующая ей в нормальной корреляции, определяется вектором нормали [1]

$$N = (-qt + k)\, I_1 + (p + t)\, I_2. \tag{3}$$

Точка M остается неподвижной, если имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \omega^1 + t\omega_3^1 &= 0, \\ \omega^2 + t\omega_3^2 &= 0, \\ \omega^3 + dt &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Условия неподвижности плоскости π имеют вид

$$[dNN] = 0, \quad [dMI_3] = 0.$$

Выполняя дифференцирование, запишем эти условия так:

$$\begin{gathered} \omega^1 + t\omega_3^1 = 0, \\ \omega^2 + t\omega_3^2 = 0, \\ (k + pq)\, dt + [dq + (1 + q^2)\, \omega_1^2]\, t^2 + \\ + [p\, dq - q\, dp - dk + 2\,(p - kq)\, \omega_1^2]\, t + \\ + k\, dp - p\, dk + (k^2 + p^2)\, \omega_1^2 = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Первые два равенства (4) совпадают с первыми двумя равенствами (5). В третьем равенстве (5) при dt стоит коэффициент $k + pq$. Равенство $k + pq = 0$ выделяет специальные комплексы, т. е. комплексы касательных к некоторой поверхности. Исключая из рассмотрения эти комплексы, будем полагать $k + pq \neq 0$, а тогда, элиминируя из третьих равенств (4) и (5) дифференциал dt, найдем

$$\begin{gathered} -(k + pq)\, \omega^3 + [dq + (1 + q^2)\, \omega_1^2]\, t^2 + \\ + [p\, dq - q\, dp - dk + 2\,(p - kq)\, \omega_1^2]\, t + \\ + k\, dp - p\, dk + (k^2 + p^2)\, \omega_1^2 = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Учитывая уравнения структуры евклидова пространства

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i],$$
$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] \quad (i,\ j,\ k = 1, 2, 3, 4],$$

продолжим уравнение (1)

$$\begin{aligned} &dq + (1 + q^2)\,\omega_1^2 = l\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\ &dk + q\omega^3 + (qk - p)\,\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + m\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \\ &dp - \omega^3 + (pq + k)\,\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Находим отсюда dk, dp, dq и подставим их в уравнение (6), которое примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &[lt^2 + (pl - \alpha - \beta q)\,t - \alpha p + k\beta]\,\omega^1 + \\ &+ [\alpha t^2 + (\alpha p - \gamma q - m)\,t - mp + k\gamma]\,\omega_3^1 + \\ &+ [\beta t^2 + (\beta p - rq - \gamma)\,t + kr - p\gamma]\,\omega_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Если внесем во второе уравнение (4) значение (1) и возьмем первое уравнение (4), то придем к системе

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0,$$
$$q\omega^1 + k\omega_3^1 + (p + t)\,\omega_3^2 = 0.$$

Отсюда

$$\omega^1 = -t\omega_3^1, \quad \omega_3^2 = \frac{qt - k}{p + t}\,\omega_3^1.$$

Подставляя это в равенство (8) и сокращая его на ω_3^1, придем к уравнению четвертой степени, определяющему инфлекционные центры:

$$\begin{aligned} &lt^4 + 2\,(lp - \alpha - \beta q)\,t^3 + (p^2 l - 4\alpha p - 2p\beta q + 2k\beta + 2\gamma q + \\ &+ m + q^2 r)\,t^2 + 2\,(k\beta q - \alpha p^2 + mp - k\gamma + pq\gamma - krq)\,t - \\ &- 2k\gamma p + mp^2 + k^2 r = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Равенства

$$\begin{aligned} &mp^2 - 2k\gamma p + k^2 r = 0, \\ &k\beta p - \alpha p^2 + mp - k\gamma + pq\gamma - krq = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

есть условие того, что вершина A совпадает с двойным инфлекционным центром луча комплекса.

Если инфлекционный центр описывает поверхность, то

$$\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2. \tag{11}$$

В таком случае конус с вершиной в точке A вырождается в пучок [2]. Примем плоскость этого пучка за плоскость (AI_2I_3). Тогда

$$p = 0$$

и равенства (10) принимают вид

$$k\,(\gamma + rq) = 0, \quad k^2 r = 0.$$

Как указывалось выше, мы исключили из рассмотрения специальные комплексы, которые выделяются равенством $k + pq = 0$. Так как в нашем случае $p = 0$, то k не должно равняться нулю и поэтому

$$r = 0, \ \gamma = 0.$$

Учитывая (11), получаем

$$dA = (I_1 + aI_3)\,\omega^1 + (I_2 + bI_3)\,\omega^2.$$

Следовательно, вектор нормали к поверхности такой:

$$N_1 = -aI_1 - bI_2 + I_3.$$

Отсюда видно, что при том задании поверхности, как это сделано у нас (11), вектор N_1 не может быть перпендикулярным к плоскости (AI_2I_3). Поэтому плоскость, соответствующая инфлекционному центру A в нормальной корреляции, не может быть касательной плоскостью к поверхности (11). Для того чтобы такое касание имело место, надо в уравнении (11) положить коэффициент при ω^3 равным нулю.

Найдем условие, при котором плоскость, соответствующая точке A, нормальна к поверхности. Это сводится к равенству

$$(N_1I_2I_3) = 0,$$

а в таком случае

$$a = 0.$$

Следовательно, равенство (11) принимает вид

$$\omega^3 = b\omega^2.$$

Назовем комплексы рассматриваемого класса **нормально-инфлекционными** с двойным инфлекционным центром.

Эти комплексы определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\omega^2 = k\omega_3^1 + q\omega^1, \\
\omega^3 = b\omega^2, \\
dq + (1 + q^2)\,\omega_1^2 = l\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \\
dk + q\omega^3 + qk\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + m\omega_3^1, \\
-\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1, \\
db + (1 + b^2)\,\omega_2^3 + \frac{1 + b^2}{k}\,\omega^1 = -\lambda\omega^2.
\end{gathered} \tag{12}$$

Исследуя эту систему, имеем

$$s_1 = 4, \ q = 5, \ s_2 = 1, \ Q = 6, \ N = 6.$$

Следовательно, решение системы (12) существует с произволом в одну функцию двух аргументов [3].

Исследуем строение рассматриваемого класса комплексов. В каждой точке A поверхности σ имеем нормальную к ней плоскость π, определяемую векторами I_2, I_3. Двупараметрическое семейство плоскостей π огибает некоторую поверхность σ_1. Найдем эту поверхность. Для этого запишем в неподвижном репере пространства уравнение плоскости π

$$(r - A,\ I_1) = 0.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$-\omega^1 + (r - A,\ I_2)\,\omega_1^2 + (r - A,\ I_3)\,\omega_1^3 = 0. \tag{13}$$

Из уравнений (12) находим

$$\omega_1^2 = \frac{1}{k}(\beta\omega^1 + b\omega^2),$$

$$\omega_1^3 = \frac{1}{k}(q\omega^1 - \omega^2).$$

Внесем эти формы в уравнение (13) и приравняем нулю коэффициенты при ω^1 и ω^2, тогда получим

$$-1 + \frac{\beta}{k}(r - A,\ I_2) + \frac{q}{k}(r - A,\ I_3) = 0,$$

$$\frac{b}{k}(r - A,\ I_2) - \frac{1}{k}(r - A,\ I_3) = 0. \tag{14}$$

Пусть плоскость π касается поверхности σ_1 в точке M с радиусом-вектором

$$r = A + x^2 I_2 + x^3 I_3.$$

Используя это в уравнении (14), получаем два соотношения для определения x^2, x^3:

$$-k + \beta x^2 + q x^3 = 0,$$
$$b x^2 - x^3 = 0.$$

Отсюда

$$x^2 = \frac{k}{\beta + bq},$$
$$x^3 = \frac{kb}{\beta + bq}.$$

Следовательно, точка M имеет радиус-вектор

$$r = A + \frac{k}{\beta + bq}(I_2 + bI_3).$$

Но вектор $I_2 + bI_3$ параллелен линии пересечения плоскости π и касательной плоскости к поверхности σ. Прямая (AM) касается, таким образом, поверхностей σ и σ_1, т. е. обе эти поверхности являются фокальными для конгруэнции K, описанной указанной прямой. Касательные плоскости к поверхностям σ и σ_1 (фокальные плоскости конгруэнции K) взаимно-перпендикулярны. Следовательно, конгруэнция K нормальна [4].

Класс нормальных конгруэнций существует с произволом в одну функцию двух аргументов. Точно такой же произвол и у рассматриваемого класса комплексов. Это дает основание предположить, что нормально-инфлекционные комплексы с двойным инфлекционным центром определяются произвольной нормальной конгруэнцией. Иными словами, можно высказать следующее предположение относительно безынтегрального представления нормально-инфлекционного класса комплексов с двойным инфлекционным центром:

Теорема. *Чтобы построить произвольный нормально-инфлекционный комплекс с двойным инфлекционным центром, надо взять произвольную нормальную конгруэнцию и в каждой точке одной из ее фокальных поверхностей в фокальной плоскости, перпендикулярной к этой поверхности, провести пучок прямых. Совокупность таких пучков и составит искомый комплекс.*

Докажем справедливость этого представления.

Действительно, пусть σ и σ_1 — фокальные поверхности некоторой нормальной конгруэнции K. Поместим вершину A в текущую точку поверхности σ. Пусть π — нормальная к ней фокальная плоскость. Поместим в нее векторы I_2, I_3. Принимая точку A за вершину пучка прямых, расположенных в плоскости π, будем считать, что вектор I_3 является вектором, параллельным произвольной прямой пучка.

Таким образом, для каждой точки A поверхности σ и каждого проходящего через нее луча имеем определенный сопровождающий репер. Пусть ω^i, $\omega_i^j (i, j = 1, 2, 3 \;\; \omega_i^j + \omega_j^i = 0)$ — формы инфинитезимального смещения этого репера. Эти формы зависят от трех параметров: двух параметров, определяющих положение точки A на поверхности σ, и одного параметра, определяющего положение прямой в пучке. Записывая деривационные уравнения комплекса, образованного построенными пучками в виде

$$dA = \omega^i I_i, \quad dI_i = \omega_i^j I_j,$$

получаем обычное соотношение между главными формами смещения репера ω^1, ω^2, ω_3^1, ω_3^2:

$$\omega^2 = k\omega_3^1 + p\omega_3^2 + q\omega^1.$$

Продолжение этого уравнения есть уравнения (7).

Заметим, что, когда сопровождающий репер комплекса выбран, все формы ω^i, ω_i^j являются главными. Однако следует сохранить название «главные формы» лишь для форм ω^1, ω^2, ω_3^1, ω_3^2 на том основании, что эти формы в общем случае являются главными для любого репера, у которого вершина A лежит на луче комплекса, а вектор I_3 параллелен этому лучу.

Уравнение инфлекционных центров, очевидно, будет иметь вид (9). Поскольку вершина A есть центр пучка прямых комплекса, она является и инфлекционным центром всех лучей этого пучка. Совпадение вершины A с инфлекционным центром дает равенство

$$mp^2 - 2k\gamma p + k^2 r = 0. \tag{15}$$

Поскольку плоскость π прямых пучка совпадает с плоскостью (AI_2I_3),

$$p = 0,$$

а в таком случае из (15) следует

$$r = 0.$$

Так как точка A описывает поверхность σ, то

$$\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2.$$

Поскольку, далее, плоскость π нормальна к поверхности σ, как и прежде, заключаем

$$a = 0.$$

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\omega^2 = k\omega_3^1 + q\omega^1,\\
\omega^3 = b\omega^2,\\
dq + (1 + q^2)\,\omega_1^2 = l\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2,\\
dk + q\omega^3 + qk\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + m\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2,\\
-\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1,\\
db + (1 + b^2)\,\omega_2^3 + \frac{1 + b^2}{k}\,\omega^1 = -\lambda\omega^2.
\end{gathered} \tag{16}$$

Из уравнений (16) находим

$$\begin{gathered}
\omega_1^2 = \frac{1}{k}\left[\left(\beta - \frac{q\gamma}{k}\right)\omega^1 + \left(b + \frac{\gamma}{k}\right)\omega^2\right],\\
\omega_1^3 = \frac{1}{k}\,(q\omega^1 - \omega^2).
\end{gathered} \tag{17}$$

Плоскость π огибает некоторую поверхность σ_1. Найдем точку M, в которой эта плоскость касается поверхности σ_1. Поскольку нормалью к этой плоскости является вектор I_1, то записываем уравнение плоскости π в виде

$$(r - A,\ I_1) = 0.$$

Дифференцируя его, находим

$$-\omega^1 + (r - A,\ I_2)\,\omega_1^2 + (r - A,\ I_3)\,\omega_1^3 = 0. \tag{18}$$

Внося в (18) значения форм ω_1^2 и ω_1^3 из (17) и приравнивая нулю коэффициенты при ω^1 и ω^2, получаем

$$\begin{gathered}
-1 + \frac{1}{k}\left(\beta - \frac{q\gamma}{k}\right)(r - A,\ I_2) + \frac{q}{k}\,(r - A,\ I_3) = 0,\\
\frac{1}{k}\left(b + \frac{\gamma}{k}\right)(r - A,\ I_2) - \frac{1}{k}\,(r - A,\ I_3) = 0.
\end{gathered}$$

Полагая

$$r = A + x^2I_2 + x^3I_3,$$

находим

$$x^2 = \frac{k}{\beta + bq},$$

$$x^3 = \frac{k\left(b + \frac{\gamma}{k}\right)}{\beta + bq}.$$

Точка M имеет радиус-вектор

$$r = A + \frac{k}{\beta + bq}\left[I_2 + \left(b + \frac{\gamma}{k}\right) I_3\right].$$

Отсюда видно, что в общем случае эта точка не лежит на касательной к той линии пересечения плоскости π с касательной плоскостью к поверхности σ, которая определяется вектором $I_2 + bI_3$. Точка M будет лежать на этой линии тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$. А это, как легко заключить из уравнения (9), определяет комплекс, у которого точка A является двойным инфлекционным центром.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Киев. Изд-во КГУ, 1963.
2. Н. И. Кованцов. Квазиспециальные комплексы. «Матем. сб.», 41, № 3, 1957.
3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.
4. С. П. Фиников. Теория конгруэнций. М.—Л., 1950.

Поступила 19 октября 1971 г.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТРУКТУРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ТЕНЗОРОМ РИМАНА НА ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

П. И. Ковалев

Одесса

Рассмотрены вопросы, связанные со свойствами алгебраической структуры, которую тензор Римана определяет в касательном расслоении пространства аффинной связности.

1. Конечномерное векторное пространство T называется общей тройной системой Ли [2, 3], если задано трилинейное отображение

$$f: T \times T \times T \to T,$$

удовлетворяющее условиям

$$f(x, y, z) = -f(y, x, z),$$
$$f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) = 0$$

для любых $x, y, z \in T$.

. В дальнейшем элемент $f(x, y, z)$ обозначим символом $[x, y, z]$. Общие тройные системы Ли для краткости назовем общими 3-системами.

Общая 3-система T называется тривиальной, если для любых $x, y, z \in T$ будет $[x, y, z] = 0$.

Подпространство $B \subset T$ называется идеалом общей 3-системы T, если $[B, T, T] \subset B$ (как обычно, $[B, T, T]$ — подпространство T, порожденное всеми элементами вида $[b, x, y]$, где $b \in B$, $x, y \in T$). Если B — идеал T, то, очевидно, $[B, T, T]$ также есть идеал T. Нетривиальная общая 3-система T называется простой, если единственными ее идеалами являются $\{0\}$ и T.

Определим последовательность идеалов общей 3-системы T

$$T = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_m \subset \ldots ,$$

полагая $T_{k+1} = [T_k, T, T]$.

Если для некоторого m $T_m = \{0\}$, то общая 3-система T называется нильпотентной. Легко показать, что если размерность T равна n, то T нильпотентна тогда и только тогда, когда $T_n = \{0\}$.

Общая тройная система Ли T называется просто тройной системой Ли (сокращенно 3-системой), если существует алгебра Ли A такая, что T является векторным подпространством A, замкнутым относительно операции

$$(x, y, z) \to [[x, y], z],$$

где $(x, y) \to [x, y]$ — умножение в алгебре Ли A, причем эта операция определяет на T структуру общей тройной системы Ли, совпадающую с исходной структурой.

Как показано в [3], для того чтобы общая 3-система T была просто 3-системой, необходимо и достаточно следующее условие:

$$[a, b, [x, y, z]] = [[a, b, x], y, z] + [x, [a, b, y], z] + [x, y, [a, b, z]]$$

для любых $a, b, x, y, z \in T$.

Если B — идеал 3-системы T, то легко показать, что $[T, B, B]$ также есть идеал T. Определим последовательность идеалов T:

$$T = T^0 \supset T^1 \supset \ldots \supset T^m \supset \ldots ,$$

где $T^{k+1} = [T, T^k, T^k]$. 3-система T называется разрешимой, если $T^m = \{0\}$ для некоторого m. Очевидно, n-мерная 3-система разрешима тогда и только тогда, когда $T^n = \{0\}$.

Легко показать, что любая 3-система T содержит наибольший разрешимый идеал, называемый радикалом T ([2]); 3-система, радикал которой равен $\{0\}$, называется полупростой.

2. Пусть A — некоторое бесконечно дифференцируемое многообразие, на котором задана аффинная связность без кручения. Тензор кривизны этой связности обозначим через R. Если X_p, Y_p, Z_p — векторы, касательные к A в точке p, то, полагая

$$[X_p, Y_p, Z_p] = R(X_p, Y_p) Z_p,$$

определим на касательном пространстве A_p структуру общей 3-системы. Легко построить пример пространства аффинной связности, в заданной точке которого касательное пространство является простой или нильпотентной общей 3-системой.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Множество точек $p \in A$ таких, что общая 3-система A_p нильпотентна, замкнуто (в топологии многообразия A).*

Лемма 1. *Для всякого $n \geqslant 1$ существуют k_n* многочленов *$f_n^i(X_{abc}^s)$ относительно переменных X_{abc}^s $(1 \leqslant s, a, b, c \leqslant n)$, обладающие следующим свойством: любая n-мерная общая 3-система T, базис которой образуют элементы $e_1, \ldots, e_n$, причем*

$$[e_c, e_a, e_b] = \sum_s R_{bca}^s \cdot e_s,$$

нильпотентна тогда и только тогда, когда

$$f_n^i(R_{abc}^s) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant k_n).$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что векторное пространство T порождается элементами $e_1, \ldots, e_n$; векторное пространство T_1 — элементами вида

$$\sum_s R_{abc}^s \cdot e_s$$

и, наконец, T_n порождается элементами вида

$$\sum_t r_u^t e_t,$$

где r_u^t — целые алгебраические функции от R_{abc}^s, а в качестве k_n можно взять число n^{2n+2}.

Пусть теперь размерность пространства аффинной связности A равна n и F — множество точек $p \in A$, таких что $p \in F$ тогда и только тогда, когда общая 3-система A_p нильпотентна. Предположим, $q \in A$ — предельная точка множества F и $p_1, \ldots, p_m \ldots$ — последовательность точек из F, сходящаяся к q. Можно считать, что точки $q, p_1, \ldots, p_m, \ldots$ лежат в координатной окрестности U, отнесенной к системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Обозначим компоненты тензора кривизны в U через R_{jkl}^i. Тогда для любой точки $r \in U$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_r, \frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_r, \frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_r\right] = \sum_s R_{ikj}^s(r) \frac{\partial}{\partial x^s}\bigg|_r.$$

Из леммы следует

$$f_n^i(R_{abc}^s(p_m)) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant k_n, \ 1 \leqslant m < \infty),$$

значит,

$$f_n^i(R_{abc}^s(q)) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant k_n),$$

т. е. общая 3-система A_q нильпотентна. Таким образом, $q \in F$, т. е. множество F замкнуто.

Теорема 2. *Множество всех точек $p \in A$, таких что общая 3-система A_p проста, открыто.*

Пусть T — некоторая общая 3-система размерности n, базис которой образован элементами $(e_1, \ldots, e_n)$, причем

$$[e_i, e_j, e_k] = \sum_s R^s_{klj} e_s.$$

Если $(a^1, \ldots, a^n)$ — некоторая точка $(n-1)$-мерной единичной сферы S^{n-1}, то символом $D(a^1, \ldots, a^n)$ обозначим матрицу, составленную из компонент вектора $\sum_s a^s e_s$ и компонент векторов

$$\sum_{j_0, j_1, \ldots j_s} R^{j_0}_{t_s j_s k_s} R^{j_s}_{t_{s-1} j_{s-1} k_{s-1}} \cdots R^{j_2}_{t_1 j_1 k_1} a^{j_1} e_{j_0}, \tag{1}$$

где $1 \leqslant s \leqslant n$. Тогда справедлива

Лемма 2. *Общая 3-система T проста тогда и только тогда, когда для любых $(a^1, \ldots, a^n) \in S^{n-1}$ ранг матрицы $D(a^1, \ldots, a^n)$ равен n.*

Действительно, T проста тогда и только тогда, когда идеал, порожденный произвольным ненулевым элементом $\sum_s a^s e_s$, совпадает с T, причем без ограничения общности можно считать $(a^1, \ldots, a^n) \in S^{n-1}$. Для доказательства того, что этот идеал является векторным подпространством T, порожденным вектором $\sum_s a^s e_s$ и всеми векторами вида (1), рассмотрим возрастающую последовательность векторных подпространств пространства T:

$$C^0 \subset C^1 \subset \cdots \subset C^m \subset \cdots, \tag{2}$$

где подпространство C^0 порождается вектором

$$b = \sum_s a^s e_s,$$

а C^{k+1} порождается векторами C^k и векторами вида $[x, e_j, e_l]$, где $x \in C^k$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Очевидно, C^{k+1} порождается вектором b и векторами вида (1), где $1 \leqslant s \leqslant k+1$. Идеал B, порожденный b, совпадает с объединением всех подпространств C^i. Если $C^i = C^{i+1}$, то для всякого m $C^{i+m} = C^i$. Учитывая, что размерность T равна n, получаем, что в последовательности (2) различными могут быть только подпространства $C^0, C^1, \ldots, C^n$. Отсюда следует, что идеал, порожденный b, совпадает с C^n. Подпространство C^n равно T тогда и только тогда, когда ранг матрицы $D(a^1, \ldots, a^n)$ равен n, что и доказывает лемму.

Обозначим через F множество точек p n-мерного пространства аффинной связности A таких, что общая 3-система A_p не является простой. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что множество F замкнуто.

Пусть $q \in A$ — предельная точка множества F, $p_1, \ldots, p_m, \ldots$ — последовательность точек из F, сходящаяся к q. Предположим, что точки q, $p_1, \ldots, p_m, \ldots$ лежат в координатной окрестности U, отнесенной к системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Пусть $r \in U$, $(a^1, \ldots, \ldots, a^n) \in S^{n-1}$; символом $D(r;\ a^1, \ldots, a^n)$ обозначим матрицу $D(a^1, \ldots, a^n)$ общей 3-системы A_r, базис которой образуют элементы

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_r, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_r.$$

Тогда для любого m существует единичный вектор $a_m^1, \ldots, a_m^n) \in \in S^{n-1}$ такой, что ранг матрицы $D(p_m;\ a_m^1, \ldots, a_m^n)$ меньше n. Поскольку сфера S^{n-1} компактна, можно считать, переходя если нужно к подпоследовательности, что последовательность единичных векторов $(a_m^1, \ldots, a_m^n)$ $(1 \leqslant m < \infty)$ сходится к пределу $(a_0^1, \ldots \ldots, a_0^n)$. Следовательно, ранг матрицы $D(q;\ a_0^1, \ldots, a_0^n)$ меньше n, т. е. общая 3-система A_q не является простой. Таким образом, $q \in F$ и, значит, F замкнуто, что и требовалось доказать.

3. Легко показать, что тензор кривизны пространства аффинной связности без кручения индуцирует в любом касательном пространстве структуру 3-системы тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию [3]

$$R^l_{sjk,\ ab} = R^l_{sjk,\ ba}$$

(запятая означает ковариантное дифференцирование) или когда для любых векторных полей X и Y

$$\nabla_X \nabla_Y R - \nabla_Y \nabla_X R - \nabla_{[X,\ Y]} R = 0.$$

Такие пространства были названы Н. С. Синюковым [1] полусимметрическими. Для полусимметрических пространств справедливы следующие теоремы:

Теорема 3. *Множество точек p полусимметрического пространства A таких, что 3-система A_p разрешима, замкнуто.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4. *Множество точек p полусимметрического пространства A таких, что 3-система A_p полупроста, открыто.*

Лемма 3. *Для всякого $n \geqslant 1$ существуют многочлены*

$$g_n^1(X^s_{ijk}, X^t), \ldots, g_n^{mn}(X^s_{ijk}, X^t)$$

относительно переменных X^t, X^s_{ijk} $(1 \leqslant s,\ t,\ i,\ j,\ k \leqslant n)$, обладающие следующим свойством: радикал любой 3-системы T размерности n, базис которой образуют элементы $e_1, \ldots, e_n$, причем

$$[e_i,\ e_j,\ e_k] = \sum_s R^s_{kij} e_s,$$

отличен от $\{0\}$ тогда и только тогда, когда существует единичный вектор $(a^1, \ldots, a^n) \in S^{n-1}$ такой, что

$$g_n^r(R^s_{ijk},\ a^t) = 0\ (1 < r < m_n).$$

Действительно, радикал 3-системы T отличен от $\{0\}$ тогда и только тогда, когда существует элемент $b=\sum_s a^s e_s$, отличный от 0 и такой, что идеал B, порожденный элементом b, разрешим. Без ограничения общности можно предполагать, что $(a^1, \ldots, a^n) \in S^{n-1}$. При доказательстве леммы 2 было показано, что идеал B является векторным подпространством T, порожденным элементом b и элементами вида (1). Идеал B разрешим тогда и только тогда, когда $B^n=\{0\}$. Легко показать, что B^n порождается (как векторное подпространство T) элементами вида

$$\sum_i f_1^i e_i, \ldots, \sum_i f_a^i e_i$$

где $f_1^i, \ldots, f_a^i$ — целые алгебраические функции от R_{ijk}^s и a^s. Отсюда следует утверждение леммы.

Для доказательства теоремы 4 рассмотрим множество всех точек $p \in A$ таких, что 3-система A_p не является полупростой. Пусть $q \in A$ — предельная точка множества F, $p_1, \ldots, p_m, \ldots$ — последовательность точек из F, сходящаяся к q. Можно предполагать, что точки $q, p_1, \ldots, p_m, \ldots$ лежат в координатной окрестности U, отнесенной к системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ считаем размерность A равной n. Тогда для любого $m \geqslant 1$ существует единичный вектор

$$(a_m^1, \ldots, a_m^n) \in S^{n-1}$$

такой, что

$$g_n^k(R_{rij}^s(p_m), a_m^t)=0 \quad (1 \leqslant k \leqslant m_n).$$

Поскольку сфера S^{n-1} компактна, можно предположить, что последовательность единичных векторов $(a_m^1, \ldots, a_m^n)$ сходится к пределу $(a_0^1, \ldots, a_0^n)$, следовательно,

$$g_n^k(R_{rij}^s(q), a_0^t)=0 \quad (1 \leqslant k \leqslant m_n).$$

Таким образом, 3-система A_q не является полупростой, значит множество F замкнуто, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Синюков. Почти симметрические пространства. Первая Всесоюзная геометрическая конференция. Тезисы и аннотации. Киев, 1962, стр. 84.
2. W. G. Lister. A structure theory for Lie triple systems. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 72, 1952.
3. K. Yamaguti. On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems). J. Sci. Hiroshima univ., Ser. A, vol. 21, 1957—1958.

Поступила 17 февраля 1971 г.

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ТИПА

С. Е. Козлов

Ленинград

1.1. При рассмотрении космологических моделей представляет интерес изучение сопряженных точек времениподобных геодезических—мировых линий инерциальных частиц [3]. Для этой цели естественно применить теорию Морса. Однако используемый в ней аппарат предполагает наличие знакоопределенной метрики. Ниже распространим некоторые аспекты теории Морса (в частности, теорему об индексе) на случай псевдориманова пространства ${}^{n-1}V_n$. Возникающие при этом трудности обсуждаются в п. 1.2, их преодолению посвящен п. 3.1. Основные результаты работы приведены в п. 4.1. Полученные результаты используются при изучении известной в космологии метрики Робертсона-Уолкера (см. п. 5.1). Естественно, рассматриваются лишь времениподобные пути $\omega(t)$ $\left(\left\|\frac{d\omega}{dt}\right\|^2 > 0\right)$, в дальнейшем это специально не оговаривается.

1.2. Следующие особенности пространств ${}^{n-1}V_n$ препятствуют прямому перенесению теории Морса на этот случай. Во-первых, в ${}^{n-1}V_n$ функция действия не достигает экстремума на геодезических, в связи с чем приходится рассматривать сужение гессиана действия на ортогональные геодезические поля. Напомним, что геодезическая в ${}^{n-1}V_n$ является локально длиннейшей. Во-вторых, равенство нулю нормы вектора не влечет за собой обращение самого вектора в нуль.

1.3. *Замечание.* Здесь существенно используется то обстоятельство, что вектор, ортогональный к времениподобному, обязательно имеет мнимую длину. Это не имеет места для пространств ${}^{k}V_n$, $1 < k < n-1$.

Для таких пространств длина геодезической и функции действия на ней не экстремальны, а подпространства, на которых гессиан длины (действия) знакоопределен, бесконечномерны. Открытым является и вопрос об основной теореме теории Морса даже для ${}^{n-1}V_n$.

2.1. Следуем изложению теории Морса, приведенному в [1], и используем по возможности те же обозначения. Следующие понятия в псевдоримановом случае определяются так же, как и в римановом: совокупность Ω* кусочно-гладких времениподобных путей $\omega(t)$ из p в q, пространство $T\Omega_\omega$ кусочно-гладких векторных полей вдоль пути ω; функция действия E и длина L на Ω, первая и

* В отличие от риманова случая мы не можем снабдить Ω сколь-нибудь естественной топологией.

вторая вариации действия и длины, т. е. функционалы E_* и L_* на $T\Omega_\omega$ и E_{**}, L_{**} на $T\Omega_\omega \times T\Omega_\omega$ соответственно. Остаются в силе и формулы

$$E_*(X) = -2\int_0^1 \left(X,\ \frac{dV}{dt}\right) dt - 2\sum_t (X,\ \Delta_t V), \tag{1}$$

$$E_{**}(X_1,\ X_2) = -2\int_0^1 \left[X_1,\ \frac{D^2X_2}{dt^2} + R(V,\ X)V\right] dt - \\ -2\sum_t \left[X_1,\quad \Delta_t \frac{DX_2}{dt}\right], \tag{2}$$

где $X,\ X_1,\ X_2 \in T\Omega_\omega$, $V = \frac{d\omega}{dt}$, $\Delta_t V = V(t+0) - V(t-0)$. В формуле (2) предполагается, что путь ω геодезический, т. е. $\frac{DV}{dt} = 0$. Кроме того, сохраняются определения сопряженных точек вдоль геодезической и полей Якоби, как полей, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{D^2X}{dt^2} + R(V,\ X)V = 0. \tag{3}$$

3.1. Определение. *Индексом геодезической γ называется максимальная размерность подпространств $T\Omega_\gamma$, на которых функционал L_{**} положительно определен.*

Так как касательные геодезической поля принадлежат к нулевому пространству L_{**}, то вместо всего $T\Omega_\gamma$ можно рассматривать подпространство ортогональных к γ векторных полей, которое обозначим H_γ. Следующая лемма позволит от функционала L_{**} перейти к гессиану действия E_{**}.

3.2. **Лемма.** *Индекс геодезической равен максимальной размерности подпространств H_γ, на которых функционал E_{**} положительно определен.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\operatorname{sign} E_{**}(X,\ X) = \operatorname{sign} L_{**}(X,\ X)$ для любого поля $X \in H_\gamma$. Пусть $\alpha(u,\ t)$ — однопараметрическая вариация, ассоциированная с полем X. Переходя к естественной параметризации посредством введения параметра

$$s(u,\ t) = \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial\alpha(u,\ \tau)}{\partial\tau} \right\| d\tau\right)^{-1} \int_0^t \left\| \frac{\partial\alpha(u,\ \tau)}{\partial\tau} \right\| d\tau,$$

получаем новую вариацию $\bar\alpha(u,\ s(u,\ t)) = \alpha(u,\ t)$. Проверим, что эта вариация задает то же самое поле X.

$$X = \frac{\partial\alpha(u,\ t)}{\partial u}\Big|_0 = \frac{\partial\bar\alpha}{\partial u}\Big|_0 + \frac{\partial\bar\alpha}{ds}\frac{\partial s}{\partial u}\Big|_0 = \\ = \frac{\partial\bar\alpha}{\partial u}\Big|_0 + \frac{\partial\bar\alpha}{\partial s}\Big|_0\ L^{-2}(0)\int_0^t \frac{d}{d\tau}\langle X,\ V\rangle\, d\tau.$$

Так как $\langle XV\rangle = 0$, то $\left.\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial u}\right|_0 = X$. Из определения вариации $\bar{\alpha}$ получаем $\left\|\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\| = Ł(u)$, отсюда следует, что $E(\bar{\alpha}(u, s)) = \int_0^1 \left\|\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial s}\right\| ds = Ł^2(\bar{\alpha}(u, s))$. Применяя к геодезической $\alpha(0, t)$ формулу (1), получаем $E_*(X) = \left.\frac{\partial E(\bar{\alpha}(u, t))}{\partial u}\right|_0 = 0$, а значит, и $\left.\frac{\partial L(\bar{\alpha}(u, t))}{\partial u}\right|_0 = 0$. Отсюда следует

$$E_{**}(X, X) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} E(\bar{\alpha}(u, t))|_0 =$$
$$= 2Ł(0)\frac{\partial^2}{\partial u^2} L(\bar{\alpha}(0, t)) = 2Ł(0) L_{**}(X, X),$$

что и доказывает лемму.

3.3. **Теорема.** *Если в каждой точке геодезической $\lambda(t)$ длины $Ł$ кривизна K в каждом двумерном направлении, содержащем вектор $V(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}$, такова, что выполняется неравенство $-KL^2 \leqslant \pi^2$, то индекс геодезической равен нулю. Тем самым геодезическая является локально длиннейшей.*

Доказательство. Пусть $X \in H_\gamma$. Так как $X(t)$ ортогонален к времени подобному вектору $V(t)$, то поле X можно представить в виде $X(t) = f(t) X_0(t)$, где $\| X_0(t)\|^2 = -1$ и $f(0) = f(1) = 0$. Из формулы (2) получаем

$$\frac{1}{2} E_{**}(X, X) = \int_0^1 \left[f''f + f^2 \left\|\frac{DX_0}{dt}\right\|^2 - f^2 \| V \|^2 K\right] dt +$$
$$+ f\sum_t \Delta_t f = -\int_0^1 (f'^2 + f^2 \| V \|^2 K)\, dt + \int_0^1 f^2 \left\|\frac{DX_0}{dt}\right\|^2 dt.$$

Вектор $\frac{DX_0}{dt}$ ортогонален временниподобному вектору V, поэтому $\left\|\frac{DX_0}{dt}\right\|^2 \leqslant 0$, тем самым

$$\frac{1}{2} E_{**}(X, X) \leqslant -\int_0^1 (f'^2 + f^2 \| V \|^2 K)\, dt. \tag{4}$$

Так как при $f(0) = f(1) = 0$ имеет место неравенство $\int_0^1 f'^2\, dt \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2\, dt$, то из (4) получаем достаточное условие равенства нулю индекса геодезической

$$-K \| V \|^2 \leqslant \pi^2. \tag{5}$$

Замена $\| V \|^2$ на L^2 завершает доказательство.

3.4. Следствие 1. *Всякая достаточно короткая геодезическая пространства ${}^{n-1}V_n$ является локально длиннейшей.*

2. В пространстве положительной кривизны индекс любой геодезической равен 0. Тем самым всякая геодезическая — локально длиннейшая.

3.5. ***Лемма.*** *Векторное поле $X \in H_\gamma$ принадлежит нулевому пространству E_{**} тогда и только тогда, когда X есть Якобиево поле. Степень вырождения E_{**} на H_γ равна кратности p и q как сопряженных точек.*

Доказательство. Из формул (2) и (3) следует, что всякое Якобиево поле X принадлежит нулевому пространству E_{**}, причем $X \in H_\gamma$.

3.6. Действительно, если X — поле Якоби, то $\frac{d^2}{dt^2}\langle X, \quad V\rangle = 0$, значит, $\langle X, V\rangle = at + b$. Из граничных условий $\langle X, V\rangle = 0$. Обратно, пусть X принадлежит нулевому пространству E_{**}. Найдется такое подразбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$, что X гладко на $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть поле Y и функция f гладки на $[0, 1]$, причем $f = 0$ на $[0, 1] \setminus [t_{i-1}, t_i]$. Тогда из формулы (2) получаем

$$\frac{1}{2} E_{**}(X, fY) = -\int_0^1 f\left[Y, \frac{D^2X}{dt^2} + R(V, X)V\right] dt$$

Предположим, что $Z = \frac{D^2X}{dt^2} + R(V, X)V \neq 0$ в некоторой точке $\xi \in (t_{i-1}, t_i)$. В этой точке разложим Z по ортонормированной системе неизотропных векторов $\{\partial_i\}$ $Z = \sum_{i=1}^{n} v^i\partial_i$. Пусть $v^j \neq 0$. Выберем такое векторное поле Y, чтобы $Y(\xi) = v^j\partial_j$. Тогда $E_{**}(X, fY) = -\int_0^1 f\langle Y, \quad Z\rangle\, dt$, причем $\langle Y(\xi), \quad Z(\xi)\rangle = v^j \| \partial_j \|^2 \neq 0$. За счет выбора функции f можно добиться того, что $E_{**}(Y, Z) \neq 0$ — это противоречит условию. Таким образом, $\frac{D^2X}{dt^2} + R(V, \quad X)V = 0$ на (t_{i-1}, t_i). Аналогично доказывается, что $\Delta_i \frac{DZ}{dt} = 0$. Так как поле Якоби Z вполне определяется значениями $Z(0)$ и $\frac{DZ}{dt}(0)$, то $\frac{D^2X}{dt^2} + R(V, X)V = 0$ на всем промежутке $[0, 1]$.

4.1. **Теорема.** *Индекс λ геодезической γ, иначе индекс формы E_{**} на H_γ равен числу точек $\gamma(t)$, $0 < t < 1$ таких, что $\gamma(t)$ сопряжена с $\gamma(0)$ вдоль γ, если считать каждую сопряженную точку столько раз, какова ее кратность. Индекс всегда конечен.*

От случая знакоопределенной метрики доказательство отличается тем, что вместо касательного пространства $T\Omega_\gamma$ следует рассматривать H_γ [ср. 1, теорема 15.1]. При конструировании конечномерных подпространств, аппроксимирующих H_γ, мы не выйдем за его пределы, что следует из замечания 3.6.

Из теоремы 4.1. следует, что если индекс геодезической равен 0, то на ней нет сопряженных точек. Таким образом, теорема 3.3 дает критерий отсутствия сопряженных точек.

Теорема 4.1. позволяет перенести на случай метрики ${}^{n-1}V_n$ теорему Майерса [1, теорема 19.4]

4.2. **Теорема.** *Если для любого единичного времениподобного вектора в любой точке ${}^{n-1}V_n$ кривизна Риччи удовлетворяет условию $r^2K(X) \geqslant n-1$, то каждая времениподобная геодезическая длины, большей πr, содержит сопряженные точки и поэтому не является длиннейшей.*

5.1. В качестве приложения рассмотрим метрику Робертсона — Уолкера. Это метрика однородной модели вселенной, которая в подходящих координатах имеет вид [2, § 8,3]

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\,[d\omega^2 + \lambda^2(\omega)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{6}$$

где $\lambda(\omega)$ может иметь значения $\operatorname{sh}(\omega)$, ω, $\sin\omega$. Каждому из этих случаев припишем параметр $k = -1, 0, 1$ соответственно. Следующая теорема дает критерий наличия или отсутствия сопряженных точек в зависимости от вида функции $R(t)$.

5.2. **Теорема 1.** *Если одновременно выполняются неравенства $\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{k}{R^2} \geqslant 0$, $\frac{R''}{R} \geqslant 0$, то в пространстве Робертсона—Уолкера нет сопряженных точек.*

2. *Если же $\frac{R''}{R} \leqslant -\delta < 0$, то каждая геодезическая длины большей $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, имеет сопряженные точки и следовательно не является длиннейшей.*

Доказательство. Введем нумерацию координат $t = x_0$, $\omega = x_1$, $\theta = x_2$, $\varphi = x_3$. Вычисляя кривизну в двумерном направлении векторов X, Y, таких что $\|X\|^2 = 1$, $\|Y\|^2 = -1$, $\langle X, Y\rangle = 0$, получаем

$$K(X, Y) = \frac{R''}{R} + \left(\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{k}{R^2}\right)(x_0^2 - y_0^2 - 1). \tag{7}$$

Можно показать, что для нашего выбора векторов X, Y $x_0^2 - y_0^2 \geqslant 1$. Теперь первое утверждение следует из теоремы 3.3. Предположим, что в начальный момент времени касательный вектор времениподобной геодезической можно разложить по векторам $\frac{\partial}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}$ (этого всегда можно добиться за счет выбора системы координат в подпространстве $x_0 = 0$). Тогда можно показать, что эта геодезическая целиком лежит в подпространстве $x_2 = x_3 = 0$, метрика которого имеет вид $ds^2 = dx_0^2 - R^2(x_0)\,dx_1^2$. Так как кривизна этого подпространства равна $\frac{R''}{R}$, то из теоремы 4.2. следует второе утверждение.

5.3. *Замечание.* Формула (7) позволяет сформулировать условие изотропности метрики однородной модели (6)

$$\frac{R''}{R}-\frac{R'^2}{R^2}-\frac{k}{R^2}=0. \tag{8}$$

Это уравнение интегрируется в явном виде. Пусть $R(0)=R_0$, $R'(0)=R'_0$. Положим $c=\frac{R_0'^2+k}{R_0^2}$. Возможны три случая:

1. $c=0$, $R(t)=R'_0t+R_0$ — плоское пространство;

2. $c>0$, $R(t)=R_0\operatorname{ch}\sqrt{c}\,t+\frac{R'_0}{\sqrt{c}}\operatorname{sh}\sqrt{c}t$ — пространство постоянной положительной кривизны c (пространство Де Ситтера). В силу теоремы 5.2. сопряженные точки отсутствуют [4];

3. $c<0$, $R(t)=R_0\cos\sqrt{-c}t+\frac{R'_0}{\sqrt{-c}}\sin\sqrt{-c}t$ — пространство постоянной отрицательной кривизны (антидеситтерово пространство). Геодезические длины, больше $\frac{\pi}{\sqrt{-c}}$, имеют сопряженные точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милнор Дж. Теория Морса. М., 1965.
2. Г. К. Мак-Витти. Общая теория относительности и космология. М., 1961.
3. Hawking S. W. The occurrence of singularities in cosmology, Proceedings of the royal society 1966, 294, 295, 1967, 300.
4. Э. Я. Мелдыбаева. О топологической структуре и геодезических линиях пространства времени де Ситтера. «Докл. АН Тадж. ССР», 10, № 7, 13—15, 1967.

О СРАВНЕНИИ РАЗВЕРТОК ЛОКАЛЬНЫХ ПУТЕЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО МНОГООБРАЗИЯ

А. К. Лапковский, В. Н. Лаптинский

Могилев

Рассмотрим дифференцируемое многообразие V_n класса C^∞ с системой координатных окрестностей $\{U_i\}$. Обозначим через $E(V_n)$ множество всех реперов $z(x)$ во всех точках x многообразия V_n. Как известно, $E(V_n)$ является дифференцируемым главным расслоенным многообразием над базой V_n со структурной группой $GL(n, R)$. Не ограничивая общности, можем считать, что координатные окрестности U_i — области локальной тривиальности $E(V_n)$, а значит, над каждой U_i можем выбрать локальную секущую поверхность $z_i(x)$ пространства $E(V_n)$. Тогда линейная связность с формой $\omega(dz)$ на многообразии V_n определяется* множеством локальных форм

* А. Лихнерович. Теория связности в целом и группы голономий. ИЛ. 1960, 54.

$\omega_i(dx)$, $x \in U_i$ со значениями в алгебре Ли L таких, что $\omega_i(dx) = \omega(dz_i)$, где $dx = p^* dz_i$. Здесь p^* есть дифференциал канонического отображения пространства $E(V_n)$ в базу V_n. Локальные формы $\omega_i(dx)$ согласованы на пересечении локальных карт $U_i \cap U_j$:

$$\omega_j = (\operatorname{adj} g_{ij}^{-1})\omega_i + g_{ij}^{-1} dg_{ij},\ x \in U_i \cap U_j,$$

где элемент группы g_{ij} определяется из условия

$$z_j(x) = z_i(x)\, g_{ij}(x).$$

Пусть $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — путь на многообразии V_n, а $z(t)$ — некоторый путь в расслоенном пространстве $E(V_n)$. По заданному пути $z(t)$ будем искать горизонтальный путь

$$z'(t) = z(t)\, g^{-1}(t),\ g \in GL(n, R). \tag{1}$$

Для этого необходимо и достаточно*, чтобы $g(t)$ удовлетворяло соотношению

$$g^{-1} dg = \omega(dz). \tag{2}$$

Для локального пути $x(t) \subset U_i$ заданная система локальных секущих поверхностей порождает соответствующий путь в расслоенном пространстве $E(V_n)$. Тогда в терминах локальных форм равенство (2) для $x(t) \subset U_i$ примет вид

$$g^{-1}\frac{dg}{dt} = \omega_i\left(\frac{dx}{dt}\right). \tag{3}$$

Матрица $g(t)$ определяет развертку пути $z(t)$ на групповое пространство $GL(n, R)$ с начальным условием $g(0) = e$, e — единичная матрица $GL(n, R)$.

Всякая другая линейная связность на многообразии V_n получается** своей формой $\omega(dz) + \tilde{\omega}(dz)$, где $\omega(dz)$ — форма заданной связности, а $\tilde{\omega}(dz)$ — тензорная 1-форма типа adj со значениями в алгебре Ли L. Тогда уравнение (3) для измененной связности перепишется следующим образом:

$$h^{-1}\frac{dh}{dt} = \omega_i\left(\frac{dx}{dt}\right) + \tilde{\omega}_i\left(\frac{dx}{dt}\right). \tag{4}$$

Представляется интересным выяснить локально зависимость разверток $g(t)$ и $h(t)$ одного и того же пути $z_i(t)$ в групповое пространство $GL(n, R)$ при начальной и измененной связности.

Теорема 1. *Развертки $g(t)$ и $h(t)$ связаны следующим соотношением:*

$$h(t) = r_{m+1} \prod_{m}^{1} \exp\left(\frac{1}{k!}\pi_k^{k-1}(0)\, t^k\right) g(t), \tag{5}$$

---

* А. Лихнерович. Теория связностей в целом и группы голономий ИЛ, 1960, 53.

** Там же, 60.

где $r_{m+1}(t) \in GL(n, R)$ удовлетворяет уравнению

$$r_{m+1}^{-1} \frac{dr_{m+1}}{dt} = \pi_{m+1}, \quad r_{m+1}(0) = e, \tag{6}$$

причем

$$\begin{gathered}\pi_{m+1}(t) = \exp\left(\frac{1}{m!} \pi_m^{(m-1)}(0)\, t^m\right) H_m \exp\left(-\frac{1}{m!} \pi_m^{(m-1)}(0)\, t^m\right), \\ H_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} \pi_m^m(\tau)\, d\tau \ (m = 1, 2, \ldots), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\pi_1(t) = g(t)\, \tilde{\omega}\left(\frac{dx}{dt}\right) g^{-1}(t), \quad \pi_1(0) = \tilde{\omega}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \tilde{\omega}_0.$$

Доказательство проведем индукцией по m. Очевидно, при $m = 1$ имеем в силу (7)

$$h(t) = r_2 \exp(\pi_1(0)\, t)\, g(t) = r_2 \exp(\tilde{\omega}_0 t) g(t).$$

Рассматривая индуктивный переход от $m+1$ к $m+2$, легко видеть, что

$$\pi_{m+1}^{i}(0) = 0, i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Значит,

$$\pi_{m+1}(t) = \frac{1}{m!} \pi_{m+1}^m(0)\, t^m + H_{m+1}(t).$$

Осуществив в (6) преобразование

$$r_{m+1} = r_{m+2} \exp \frac{1}{m!} \pi_{m+1}^m(0)\, t^m,$$

получим

$$r_{m+2}^{-1} \frac{dr_{m+2}}{dt} = \pi_{m+2},$$

что и доказывает требуемое.

Теорема 2. *Для того чтобы $h(t)$ имело вид*

$$h(t) = \prod_m^1 \exp(c_k t^k)\, g(t), \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(\forall t), \ \pi_m^m(t) = 0, \ c_k = \frac{1}{k!} \pi_k^{k-1}(0), \ k = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Достаточность условий (8) есть непосредственное следствие теоремы 1. Обратно, пусть имеет место (8). Тогда из (4) получаем

$$\begin{gathered} g\tilde{\omega}g^{-1} = \sum_{k=m}^{2} k \exp(-c_1 t) \cdots \exp(-c_{k-1} t^{k-1}) \times \\ \times c_k t^{k-1} \exp(c_{k-1} t^{k-1}) \cdots \exp(c_1 t) + c_1. \end{gathered} \tag{9'}$$

Из последнего равенства последовательным вычислением выводим условия (9).

В частности, при $m=1$ условие (9) имеет очевидный геометрический смысл.

Теорема 3. *Чтобы развертка $h(t)$ имела вид*

$$h(t) = \exp(ct)\, g(t), \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы тензорная форма $\tilde{\omega}\left(\frac{dx}{dt}\right)$ была ковариантно постоянной в первоначальной связности, причем

$$c = \tilde{\omega}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}.$$

В самом деле, условие $\pi_1^{(1)} = 0$ равносильно

$$g\left(\frac{d\tilde{\omega}_i}{dt} + \omega_i\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_i\omega_i\right) g^{-1} = 0.$$

Отсюда следует требуемое.

Следствие. *Если путь $z(x(t))$, $x(t) \in U_i$ горизонтален в связности с локальными формами ω_i, то путь $z(t)\exp\left(-t\tilde{\omega}\left(\frac{dx}{dt}\right)\Big|_{t=0}\right)$ горизонтален в связности с локальными формами $\omega_i + \tilde{\omega}_i$,* где *$\tilde{\omega}_i$ — локальная тензорная форма, ковариантно-постоянная в первоначальной связности.*

Поступила 20 октября 1971 г.

ПРАВИЛЬНЫЙ СИМПЛЕКС, ВПИСАННЫЙ В КУБ

А. И. Медяник

Харьков

Будем называть симплекс вписанным в куб, если все вершины симплекса являются вершинами куба. В настоящей заметке рассматривается задача о том, можно ли вписать правильный n-мерный симплекс в куб той же размерности. Этот вопрос, естественно, возник при попытке решить предложенную А. Д. Милкой задачу существования для пространственных форм.

Выберем в E^n $(n > 1)$ систему прямоугольных декартовых координат так, чтобы начало совпало с центром куба со стороной 2, а оси координат были перпендикулярны гиперграням этого куба.

Теорема 1. *Если в n-мерный куб можно вписать правильный n-мерный симплекс, то $n+1$ делится на 4, причем ребро правильного симплекса равно $\sqrt{2(n+1)}$.*

Утверждение теоремы следует из того, что ребро правильного n-мерного симплекса из центра описанной гиперсферы видно под углом $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$.

Теорема 2. *Если в n-мерный куб можно вписать правильный n-мерный симплекс, то в $(2n+1)$-мерный куб можно вписать правильный $(2n+1)$-мерный симплекс.*

Доказательство. Пусть $(1, 1, \ldots, 1)$ — вершина правильного n-мерного симплекса; A — квадратная матрица, строками которой являются координаты всех вершин основания этого симплекса. Если вершину $(2n+1)$-мерного симплекса поместить в точку $(1, 1, \ldots, 1)$, а вершинами основания взять вершины куба, координаты которых — строки квадратной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} & +1 & \\ A & \vdots & A \\ & +1 & \\ -1 \ldots -1 & -1 & +1 \ldots +1 \\ & -1 & \\ -A & \vdots & A \\ & -1 & \end{pmatrix},$$

то все ребра этого $(2n+1)$-мерного симплекса равны $\sqrt{4(n+1)}$ и, значит, этот симплекс правильный.

Следствие. *В (2^k-1)-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности.*

Из доказательства теоремы 2 вытекает следующее достаточное условие положительного решения рассматриваемой задачи.

Если в $(2n-1)$-мерный куб можно вписать $(2n-1)$-мерные симплексы Q_1 и Q_2 с общей вершиной $(1, 1, \ldots, 1)$ такие, что

1) вершины оснований Q_1 и Q_2 лежат на гиперсфере радиуса $\sqrt{4n}$ с центром в $(1, 1, \ldots 1)$;

2) расстояние между i-й вершиной Q_1 и j-й вершиной Q_2 равно расстоянию между j-й вершиной Q_1 и i-й вершиной Q_2;

3) сумма квадратов длин соответствующих ребер Q_1 и Q_2 равна $8n$, то в $(4n-1)$-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности.

Действительно, пусть A_1 и A_2 — матрицы, строки которых — координаты вершин оснований Q_1 и Q_2. Тогда строки матрицы, полученной из B заменой A на A_1 в правом верхнем и левом нижнем углах, A на A_2 в левом верхнем и правом нижнем углах, будут координатами вершин основания правильного $(4n-1)$-мерного симплекса с вершиной в $(1, 1, \ldots, 1)$.

Условия 1 — 3 можно упростить. Пусть σ — последовательность чисел $\sigma_0, \sigma, \ldots, \sigma_{2n-2}$, каждое из которых равно 1 или -1. Обозначим N_i число тех пар элементов из σ, которые равны -1 и разность порядковых номеров которых равна i или $2n-1-i$.

Лемма 1. *Если существуют такие последовательности из $2n-1$ чисел σ и $\bar{\sigma}$, что в каждую из них -1 входит n раз и $N_m + \bar{N}_m = n$, то в $(4n-1)$-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности.*

Действительно, матрицы A_1 и A_2, удовлетворяющие условиям 1) — 3), строятся следующим образом: r-я строка ($r = 0, 1, \ldots, 2n-2$) матрицы A_1 (A_2) состоит из чисел последовательности σ ($\bar{\sigma}$), циклически переставленных так, чтобы на первом месте находилось r-е после σ_0 (перед $\bar{\sigma}_0$) число.

Лемма 2. *Сравнение* $x^2 - y^2 \equiv m \pmod p$, *где* p — *нечетное простое число и* $m \not\equiv 0 \pmod p$, *в числах* $0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$ *имеет* $\frac{p+1}{4}$ *решений, если* $p+1$ *делится на* 4, *и* $\frac{p+3}{4}$ *решений, если* $p+1$ *не делится на* 4.

Доказательство следует из [1, 2].

Теорема 3. *В куб, размерность которого является простым числом вида* $4n-1$, *можно вписать правильный симплекс той же размерности.*

Доказательство. Пусть p — размерность куба. Рассмотрим следующую последовательность чисел $\sigma: \sigma_m = -1$ ($m = 0, 1, \ldots, p-1$), если $m \equiv q^2 \pmod p$ ($q = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$), и $\sigma_m = 1$ в противном случае. В последовательности σ число -1 встречается n раз [3]. По лемме 2 $N_i = \frac{p+1}{4}$ ($i = 1, 2, \ldots, p-1$). Поэтому вершины куба $A_p(1, 1, \ldots, 1)$ и $A_r(\sigma_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_0 \ldots, \sigma_{r-1})$ ($r = 0, 1, \ldots, p-1$) являются вершинами правильного p-мерного симплекса.

Теорема 4. *В* $(2p+1)$*-мерный куб* (p — *нечетное простое число) можно вписать правильный симплекс той же размерности.*

Доказательство. Если p — число вида $4n-1$, то утверждение теоремы следует из теорем 2 и 3. Пусть $p = 4n+1$. Рассмотрим следующие две последовательности чисел, равных 1 или -1. В последовательности σ число $\sigma_m = -1$, если $m \equiv q^2 \pmod p$ ($q = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$). В последовательности $\bar{\sigma}$ число $\bar{\sigma}_m = -1$, если $m = 0$ или $m \not\equiv q^2 \pmod p$ ($q = 1, 2, \ldots, p-1$). По лемме 2 $N_i = \frac{p+3}{4}$ ($i = 1, 2, \ldots, p-1$). Так как -1, а значит, и $p-1$ являются квадратичными вычетами по модулю p вида $4n+1$ [1], то $\bar{N}_i = \frac{p+3}{4}$. Таким образом, для σ и $\bar{\sigma}$ выполняются условия леммы 1. Значит, и в этом случае в $(2p+1)$-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности. Теорема доказана.

Следствие. *Если* p — *нечетное простое число,* $m \geqslant 0$ *и* $n = 2^{m-2}(p+1)$ — целые числа, *то в* $(4n-1)$*-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Лежен Дирихле. Лекции по теории чисел. ОНТИ НКТП СССР М. — Л., § 40, 1936.
2. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. Теория чисел. Изд-во «Наука», 1964, 19, 517.
3. А. А. Бухштаб. Теория чисел. Изд-во «Просвещение», 1966, 176.

Поступила 10 января 1972 г.

НЕРАЗЛОЖИМОСТЬ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Д. Милка

Харьков

Определяется класс множеств, принадлежащих выпуклым поверхностям евклидова пространства E^3, которые, как устанавливается, не допускают представления в виде векторной суммы. К этому классу относятся, в частности, замкнутые выпуклые поверхности и полные выпуклые поверхности типа параболоида, не являющиеся некоторыми специальными поверхностями переноса.

Напомним, что векторная сумма двух множеств в евклидовом пространстве E^n выражается равенством

$$Z_1 + Z_2 = \{z \mid z = z_1 + z_2,\ z_i \in Z_i\}.$$

Здесь и в дальнейшем под суммой точек понимается сумма их радиусов-векторов.

Множество $Z \subset E^n$ называется разложимым, если его можно представить в виде

$$Z = Z_1 + Z_2,$$

где каждая из компонент Z_1, Z_2 содержит хотя бы две точки.

И. В. Островский высказал предложение о неразложимости выпуклой поверхности. В настоящей работе даются достаточные условия неразложимости множеств в E^2 и E^3, подтверждающие это предположение. Причем оказывается, что в общем случае неразложимы не только выпуклые кривые и выпуклые поверхности, но и лежащие на них множества, которые, можно сказать, сконцентрированы вблизи крайних точек.

Описание достаточно общих классов неразложимых множеств представляет интерес для теории разложений вероятностных законов. Факт неразложимости множества можно интерпретировать как теорему о неразложимости некоторого закона. Поясним подробнее.

Вероятностным законом называется мера $P = P(E)$, определенная на классе борелевских множеств в E^n и нормированная условием $P(E^n) = 1$. Закон P называется разложимым, если его можно представить в виде.

$$P(E) = \int_{E^n} P_1(E - x)\, P_2(dx),$$

где P_1 и P_2 — вероятностные законы, ни одни из которых не сводится к мере, сосредоточенной в одной точке. Здесь удобно использовать вместо интегрального равенства обозначение

$$P = P_1 * P_2.$$

Неразложимые законы существуют [1]; в теории разложений они играют роль, аналогичную роли простых чисел в обычной арифметике. Можно сформулировать достаточный признак неразложимости законов в терминах неразложимости множеств. Для этого назовем спектром $S(P)$ закона P множество тех точек x, для которых при любом положительном ε

$$P(\{y \mid |x-y| < \varepsilon\}) > 0.$$

Известна следующая теорема Винтнера [2]; если $P = P_1 * P_2$, то $S(P) = S(P_1) + S(P_2)$. Отсюда непосредственно вытекает: чтобы закон P был неразложимым, достаточно, чтобы было неразложимым множество $S(P)$.

Формулировки результатов работы содержатся в § 1. В § 2 изучаются множества в двумерной плоскости. Следующий затем параграф — вспомогательный; в нем устанавливаются некоторые предложения, необходимые для исследования множеств в E^3. Доказательства основных результатов работы, относящихся к выпуклым поверхностям в E^3, содержатся в § 4—6.

§ 1. Результаты работы

Множество на выпуклой поверхности будем называть нормальным, если оно содержит подмножество, открытое в топологии этой поверхности, включающее все ее крайние точки. Нормальным, в частности, является множество, совпадающее со всей поверхностью.

Аналогично определяется нормальное множество на выпуклой кривой в плоскости.

Теорема 1. *Любое нормальное множество на замкнутой выпуклой поверхности в E^3 неразложимо.*

Объединение лучей с общим началом, принадлежащих замкнутому выпуклому телу, ограниченному выпуклой поверхностью, называется предельным конусом этой поверхности. Если такой конус телесный, т. е. не вырождается, то термин «предельный конус» относят к его границе в пространстве.

Будем говорить, что выпуклая поверхность, гомеоморфная плоскости, имеет тип параболоида, если предельный конус этой поверхности — луч. Будем называть этот луч предельным лучом данной поверхности.

Аналогично определяется выпуклая кривая, имеющая тип параболы, и вводится предельный луч кривой.

Теорема 2. *Пусть Z — нормальное разложимое множество на выпуклой поверхности Z в E^3 типа параболоида: $Z = Z_1 + Z_2$,* *где ни одно из множеств Z_1, Z_2 не сводится к точке. Тогда $\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$, где $\tilde{Z}_i$—выпуклая кривая типа параболы, причем $\tilde{Z}_i \subset Z_i$, и множество Z_i на кривой $\tilde{Z}_i$ является нормальным.*

Теорема 3. *Поверхность в E^3 типа параболоида, разложимая двумя различными способами, есть параболоид.*

Поверхность, разложимая в сумму кривых, называется поверхностью переноса. Таким образом, по теореме 2 справедлива следующая

Теорема 4. *Любое нормальное множество на выпуклой поверхности в E^3 типа параболоида, не являющейся поверхностью переноса, неразложимо.*

Доказательство теорем 1 и 2 проводится одним методом. Поэтому в тексте первое доказательство излагается полностью, второе — с некоторыми сокращениями.

Разложимые множества, принадлежащие выпуклой кривой в плоскости, допускают исчерпывающее описание (см. § 2).

Теорема 5. *Пусть Z — разложимое множество в плоскости: $Z = Z_1 + Z_2$, где ни одно из множеств Z_i не сводится к одной точке. Тогда возможны лишь следующие случаи:*

а) *одно из множеств, например Z_1, вырождается и принадлежит некоторой прямой l. Множество Z_2 в этом случае располагается на двух прямых, ей параллельных. Также на двух прямых, параллельных l, располагается, следовательно, и множество Z;*

а) *каждое из множеств Z_1, Z_2 невырождено. Эти множества соответственно содержат точно по три точки, и треугольники, которые определяются этими точками, подобны. Множество Z, таким образом, состоит не более чем из девяти точек, вершин и внутренних точек сторон некоторого треугольника.*

Из этой теоремы выводится, что множество на выпуклой кривой в плоскости, включающее окрестность хотя бы одной крайней точки кривой, неразложимо.

Приведем еще один результат для E^3, связанный с выпуклой конической поверхностью.

Теорема 6. *Пусть $\tilde{Z}$ — выпуклый конус в E^3 и $Z \subset \tilde{Z}$ — разложимое множество, содержащее его вершину и имеющее точки на каждом крайнем луче конуса. Тогда $\tilde{Z}$ — трех- или четырехгранный угол.*

Доказательство здесь простое и может быть сведено к решению некоторой задачи для множеств на сфере. Оно основывается на следующих соображениях.

Пусть O — вершина $\tilde{Z}$. Пусть $Z = Z_1 + Z_2$ — соответствующее представление Z, где множества Z_1, Z_2 можно считать замкнутыми и содержащими не менее чем по три точки. Пусть $O_i \in Z_i$ — точки, такие что $O = O_1 + O_2$ и пусть $z_i \in Z_i$, где $z_i \neq O_i$. Можно принять, что луч с началом в O_i, проходящий через z_i, принадлежит Z_i. Можно положить далее, что точки O_1, O_2 совпадают: $O_1 \equiv O_2 \equiv O$. Пусть $l_i \in Z_i$ — луч с началом в O_i, причем $l_1 \neq l_2$ и $l = l_1 + l_2$.

Тогда имеем l, l_1, $l_2 \subset Z \subset \tilde{Z}$; это означает, что плоский угол, ограниченный лучами l_1 и l_2, принадлежит $\tilde{Z}$. Обозначим S_0 сферу с центром O.

Пусть $\tilde{S} \equiv S_0 \cap \tilde{Z}$, $S \equiv S_0 \cap Z$, $S_i \equiv S_0 \cap Z_i$. Тогда $\tilde{S}$ — граница выпуклой оболочки S на S_0, $S \subset \tilde{S}$. Множество S допускает представление: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_{12}$, где S_{12} — объединение отрезков на S_0, для каждого из которых один из концов принадлежит S_1, а другой — S_2. Учитывая, что $\tilde{S}$ — выпуклая кривая на S_0 и $S_{12} \subset \tilde{S}$, легко выяснить строение S, S_1 и S_2, а следовательно, и строение множеств Z, Z_1, Z_2 и конуса $\tilde{Z}$. При этом возникают следующие возможности: множества S_1, S_2 содержат в точности по две точки, а отрезки на S_0, соответственно соединяющие эти точки, пересекаются; одно из множеств, например S_1, принадлежит некоторому отрезку на S_0, а S_2 располагается частью на этом отрезке, вне его имеется лишь одна точка этого множества. В первом случае множество $\tilde{Z}$ представляет трех- или четырехгранный, а во втором случае — трехгранный угол.

Теоремы 1—6 и их следствия для вероятностных законов, некоторые из которых приводятся в конце этого параграфа, в соответствующих формулировках справедливы в евклидовом пространстве произвольной размерности. Для их доказательства применимы методы, используемые в данной статье, хотя простое перенесение результатов затруднительно. Случай размерности, большей трех, будет рассмотрен в другой работе. Приведем лишь один результат, который устанавливается непосредственно. Общие свойства компонент выпуклой разложимой поверхности, используемые здесь, изложены в § 3

Теорема 7. *Замкнутая строго выпуклая гиперповерхность в E^n неразложима.*

Действительно, в противном случае каждая компонента такой поверхности была бы замкнутой выпуклой гиперповерхностью, так как имела бы с каждой своей опорной плоскостью точно одну общую точку, а исходная гиперповерхность была бы суммой двух замкнутых выпуклых гиперповерхностей, что, очевидно, невозможно.

Высказанная теорема — частный случай следующего более общего утверждения.

Предложение (*). *Пусть Z — замкнутая выпуклая гиперповерхность в E^n, и $Z = Z_1 + Z_2$, где Z_1 и Z_2 — замкнутые множества. Пусть представление любой точки Z однозначно: если $z \in Z$ и $z = z_1 + z_2 = z_1' + z_2'$, где $z_i, z_i' \in Z_i$, то $z_i \equiv z_i'$. Тогда одно из множеств Z_1, Z_2 сводится к точке.*

Доказательство. Рассмотрим множество $Z_\theta = \theta Z_1 + (1 - \theta) Z_2$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$; λZ_i получается из Z_i подобным преобразованием с коэффициентом λ. Можно показать, что множество Z_θ $(0 < \theta < 1)$ невырождено и располагается на поверхности своей выпуклой оболочки. Совместим центры тяжестей множеств Z_θ с центром тяжести поверхности Z с помощью параллельных переносов множеств в пространстве и спроектируем полученные множества радиально из центра Z на эту поверхность.

Пусть $\tilde{Z}_\theta$ — соответствующая проекция для множества Z_θ. Легко устанавливается (с учетом однозначной представимости точек Z), что операцией $Z \to \tilde{Z}_\theta = \{z \to \tilde{z}_\theta \mid z = z_1 + z_2, z_\theta = \theta z_1 + (1-\theta) z_2, z_i \in Z_i\}$ определяется непрерывное по параметру θ семейство непрерывных отображений Z в $Z\,(z_{1/2} \equiv z)$, гомотопное тождественному: $\tilde{Z}_{\frac{1}{2}} \equiv Z$. Согласно известной теореме топологии, $Z \to \tilde{Z}_\theta$ — отображение на всю Z. Это означает, что множество $Z_\theta\,(0 < \theta < 1)$ — компактная выпуклая гиперповерхность. В свою очередь отсюда следует, что каждое из множеств Z_1, Z_2 есть замкнутая выпуклая гиперповерхность или замкнутая выпуклая область в подпространстве E^n ненулевой размерности. Если предположить, что ни одно из множеств Z_1, Z_2 не сводится к точке, то эти множества, очевидно, не могут дать в сумме замкнутую выпуклую гиперповерхность.

Каждая из теорем, приведенных выше, имеет следствием результат о неразложимости некоторого закона (теоремы 1, 4, 7) или, в случае разложимости, — геометрическую характеристику соответствующих спектров (теоремы 2, 3, 5, 6). Сформулируем некоторые из этих следствий.

Следствие 1. *Закон P в E^3, спектр $S(P)$ которого — нормальное множество на замкнутой выпуклой поверхности, неразложимый.*

Следствие 2. *Закон P в E^3, спектр $S(P)$ которого — нормальное множество на поверхности типа параболоида, не являющейся поверхностью переноса, неразложимый.*

Следствие 3. *Закон P в E^n, спектр $S(P)$ которого — замкнутая строго выпуклая гиперповерхность, неразложимый.*

§ 2. Случай плоскости

Пусть Z — разложимое множество, не лежащее на прямой и расположенное на выпуклой кривой в плоскости $Z = Z_1 + Z_2$, где ни одно из множеств Z_i не сводится к точке. Если $z_i \in Z_i$ и $z = z_1 + z_2$, то в точках z, z_1 и z_2 соответствующие множества имеют опорные прямые с одинаковыми внешними нормалями. Это непосредственно вытекает из следующего факта: проекция суммы векторов на некоторое направление, определяемое в данном случае внешней нормалью к опорной прямой к Z, равняется сумме проекций векторов.

Воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого приведем позже.

Предложение (*). *Пусть Δ — треугольник и l — отрезок такие, что в каждой вершине Δ и в каждом конце l существуют опорные прямые к Δ и l с одинаковыми внешними нормалями. Тогда l параллелен одной из сторон Δ.*

Предположим, что множества Z_1, Z_2 не вырождаются. Пусть Δ_1 и Δ_2 — треугольники с вершинами в точках из Z_1 и Z_2 соответственно. Из предложения (*) тогда следует, что Δ_1, Δ_2 подобны, а Z_1, Z_2 не имеют других точек, кроме вершин треугольников. Множество Z, таким образом, состоит из конечного числа точек.

Допустим, что одно из множеств, например Z_1, вырождено и помещается на некоторой прямой l_1. Тогда в Z_2 найдутся две точки (обозначим их a и b) такие, что ab и l_1 непараллельны. Если $Z_2 \subset l_2$, где l_2 — некоторая прямая, то одно из множеств Z_1, Z_2 состоит, очевидно, только из двух точек. Если Z_2 невырождено, то с помощью предложения (*) убеждаемся, что это множество принадлежит двум прямым, проходящим через a, b, параллельным прямой l_1. Множество Z, значит, покрывается двумя параллельными прямыми.

Рассмотренные случаи полностью описывают строение множества Z. Отсюда получается следующий результат для плоскости, которым будем неоднократно пользоваться позже.

Лемма 1. *Множество на выпуклой кривой в плоскости, включающее окрестность крайней точки кривой, неразложимо.*

Докажем теперь предложение (*).

Допустим, что это предложение неверно. Проведем опорные прямые к Δ, параллельные l. Одна из вершин треугольника — пусть это будет вершина p — располагается в полосе между этими прямыми. Сместим l параллельно, чтобы один из концов отрезка совпал с точкой p, а весь отрезок находился бы вне треугольника. Согласно условию в (*), в таком расположении Δ и l существует прямая, опорная к этим фигурам в их общей точке, по отношению к которой они находятся в одной замкнутой полуплоскости. Это, очевидно, невозможно, и предложение (*) доказано.

§ 3. Вспомогательные поверхности

Пусть $\tilde{Z}$ — замкнутая или полная бесконечная нецилиндрическая выпуклая поверхность в E^3 и Z — нормальное разложимое множество на этой поверхности: $Z = Z_1 + Z_2$, где ни одно из множеств Z_1, Z_2 не сводится к точке. Множества Z_1 и Z_2 будем считать замкнутыми.

Введем вспомогательные выпуклые поверхности, содержащие компоненты множества Z. Для этого рассмотрим два случая.

Первый случай. Поверхность $\tilde{Z}$ — замкнутая.

Можно заметить, что множества Z_1, Z_2 располагаются на выпуклых поверхностях. Действительно, любое из этих множеств сдвигами на векторы из второго множества переводится на $\tilde{Z}$. В качестве искомых поверхностей (обозначим их соответственно $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$) возьмем границы выпуклых оболочек множеств Z_1 и Z_2. Предполагая, что эти поверхности не вырождаются, укажем некоторые их свойства:

a) крайние точки поверхности $\tilde{Z}_i$ принадлежат множеству Z_i;

в) для каждой плоскости, опорной к $\tilde{Z}_i$, и соответствующего ей опорного множества (пересечения Z_i с плоскостью), крайние точки этого множества по отношению к минимальному линейному подмногообразию, его содержащему, есть также крайние на $\tilde{Z}_i$;

c) если $z^* \in \tilde{Z}$ — крайняя точка и $z^* = z_1^* + z_2^*$, где $z_i^* \in Z_i$, то точки z_1^*, z_2^* на соответствующих поверхностях $\tilde{Z}_1$, z_2 — также крайние, а данное представление z^* однозначно; если $z^* = z_1 + z_2$, где $z_i \in Z_i$, то $z_i \equiv z_i^*$;

d) для любой пары точек $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ и точки $z = z_1 + z_2$ существуют плоскости, опорные в этих точках к поверхностям $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ и $\tilde{Z}$ соответственно и имеющие одинаковые внешние нормали; будем говорить далее, что в указанных точках существуют аналогичные опорные плоскости.

Наконец, сформулируем последнее свойство. Здесь и далее применяется сокращение: $W^{\tau} \equiv W \cap \tau$, где W — некоторое множество, а τ — плоскость. Тогда

e) пусть τ — плоскость, опорная к поверхности $\tilde{Z}$ в точке $z^* \in Z$, и пусть $z_1^* \in Z_1^{\tau_1}$, $z_2^* \in Z_2^{\tau_2}$ — соответствующие точки, т. е. $z_1^* + z_2^* = z^*$, где τ_1, τ_2 — плоскости, параллельные τ. Тогда τ_1, τ_2 — плоскости, опорные к $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ соответственно и аналогичные τ, $Z^{\tau} = Z_1^{\tau_1} + Z_2^{\tau_2}$. Указанное представление множества Z^{τ} в определенном смысле однозначно: если $z \in Z^{\tau}$ и $z = z_1 + z_2$, где $z_i \in Z_i$, то $z_i \in Z_i^{\tau_i}$; если $z = z_1 + z_2$, где $z_i \in Z_i$, а $z_1 \notin Z_1^{\tau_1}$ или $z_2 \notin Z_2^{\tau_2}$, то $z \notin Z^{\tau}$.

По поводу доказательств заметим следующее.

Первые два свойства вспомогательных поверхностей очевидны. Остальные легко выводятся из правил суммирования векторов. В частности, два последних свойства основываются на таком факте: проекция суммы векторов на ориентированную прямую, определяемую в данном случае общей внешней нормалью к аналогичным опорным плоскостям поверхностей, равняется сумме проекций векторов.

Обратим внимание, что поверхности $\tilde{Z}$, $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$ имеют одновременно аналогичные опорные плоскости с любым заданным направлением их общей нормали.

Второй случай. Поверхность $\tilde{Z}$ — бесконечная.

В качестве искомых поверхностей (обозначим их $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$ соответственно) выберем границы выпуклых оболочек множества $Z_1 \cup V_1$ и $Z_2 \cup V_2$. Здесь V_i получается из предельного конуса V поверхности Z сдвигом этого конуса до совмещения его вершины с какой-нибудь точкой множества Z_i; конус V_i, как легко убедиться, для поверхности $\tilde{Z}_i$ является предельным. Можно проверить, что поверхности $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$, если они не вырождаются, обладают теми же свойствами, которые мы перечислили для компактного случая.

причем для каждого направления внешней нормали, определяющего плоскость, строго опорную к конусу V, имеются аналогичные ей опорные плоскости к поверхностям $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ и $\tilde{Z}$; соответствующие этим плоскостям опорные множества ограничены. Заметим, что строго опорные плоскости к V существуют, так как поверхность $\tilde{Z}$ — нецилиндрическая; если задана плоскость, опорная к одной из поверхностей $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$, соответствующее опорное множество которой ограничено, то нормаль к этой плоскости определяет аналогичную строго опорную к V плоскость. Этим закончено рассмотрение второго случая.

Если одно из множеств, с помощью выпуклых оболочек которых вводятся вспомогательные поверхности, вырождается в пространстве, то соответствующая поверхность $\tilde{Z}_i$ вырождается. Можно показать, однако, воспользовавшись нормальностью Z на $\tilde{Z}$, что это множество не вырождается в некоторой плоскости. Здесь вместо вспомогательной поверхности будем рассматривать выпуклую кривую, сохранив за ней обозначение $\tilde{Z}_i$, границу в указанной плоскости выпуклой оболочки множества. Вспомогательная кривая $\tilde{Z}_i$ как множество точек в пространстве вместе с другой такой кривой или невырожденной вспомогательной поверхностью обладает свойствами, приведенными ранее для поверхностей $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$.

Заметим, что перечисленные свойства вспомогательных поверхностей, введенных в этом параграфе, будут применяться без специальных ссылок.

Для доказательства теорем 1 и 2 понадобятся некоторые свойства «в целом» поверхностей $\tilde{Z}_i$.

Подчеркнем важное обстоятельство, непосредственно вытекающее из нормальности Z; если одно из множеств Z_1, Z_2 вырождено в пространстве, то это множество не вырождается в некоторой плоскости. Характер возможного вырождения компонент множества Z описывается в следующей лемме

Лемма 2. *Пусть для определенности вырождается множество Z_2. Пусть τ_2 — плоскость, опорная к $\tilde{Z}_2$, содержащая это множество. Предположим, что существует плоскость, аналогичная τ_2, опорная к $\tilde{Z}_1$. Тогда множество Z_2 на кривой $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ является нормальным. Приведенные условия не могут быть выполненными, если кривая $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ — замкнутая.*

Доказательство. Под кривой $Z_2^{\tau_2}$, если $\tilde{Z}_2$ бесконечна, понимается граница в плоскости τ_2 соответствующего, определяемого этой плоскостью опорного множества. Заметим, что множество Z_2 полностью расположено на кривой $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$. Иначе оказалось бы, что Z_1 также вырождено и расположено в плоскости, параллельной τ_2 (см. п. d этого §).

Установим, что каждое сечение множества Z_1 плоскостью, параллельной τ_2 и не опорной к $\tilde{Z}_1$, состоит из одной точки.

Пусть τ и τ_1 — плоскости, параллельные τ_2, для которых пересечения Z^τ и $Z_1^{\tau_1}$ непусты. Между множествами $\{\tau\}$ и $\{\tau_1\}$ таких плоскостей устанавливается, очевидно, взаимно-однозначное соответствие, определяемое соотношением $Z^\tau = Z_1^{\tau_1} + Z_2^{\tau_2}$, а значит, и равенством $\tau = \tau_1 + \tau_2$. Это соответствие запишем формулой $\tau = \chi(\tau_1)$. Пусть $z^* \in Z$ — некоторая крайняя точка поверхности $\tilde{Z}$ и $z \in Z$ — близкая к z^* точка, такая что соответствующая плоскость $\tau_z \in \{\tau\}$, содержащая z, не есть опорная к поверхности. Точка z существует и выбирается в силу нормальности Z с большим произволом. Тогда $\tilde{Z}^{\tau_z}$ выпуклая кривая, множество Z^{τ_z} принадлежит этой кривой и покрывает на ней некоторую окрестность точки z. Будем считать, что эта окрестность — максимальная. Тогда она — не отрезок (так как z^* — крайняя и z близка к z^*) и, следовательно, содержит крайнюю для кривой $\tilde{Z}^{\tau_z}$ точку. Из леммы 1 вытекает, что множество Z^{τ_z} неразложимо. Учитывая, что $Z^{\tau_z} = Z_1^{\chi^{-1}(\tau_z)} + Z_2$, где $\chi^{-1}(\tau_z) \in \{\tau_1\}$, заключаем: множество $z_1^{\chi^{-1}}(\tau_z)$ состоит из одной точки, а на кривой $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ есть крайняя точка, некоторая окрестность которой принадлежит Z_2. Отсюда, в свою очередь, устанавливается (снова воспользуемся леммой 1), что каждая плоскость $\tau_1 \in \{\tau_1\}$, неопорная к $\tilde{Z}_1$, имеет в пересечении $Z_1^{\tau_1}$ единственную точку.

Покажем, что множество Z_2 на $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ нормально.

Пусть $z_2 \in Z_2$ — крайняя точка, $z_1^* \in Z_1$ — крайняя точка такая, что точка $z^* = z_1^* + z_2$ — также крайняя на $\tilde{Z}$. Точка z_1^*, например, может быть найдена в плоскости, опорной к $\tilde{Z}_1$, параллельной плоскости τ_2. Пусть $z \in Z$ — точка, близкая к z^*, $\tau_z \in \{\tau\}$ — плоскость, содержащая z. Имеем $Z^{\tau_z} = Z_1^{\chi^{-1}(\tau_z)} + Z_2$. По доказанному множество $Z_1^{\chi^{-1}(\tau_z)}$ сводится к точке — обозначим ее z_1. Точка z_1 близка к z_1^*, и сумма $z = z_1 + z_2$ попадает в малую окрестность z^* на $\tilde{Z}$. Из нормальности Z тогда следует, что точка z имеет на $\tilde{Z}^{\tau_z}$ окрестность, полностью состоящую из точек Z. Но эта окрестность есть сумма точки z_1 и соответствующей окрестности точки z_2 на $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$, которая, таким образом, полностью принадлежит Z_2. Нормальность множества Z_2 доказана.

Для завершения доказательства леммы теперь достаточно рассмотреть случай, когда множество $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ ограничено. Тогда $\tilde{Z}$ — замкнутая или $\tilde{Z}$ — бесконечная, а плоскость τ_2 параллельна плоскости, строго опорной к предельному конусу V. Покажем, что множество Z в этом случае не будет нормальным.

Пусть z_1^1, z_1^2, $z_1^3 \in Z_1$ три различные точки такие, что плоскости τ_1^1, τ_1^2, $\tau_1^3 \in \{\tau_1\}$, соответственно их содержащие, также попарно разные. Из выпуклости поверхности $\tilde{Z}$, выпуклости $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ и нормальности Z_2 вытекает, что $\tilde{Z}^{\tau^i} = z_1^i + \tilde{Z}_2^{\tau_2}$, где $\tau^i = \tau_1^i + \tau_2$. Это означает, что сечения $\{\tilde{Z}^{\tau}\}$ поверхности $\tilde{Z}$ плоскостями $\{\tau^i\}$ конгруэнтны $\tilde{Z}_2^{\tau}$ и получаются из этой кривой параллельными переносами. Здесь под сечением $\tilde{Z}^{\tau^i}$ (если τ^i — опорная к $\tilde{Z}$) понимается граница соответствующего опорного множества. Тогда легко убедиться, что эти сечения располагаются на некотором цилиндрическом поясе Φ, гомеоморфном круговому, и являются его параллелями. Одновременно устанавливается, что пояс Φ полностью принадлежит $\tilde{Z}$ и целиком содержит множество Z. Но тогда Z не будет нормальным. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Отрезок на выпуклой поверхности, являющийся опорным множеством для некоторой опорной плоскости, будем называть ребром поверхности.

Если на выпуклой поверхности отмечено некоторое множество, то ребро поверхности, не содержащее внутри точек этого множества, будем называть незаполненным.

Поверхности $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$, введенные в этом параграфе, содержат множества Z_1 и Z_2 соответственно, которые назовем отмеченными.

Лемма 3. *Невырожденная поверхность $\tilde{Z}_i$ не имеет незаполненных ребер.*

Доказательство. Пусть $\tilde{Z}_1$ — невырожденная, а одно из ребер поверхности — обозначим его $l_1 \equiv a_1 b_1$ — незаполненное.

Нам понадобятся следующие два предложения.

Пусть $z^* \in Z$ и представление $z^* = z_1^* + z_2^*$, где $z_i^* \in Z_i$, однозначны: если $z^* = z_1' + z_2'$, где $z_1' \in Z_i$, то $z_i' \equiv z_i^*$. Пусть $U_{z_1^*}$, $U_{z_2^*}$ — достаточно малые окрестности точек z_1^*, z_2^* на $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ соответственно. Тогда существует окрестность U_{z^*} точки z^* на $\tilde{Z}$ такая, что выполнено следующее условие: для каждой точки $z \in Z \cap U_{z^*}$ и каждого ее представления $z = z_1 + z_2$, где $z_i \in Z_i$, имеют место включения $z_1 \in U_{z_1^*}$, $z_2 \in U_{z_2^*}$.

Внутренняя точка прямолинейного отрезка, лежащего на $\tilde{Z}_2$, не может являться предельной для точек Z_2, не принадлежащих этому отрезку.

Первое утверждение здесь очевидно. Для бесконечной поверхности $\tilde{Z}$ это утверждение легко выводится с учетом того, что $\tilde{Z}$ — нецилиндрическая.

Второе утверждение тривиально, если $\tilde{Z}_2$ — плоская кривая. Пусть $\tilde{Z}_2$ не вырождается. Пусть $\{z_2^n\} \subset Z_2$ — последовательность точек, сходящаяся к внутренней точке отрезка, который принадлежит $\tilde{Z}_2$, расположенных вне отрезка. Из общих свойств выпуклых поверхностей тогда следует, что касательные конусы к поверхности $\tilde{Z}_2$ в точках последовательности $\{z_2^n\}$ сходятся к некоторой плоскости.

Отсюда получим, что множество Z_1 вырождено (расположено в плоскости, параллельной предельной) — это вытекает из свойства d поверхностей $\tilde{Z}_i$. Одновременно устанавливается, что поверхность $\tilde{Z}_2$ имеет опорную плоскость, параллельную плоскости, несущей Z_1. Но это невозможно по лемме 2, так как ребро $l_1 \subset \tilde{Z}_1$ — незаполненное.

Заметим, что конус, касательный к выпуклой поверхности в точке, определяется как предел поверхностей, полученных из данной преобразованиями подобия с центром в этой точке и коэффициентами подобия, которые стремятся к бесконечности.

Обратим внимание на последний пункт приведенных рассуждений. Он единственный из всего доказательства леммы, где приходится выделять случаи, когда $\tilde{Z}$ — замкнутая или бесконечная. Если поверхность $\tilde{Z}$ — замкнутая, то для получения противоречия достаточно применения лишь леммы 2. Пусть $\tilde{Z}$ — бесконечная. Из леммы 2 тогда вытекает, что Z_1 — нормальное множество на некоторой (известной) выпуклой кривой, которая содержит прямолинейный участок, отрезок l_1, оканчивающийся в ее крайних точках. Но по условию леммы 3 этот отрезок не имеет внутри точек из множества Z_1, и Z_1, следовательно, не есть нормальное. Здесь, таким образом, необходимо учитывается возможность неограниченности рассматриваемых поверхностей.

Пусть τ_1 — та плоскость, опорная к $\tilde{Z}_1$, для которой отрезок l_1 — опорное множество; $l_1 = \tilde{Z}_1^{\tau_1}$. Согласно предположению, $Z_1^{\tau_1} = a_1 \cup \cup b_1$. Пусть τ_2 — плоскость, опорная к $\tilde{Z}_2$ и аналогичная τ_1. Легко устанавливается (поскольку l_1 — незаполненное, а Z на $\tilde{Z}$ — нормальное), что соответствующее на $\tilde{Z}_2$ опорное множество $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ — параллельный l_1 отрезок.

Действительно, $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ не сводится к точке, иначе Z^{τ}, где $\tau = \tau_1 + + \tau_2$ — двухточечное множество, каждая точка которого не имеет на $\tilde{Z}$ окрестности, полностью принадлежащей Z. $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ не может быть и выпуклой областью в τ_2; такая область ввиду невырожденности поверхности $\tilde{Z}_1$ содержала бы множество $Z_2^{\tau_2}$ целиком на своей границе, и соответствующее множество Z^{τ}, как сумма $Z^{\tau} = Z_2^{\tau_2} + + a_1 \cup b_1$, не имело бы в плоскости τ внутренних точек, что также противоречило бы нормальности Z. Невозможность случая, когда $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ — прямолинейный отрезок, не параллельный l_1, достаточно очевидна. (Заметим ,что, если $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ — выпуклая область, внутри которой имеется точка из множества Z_2, множество Z_1 оказывается вырожденным; получаем противоречие на основании леммы 2).

Введем для отрезка $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ обозначение $l_2 \equiv a_2 b_2$, считая, что направление от a_2 к b_2 и направление от a_1 к b_1 одинаковы. Если $\tau_1 + \tau_2 \equiv \tau$, $l_1 + l_2 \equiv l \equiv ab$, где $a = a_1 + a_2$ и $b = b_1 + b_2$, то τ — опорная к $\tilde{Z}$, $l = \tilde{Z}^{\tau}$ и a, b — крайние на $\tilde{Z}$ точки. Тогда a, b

имеют на l окрестности, некоторые отрезки l_a, l_b соответственно, полностью принадлежащие $\tilde{Z}$. Предположим, что эти отрезки достаточно малы. Тогда $l_a = a_1 + l_{a_2}$ и $l_b = b_1 + l_{b_2}$, где l_{a_2} и l_{b_2} — непересекающиеся отрезки, принадлежащие $l_2 \cap Z_2$, примыкающие к точкам a_2 и b_2 соответственно, и представление каждой точки отрезков l_a, l_b однозначно.

Выясним строение множества Z на поверхности $\tilde{Z}$ в окрестности точки a.

Пусть x — некоторая внутренняя точка отрезка l_a и Δ_x — ее окрестность на $\tilde{Z}$, которая проектируется на плоскость τ на целый квадрат с центром в x, со стороной, равной ε, и одной из сторон, параллельной l. Считаем, что x близка к a и $\Delta_x \subset Z$. Пусть $x = a_1 + x_2$, где $x_2 \in l_{a_2}$. Так как представление x однозначно, а малая окрестность точки x_2 на поверхности $\tilde{Z}_2$ в пересечении с множеством Z_2 принадлежит отрезку l_2, то при достаточно малом ε каждая точка $x' \in \Delta_x$ определяется суммой $x' = x_1' + x_2'$ (*) ($x_i' \in Z_i$), в которой x_2' для l_{a_2} является внутренней. Пусть x' фиксирована, а $x' = x_1' + x_2'$ — одно из ее представлений (*). Отрезок $l_{x'} \equiv x_1' + l_{a_2}$, параллельный l, содержит внутри эту точку, и некоторый интервал этого отрезка, включающий x', принадлежит Δ_x.

Отсюда следует, что Δ_x есть часть цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны l. Обозначим эту поверхность Φ, считая, что все ее образующие пересекают Δ_x. Из свойств поверхности Φ важно отметить следующие: каждой образующей $l' \subset \Phi$ соответствует некоторая точка $x_1' \in Z_1$ из малой окрестности точки a_1 на $\tilde{Z}_1$ такая, что $x' \equiv a_2 + x_1' \in l'$; каждой точке $x_1' \in Z_1$, достаточно близкой к a_1, соответствует некоторая образующая $l' \subset \Phi$ такая, что также $x' \equiv a_2 + x_1' \in l'$.

Аналогично исследуется множество Z в окрестности точки b.

Пусть y — некоторая внутренняя точка отрезка l_b и $\Delta_y \subset Z$ — ее окрестность на $\tilde{Z}$, которая проектируется на плоскость τ на целый квадрат с центром в y, со стороной, равной ε, и одной из сторон, параллельной l. Здесь выбирается то же значение ε, что и для окрестности Δ_x; это возможно при достаточно малом ε.

Тогда, как и для отрезка l_a, Δ_y принадлежит цилиндрической поверхности с образующими, параллельными l. Из выпуклости поверхности $\tilde{Z}$ следует, что часть этой цилиндрической поверхности, включающая только те образующие, которые пересекают Δ_y, совпадает с поверхностью Φ, введенной для окрестности Δ_x. Относительно поверхности Φ также выполняются следующие утверждения: каждой образующей $l' \subset \Phi$ соответствует некоторая точка $y_1' \in Z_1$ из малой окрестности точки b_1 на $\tilde{Z}_1$ такая, что $y' \equiv b_2 + y_1' \in l'$, каждой точке $y_1' \in Z_1$, достаточно близкой к b_1, соответствует некоторая образующая $l' \subset \Phi$ такая, что $y' \equiv b_2 + y_1' \in l'$.

Ввиду изложенного, окрестность отрезка ab на $\tilde{Z}$ также имеет простое строение. Действительно, из выпуклости поверхности $\tilde{Z}$

следует, что отрезок xy, где x и y введены ранее, имеет на $\tilde{Z}$ некоторую окрестность U, принадлежащую поверхности Φ. Так как x близка к a, y близка к b, то точка $b_1 + a_2$ располагается внутри этой окрестности. Отсюда выводим: для точек $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, достаточно близких к b_1, a_2 соответственно, имеем $z \equiv z_1 + z_2 \in \Phi$, поскольку $z \in U$.

Теперь завершим доказательство леммы.

Выберем точку $z \in Z$, близкую к точке a, не принадлежащую поверхности Φ. Это можно сделать, так как $a \in \tilde{Z}$ — крайняя, а Z на $\tilde{Z}$ — нормально. Пусть $z = x_1' + z_2$, где $x_1' \in Z_1$ и $z_2 \in Z_2$ — некоторое представление этой точки. Тогда x_1' близка к a_1, а z_2 близка к a_2. По доказанному точке x_1' соответствует такая образующая l' поверхности Φ, что $x' \equiv x_1' + a_2 \in l'$. В свою очередь этой образующей соответствует точка $y_1' \in Z_1$, близкая к b_1, для которой также $y' \equiv y_1' + b_2 \in l'$. Точка z представляется следующими суммами: $z = x_1' - y_1' + y_1' + z_2 = x' - y' - a_2 + b_2 + y_1' + z_2$. Здесь векторы $x' - y'$, $a_2 - b_2$, параллельны отрезку l, а точка $y_1' + z_2$ ввиду близости y_1' к b_1 располагается на цилиндре Φ. Следовательно, и точка z принадлежит этому цилиндру, что невозможно.

Лемма 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Воспользуемся обозначениями, введенными в § 3: $\tilde{Z}$ — замкнутая выпуклая поверхность; Z — нормальное разложимое множество на $\tilde{Z}$, Z_1 и Z_2 — компоненты Z, ни одна из которых не сводится к точке. Тогда, учитывая лемму 2, необходимо принять, что обе вспомогательные поверхности $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$ невырождены.

Пусть z_2 — гладкая точка на поверхности $\tilde{Z}_2$. Тогда $z_2 \notin Z_2$, иначе поверхность Z_1 была бы вырожденной. Каждая точка на $\tilde{Z}_2$, не принадлежащая множеству Z_2, не крайняя и есть, следовательно, внутренняя для некоторого отрезка на этой поверхности. Пусть τ_2 — плоскость, опорная к $\tilde{Z}_2$ в точке z_2. Соответствующее опорное множество $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ не есть отрезок. В противном случае, вопреки лемме 3, $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ было бы незаполненным ребром поверхности: действительно, этот отрезок не может иметь внутри точек из Z_2, поскольку на $\tilde{Z}_2$ они были бы гладкими. Таким образом, $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ — невырожденная выпуклая область в плоскости τ_2 и множество $Z_2^{\tau_2}$ принадлежит ее границе.

Могут представиться два случая: либо граница $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ содержит отрезок, оканчивающийся в крайних точках поверхности Z_2, не имеющий внутри точек из множества Z_2, либо это не так. Рассмотрим эти случаи последовательно.

Первый случай. Пусть l — соответствующий отрезок, x — внутренняя точка l и L — выпуклая кривая, полученная в сечении поверхности $\tilde{Z}_2$ плоскостью, проведенной через x ортогонально отрезку. Внутренние точки l — гладкие точки поверхности, иначе этот отрезок для некоторой опорной плоскости был бы незаполненным ребром $\tilde{Z}_2$. Тогда на L имеются точки, сколь угодно близкие к x, не принадлежащие, следовательно, множеству Z_2, являющиеся для этой кривой точками строгой выпуклости. Пусть y — одна из таких точек. Очевидно, найдется плоскость, опорная к $\tilde{Z}_2$ в y, опорное множество l_y которой есть отрезок. Отрезок l_y по лемме 3 содержит внутри некоторую точку $z \in Z_2$. Касательные конусы к поверхности $\tilde{Z}_2$ в точках z, y одинаковы, один из них получается из другого параллельным переносом. Касательный конус в y при достаточной близости y к x близок к плоскости τ_2. Отсюда выводится, что точки Z_1 принадлежат одной плоскости и $\tilde{Z}_1$ вырождается. Получено противоречие.

Второй случай. Здесь легко устанавливается, что множество Z на $\tilde{Z}$ не будет нормальным. Если обозначить τ_1 плоскость, аналогичную τ_2, опорную к $\tilde{Z}_1$, и обозначить еще через τ сумму $\tau = \tau_1 + \tau_2$, то методом, что и в доказательстве леммы 2, находим: в окрестности плоскости τ, опорной к $\tilde{Z}$, множество Z располагается на цилиндрическом поясе, принадлежащем поверхности. Роль кривой $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$, упоминающейся в этой лемме, играет граница области $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$ в рассматриваемом случае. Множество $Z_2^{\tau_2}$, принадлежащее этой границе, обладает следующим основным свойством нормального множества, использованным в лемме: область $Z_2^{\tau_2}$ — максимальная выпуклая область в плоскости τ_2, содержащая $Z_2^{\tau_2}$ на границе. Поэтому рассуждения, проведенные в лемме 2 на этапе, когда уже была установлена нормальность Z_2, полностью применимы в рассматриваемых условиях.

Таким образом, в обоих случаях приходим к противоречию.

Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Воспользуемся обозначениями, введенными в § 3. Рассмотрим вспомогательные поверхности $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$, связанные с поверхностью $\tilde{Z}$. Если обе эти поверхности вырождены, то соответствующие утверждения теоремы проверяются просто — их доказательства опустим.

Пусть $\tilde{Z}_l$ не вырождена и z_l — гладкая ее точка. Тогда опорная плоскость к поверхности в этой точке не может быть параллельна плоскости, строго опорной к предельному конусу V_l.

Доказательство этого факта основывается на общих свойствах поверхности $\tilde{Z}$, вспомогательных поверхностей и на леммах 2, 3. Излагать доказательство не будем, поскольку в существенном оно относится к рассмотренному уже случаю замкнутых поверхностей. Достаточно заметить следующее. Пусть $z_2 \in \tilde{Z}_2$ — гладкая точка, в которой опорная плоскость τ_2 к $\tilde{Z}_2$, параллельна плоскости, строго опорной к конусу V_2. Тогда для плоскости τ_2 и аналогичной ей плоскости τ_1, опорной к $\tilde{Z}_1$ и опорной к $\tilde{Z}$ плоскости $\tau = \tau_1 + \tau_2$, соответствующие опорные множества $\tilde{Z}_2^{\tau_2}$, $\tilde{Z}_1^{\tau_1}$ и $\tilde{Z}^{\tau}$ ограничены. Исследование этих множеств проводится точно так же, как и для замкнутых поверхностей. Действительно, здесь изучаются достаточно малые окрестности указанных множеств и привлекаются только плоскости, опорные к поверхностям, близкие к плоскостям τ_2, τ_1 и τ, также определяющие следовательно, лишь ограниченные опорные множества. Разумеется, на некотором этапе рассуждений здесь учитывается и факт неограниченности рассматриваемых поверхностей. Таким этапом, как видно, является применение леммы 3.

Таким образом, из каждой точки гладкой невырожденной поверхности $\tilde{Z}_i$, а значит, и вообще из любой точки этой поверхности (так как множество гладких точек на ней всюду плотно) исходит луч, принадлежащий $\tilde{Z}_i$, параллельный некоторой образующей ее предельного конуса. Отсюда легко выводится: если конус $V_{\tilde{z}}$ — луч, то поверхность не может быть невырожденной.

Итак, поверхности Z соответствуют выпуклые кривые $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$ типа парабол, содержащие нормальные на них множества Z_1 и Z_2. Плоскости этих кривых не параллельны, а направления предельных лучей кривых совпадают с направлением предельного луча поверхности. Нетрудно заметить, что в данном случае $\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$ и представление каждой точки поверхности $\tilde{Z}$ однозначно.

Теорема 3 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 3

Пусть Z — выпуклая поверхность в E^3 типа параболоида, разложимая двумя различными способами: $Z = Z_1 + Z_2 = Z_1' + Z_2'$. В соответствии с теоремой 2 принимаем, что Z_i и Z_i' выпуклые кривые типа парабол, предельные лучи которых совпадают с предельным лучом поверхности.

Введем декартовы координаты (ξ, η, ζ) в пространстве, считая, что положительное направление вертикальной оси (ζ) и направление предельного луча поверхности Z одинаковы. Учитывая аффинную инвариантность суммы векторов, можно условиться в следующем: начало координат $(0, 0, 0)$ принадлежит Z, являясь на ней гладкой точкой, и эта поверхность касается в этой точке координатной плоскости (ξ, ζ); кривая Z_1 расположена в координатной плоскости (ξ, ζ), а кривая Z_2 — в плоскости (η, ζ) (пусть $\zeta = \varphi(\xi)$ и $\zeta = \psi(\eta)$ — их соответствующие уравнения); кривые Z_1' и Z_2', как и кривые Z_1 и Z_2, содержат начало $(0, 0, 0)$ и, следовательно, также касаются плоскости (ξ, η).

Нетрудно заметить, что $Z_1' \neq Z_1$, $Z_1' \neq Z_2$ и $Z_2' \neq Z_1$, $Z_2' \neq Z_2$. Допустим, например, что $Z_1' \equiv Z_1$. Тогда $Z_2' \neq Z_2$, и плоскости этих кривых не совпадают. Пусть τ — плоскость, параллельная плоскости (ξ, ζ) такая, что соответствующее сечение Z^τ — выпуклая кривая. Эта кривая типа параболы получается двумя способами: сдвижкой кривой Z_1 (параллельным перенесением этой кривой вдоль кривой Z_2) на некоторый вектор Z_2; сдвижкой кривой Z_1', т. е. той же кривой Z_1 (перенесением вдоль Z_2') на некоторый вектор Z_2', отличный от z_2. Тогда Z^τ переходит в себя при переносе в плоскости τ на ненулевой вектор $z_2 - z_2'$. Это невозможно и, следовательно, $Z_1' \neq Z_1$.

Пусть l_i и l_i' — проекции кривых Z_i и Z_i' соответственно на плоскость (ξ, η). Каждая из этих проекций в этой плоскости принадлежит некоторой прямой линии. Пусть $\overline{Z} \subset (\xi, \eta)$ — проекция поверхности Z. Выпуклая область $\overline{Z}$, очевидно, представляется суммами $\overline{Z} = l_1 + l_2 = l_1' + l_2'$. Здесь имеем $l_1' \neq l_1$, $l_1' \neq l_2$ и $l_2' \neq \neq l_1$, $l_2' \neq l_2$.

Отсюда следует, что каждая из проекций l_i и l_i' — полная прямая, и $\overline{Z} \equiv (\xi, \eta)$, т. е. поверхность Z проектируется на всю плоскость (ξ, η).

Покажем теперь, что каждая из кривых Z_i и Z_i' — гладкая. Пусть, например, z_1 — угловая точка на Z_1. И пусть $z_2 \in Z_2$ — гладкая точка. Тогда точка $z = z_1 + z_2$ — ребристая на поверхности Z, ребро в которой параллельно плоскости (η, ξ). Точка z представляется и другой суммой: $z = z_1' + z_2'$, где $z_i' \in Z_i'$. Здесь точка z_1' на Z_i' уже не гладкая. Если, например, $z_1' \in Z_1'$ — гладкая точка, то $z_2' \in Z_2'$ — угловая, и ребро поверхности Z в точке z параллельно касательной в z_1' к кривой Z_1'; тогда $Z_1' \equiv Z_1$, что, как доказано, невозможно. В таком случае, касательный конус к Z в точке z — четырехгранный, а не двухгранный угол, т. е. предположение, что z_1 — не гладкая точка, приводит к противоречию.

Выясним расположение в плоскости (ξ, η) прямых l_1' и l_2'. Утверждается, что эти прямые пересекают разные пары вертикальных координатных квадрантов. Заметим, что прямые l_1 и l_2 совпадают с координатными осями $l_1 \equiv (\xi)$, $l_2 \equiv (\eta)$. Предположим, прямые l_1', l_2' одновременно пересекают первый координатный квадрант. Лучи этого пересечения обозначим $l_1'^{+}$, $l_2'^{+}$ соответственно. Обозначим еще (η^+) и $(\eta-)$ — положительную и отрицательную полуоси оси (η). Если $z \in Z$, обозначим $\eta(z)$ и $\zeta(z)$ координаты z по осям (η) и (ζ). Можно считать, что $l_2'^{+}$ образует с лучом (η^+) меньший угол, чем $l_1'^{+}$. Пусть $z_2' \in Z_2'$ — произвольная точка, проекция которой принадлежит $l_2'^{+}$, причем $z_2' \neq (0, 0, 0)$.

Пусть τ_1, τ_1' — вертикальные плоскости, проходящие через точку z_2', параллельные плоскостям кривых Z_1, Z_1' соответственно. Для точек $z_2 \equiv Z_2 \cap Z^{\tau_1}$ и $z_{2'} \equiv Z_2 \cap Z^{\tau_1'}$ имеем очевидные неравенства: $0 \leqslant \eta(z_{2'}) < \eta(z_2)$ и $\xi(z_2) \leqslant \zeta(z_2) \leqslant \zeta(z_{2'})$, т. е. $\zeta(z_2) \leqslant \zeta(z_{2'})$. Из выпуклости кривой Z_2 тогда следует, что ветвь этой кривой, проектирующаяся на луч (η^+), и этот же луч совпадают. Аналогично другая ветвь Z_2 совпадает с лучом (η^-). Тем самым получено, что поверхность Z содержит прямую линию — ось (η). Эта поверхность, следовательно, — цилиндрическая, что невозможно. Наше утверждение доказано.

С помощью аффинного преобразования сжатий пространства по осям (ξ) и (η) можно добиться, чтобы прямые l_1' и l_2' были ортогональны. Обозначим тогда $\Theta\ (0<\Theta<\pi/2)$ угол, образованный с осью (ξ) той из прямых, которая пересекается с первым координатным квадрантом.

Напомним, что о функциях φ и ψ, которые можно считать неотрицательными, известно следующее: областями определения этих функций служат соответственно оси (ξ) и (η); эти функции гладкие. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $\varphi(\xi)\equiv c\xi^2$ и $\psi(\eta)\equiv c\eta^2$, где c — положительная постоянная.

Каждая точка поверхности Z есть сумма двух точек, принадлежащих кривым Z_1, Z_2, и сумма двух точек, принадлежащих Z_1', Z_2'. Соответствующие точки кривых Z_1' и Z_2' как точки поверхности Z также представляются суммами точек из Z_1, Z_2. Отсюда для функций φ, ψ находится уравнение

$$\begin{gathered}\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(\xi\cos^2\Theta+\eta\sin\Theta\cos\Theta)+\\+\psi(\xi\cos\Theta\sin\Theta+\eta\sin^2\Theta)+\varphi(\xi\sin^2\Theta-\\-\eta\cos\Theta\sin\Theta)+\psi(-\xi\sin\Theta\cos\Theta+\eta\cos^2\Theta).\end{gathered}$$

После замены переменных (с отличным от нуля якобианом)

$$p=\xi\cos^2\Theta+\eta\sin\Theta\cos\Theta,\quad q=\xi\sin^2\Theta-\eta\sin\Theta\cos\Theta$$

получим

$$\begin{gathered}\varphi(p)+\varphi(q)+\psi(p\operatorname{tg}\Theta)+\psi(-q\operatorname{ctg}\Theta)=\varphi(p+q)+\\+\psi(p\operatorname{tg}\Theta-q\operatorname{ctg}\Theta).\end{gathered}\tag{1}$$

Обозначим $\varphi'(\cdot)\equiv u(\cdot)$, $\psi'(\cdot)\equiv v(\cdot)$. Дифференцируя обе части (1) по p и q, придем к двум уравнениям:

$$\begin{gathered}u(p)+v(p\operatorname{tg}\Theta)\operatorname{tg}\Theta=u(p+q)+v(p\operatorname{tg}\Theta-\\-q\operatorname{ctg}\Theta)\operatorname{tg}\Theta,\end{gathered}\tag{2}$$

$$u(q)-v(-q\operatorname{ctg}\Theta)\operatorname{ctg}\Theta=u(p+q)-v(p\operatorname{tg}\Theta-q\operatorname{ctg}\Theta)\operatorname{ctg}\Theta.\tag{3}$$

Из (2) при $p\equiv 0$ и из (3) при $q\equiv 0$ имеем

$$\begin{gathered}u(q)+v(-q\operatorname{ctg}\Theta)\operatorname{tg}\Theta=0,\\u(p)-v(p\operatorname{tg}\Theta)\operatorname{ctg}\theta=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Домножим обе части (2) на $\operatorname{ctg}\Theta$, обе части (3) — на $\operatorname{tg}\Theta$ и сложим почленно полученные равенства, учитывая (4). Получим уравнение

$$u(p)+u(q)=u(p+q),$$

из которого (так как $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$) следует $\varphi(p) = c_1 p^2$, где c_1 — положительная константа. Аналогично получим $\psi(q) = c_2 q^2$, где $c_2 = \text{const} > 0$. Теперь легко устанавливается, что $c_1 = c_2$, чем завершается доказательство.

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Л., Изд-во ЛГУ, 1960.
2. A. Wintner. On the addition of independent distributions, Amer. J. of Math., 56 (1934).

Поступила 25 октября 1971 г.

О НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗГИБАНИЯХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. Д. Милка

Харьков

§ 1. Введение

В работе доказываются следующие теоремы для выпуклых поверхностей в E^3.

Теорема 1. *Пусть F — выпуклая поверхность, гомеоморфная замкнутому кругу, замкнутой полуплоскости или бесконечному круговому полуцилиндру. Пусть поворот края на F — неположительный. Тогда эта поверхность непрерывно изгибается в любую изометричную ей и так же ориентированную выпуклую поверхность.*

Теорема 2. *Пусть F — выпуклая поверхность, гомеоморфная замкнутому кругу или замкнутой полуплоскости. Пусть поворот края на F — неотрицательный. Тогда эта поверхность непрерывно изгибается в любую изометричную ей и так же ориентированную выпуклую поверхность.*

Этим дается решение соответствующей задачи о непрерывных изгибаниях выпуклых поверхностей, поставленной А. В. Погореловым в [1] в числе других открытых вопросов [1, дополнение, п. 2; 2, стр. 248]. Способ решения, предложенный в настоящей работе, близок к намеченному в [1].

Формулировка задачи. Доказать, что выпуклая гомеоморфная кругу поверхность с неотрицательным (неположительным) поворотом вдоль края непрерывно изгибается в любую изометричную ей поверхность.

Ряд результатов, связанных с решением этой задачи другим методом — методом деформации тривиального подклеивания — получен также Л. А. Шором [3—5].

Из теорем 1, 2 почти непосредственно выводится общая

Теорема 3. *Пусть F — выпуклая поверхность с краем, состоящим из конечного числа непересекающихся кривых. Пусть поворот края на F на каждой его компоненте одного знака. Тогда эта поверхность непрерывно изгибается в любую изометричную ей и так же ориентированную выпуклую поверхность.* Данное утверждение для неограниченной поверхности справедливо и в случае, когда число компонент края бесконечно; здесь нужно требовать дополнительно: *каждый компактный кусок поверхности имеет непустое пересечение не более чем с конечным числом компонент ее края.*

Замечание. В условиях этой теоремы количество компонент края поверхности с неотрицательными поворотами не превосходит двух. Если таких компонент две, то F развертывающаяся и изометрична поясу между параллелями на прямом цилиндре, в котором (поясе), возможно, имеется некоторое число «вырезов». Наличие «вырезов» не отражается на характере изгибания пояса.

Справедлива и следующая теорема, дополняющая теорему 1.

Теорема 4. *Пусть F_i $(i = 0,1)$ — выпуклая поверхность, полученная из полной выпуклой поверхности $\overline{F}_i$ удалением связной открытой области с неотрицательным поворотом границы. И пусть поверхности F_0, F_1 изометричны и одинаково ориентированы. Тогда эти поверхности непрерывно изгибаются одна в другую.*

С помощью теоремы 4 соответственно усиливается и теорема 3 — новая ее формулировка достаточно очевидна.

В изложенных теоремах, как это принято, рассматриваются изометрические деформации, изгибания в классе выпуклых поверхностей. Общие предложения для выпуклых поверхностей, которые в дальнейшем используются, считаются известными [1, 2]. Доказательство теоремы 1 содержится в § 2. В равной степени оно относится и к теореме 4. Теорема 2 устанавливается в § 3. Ее доказательство, осуществляемое тем же методом, что и в теореме 1, приводится с некоторыми сокращениями.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Изложение в этом параграфе разбивается на ряд пунктов. Большую часть (п. 1—3) здесь занимает доказательство теоремы для случая, когда поверхность гомеоморфна кругу,— собственно доказательство содержится в п. 2, а п. 1 и п. 3 вспомогательные. Это же доказательство с очевидными уточнениями проходит и в случае поверхности, гомеоморфной полуцилиндру,— уточнения связаны с использованием соответствующих теорем об однозначной определенности и непрерывной изгибаемости для бесконечных поверхностей; отдельно останавливаться на данном случае нет надобности. Случай поверхности, гомеоморфной замкнутой полуплоскости, рассмотрен в п. 4; здесь доказательство осуществляется методом, подобным изложенному в п. 2.

1. Начнем с одного вспомогательного предложения. Пусть γ_0, γ_1 — изометричные, но не равные, замкнутые выпуклые кривые, границы замкнутых выпуклых областей σ_0, σ_1 соответственно. Тогда существует конус K_γ с краем γ, изометричным этим кривым, для которого поворот края и повороты кривых связаны определенными неравенствами. Здесь в качестве конуса рассматривается также бесконечный круговой полуцилиндр. Конус K_γ — выпуклый, т. е. его граница с неотрицательным поворотом, а кривизна в вершине конечного конуса больше нуля.

Дадим точные формулировки.

Учитывая изометрии кривых γ_0, γ_1 и γ, целесообразно иметь для функций, их поворотов единую область определения. Пусть таковой будет некоторая кривая ω, поставленная с исходными кривыми в изометрические соответствия. Можно даже условиться, что заданы изометрические отображения $\omega \leftrightarrow \gamma_0$ и $\omega \leftrightarrow \gamma_1$, естественно индуцирующие изометрию $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_1$. Предположим также, что имеется изометрия $\omega \leftrightarrow \gamma$. Введем выражения $\tau_0(B)$, $\tau_1(B)$ и $\tau(B)$ (где $B \subset \omega$), указывающие соответствующие значения поворотов кривых γ_0, γ_1 и γ на образах множества B со стороны областей σ_0, σ_1 и конуса K_γ.

Определение. *Конус K_γ назовем конусом подклеивания для кривых γ_0 и γ_1, если выполняются следующие условия:* а) функция τ на борелевских множествах $B \subset \omega$ подчинена неравенствам $\tau(B) \leqslant \tau_0(B)$ и $\tau(B) \leqslant \tau_1(B)$; б) для каждой вполне аддитивной функции τ' борелевских множеств $B \subset \omega$, удовлетворяющей тем же соотношениям, что τ в а), имеем $\tau'(B) \leqslant \tau(B)$.

Лемма 1. *Конус подклеивания существует.*

Замечание. Условия определения а) и б), очевидно, обеспечивают единственность функции τ и, значит, единственность конуса подклеивания. Функция τ совпадает с минимумом функций τ_0, τ_1 и допускает простое представление [6, леммы 5, 6]:

$$\tau = \min(\tau_0, \tau_1) = \tau_0 - (\tau_0 - \tau_1)^+ = \tau_1 - (\tau_0 - \tau_1)^-,$$

где $(\cdot)^\pm$ — соответственно положительная и отрицательная части функции $(\cdot)$. Отсюда вытекает, что $\tau \equiv 0$, т. е. конус K_γ — полуцилиндр только в том случае, когда носители функций τ_0 и τ_1 на кривой ω не пересекаются.

2. Воспользуемся леммой 1 для доказательства теоремы; позже (п. 3) установим и саму лемму.

Пусть F_0, F_1 изометричные, но не равные, одинаково ориентированные выпуклые поверхности, гомеоморфные замкнутому кругу. Можно считать, что эти поверхности являются реализациями некоторой абстрактной метрики Ω с краем ω. Предположим, что функция τ_ω (поворот края в Ω) неположительна; это эквивалентно следующему: для каждого борелевского множества $B \subset \omega$ справедливо неравенство $\tau_\omega(B) \leqslant 0$. Покажем, что поверхности F_0, F_1 непрерывно изгибаются одна в другую или что существует однопараметрическое семейство реализаций Ω выпуклыми поверхностями, непрерывное по параметру, включающее реализации F_0 и F_1.

Введем обозначения: Γ_i — граница F_i; $\widehat{F}_i$ — замкнутая выпуклая поверхность, граница выпуклой оболочки поверхности F_i; Σ_i — замкнутое множество, дополнение на $\widehat{F}_i$ внутренности F_i. Положим еще $\tau'(B) \equiv -\tau_\omega(B)$. Представляются следующие возможности: а) каждое множество Σ на соответствующей поверхности $\widehat{F}$ имеет внутренние точки; б) одно из множеств Σ в указанном в а) смысле вырождается; в) вырождены оба множества Σ. Нетрудно будет заметить, что доказательство теоремы 1 во всех трех случаях может быть проведено одним методом. Кроме того, в случаях б) и в) возможны (и очевидны) упрощения; в случае б) конус подклеивания указывается непосредственно — это пара одинаковых треугольников с надлежащими углами с отождествленными равными боковыми сторонами; в случае в) можно обойтись без использования конуса подклеивания, учитывая, что здесь $\tau_\omega(B) \equiv 0$ и что при каждом i кривая Γ_i — дважды покрытая замкнутая квазигеодезическая линия на поверхности $\widehat{F}_i$. Поэтому в дальнейшем рассмотрим лишь первый случай.

При каждом i множество Σ_i является развертывающейся поверхностью с границей Γ_i. Будем обозначать $\tau_i(B)$ поворот кривой Γ_i на этой поверхности на образе множества $B \subset \omega$ по изометрии $\omega \leftrightarrow \Gamma_i$. Кривизна образа B на поверхности $\widehat{F}_i$ неотрицательна и, очевидно, равна $\tau_\omega(B) + \tau_i(B)$; следовательно, имеем неравенства $\tau'(B) \leqslant \tau_i(B)$ и $\tau_i(B) \geqslant 0$. Из последнего неравенства вытекает, что множеству Σ_i соответствует в плоскости изометричная этому множеству замкнутая выпуклая область, которую будем обозначать σ_i и границу которой — γ_i. Естественно определяется изометрия $\omega \leftrightarrow \gamma_i$ и, значит, изометрия $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_1$. Тогда поворот кривой γ_i на образе множества $B \subset \omega$ со стороны области σ_i равняется $\tau_i(B)$.

Пусть K_γ — конус подклеивания для кривых γ_0 и γ_1, существующий по лемме 1, и пусть $\omega \leftrightarrow \gamma$ — соответствующая этому конусу изометрия, а $\tau = \tau(B)$ (где $B \subset \omega$) — функция поворот кривой γ на конусе. Согласно определению конуса подклеивания имеем неравенства

$$\tau'(B) \leqslant \tau(B), \quad \tau(B) \leqslant \tau_0(B) \quad \text{и} \quad \tau(B) \leqslant \tau_1(B), \tag{*}$$

где $B \subset \omega$ — произвольное борелевское множество.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Предположим сначала, что конус K_γ конечный. Пусть t $(0 < t < 1)$ — параметр. Обозначим H^t пояс на конусе K_γ, ограниченный кривой γ и кривой γ^t, полученной из γ преобразованием подобия (во внутренне геометрическом смысле) с коэффициентом t и центром подобия в вершине конуса. Если $B^t \subset \gamma^t$ — борелевское множество, образ множества $B \subset \omega$ в этом преобразовании (так можно говорить, учитывая соответствие $\omega \leftrightarrow \gamma$), то поворот кривой γ^t на этом множестве на поясе H^t равняется $-\tau(B)$.

Пусть σ_i^t — замкнутая выпуклая область в плоскости, полученная из области σ_i преобразованием подобия с коэффициентом t и центром подобия в некоторой точке плоскости; границу области σ_i^t обозначим γ_i^t. Если $B_i^t \subset \gamma_i^t$ — борелевское множество и образ множества $B \subset \omega$ в этом преобразовании (здесь аналогично учитывается соответствие $\omega \leftrightarrow \gamma_i$), то поворот кривой γ_i^t на этом множестве со стороны области σ_i^t равняется $\tau_i(B)$. Легко определяется изометрия $\gamma^t \leftrightarrow \gamma_i^t$, в которой, например, множества B^t и B_i^t сопоставляются один другому. Введем метрику Φ_i^t, гомеоморфную сфере и полученную склеиванием метрик Ω, H^t и σ_i^t. Правило склеивания определяется изометрическими соответствиями границ этих метрик $\omega \leftrightarrow \gamma$ и $\gamma^t \leftrightarrow \gamma_i^t$. Заметим, что неравенства (*) можно представить в виде

$$\tau_\omega(B) + \tau(B) \geqslant 0 \text{ и } -\tau(B) + \tau_i(B) \geqslant 0.$$

Из теоремы о склеивании отсюда следует, что кривизна метрики Φ_i^t неотрицательна. Рассмотрим еще две метрики, обладающие тем же свойством, гомеоморфные сфере: метрику $\Phi_i^0 \equiv \Phi$, склеенную из метрик Ω и K_γ с правилом склеивания $\omega \leftrightarrow \gamma$; метрику Φ_i^1, склеенную из метрик Ω и σ_i с правилом $\omega \leftrightarrow \gamma_i$.

Метрика Φ_i^t, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, реализуется в пространстве некоторой замкнутой выпуклой поверхностью $\hat{F}_i^t$; этим определяется однопараметрическое семейство $\{\hat{F}_i^t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ выпуклых поверхностей. По теореме об однозначной определенности поверхность $\hat{F}_i^t$ указывается в пространстве с точностью до движения или движения с отражением. Используем имеющийся здесь произвол для той цели, чтобы в рассматриваемом семействе поверхности $\hat{F}_i^t$ зависели от параметра t непрерывно, а также чтобы поверхности $\hat{F}_i$ и $\hat{F}_i^1$, реализующие метрику Φ_i^1, совпадали. Этого можно добиться, учитывая строение метрик поверхностей, на основании теоремы об однозначной определенности и теоремы о сходимости метрик. Будем обозначать далее F_i^t часть поверхности $\hat{F}_i^t$, соответствующую метрике Ω. Этим определяется однопараметрическое семейство $\{F_i^t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ изометричных выпуклых поверхностей с краем, непрерывное по параметру, включающее поверхность F_i.

Расссмотрим два семейства поверхностей: $\{F_0^t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ и $\{F_1^t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$. В этих семействах поверхности F_0^0 и F_1^0 равны и одинаково ориентированы, поскольку этим же свойством обладают поверхности $\hat{F}_0^0$ и $\hat{F}_1^0$, реализующие метрику Φ. Тогда поверхность F_1^0 получается из поверхности F_0^0 непрерывным движением.

Таким образом, можно сделать следующее заключение. Поверхность F_0 непрерывно изгибается в поверхность F_1; это осуществляется в три этапа: изгибание $F_0 \to F_0^0$ в семействе поверхностей

$\{F_0^t\}_{0<t<1}$; непрерывное движение $F_0^0 \to F_1^0$; изгибание $F_1^0 \to F_1$ в семействе $\{F_1^t\}_{0<t<1}$. Тем самым, когда конус подклеивания K_γ конечный, теорема 1 доказана.

Очевидно, специально рассматривать случай бесконечного конуса подклеивания (полуцилиндра) нет надобности. К этому случаю легко приспосабливаются предшествующие рассуждения. При построении семейства выпуклых поверхностей $\{\hat{F}_l^t\}_{0<t<1}$, непрерывных по параметру t, замкнутых при $t \neq 0$, полагается $\sigma_l^t \equiv \sigma_l$, а в качестве метрики H^t выбирается цилиндрический пояс на конусе K_γ ширины $(1-t)/t$ $(t \neq 0, 1)$. Поверхность $\hat{F}_l^0$ бесконечная и является реализацией метрики, склеенной из метрик Ω и K_γ. Поверхности $\hat{F}_0^0$ и $\hat{F}_1^0$ переводятся одна в другую непрерывным движением. Это следует из теоремы об однозначной определенности бесконечной полной выпуклой поверхности с кривизной 2π и того условия, что F_0 и F_1 одинаково ориентированы.

Этим теорема 1 установлена для случая, когда поверхность F гомеоморфна кругу.

3. Доказательство леммы 1. Используя обозначения, введенные в п. 1, имеем: γ_0, γ_1 и ω вместе с соответствующими изометрическими отображениями — заданные кривые; конус K_γ и отображение $\omega \leftrightarrow \gamma$ — искомые

Построим конус K_γ.

Пусть γ_0^n и γ_1^n — замкнутые выпуклые ломаные, вписанные в кривые γ_0 и γ_1, причем вершины ломаных соответствуют по изометрии $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_1$ (соответствующие вершины ломаных будем называть сходственными). Пусть σ_0^n и σ_1^n — замкнутые выпуклые многоугольники, области с границами γ_0^n и γ_1^n. Рассмотрим последовательности таких ломаных $\{\gamma_0^n\}$ и $\{\gamma_1^n\}$ при $n \to \infty$, когда звенья ломаных неограниченно измельчаются и, следовательно, $\gamma_0^n \to \gamma_0$ [и $\gamma_1^n \to \gamma_1$. Предположим, что каждая из открытых дуг кривой γ_l, на которые она разбивается вершинами ломаной γ_l^n, стягиваемых как хордами звеньями этой ломаной, имеет со стороны области σ_l поворот, меньший $\pi/2$.

Если n достаточно большое, то у многоугольника σ_0^n найдутся хотя бы две вершины (назовем такие вершины отмеченными), углы при которых будут меньше соответствующих углов многоугольника σ_1^n. В противном случае устанавливается, что существуют точки $A_0 \in \gamma_0$ и $A_1 \in \gamma_1$, соответствующие по изометрии $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_1$ такие, что при деформации кривой $\tilde{\gamma}_1 \equiv \gamma_1 \setminus A_1$ в кривую $\tilde{\gamma}_0 \equiv \equiv \gamma_0 \setminus A_0$, определяемой отображением $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_1$, повороты дуг первой кривой не увеличиваются; поскольку кривая $\tilde{\gamma}_0$ замкнутая, это означает [7, теорема 1], что деформация $\tilde{\gamma}_1 \to \tilde{\gamma}_0$ есть движение, а соответствие $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_1$ — конгруентность (последнее было исключено ранее). Проведем в многоугольнике σ_0^n разрезы по открытым хордам, соединяющим какую-нибудь отмеченную вершину со всеми остальными отмеченными, и подклеим к берегам каждого разреза надлежащую пару одинаковых треугольников с отождествленными «боковыми» равными сторонами. Некоторые из хорд многоугольника σ_0^n, предназначенные для разрезов, могут оказаться на его границе; дополнительные пояснения по поводу подклеиваний, которые здесь нужно сделать, ввиду их очевидности опускаются. Указанные подклеивания осуществляются таким образом, что в развертке с неотрицательной кривизной, в которую переходит многоугольник σ_0^n, углы при граничных вершинах, бывших отмеченными, оказываются равными соответствующим углам многоугольника σ_1^n.

Полученная развертка, если она не конус, разрезаниями по кратчайшим, соединяющим внутренние вершины, и соответствующими вклеиваниями треугольников (эти операции не изменяют некоторой окрестности границы развертки) преобразуется в конус с полным углом при вершине, меньшим 2π. Может также случиться, что на одном из этапов вместо треугольников вклеиваются бесконечные прямоугольные полоски; полученная в результате развертка, которую следует тоже называть конусом, изометрична бесконечному круговому полуцилиндру.

Обозначим через $K\gamma^n$ построенный конус, γ^n — его границу. Конус K_γ вводится как предел при $n \to \infty$ сходящейся подпоследовательности из $\{K\gamma^n\}$. Одновременно устанавливается изометрическое соответствие $\omega \leftrightarrow \gamma$ и проверяется справедливость неравенств $\tau(B) \leqslant \tau_0(B)$ и $\tau(B) \leqslant \tau_1(B)$, имеющихся в определении конуса подклеивания; очевидно, функция τ неотрицательная. Для доказательства здесь достаточно воспользоваться следующими фактами: ломаные γ_0^n и γ^n изометричны и одинаково составлены из равных звеньев; для каждой вершины ломаной γ^n угол на конусе K_{γ^n} равен большему из соответствующих углов в многоугольниках σ_0^n и σ_1^n; множество точек кривой ω, соответствующих вершинам рассматриваемых ломаных, вписанных в γ_0 и γ_1, всюду плотно. Заметим, что между ломаными γ_0^n и γ_1^n нет изометрического соответствия — есть только соответствие между их вершинами; последнее с учетом перехода к пределу по n обеспечивает все же изометрию $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma \leftrightarrow \gamma_1$. Легко увидеть, что конус K_γ не может вырождаться в область, изометричную плоской. Действительно, в противном случае, рассматривая K_γ как область в плоскости, устанавливаем следующее. Существуют точки $A \in \gamma$, $A_0 \in \gamma_0$ и $A_1 \in \gamma_1$, соответствующие по изометрии такие, что при деформациях кривых $\tilde{\gamma}_0 \equiv \gamma_0 \setminus A_0$ и $\tilde{\gamma}_1 \equiv \gamma_1 \setminus A_1$, определяемых изометриями $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma$ и $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma$, в кривую $\tilde{\gamma} \equiv \gamma \setminus A$ повороты дуг первых кривых не увеличиваются. Неравенства $\tau(B) \leqslant \tau_0(B)$ и $\tau(B) \leqslant \tau_1(B)$ здесь выполняются для всех $B \subset \omega$, не содержащих образа точки A по соответствию

$\omega \leftrightarrow \gamma$. Поскольку кривая $\tilde{\gamma}$ замкнутая, отсюда, очевидно, выводится, что изометрия $\gamma_0 \leftrightarrow \gamma_1$ есть конгруентность, а это невозможно.

Докажем неравенство $\tau'(B) \leqslant \tau(B)$, приведенное в определении конуса подклеивания.

Здесь достаточно рассмотреть случай, когда функция τ' неотрицательна, что вытекает из соотношений

$$\tau'(B) \leqslant \tau'^{+}(B) = \tau'(B \cap B^{+}) \leqslant \tau_i(B \cap B^{+}) \leqslant \tau_i(B), \qquad (*)$$

где $B^{+} \subset \omega$ — борелевское множество, носитель положительной части τ'^{+} функции τ'. В самом деле, согласно (*), неотрицательная функция τ'^{+} подчинена неравенствам $\tau'^{+}(B) \leqslant \tau_0(B)$ и $\tau'^{+}(B) \leqslant \leqslant \tau_1(B)$; если неравенство $\tau'^{+}(B) \leqslant \tau(B)$ считать установленным, то по (*) $\tau'(B) \leqslant \tau(B)$. Будем полагать далее, что $\tau'(B) \geqslant 0$ для произвольного борелевского множества $B \subset \omega$.

Неравенство $\tau'(B) \leqslant \tau(B)$ достаточно доказать лишь для тех множеств, которые являются на кривой ω открытыми дугами. Пусть L — открытая дуга ω, L' — изометричная L локально выпуклая кривая в плоскости такая, что для каждого борелевского множества $B \subset \omega$ поворот кривой L' на образе B равняется $\tau'(B)$. Обозначим $L_0 \subset \gamma_0$ и $L_1 \subset \gamma_1$ открытые дуги, соответствующие дуге ω.

Пусть $\gamma^n_{0,L}$ и $\gamma^n_{1,L}$ — максимальные участки ломаных γ^n_0 и γ^n_1, вписанные в дуги L_0 и L_1 соответственно. Сходственным вершинам этих участков отвечают по изометрии некоторые точки на кривой L'; ломаную с вершинами в этих точках, правильно вписанную в L', будем обозначать $\gamma^n_{L'}$.

Пусть C' — произвольная внутренняя вершина ломаной $\gamma^n_{L'}$, p' и q' — звенья ломаной, сходящиеся в C', и a', b' — дуги кривой L', стягиваемые соответственно этими звеньями. Введем для углов в точке C' следующие обозначения: φ' — угол между дугами a' и b'; δ' — угол между хордами p' и q'; α' и β' соответственно — угол между дугой a' и хордой p' и угол между дугой b' и хордой q'.

Пусть $C_0 \in \gamma^n_{0,L}$ и $C_1 \in \gamma^n_{1,L}$ — сходственные вершины, соответствующие вершине C' по изометриям $L' \leftrightarrow L_0$ и $L' \leftrightarrow L_1$. Для кривых L', L_0 и L_1 естественно определяются не только сходственные вершины, а и другие сходственные элементы, которые мы условимся обозначать одинаковыми буквами, но с соответствующими этим кривым индексами. Таким образом, ясен смысл следующих обозначений для элементов кривых L_0 и L_1, относящихся к точкам C_0 и C_1, которые сходственны с элементами кривой L': для дуг — a_0, b_0 и a_1, b_1; для хорд, звеньев ломаных $\gamma^n_{0,L}$ и $\gamma^n_{1,L}$ — p_0, q_0 и p_1, q_1; для углов — φ_0, δ_0, α_0, β_0 и φ_1, δ_1, α_1, β_1. Из неравенств $\tau' \leqslant \tau_0$ и $\tau' \leqslant \tau_1$ следует, что $\varphi' \geqslant \varphi_0$ и $\varphi' \geqslant \varphi_1$. По той же причине кривую a можно рассматривать как полученную изометрическими деформациями кривых a_0 и a_1, при которых повороты дуг этих кривых не увеличиваются. Отсюда следуют неравенства $\alpha' \leqslant \alpha_0$

и $\alpha' \leqslant \alpha_1$ [7, теорема 1, лемма 5 и следствие этой леммы]. Напомним, что повороты кривых a_0 и a_1 не превосходят $\pi/2$.

Аналогично устанавливается, что $\beta' \leqslant \beta_0$ и $\beta' \leqslant \beta_1$. Тогда непосредственно выводится: $\varphi' = \alpha' + \delta' + \beta'$, $\delta' \geqslant \delta_0$ и $\delta' \geqslant \delta_1$; одновременно устанавливается, что ломаная $\gamma^n_{L'}$ — локально выпуклая, обращенная выпуклостью в ту же сторону, что и кривая L'. Пусть γ^n_L — участок ломаной γ^n, соответствующий ломаной $\gamma^n_{0,\,L}$. Из неравенств, полученных для углов δ, находим, что поворот ломаной $\gamma^n_{L'}$ не превосходит поворота ломаной γ^n_L на конусе $K\gamma^n$. Отсюда уже легко получается нужное неравенство $\tau'(B) \leqslant \tau(B)$.

Лемма 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1 для поверхностей, гомеоморфных замкнутой полуплоскости, проводится аналогично п. 2.

Пусть γ_0 и γ_1 — бесконечные изометричные, но не равные выпуклые кривые, гомеоморфные прямой линии, границы замкнутых выпуклых областей σ_0 и σ_1 соответственно. Для этих кривых имеет место аналог леммы 1, причем вместо конуса K_γ здесь рассматривается бесконечная выпуклая замкнутая область σ_γ с границей γ. Область σ_γ можно назвать областью подклеивания для кривых γ_0 и γ_1. Ее определение совпадает с данным уже в п. 1 для конуса, если в последнем понимать под кривыми бесконечные линии, ограничивающие бесконечные выпуклые области.

Построение области подклеивания и доказательства соответствующих свойств функций τ_0, τ_1, τ' и τ, заданных теперь на бесконечной кривой ω, осуществляется так же, как и для конуса, с помощью вписанных в γ_0 и γ_1 бесконечных многоугольников σ^n_0 и σ^n_1. Некоторые отличия: разрезы в многоугольнике σ^n_0 проводятся по параллельным лучам, принадлежащим этому многоугольнику и начинающимся в отмеченных вершинах; в каждый разрез подклеивается надлежащий плоский угол. Может случиться, что при всех n отмеченные вершины отсутствуют либо любая вершина отмечена; тогда в качестве области подклеивания выбирается соответственно область σ_0 либо область σ_1.

Отметим особенности, характерные для случая бесконечных поверхностей. Будем и далее, следуя аналогии, как и в начале этого пункта, использовать обозначения, введенные в п. 1 и п. 2.

Основой доказательства теоремы является построение семейства $\{\hat{F}^t_l\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ бесконечных полных выпуклых поверхностей, непрерывного по параметру t, включающего поверхность $\hat{F}_l$ ($\hat{F}_l \equiv F^1_l$). Метрика Φ^t_l поверхности $\hat{F}^t_l$ ($t \neq 0,1$) получается склеиванием метрик Ω, H^t и σ_l. Здесь H^t — часть области σ_γ, зачерчиваемая кривой γ при сдвижке этой кривой на величину $(1-t)/t$ вдоль луча, принадлежащего этой области, (луч фиксирован для всех t). Непрерывность по t семейства $\{\hat{F}^t_l\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ получается с помощью теоремы о сходимости метрик и соответствующих теорем об однозначной определенности и непрерывной изгибаемости для бесконечных поверхностей. Здесь существенно, что полные кривизны метрик $\{\Phi_l^t\}_{0<t<1}$ одинаковы. Тогда реализации этих метрик для случая полной кривизны $< 2\pi$ поверхностями семейства $\{\hat{F}_l^t\}_{0<t<1}$ можно подчинить следующему условию. Данным поверхностям сопоставляется один и тот же предельный конус с выделенной образующей, соответствующей некоторому лучу в области σ_l как лучу в метрике Φ_l^t, фиксированному при всех t. Поверхность $\hat{F}_l^0$ определяется как предел при $t \to 0$ поверхностей $\{\hat{F}_l^t\}_{0<t<1}$. Поверхности $\hat{F}_0^0$ и $\hat{F}_1^0$ изометричны, реализуют метрику, склеенную из метрик Ω и σ_γ, и, следовательно, непрерывно изгибаются одна в другую.

Изложенное позволяет сделать вывод, что бесконечные поверхности F_0 и F_1 включаются в однопараметрическое семейство изометричных выпуклых поверхностей, непрерывное по параметру. Этим доказана теорема 1 и в рассматриваемом случае.

§ 3. Доказательство теоремы 2

1. Подробно приводить это доказательство нет надобности. Оно аналогично доказательству теоремы 1 и осуществляется тем же методом.

Вспомогательную роль здесь играет следующая лемма, которую можно считать известной.

Лемма 2. *Пусть F — выпуклая неразвертывающаяся поверхность с краем Γ, гомеоморфная замкнутому кругу, поворот граничной кривой которой неотрицательный и тождественно не равен нулю. Тогда существует конечный выпуклый конус K_γ^*, край γ которого изометричен Γ, т. е. имеется изометрия $\Gamma \leftrightarrow \gamma$. Причем повороты кривых Γ и γ на поверхности и на конусе на дугах, соответствующих по изометрии, одинаковы. Конус K_γ^* допускает сжимающее отображение на поверхность F, переводящее с сохранением длин дуг γ в Γ; изометрия кривых Γ и γ, индуцированная этим отображением, тождественна с изометрией $\Gamma \leftrightarrow \gamma$.*

Лемма устанавливается сначала для многогранников и распространяется на общий случай с помощью предельного перехода [8,327; 9].

Конус K_γ^* можно назвать соприкасающимся конусом поверхности вдоль кривой Γ. Заметим, что этот конус рассматривается только как метрика. Введем еще два объекта, связанные с K_γ^*: полный бесконечный конус K, полученный продолжением (внутренне геометрическим способом) конуса K_γ^*; трубку K_γ, являющуюся дополнением на K внутренности K_γ^*. Если поверхность, о которой говорится в лемме 2, развертывающаяся (тогда она изометрична, очевидно, выпуклой области в плоскости), то можно также говорить о соприкасающемся конусе K_γ^*. Как метрика он совпадает с F и имеет вершиной произвольно выбранную точку, не принадлежащую Γ: конус K в этом случае изометричен плоскости, а «трубка» K_γ определяется, как и раньше.

2. Рассмотрим случай поверхности, гомеоморфной кругу.

Содержание теоремы 2 заключается в следующем.

Пусть F_0, F_1 — изометричные не равные одинаково ориентированные выпуклые поверхности, гомеоморфные замкнутому кругу. Пусть повороты граничных кривых поверхностей неотрицательны. Тогда эти поверхности непрерывным изгибанием переводятся одна в другую.

Перейдем к доказательству.

Можно считать, что поверхности F_0, F_1 являются реализациями некоторой метрики Ω с краем ω и поворот края ω в этой метрике тождественно не равен нулю (иначе теорема сводится к теореме 1). Пусть Γ_i — граница F_i; $\hat{F}_i$ — замкнутая выпуклая поверхность, содержащая как часть поверхность F_i; Σ_i — замкнутое множество, дополнение на $\hat{F}_i$ внутренности F_i. Представляются следующие возможности: 1) хотя бы для одной из поверхностей множество Σ имеет на $\hat{F}$ внутренние точки, и число компонент связности внутренности Σ на каждой из поверхностей не более чем конечно; 2) число компонент связности внутренности множества Σ хотя бы на одной из поверхностей бесконечно; 3) оба множества вырождаются. Интерес представляют лишь случаи 1), 2).

В случае 1) доказательство теоремы 2 проводится точно так же, как и доказательство теоремы 1. Перечислим его основные этапы. Заметим, что поверхности F_0 и F_1 имеют по лемме 2 общий соприкасающийся конус K_γ^*; связанные с K_γ^* полный конус и трубку обозначим, как и раньше, соответственно K и K_γ.

Вводится параметр $t\,(0 < t < 1)$. Рассматривается пояс H^t на трубке K_γ, который ограничен кривой γ и кривой γ^t, полученной из γ преобразованием подобия с центром в вершине конуса K и коэффициентом подобия $1/t$. Рассматривается также метрика Σ_i^t, заданная на множестве Σ_i равенством $\rho_t = 1/t\rho$, где ρ — внутренняя метрика в Σ_i, индуцированная метрикой $\hat{F}_i$. Вводится метрика Φ_i^t, естественным образом склеенная из метрик Ω, H^t и Σ_i^t. Обозначим Φ_i^1 — метрику поверхности $\hat{F}_i$; Φ_i^0 — метрику, склеенную из метрик Ω и K_γ. Семейство метрик $\{\Phi_i^t\}_{0<t<1}$ непрерывно по параметру t. Метрики $\{\Phi_i^t\}_{0<t<1}$ гомеоморфны сфере; метрику Φ_i^0 можно рассматривать как предел метрик $\{\Phi_i^t\}$ при $t \to 0$. Этому семейству соответствует непрерывное по параметру t семейство выпуклых поверхностей $\{\hat{F}_i^t\}_{0<t<1}$, где $\hat{F}_i^1 \equiv \hat{F}_i$ и $\hat{F}_i^0$ — предел выпуклых поверхностей $\{\hat{F}_i^t\}$ при $t \to 0$. Поверхности $\hat{F}_0^0$ и $\hat{F}_1^0$ — бесконечные, гомеоморфные плоскости и изометричные; по соответствующим теоремам эти поверхности непрерывным изгибанием переводятся одна в другую. Из всего сказанного следует, что имеется непрерывная изгибаемость и для поверхностей F_0 и F_1; F_0 переводится в F_1 в три этапа: с помощью изгибания, индуцированного деформацией семейства поверхностей $\{\hat{F}_0^t\}_{0<t<1}$; затем, изгибанием, связанным с изгибанием $\hat{F}_0^0$ в $\hat{F}_1^0$, и, наконец, с помощью изгибания, индуцированного деформацией семейства $\{\hat{F}_l^t\}_{0<t<1}$.

Случай 2) исследуется подобно. Здесь только построение поверхности $\hat{F}_l^t\,(0<t<1)$ осуществляется ввиду «плохого» строения множества Σ_l не столь непосредственно, как в случае 1). Указанная трудность преодолевается следующим образом. Пусть Γ_l^n — геодезическая ломаная на F_l, составленная из кратчайших на этой поверхности, правильно вписанная в Γ_l. Ломаная Γ_l^n разбивает поверхность $\hat{F}_l$ на две части: часть F_l^n, гомеоморфная замкнутому кругу, по отношению к которой повороты ломаной неотрицательны; часть Σ_l^n, являющаяся замкнутым множеством, дополнением на $\hat{F}_l$ внутренности F_l^n. Для данного t с помощью соприкасающегося конуса к F_l^n вдоль Γ_l^n строится метрика $\Phi_{l,n}^t$, как это делалось для поверхности F_l при рассмотрении предыдущего случая (роль множества Σ_l здесь играет множество Σ_l^n). Будем рассматривать последовательность ломаных $\{\Gamma_l^n\}$ при $n\to\infty$, сходящуюся к кривой Γ_l. Тогда метрики $\{\Phi_{l,n}^t\}$ сходятся к некоторой метрике Φ_l^t. Семейство метрик $\{\Phi_l^t\}_{0<t<1}$ с присоединенными метриками Φ_l^0 и Φ_l^1, определяемыми, как и в случае 1), непрерывно по параметру; с помощью надлежащих реализаций этих метрик получается непрерывная изгибаемость F_0 в F_1. Непрерывность по параметру метрики Φ_l^t при $t\neq 1$ легко устанавливается. При $t=1$ этот факт, доказываемый не так просто, представляется очевидным. Отметим все же для $t=1$ узловые моменты доказательства непрерывности. Здесь нужно показать тождественность метрики Φ_1^l, являющейся метрикой поверхности F_l, и метрики Φ_l^{1-0}, полученной из метрик $\{\Phi_l^t\}_{0<t<1}$ предельным переходом при $t\to 1$. Для этого сначала устанавливается естественный гомеоморфизм $\Phi_l^1 \leftrightarrow \Phi_l^{1-0}$ этих метрик, причем используется лемма 2, в которой соприкасающийся конус поверхности F_l^n вдоль линии F_l^n допускает на F_l^n отображение со сжатием. Области в метриках Φ_l^1 и Φ_l^{1-0}, изометричные метрике Ω, соответствуют в этом гомеоморфизме; их границы обозначим ω_l^1 и ω_l^{1-0}.

Затем находится, что длины кривых на Φ_l^1 и Φ_l^{1-0}, соответствующих при отображении $\Phi_l^1 \leftrightarrow \Phi_l^{1-0}$, одинаковы, если эти кривые пересекаются с линиями ω_l^1 и ω_l^{1-0} по множествам, составленным не более чем конечными наборами дуг и точек, — такие пересечения будем называть нормальными. Далее замечается следующее: любая кратчайшая в метрике $\Phi_l^1\,(\Phi_l^{1-0})$ приближается кривой с теми же концами, нормально пересекающей линию $\omega_l^1\,(\omega_l^{1-0})$, со сколь угодно близкой длиной к длине кратчайшей [10, лемма 6], поскольку кратчайшая и линия $\omega_i^1(\omega_i^{1-0})$ являются в метрике $\Phi_i^1(\Phi_i^{1-0})$ кривыми с ограниченными вариациями поворота. Отсюда и из предыдущего предложения вытекает изометрия метрик Φ_i^1 и Φ_i^{1-0}.

3. Доказательство теоремы для бесконечных поверхностей проводится в том же плане, что и доказательство в п. 2. Будем использовать обозначения, введенные ранее. Здесь вместо соприкасающегося конуса применяется выпуклая область в плоскости, допускающая, как и в случае конуса, отображения со сжатием на каждую из изометричных поверхностей, при которых край области переводится в край соответствующей поверхности с сохранением длин дуг и их поворотов. При доказательстве непрерывной изгибаемости для поверхностей F_i^t, которые в данном случае все бесконечные, нужно использовать, как и раньше, теорему о сходимости метрик и соответствующие теоремы об однозначной определенности и непрерывной изгибаемости. Важно подчеркнуть, что полные кривизны поверхностей $\{\hat{F}_i^t\}$ при $0 < t \leqslant 1$ одинаковы и что поверхности $\hat{F}_0^0$ и $\hat{F}_1^0$ изометричны и одинаково ориентированы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Изд-во «Наука», 1969.
2. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
3. Л. А. Шор. О наложимых выпуклых поверхностях с краем, имеющим неотрицательный поворот. «Укр. геометр. сб.», вып. 10, Харьков, Изд-во ХГУ, 1971.
4. Л. А. Шор. О наложимых бесконечных выпуклых поверхностях. «Укр. геометр. сб.», вып. 11, Харьков, Изд-во ХГУ, 1971.
5. Л. А. Шор. О наложимых выпуклых поверхностях. См. статью настоящего сборника.
6. Ю. Д. Бураго. Кривые в сходящихся пространствах. В сб. «Двумерные многообразия ограниченной кривизны», ч. II. М.—Л., изд-во «Наука», 1965.
7. А. Д. Милка. Об одной теореме Шура-Шмидта. «Укр. геометр. сб.», вып. 8, Харьков, Изд-во ХГУ, 1970.
8. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л., Гостехиздат, 1948.
9. Ю. Г. Решетняк. Об одном специальном отображении конуса на многогранник. «Матем. сб.», 53 (95), 1961.
10. А. Д. Александров, Ю. Д. Бураго. Квазигеодезические. В сб. «Двумерные многообразия ограниченной кривизны», ч. II. М.—Л., изд-во «Наука», 1965.

Поступила 20 февраля 1972 г.

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРОСТРАНСТВА ПРЯМЫХ

В. А. Пеклич

Москва

Коллинеации и корреляции трехмерного проективного пространства P_3 переводят прямые в прямые взаимно-однозначно без каких бы то ни было исключений. Соответствующие линейчатые многообразия имеют при этом одинаковую (двойственную в случае корреляций) проективную природу. Можно, таким образом, говорить о линейных преобразованиях множества прямых пространства P_3 в самое себя.

Обобщением линейных преобразований точечного пространства явились кремоновы преобразования — нелинейные соответствия, при которых для некоторых точек нарушается однозначность [2]. Естественно поставить вопрос о такого сорта соответствиях в линейчатой геометрии.

Автору известна лишь одна работа этого плана. Е. Л. Тефова [1] рассматривает соответствие между прямыми пространств P_3 и P_3^1, расположенных в P_4. Отображение осуществляется косым проектированием плоскостями, пересекающими две фиксированные прямые. Пучок прямых из P_3 переходит в полуквадрику в P_3^1, плоское поле прямых — в конгруэнцию первого порядка второго класса, связка прямых — в линейную конгруэнцию, линейный комплекс — в квадратичный и, в частности, специальный линейный комплекс — в тетраэдральный.

§ 1. Аппарат преобразования. Обозначения

Отображение T множества Σ прямых пространства P_3 в себя осуществляется с помощью двух плоскостей α и β с заданными в них коллинеациями K_α и K_β. Будем говорить, что в α совмещены два поля α_1 и α_2 и K_α переводит α_1 в α_2: аналогично K_β переводит β_1 в β_2 и T переводит Σ_1 в Σ_2. Прообразы будем снабжать индексом 1, образы — индексом 2.

Прямую $\alpha \cap \beta$ будем обозначать m_1 или n_2 в зависимости от того, к какому полю мы ее относим; m_2^α, m_2^β — образы этой прямой в K_α, K_β; n_1^α, n_1^β — ее прообразы. Предполагаем, что эта прямая не содержит ни одной из двойных точек данных коллинеаций.

Преобразование T переводит прямую g_1, пересекающую плоскости α_1 и β_1 в точках A_1 и B_1, в прямую $g_2 = A_2B_2$.

Очевидно, что для прямых общего положения преобразование T взаимно однозначно.

§ 2. Нарушение однозначности. Фундаментальные элементы. Исключительные элементы

Однозначность преобразования T нарушается для прямых, расположенных в плоскостях α_1 и β_1, поскольку один из следов (A_1 или B_1) каждой такой прямой становится неопределенным. Пусть a_1 — произвольная прямая плоскости α_1, а B_1 — ее след на β_1. T переводит прямую a_1 в пучок прямых, проходящих через точку B_2 и пересекающих прямую a_2. Вершина B_2 этого пучка расположена на прямой m_2^β. Отсюда следует, что плоскому полю прямых α_1 соответствует в T специальный линейный комплекс с осью m_2^β, полю β_1 — m_2^α. Прямая m_1, оба следа которой являются неопределенными, переходит в T в гиперболическую линейную конгруэнцию H_2 с директрисами m_2^α, m_2^β.

Рассмотрим пучок прямых, проходящих в плоскости α_1 через произвольную точку A_1; K_α переводит его в пучок (A_2, α_2). Пучок (A_1, α_1) перспективен ряду m_1 и проективен ряду m_2^β: поэтому $m_2^\beta \overline{\wedge}$ (A_2, α_2). Прямые пучка (A_1, α_1) переходят в T в пучки прямых, проходящих через точки ряда m_2^β и пересекающих соответствующие им в последней проективности прямые пучка (A_2, α_2), т. е. пучку (A_1, α_1) соответствует некоторая конгруэнция N_2. Порядок ее равен двум, класс — единице. В самом деле, через точку S общего положения проходят две прямые из N_2. Плоскость Sm_2^β пересекает пучок (A_2, α_2) по ряду точек, который проективен ряду, получающемуся при проектировании ряда m_2^β из точки S на плоскость α_2. Две двойные точки этой проективности определяют с точкой S две прямые из N_2, проходящие через точку S. В плоскости σ общего положения лежит одна прямая конгруэнции N_2. Пусть X — точка пересечения прямой m_2^β с плоскостью σ, y — соответствующая ей прямая пучка $(A_2. \alpha_2)$ и Y — след последней на σ. Прямая XY принадлежит и σ, и N_2.

Спроектируем из точки A_2 точки ряда m_2^β; получим пучок прямых, проективный пучку (A_2, α_2). Парами соответствующих прямых этих пучков определяется ∞' плоскостей, огибающих конус второго порядка K^2. Конгруэнция N_2 есть семейство прямых, касающихся конуса K^2 и пересекающих прямую m_2^β, которая также касается K^2 в точке Q. Прямые плоскости $m_2^\beta A_2$ за исключением тех, что проходят через Q, конгруэнции не принадлежат.

Если вершина B_1 пучка (B_1, α_1) расположена на m_1, то T переводит его в конгруэнцию (2,1), распавшуюся на линейную конгруэнцию H_2 и связку B_2. Если вершину B_1 этого пучка перемещать по m_1, то вершина связки B_2 опишет прямую m_2^β; ∞' пучков (B_1, α_1) образуют поле α_1, а ∞^1 соответствующих связок B_2 — специальный линейный комплекс m_2^β (H_2 соответствует общей прямой m_1 этих пучков).

Рассмотрим теперь ряды n_1^α и n_1^β. Поскольку каждый из них проективен ряду n_2, то $n_1^\alpha \overline{\wedge}\, n_1^\beta$. *Однозначность преобразования T нарушается для прямых, соединяющих пары соответствующих точек рядов n_1^α и n_1^β. Эти прямые образуют полуквадрику Φ_1.* Пусть A_1 и B_1 — соответствующие точки этих рядов. K_α и K_β переводят их в одну и ту же точку $A_2 = B_2$ прямой n_2, т. е. T переводит прямую $A_1B_1 \in \Phi_1$ в связку A_2, а полуквадрику Φ_1 — в специальный линейный комплекс n_2.

Элементы, для которых нарушается однозначность соответствия, по аналогии с подобными элементами в кремоновых преобразованиях назовем *фундаментальными*. Ниже выяснится, что эти элементы обладают и еще некоторыми одинаковыми свойствами.

Фундаментальные элементы прямого преобразования условимся называть F_1-элементами, а обратного (T^{-1}) — F_2-элементами. F_2-элементами являются:

1) *плоские поля прямых* α_2, β_2, которые переходят в T^{-1} в специальные линейные комплексы n_1^β, n_1^α соответственно; при этом отдельные прямые полей α_2, β_2 переходят в пучки (исключение — прямая n_2, которой соответствует конгруэнция H_1 с директрисами n_1^α, n_1^β), а пучки — в конгруэнции (2,1);

2) *полуквадрика* Φ_2, определяемая проективными рядами m_2^α, m_2^β (поскольку носители рядов лежат в плоскостях α_2, β_2, то Φ_2 касается этих плоскостей); отдельные прямые полуквадрики Φ_2 размножаются в связки, а вся она переходит в специальный линейный комплекс m_1.

Образы фундаментальных элементов будем называть *исключительными элементами или P-элементами*. При этом образы F_1-элементов будут P_2-элементами, а образы F_2-элементов (в T^{-1}) — — P_1-элементами.

P_1-элементы — это специальные линейные комплексы n_1^β, n_1^α, m_1; P_2-элементы — специальные линейные комплексы m_2^β, m_2^α, n_2.

Подчеркнем, что для прямых, из которых состоят P-элементы (если только эти прямые не являются в то же время фундаментальными), однозначность преобразования не нарушается. Например, прямой специального линейного комплекса m_1 соответствует единственная прямая полуквадрики Φ_2; другое дело, что эта же прямая полуквадрики Φ_2 является образом целой связки прямых комплекса m_1.

§ 3. Пучок прямых

Пусть (R_1, ρ_1) — пучок прямых в плоскости ρ_1 с вершиной R_1; a_1 и b_1 — следы плоскости ρ_1 на α_1 и β_1 и $A_1 = B_1 = a_1 \cap b_1$ — след плоскости ρ_1 на m_1. Ряды a_1 и b_1 перспективны относительно точки R_1. Поскольку $a_2 \overline{\wedge}\, a_1$ и $b_2 \overline{\wedge}\, b_1$, то $a_2 \overline{\wedge}\, b_2$.

Пучок прямых первого порядка преобразование T переводит в полуквадрику, касающуюся плоскостей α_2 и β_2 и содержащую одну прямую полуквадрики Φ_2.

В самом деле, прямые пучка (R_1, ρ_1), соединяющие соответствующие точки рядов a_1 и b_1, переходят в прямые, соединяющие соответствующие точки рядов a_2 и b_2. Эти прямые образуют полуквадрику ρ_2, в которую переходит пучок (R_1, ρ_1). Поскольку ряды a_2, b_2 расположены в α_2, β_2, то ρ_2 содержит по одной прямой из этих плоскостей (касается этих плоскостей). Точки A_2, B_2, в которые K_α и K_β переводят точку $\rho_1 \cap m_1$, являются соответствующими точками не только рядов a_2, b_2, но и m_2^α, m_2^β. Поэтому полуквадрики ρ_2 и Φ_2 имеют общую прямую A_2B_2,

Инциденции полуквадрики ρ_2 с F_2-элементами легко обнаруживаются также и при рассмотрении инциденций пучка (R_1, ρ_1) с P_1-элементами. Утверждения о том, что ρ_2 имеет по одной общей прямой с полями α_2, β_2 и полуквадрикой Φ_2, следуют соответственно из того, что пучок (R_1, ρ_1) имеет по одной общей прямой с комплексами n_1^β, n_1^α и m_1.

Полуквадрики, в которые T переводит пучки прямых, назовем *гомалоидными;* ∞^5 пучков из Σ_1 переходит в ∞^5 гомалоидных полуквадрик в Σ_2. Это пятипараметрическое семейство гомалоидных полуквадрик поля Σ_2 выделяется из ∞^9 всех полуквадрик в Σ_2 условиями инцидентности с фундаментальными элементами обратного преобразования. Условия о том, что гомалоидная полуквадрика имеет по одной общей прямой с полями α_2, β_2 и полуквадрикой Φ_2, поглощают соответственно один, один и два параметра. Это одна из обещанных выше аналогий с кремоновыми преобразованиями.

Пучок прямых определяется любыми двумя своими прямыми g_1', g_1''. Поэтому гомалоидная полуквадрика вполне определяется образами g_2', g_2'' этих прямых. Поскольку прямые $g_1' = A_1'B_1'$ и $g_1'' = A_1''B_1''$ пересекаются, то им соответствуют такие прямые $g_2' = A_2'B_2'$ и $g_2'' = A_2''B_2''$, что прямые $a_2 = A_2'A_2''$ и $b_2 = B_2'B_2''$ пересекают ряды m_2^α и m_2^β в соответствующих точках M_2^α и M_2^β. Гомалоидная полуквадрика определяется проективностью $a_2(A_2', A_2'', M_2^\alpha) \overline{\wedge}\, b_2(B_2', B_2'', M_2^\beta)$.

Вторая аналогия с кремоновыми преобразованиями заключается в том, что инцидентность прообраза с F_1-элементами влечет за собой распадение образа. Пусть вершина R_1 пучка (R_1, ρ_1) лежит в α_1, т. е. пучок имеет общую прямую r_1 с полем α_1. Следы прямых пучка на α_1 совпадают в точке R_1, которую K_α переводит в R_2; следы на β_1 образуют ряд b_1, который K_β переводит в ряд b_2. Таким образом, T переводит наш пучок в пучок с вершиной R_2 в плоскости R_2b_2. Этот последний является *собственно образом* пучка (R_1, ρ_1), т. е. геометрическим местом образов прямых общего положения пучка (R_1, ρ_1). До полуквадрики (полного образа) его дополняет пучок, в который T переводит F_1-прямую r_1.

Если пучок содержит прямую f_1 полуквадрики Φ_1, то эта прямая переходит в связку с вершиной на n_2, а остальные прямые — в пучок. Действительно, следы N_1^{α}, N_1^{β} прямой f_1 суть соответствующие точки рядов a_1, b_1. Поэтому ряды a_2, b_2 пересекаются в точке N_2, которая сама себе соответствует, и проективность между рядами a_2, b_2 становится перспективностью.

§ 4. Полуквадрика

Полуквадрика φ_1 пересекает α_1 и β_1 по проективным рядам второго порядка a_1 и b_1. После преобразования их в K_α и K_β получим коники a_2 и b_2, между точками которых имеется проективное соответствие (коники a_1, b_1 имели две общие точки, и эти точки соответствовали сами себе; a_2, b_2 общих точек, вообще говоря, не имеют). Прямые, соединяющие соответствующие точки двух проективных рядов второго порядка, образуют поверхность четвертого порядка [3, стр. 55].

Итак, полуквадрика φ_1 преобразуется в линейчатую поверхность четвертого порядка φ_2.

Полуквадрике, выродившейся в конус, также соответствует семейство прямолинейных образующих поверхности четвертого порядка, образованной по тому же принципу. Если полуквадрика вырождается в тангенциальную конику, она переходит в поверхность четвертого порядка, прямые которой соединяют соответствующие точки прямолинейных рядов a_2 и b_2, находящихся в двузначном соответствии [3, стр. 53]. Если полуквадрика распадается на пару плоских пучков, то соответствующая линейчатая поверхность четвертого порядка распадается на пару полуквадрик.

Гомалоидная полуквадрика φ_1 поля Σ_1 (содержащая по одной прямой из $\alpha_1, \beta_1, \Phi_1$) имеет в качестве собственно образа пучок первого порядка. В самом деле, пусть $a_1 \in \alpha_1$, $b_1 \in \beta_1$, $f_1 \in \Phi_1$ — какие-либо три скрещивающиеся прямые. Ими однозначно определяется гомалоидная полуквадрика φ_1. Обозначим прямые сопряженной полуквадрики, лежащие в α_1 и β_1, a_1' и b_1'. Имеет место проективное соответствие между точками рядов a_1', b_1', высекаемыми прямыми полуквадрики φ_1. Точки $a_1' \cap f_1$ и $b_1' \cap f_1$ этих рядов соответствуют также и в рядах n_1^{α} и n_1^{β}. K_α и K_β переводят их в одну и ту же точку на n_2. Поэтому ряды a_2', b_2' перспективны и порождают пучок. Прямые a_1 и b_1 переходят каждая в пучок, а f_1 — в связку.

§ 5. Плоское поле прямых

Прямые плоского поля γ_1 пересекают α_1 и β_1 в точках прямых $a_1 = \alpha_1 \cap \gamma_1$ и $b_1 = \beta_1 \cap \gamma_1$. K_α и K_β переводят прямые a_1 и b_1 в прямые a_2 и b_2. Преобразование T переводит семейство γ_1 прямых, следы которых в α_1, β_1 расположены на прямых a_1, b_1, в семейство γ_2 прямых, следы которых в α_2, β_2 расположены на прямых a_2, b_2, т. е. в гиперболическую линейную конгруэнцию с директрисами a_2 и b_2.

Плоское поле переходит в T в гиперболическую линейную конгруэнцию.

Конгруэнция γ_2 имеет следующие инциденции с F_2-элементами:

1) по одному пучку в плоскостях α_2, β_2, причем каждый из этих пучков содержит прямую n_2 (эти пучки получаются из общих пучков поля γ_1 с комплексами n_1^{β}, n_1^{α});

2) одну прямую полуквадрики Φ_2 (в эту прямую переходит общий пучок поля γ_1 с комплексом m_1).

Всего в Σ_2 ∞^8 гиперболических линейных конгруэнций. Требуя, чтобы директрисы конгруэнции лежали в α_2, β_2, мы оставляем ∞^4 конгруэнций. Требуя дополнительно, чтобы конгруэнция содержала прямую из Φ_2, мы оставляем ∞^3 гомалоидных конгруэнций поля Σ_2-образов ∞^3 плоских полей из Σ_1. В самом деле, на выбор одной из директрис $a_2 \in \alpha_2$ мы имеем две степени свободы; ею однозначно определяется образующая полуквадрики Φ_2, проходящая через точку $a_2 \cap m_2^{\alpha}$; директрису $b_2 \in \beta_2$ мы можем проводить только через след этой образующей на β_2, т. е. на ее выбор мы имеем лишь одну степень свободы.

Плоское поле γ_1 определяется любыми двумя своими прямыми g_1', g_1''. Поэтому гомалоидная конгруэнция γ_2 также вполне определяется двумя своими прямыми g_2', g_2''. Из условия о том, что g_1', g_1'' пересекаются, вытекает (см. § 3), что директрисы a_2, b_2 пройдут через соответствующие точки рядов m_2^{α}, m_2^{β} и конгруэнция γ_2 будет содержать прямую из Φ_2.

Если поле γ_1 содержит прямую f_1 из Φ_1, то a_2 и b_2 пересекаются на прямой n_2, и собственно образом поля γ_1 является поле, определяемое этими прямыми. К нему добавляется связка с вершиной в точке $a_2 \cap b_2$ — образ прямой f_1. Поле (конгруэнция порядка нуль, класса один) и связка (конгруэнция порядка один, класса нуль) составляют распавшуюся линейную конгруэнцию (порядка и класса один) — полный образ поля γ_1

§ 5. Связка прямых

Рассмотрим связку прямых с вершиной S_1. Поля α_1 и β_1 следов этих прямых на плоскостях α_1 и β_1 перспективны относительно S_1: $\alpha_1 \overline{\wedge} \beta_1$. Но $\alpha_1 \overline{\wedge} \alpha_2$ и $\beta_1 \overline{\wedge} \beta_2$; следовательно, $\alpha_2 \overline{\wedge} \beta_2$. Прямые многообразия S_2, в которое T переводит связку S_1, соединяют соответствующие точки двух коллинеарных плоскостей α_2 и β_2, т. е. S_2 — конгруэнция (3,1).

T переводит связку прямых в конгруэнцию третьего порядка, первого класса.

∞^2 пар соответствующих прямых плоскостей α_2, β_2 порождают ∞^2 полуквадрик, принадлежащих S_2. Существуют, однако, такие пары соответствующих прямых (их ∞'), которые пересекаются.

Они приводят к полуквадрикам, выродившимся в тангенциальные коники. ∞' сингулярных плоскостей конгруэнции S_2, каждая из которых содержит принадлежащую S_2 тангенциальную конику, —это семейство соприкасающихся плоскостей некоторой пространственной кривой третьего порядка (нормкривой). Конгруэнция S_2 является конгруэнцией бипроекторов этой нормкривой, т. е. таких прямых, которым инцидентны по две ее соприкасающиеся плоскости.

Найдем инциденции конгруэнции S_2 с F_2-элементами; для этого рассмотрим инциденции связки S_1 с искючительными элементами поля $\sum_1$.

Связка S_1 пересекается со специальным линейным комплексом n_1^α по пучку прямых. Пусть b_1 — след плоскости этого пучка на β_1. Прямые, в которые T переводит прямые пучка, соединяют соответствующие точки двух проективных рядов n_2 и b_2. Оба эти ряда расположены в β_2, и потому образ нашего пучка — тангенциальная коника в β_2. Аналогично: общий пучок связки S_1 и комплекса n_1^β переходит в общую тангенциальную конику конгруэнции S_2 и поля α_2. Таким образом, α_2 и β_2 — сингулярные плоскости конгруэнции S_2. (Этот факт следует непосредственно и из самого способа образования конгруэнции).

В связке S_1 есть пучок прямых комплекса m_1. Этот пучок переходит в полуквадрику Φ_2. Конгруэнция S_2 включает в себя полуквадрику Φ_2.

Конгруэнция (3,1) зависит от двенадцати параметров. Полуквадрик в конгруэнции (3,1) — ∞^2. Требуя, чтобы конгруэнция проходила через заданную полуквадрику, мы связываем семь степеней свободы; т. е. существует ∞^5 конгруэнций (3.1), содержащих полуквадрику Φ_2. Прямым полуквадрики Φ_2 инцидентны ∞^2 плоскостей (через каждую — пучок). Назначая две из этих плоскостей (α_2, β_2) в качестве сингулярных плоскостей конгруэнции, мы фиксируем еще два параметра. Остается ∞^3 гомалоидных конгруэнций (3,1) — образов ∞^3 связок из $\sum_1$.

Если две прямые $g_2' = A_2'B_2'$ и $g_2'' = A_2''B_2''$ являются образами пересекающихся прямых g_1' и g_1'', то ими вполне определяется гомалоидная конгруэнция (3,1). Ее прямые соединяют точки полей α_2 и β_2, соответствующие в коллинеации, переводящей точки A_2', A_2'' в точки B_2', B_2'' и ряд m_2^α в ряд m_2^β.

Пусть вершина S_1 связки S_1 принадлежит α_1, т. е. связка S_1 и поле α_1 имеют общий пучок (S_1, α_1). Собственно, образом связки S_1 будет связка S_2. Вместе с конгруэнцией (2,1), в которую переходит пучок (S_1, α_1), связка S_2 образует конгруэнцию (3,1) — полный образ связки S_1.

Если вершина связки S_1 лежит на полуквадрике Φ_1, то связка S_1 содержит прямую $f_1 \in \Phi_1$. В коллинеации $\alpha_2 \overline{\wedge} \beta_2$ появляется двойная точка на прямой n_2 (в эту точку переходят следы прямой f_1 на α_1 и β_1). Прямые, соединяющие соответствующие точки полей

α_2 и β_2, образуют в этом случае конгруэнцию (2,1) — собственно образ связки S_1. До полного образа — конгруэнции (3,1) — ее дополняет связка, в которую переходит прямая f_1.

§ 7. Линейная конгруэнция

Пусть N_1 — какая-либо линейная конгруэнция в $\sum_1$. Между полями α_1 и β_1 прямые этой конгруэнции устанавливают квадратичное соответствие со специальным расположением фундаментальных точек [1, 2]. После преобразования этих полей в K_α и K_β получим квадратичное соответствие между полями α_2 и β_2 с общим расположением фундаментальных точек.

Прямые, соединяющие соответствующие точки двух плоскостей, между которыми установлено квадратичное соответствие, образуют конгруэнцию четвертого порядка, второго класса [3, стр. 246, 4]. Покажем, что порядок конгруэнции N_2 действительно равен четырем, т. е. покажем, что через точку S общего положения проходят четыре прямые конгруэнции. Спроектируем из точки S поле α_2 на плоскость β_2. В плоскости β_2 получим два совмещенных поля, находящихся в квадратичном соответствии. Такое соответствие имеет четыре двойные точки [2, стр. 42]. Прямые, соединяющие их с точкой S, принадлежат конгруэнции N_2.

Покажем, что класс конгруэнции N_2 равен двум, т. е. покажем, что в плоскости σ общего положения лежат две прямые из N_2. Обозначим прямые пересечения плоскости σ с плоскостями α_2 и β_2 соответственно a и b. Пусть a' — коника в β_2, соответствующая прямой $a \in \alpha_2$; B и B' — точки ее пересечения с b; а A и A' — соответствующие им точки на a. Прямые AB и $A'B'$ — две прямые из N_2, расположенные в σ.

Итак, T переводит линейную конгруэнцию в конгруэнцию (4,2).

Рассмотрим гомалоидную линейную конгруэнцию первого поля, т. е. такую линейную конгруэнцию N_1, в которую T^{-1} переводит плоское поле прямых N_2. Такая конгруэнция имеет следующие инциденции с F_1-элементами: 1) по одному пучку из полей α_1 и β_1 с вершинами на m_1 и 2) одну прямую из Φ_1. Это означает, что директрисы a_1 и b_1 конгруэнции N_1 лежат в α_1 и β_1, и пересекают прямые n_1^α и n_1^β в соответствующих точках N_1^α и N_1^β проективности $n_1^\alpha \overline{\wedge}\, n_1^\beta$. T переводит семейство прямых, пересекающих a_1 и b_1, в семейство прямых, пересекающих a_2 и b_2. Но прямые a_2 и b_2 пересекаются в точке N_2 на прямой n_2. Значит, собственно образом гомалоидной конгруэнции N_1 будет плоское поле прямых N_2 в плоскости a_2b_2. Плоское поле — это конгруэнция (0,1). Полный образ конгруэнции N_1 состоит из 1) поля a_2b_2 (0,1), 2) связки (1,0), в которую переходит пучок из N_1, лежащий в α_1, 3) связки (1,0), в которую переходит пучок из N_1, лежащий в β_1, 4) конгруэнции (1,1), в которую переходит прямая m_1, 5) связки (1,0), в которую переходит прямая $N_1^\alpha N_1^\beta$. Эти пять семейств образуют распавшуюся конгруэнцию (4,2).

§ 8. Специальный линейный комплекс

Специальный линейный комплекс l_1 состоит из ∞' плоских полей прямых, расположенных в плоскостях пучка, носителем которого служит ось l_1 комплекса.

Пусть A_1 и B_1 — следы прямой l_1 на плоскостях α_1 и β_1. Плоскости пучка l_1 пересекают α_1 и β_1 по перспективным пучкам прямых $(A_1, \alpha_1) \overline{\overline{\wedge}} (B_1, \beta_1)$. Комплекс l_1 можно определить как семейство прямых, пересекающих соответствующие прямые этих пучков.

Прямые этого семейства переходят в T в прямые, пересекающие соответствующие прямые проективных пучков (A_2, α_2) и (B_2, β_2), которые, как известно [3, 339], образуют тетраэдральный комплекс.

Преобразование T переводит специальный линейный комплекс прямых в тетраэдральный комплекс.

Тетраэдральный комплекс имеет степень два. Прямые комплекса, проходящие через точку общего положения, образуют конус второго порядка. Прямые комплекса, лежащие в плоскости общего положения, образуют тангенциальную конику. Существуют, однако, четыре сингулярные точки и четыре сингулярные плоскости, которые служат соответственно вершинами и гранями главного тетраэдра комплекса. Связки прямых, инцидентных вершинам тетраэдра, и поля прямых, инцидентных его граням, целиком принадлежат комплексу. Прямые тетраэдрального комплекса пересекают грани главного тетраэдра в четверках точек с постоянным двойным отношением. Тетраэдральный комплекс зависит от тринадцати параметров. Он может быть определен своим тетраэдром (двенадцать параметров) и одной своей прямой (один параметр). В тетраэдральном комплексе содержится два четырехпараметрических семейства полуквадрик. Полуквадрики одного семейства описаны около тетраэдра, другого — вписаны в него.

Точки A_2 и B_2 служат двумя вершинами тетраэдра тетраэдрального комплекса l_2 — сбраза комплекса l_1 (ось l_1 комплекса l_1 перешла в ребро A_2B_2 тетраэдра комплекса l_2). Пучки $(A_2\ \alpha_2)$ и (B_2, β_2) высекают на прямой n_2 проективные ряды точек. Двойные точки этой проективности — две другие вершины тетраэдра. Таким образом, F_2 — элементы α_2 и β_2 являются гранями тетраэдра комплекса l_2, т. е. поля α_2 и β_2 полностью входят в l_2. Инциденции комплекса l_2 с F_2-элементом Φ_2 очевидны из инциденций прообраза l_1 с P_1-элементом — комплексом m_1. Комплексы l_1 и m_1 имеют общую линейную конгруэнцию; поэтому комплекс l_2 содержит всю полуквадрику Φ_2.

Инциденции образов с F_2-элементами, как и ранее, понижают размерность множества образов, уравнивая ее с размерностью множества прообразов. Требование инцидентности тетраэдрального комплекса с полуквадрикой связывает у него пять степеней свободы, а требование о том, чтобы две касательные к ней плоскости были его сингулярными плоскостями, — еще четыре. Остается ∞^4 гомалоидных тетраэдральных комплексов — образов ∞^4 специальных линейных комплексов.

Специальный линейный комплекс определяется своей осью l_1. Поэтому образ l_2 прямой l_1 однозначно определяет гомалоидный тетраэдральный комплекс l_2. Через прямую l_2 проходят две касательные плоскости к гиперболоиду Φ_2. Вместе с плоскостями α_2, β_2 они образуют тетраэдр комплекса l_2. Комплекс l_2 определяется этим тетраэдром и любой прямой полуквадрики Φ_2, все прямые которой принадлежат l_2. Грани тетраэдра касаются гиперболоида Φ_2. Поэтому на полуквадрике Φ_2', сопряженной Φ_2, есть четыре прямые, лежащие в гранях тетраэдра. Эта четверка прямых на полуквадрике Φ_2' имеет некоторое двойное отношение. Прямые полуквадрики Φ_2 пересекают эти четыре прямые и, следовательно, грани тетраэдра в четверках точек с постоянным двойным отношением

Рассмотрим особые случаи инцидентности F_1-элементов комплексу l_1. Комплекс l_1 общего положения имеет две общие прямые с полуквадрикой Φ_1 и общие пучки с полями α_1, β_1. Назовем эти инциденции *минимальными.*

Для комплекса частного положения есть две возможности:

а) *максимальные инциденции* (размерность многообразий пересечения комплекса с F_1-элементами выше, чем в общем случае);

б) *минимальные инциденции с особенностями* (две прямые комплекса на Φ_1 и два его пучка из α_1, β_1 занимают относительно друг друга частное положение);

1а) поле α_1 принадлежит комплексу l_1, т. е. ось l_1 лежит в плоскости α_1. Собственно образом комплекса l_1 будет специальный линейный комплекс с осью l_2. До квадратичного комплекса его дополняет комплекс m_2^β, соответствующий полю α_1;

2а) полуквадрика Φ_1 принадлежит комплексу l_1. Это означает, что ось l_1 комплекса принадлежит сопряженной полуквадрике Φ_1'. Тогда соответствующие прямые пучков (A_1, α_1) и (B_1, β_1) проходят через соответствующие точки рядов n_1^α и n_1^β. Соответствующие прямые пучков (A_2, α_2) и (B_2, β_2) будут при этом пересекаться в точках прямой n_2. Это означает, что пучки (A_2, α_2) и (B_2, β_2) перспективны, и, следовательно, семейство прямых, пересекающих пары соответствующих прямых этих пучков, есть специальный линейный комплекс с осью $A_2B_2 = l_2$. Этот комплекс является собственно образом комплекса l_2. До полного образа его дополняет специальный линейный комплекс n_2, в который переходит полуквадрика Φ_1;

1б) ось l_1 пересекает прямую n_1^α. Комплекс l_1 имеет минимальные инциденции с F_1-элементами. Особенность его в том, что одна из двух общих прямых комплекса с полуквадрикой Φ_1 принадлежит общему пучку комплекса с полем α_1. Вершина A_2 пучка (A_2, α_2) попадает на прямую n_2. Пусть p_2 — прямая пучка (A_2, α_2), соответствующая прямой B_2A_2 пучка (B_2, β_2), а γ_2 — плоскость, определяемая прямыми p_2 и B_2A_2. Пусть B_2C_2 — прямая пучка

(B_2, β_2), соответствующая прямой n_2 пучка (A_2, α_2), а C_2 — общая точка этих прямых.

Имеем тетраэдральный комплекс l_2 с вырожденным тетраэдром. Вершины этого тетраэдра суть точки C_2, B_2 и считаемая дважды точка A_2, грани — плоскости γ_2, α_2 и считаемая дважды плоскость β_2, а ребра — прямая p_2, соединяющая две совпавшие вершины, прямая B_2C_2 пересечения двух совпавших граней, и считаемые каждая дважды прямые A_2B_2 и n_2. Конусы комплекса l_2 проходят через точки A_2, B_2, C_2 и касаются в точке A_2 прямой p_2. Коники комплекса касаются граней α_2, β_2, γ_2, причем грани β_2 они касаются в точках прямой B_2C_2;

2б) ось l_1 пересекает прямые n_1^α и n_1^β. Вершины пучков (A_2, α_2) и (B_2, β_2) обе попадают на прямую n_2. Обозначим p_2 и q_2 — прямые пучков (A_2, α_2) и (B_2, β_2), соответствующие прямой n_2, отнесенной к пучку (B_2, β_2) и (A_2, α_2) соответственно. Имеем тетраэдральный комплекс l_2 с дважды вырожденным тетраэдром. Его вершины совпадают по две в точках A_2, B_2; грани совпадают по две с плоскостями α_2, β_2. Его ребра суть прямые p_2 и q_2, каждая из которых соединяет две совпавшие вершины и является линией пересечения двух совпавших граней, и считаемая четырежды прямая n_2. Конусы комплекса проходят через точки A_2, B_2, касаясь в них прямых p_2, q_2. Коники комплекса касаются граней α_2, β_2 в точках, расположенных на прямых p_2, q_2;

3б) ось l_1 принадлежит полуквадрике Φ_1. Точки A_2 и B_2 совпадают на прямой n_2. Пары соответствующих прямых пучков (A_2, α_2) и (B_2, β_2) пересекаются и определяют ∞^1 плоскостей, огибающих конус второго порядка. Тетраэдральный комплекс вырождается в специальный квадратичный комплекс касательных к этому конусу. Конусы этого комплекса распадаются на пары плоских пучков.

§ 9. Общий линейный комплекс

Общий линейный комплекс представляет собой трехпараметрическое семейство прямых, самосопряженных в нуль-системе, т. е. в такой корреляции, где точки инцидентны соответствующим плоскостям.

Пусть R_1 — полюс плоскости α_1 в нуль-системе, порождающей данный линейный комплекс L_1. Нуль-система переводит точки плоскости α_1 в плоскости связки R_1. Комплекс L_1 расслаивается на ∞^2 пучков с вершинами в плоскости α_1, лежащих в соответствующих плоскостях связки R_1.

Связка плоскостей R_1 перспективна полю прямых β_1. Поле точек α_1 проективно полю прямых β_1. Комплекс L_1 состоит из прямых, следы A_1 и B_1 которых в плоскостях α_1 и β_1 сопряжены в этой корреляции (сопряженными считаются пары точек, каждая из которых лежит на поляре другой). Преобразуя поля α_1 и β_1 в коллинеациях K_α и K_β, получим семейство L_2 прямых, пересекающих плоскости α_2 и β_2 в сопряженных точках корреляции $\alpha_2 \overline{\wedge} \beta_2$.

Такое семейство представляет собой одну из разновидностей квадратичного комплекса, и называется по имени его первооткрывателя комплексом Гирста [3, стр. 430, 5].

Преобразование T переводит общий линейный комплекс в квадратичный комплекс Гирста.

Пусть S — произвольная точка пространства. Спроектируем из нее поле β_2 на α_2. Получим корреляцию в плоскости α_2. Геометрическое место точек, инцидентных соответствующим им в этой корреляции прямым, есть некоторая коника s. Прямые комплекса L_2, проходящие через точку S, образуют конус второго порядка, направляющей которого является коника s.

Пусть K — точка плоскости α_2, соответствующая в корреляции $\overline{\alpha_2 \wedge} \beta_2$ прямой n_2, отнесенной к полю β_2. Прямым пучка (K, α_2) соответствуют точки ряда n_2. Две точки M и N этого ряда лежат на соответствующих прямых пучка. Следовательно, точки M и N принадлежат конике s и конусу S. Все прямые связок M и N принадлежат, таким образом, комплексу L_2. Точки M и N — сингулярные точки комплекса L_2.

Пусть σ — произвольная плоскость пространства a, b — ее следы на α_2, β_2 и B — точка плоскости β_2, соответствующая прямой a. Пучок (B, β_2) высекает на прямой b ряд точек, проективный ряду a. Этими рядами определяется тангенциальная коника, которую образуют прямые комплекса Гирста в плоскости σ.

Все прямые полей α_2 и β_2, очевидно, принадлежат L_2 (принадлежность полей α_2 и β_2 комплексу L_2 следует также из инциденций комплекса L_1 соответствующим P_1-элементам). Сингулярность точек M, N и плоскостей α_2, β_2 заключается еще и в том, что в любой плоскости связок M и N (в любой точке плоскостей α_2 и β_2) коника (конус) комплекса L_2 распадается на пару плоских пучков.

Плоскости, определяемые парами соответствующих элементов корреляции $\overline{\alpha_2 \wedge} \beta_2$, огибают некоторую квадрику φ^2. Все эти плоскости являются сингулярными по отношению к L_2; в каждой из них прямые из L_2 образуют пару пучков первого порядка. Аналогично являются сингулярными и все точки квадрики φ^2.

Сингулярная поверхность квадратичного комплекса общего вида (зависящего от девятнадцати параметров) является поверхностью четвертого порядка. Комплекс Гирста зависит от четырнадцати параметров. Его сингулярная поверхность распадается на две квадрики, одна из которых φ^2, а вторая в свою очередь распадается как точечный образ на пару плоскостей α_2, β_2 и как тангенциальный образ—на пару точек M, N.

Заканчивая описание необходимых нам свойств комплекса Гирста, отметим, что он содержит ∞^4 полуквадрик.

Кроме указанных выше инциденций комплекса L_2 с F_2-элементами, имеет место принадлежность ему полуквадрики Φ_2. Подсчитаем размерность семейства комплексов L_2, соответствующего пяти параметрическому семейству общих линейных комплексов L_1. Требование о том, чтобы плоскости α_2, β_2 были сингулярными, поглощает шесть параметров, а требование о том, чтобы касательная к этим плоскостям полуквадрика Φ_2 (таких полуквадрик ∞^7) принадлежала комплексу (полуквадрик в комплексе ∞^4) — еще три (7—4) параметра. Остается пять (14—6—3) параметров.

§ 10. Несколько заключительных замечаний

1. Можно получить преобразование, двойственное рассмотренному, исходя из двойственной конструкции. Пусть $A_1 = A_2$ и $B_1 = B_2$ — две связки с заданными в них коллинеациями K_A и K_B. Прямая g_1 пересечения плоскостей $\alpha_1 = g_1A_1$ и $\beta_1 = g_1B_1$ переходит в прямую g_2 пересечения соответствующих плоскостей α_2 и β_2. Пучок прямых переходит в полуквадрику, проходящую через точки A_2 и B_2 и содержащую одну прямую из полуквадрики Φ_2, определяемой пучками плоскостей m_2^A, m_2^B. Связка переходит в линейную конгруэнцию, поле — в конгруэнцию (1,3) бисекант нормкривой и т. д.

2. Прямые трехмерного пространства P_3 отображаются взаимнооднозначно в точки некоторой гиперквадрики f_4^2 пятимерного пространства P_5 — так называемой квадрики Плюккера [6]. Пучкам прямых из P_3 в этом отображении соответствуют прямые на f_4^2, полуквадрикам — коники, связкам — плоскости, образующие одно трехпараметрическое семейство, плоским полям — плоскости, образующие второе трехпараметрическое семейство; линейные конгруэнции из P_3 изображаются на f_4^2 двумерными квадриками — сечениями f_4^2 3-плоскостями (если конгруэнция гиперболическая, эллиптическая, параболическая, то квадрика — линейчатая, овальная, конус); линейному комплексу соответствует 3-квадрика — сечение f_4^2 гиперплоскостью; если линейный комплекс специальный, то гиперплоскость касается f_4^2, и 3-квадрика становится конусом с нульмерной вершиной в точке касания.

Рассмотренному преобразованию T в плюккеровом отображении соответствует некоторый бирациональный автоморфизм квадрики f_4^2. Пусть α и β — две двумерные образующие из первой серии, а $K_\alpha = \alpha_1 \overline{\wedge} \alpha_2$ и $K_\beta = \beta_1 \overline{\wedge} \beta_2$ — заданные в них коллинеации. Каждой точке $G_1 \in f_4^2$ ставится в соответствие точка $G_2 \in f_4^2$ следующим образом. Проведем в точке G_1 касательную к f_4^2 гиперплоскость. Пусть a_1 и b_1 — ее следы на α_1 и β_1, а a_2 и b_2 — образы этих прямых в K_α и K_β. Через a_2 и b_2 проходят по f_4^2 по одной двумерной образующей из второй серии, которые пересекаются в точке G_2.

Фундаментальными образами автоморфизма T^{-1} будут плоскости α_2 и β_2 и имеющая с ними по одной общей точке коника Φ_2. Прямой будет соответствовать в T коника, имеющая по одной общей точке с плоскостями α_2, β_2 и коникой Φ_2. Ограничимся этими замечаниями, отметив, что детальная интерпретация полученных выше результатов на f_4^2, вероятно, заслуживает внимания.

3. Преобразование, применяемое в известном отображении Бляшке-Грюнвальда [7], представляет собой частный случай преобразования T. Одна из данных плоскостей (α) — несобственная плоскость расширенного евклидова пространства. Коллинеация в плоскости β (плоскость изображений) есть тождественное преобразование, а две двойные точки коллинеации K_α лежат на прямой $\alpha \cap \beta$, являясь циклическими точками плоскости β. Плоское поле переходит здесь в гиперболическую линейную конгруэнцию, а связка — в эллиптическую линейную конгруэнцию, мнимые директрисы которой проходят через упомянутые циклические точки. Опираясь на эти факты, можно получить основные результаты, относящиеся к кинематическому отображению Бляшке-Грюнвальда, значительно глубже проникнув в сущность механизма этого отображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Тефова. Косые отображения в проективных пространствах и их приложения в неевклидовой и линейчатой геометрии. Автореф. канд. дисс. Ярославль, 1968.
2. H. P. Hudson. Cremona transformations in plane and space. Cambridge, 1927.
3. R. Sturm. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie. 1, 2, 3. Leipzig, 1892, 1893, 1896.
4. W. Stahl. Das Strahlensystem vierter Ordnung zweiter Klasse. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 97, H. 1, 1884.
5. T. A. Hirst. Note on the complexes generated by two correlative planes. Proceedings of the London mathematical society, vol. 10, 1879.
6. H. F. Baker. Principles of geometry Vol. 4. Cambridge, 1925.
7. E. Müller. Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. 1. Leipzig — Wien, 1923.

Поступила 9 июня 1971 г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. А. Солейман

Киев

Теорией конгруэнций в эллиптическом пространстве занимались Бродский М. С. [1] и Розенфельд Б. А. [2]. Машанов В. И. [3] и Березина Л. Я. [4] изучали теорию конгруэнций произвольного пространства постоянной кривизны. R. Rosca в 1969 г. написал по теории конгруэнций эллиптического пространства обширную монографию [5]. В настоящей работе рассматривается один класс конгруэнций эллиптического пространства, который характеризуется определенными инвариантными свойствами второй дифференциальной окрестности луча каждой конгруэнции класса.

§ 1. Предварительные соотношения

Примем за эллиптическое пространство трехмерное проективное пространство P_3 с абсолютом в виде невырожденной мнимой поверхности второго порядка. Будем брать в качестве сопровождающего тетраэдра (репера) любого многообразия в эллиптическом пространстве тетраэдр $T(A_0A_1A_2A_3)$, автополярный относительно абсолюта. Предполагается, что в P_3 выбран некоторый неподвижный репер T_0 и каждая вершина A_α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ имеет определенную четверку координат в этом репере. Если

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0 \ (\alpha, \ \beta = 0, 1, 2, 3) \quad (*)$$

есть уравнение абсолюта в репере T_0, то, обозначая квадратичную форму, стоящую в левой части этого уравнения, для какой-то точки M символом $(M)^2$, а полярную форму, соответствующую этой квадратичной форме, для двух точек M, N — символом (MN), можно записать условие автополярности репера в виде

$$(A_\alpha A_\beta) = 0 \ (\alpha \neq \beta).$$

Пронормируем, кроме того, координаты вершин A_α так, чтобы имели место равенства

$$A_\alpha^2 = 1.$$

В таком случае точками пересечения ребра $A_\alpha A_\beta$ с абсолютом будут $A_\alpha \pm iA_\beta$ $(i = \sqrt{-1})$. Уравнение абсолюта в любом сопровождающем репере будет

$$\sum_{\alpha=0}^{3} (x^\alpha)^2 = 0. \tag{1}$$

Уравнения инфинитезимального смещения репера T имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta. \tag{2}$$

Следствием выбора T являются следующие соотношения между формами ω_α^β:

$$\omega_0^0 = 0, \ \omega_i^0 = -\omega^i, \ \omega_k^j = -\omega_j^k \ (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Здесь положим $\omega^i = \omega_0^i$. Кроме того, впредь будем полагать, что $A_0 = A$. Условимся, далее, ради простоты принимать радиус кривизны эллиптического пространства равным единице, $R = 1$. (Выбор радиуса кривизны пространства зависит от нас, но не определяется сделанной выше нормировкой координат репера T).

Условия интегрируемости уравнений (2) (уравнения структуры эллиптического пространства) имеют вид

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_j^i]; \; D\omega_j^i = [\omega_j^k \omega_k^i] - [\omega^j \omega^i]. \qquad (3)$$

§ 2. Основные уравнения

Предметом нашего внимания будут конгруэнции, у которых фокусы каждого луча полярно сопряжены относительно абсолюта, а фокальные плоскости взаимно-перпендикулярны, т. е. также полярно сопряжены относительно абсолюта. Мы можем, следовательно, выбрать сопровождающий репер конгруэнции так, чтобы его вершины A, A_3 совпадали с фокусами конгруэнции, а плоскости AA_3A_1, AA_3A_2 с фокальными плоскостями конгруэнции (будем обозначать рассматриваемые конгруэнции символом C). Тогда из равенств

$$dA = \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 A_3,$$
$$dA_3 = -\omega^3 A + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2,$$

должны иметь

$$\omega^2 = 0, \; \omega_3^1 = 0. \qquad (4)$$

Это и есть система уравнений, определяющая класс конгруэнций C.

Дифференцируя внешним образом систему (4) и пользуясь уравнениями структуры (3), получим

$$\begin{aligned} &[\omega_1^2 \omega^1] - [\omega^3 \omega_3^2] = 0, \\ &[\omega_1^2 \omega_3^2] - [\omega^3 \omega^1] = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Раскрывая первое уравнение по лемме Картана, получим

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 = l\omega^1 - m\omega_3^2, \\ &\omega^3 = m\omega^1 - nl\omega_3^2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Внося значения ω_1^2, ω^3 во второе уравнение (5), имеем

$$n = l.$$

Присоединяя к уравнениям (4) их продолжения, находим

$$\begin{aligned} &\omega^2 = 0. \\ &\omega_3^1 = 0, \\ &\omega_1^2 = l\omega^1 - m\omega_3^2, \\ &\omega^3 = m\omega^1 - l\omega_3^2. \end{aligned} \qquad (7)$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в [6], $q = 2$ (ω_1^2, ω^3); $s_1 = 2$ (число уравнений (4)); $s_2 = q - s_1 = 0$ (число Картана $Q = s_1 + 2s_2 = 2$). Но число произвольных коэффициентов системы (7) $N = 2$ (l, m). Следовательно, $Q = N$. Система (7) в инволюции. Ее решение существует с произволом в две функции одного аргумента. Таким образом, имеем теорему существования рассматриваемого класса конгруэнций.

Теорема 1. *Класс рассматриваемых конгруэнций* (4) *существует с произволом в две функции одного аргумента.*

§ 3. Геометрическая характеристика конгруэнций

Конгруэнции C обладают рядом замечательных свойств. Сформулируем эти свойства в целом ряде теорем. Часто впредь вместо того, чтобы говорить «конгруэнции C», будем говорить «конгруэнции (7)».

Теорема 2. *Конгруэнции* (7) *являются конгруэнциями* W.

Доказательство. Действительно, для этих конгруэнций имеем

$$dA = \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3,\ dA_3 = -\omega^3 A + \omega_3^2 A_2,$$
$$d^2A = -\{(\omega^1)^2 + (\omega^3)^2\} A + (\omega^1\omega_1^2 + \omega^3\omega_3^2) A_2 + d\omega^1 A_1 + d\omega^3 A_3,$$
$$d^2A_3 = -\{(\omega^3)^2 + (\omega_3^2)^2\} A_3 - (\omega^3\omega^1 + \omega_3^2\omega_1^2) A_1 - d\omega^3 A + d\omega_3^2 A_2.$$

Поскольку фокальными плоскостями (касательными плоскостями фокальных поверхностей) в фокусах A, A_3 являются соответственно плоскости AA_1A_3, AA_2A_3, то уравнения асимптотических линий фокальных поверхностей (A), (A_3) имеют вид

$$\begin{aligned} &\omega^1\omega_1^2 + \omega^3\omega_3^2 = 0,\\ &\omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Внося сюда значения ω_1^2, ω^3 (по формулам (7)), получим для системы (8)

$$l\{(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2\} = 0 \quad (l \neq 0).$$

Таким образом, уравнения асимптотических линий на обеих фокальных поверхностях (A) и (A_3) совпадают с уравнением

$$(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2 = 0.$$

Следовательно, конгруэнции (7) являются конгруэнциями W. Теорема доказана.

Теорема 3. *Фокальные поверхности* (A), (A_3) *конгруэнций* (7) *являются поверхностями нулевой гауссовой кривизны.*

Доказательство. Плоскость AA_1A_3 есть касательная плоскость фокальной поверхности (A). Полюс этой плоскости является вершиной A_2. Следовательно, AA_2 служит нормалью к поверхности (A). Базисными формами на поверхности (A) являются формы ω^1, ω^3. Представим уравнения (7) в виде

$$\omega^2 = 0,\ \omega_3^1 = 0,$$

$$\omega_1^2 = \frac{l^2 - m^2}{l}\omega^1 + \frac{m}{l}\omega^3,$$

$$\omega_3^2 = \frac{m}{l}\omega^1 - \frac{1}{l}\omega^3.$$

Первая и вторая квадратичные формы поверхности (A) задаются формулами

$$(dA)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^3)^2,$$
$$-(dAdA_2) = \omega^1\omega_1^2 + \omega^3\omega_3^2 =$$
$$= \frac{l^2 - m^2}{l}(\omega^1)^2 + 2\frac{m}{l}\omega^1\omega^3 - \frac{1}{l}(\omega^3)^2.$$

Символом $(dA)^2$ и $dAdA_2$ обозначены соответственно квадратичная и билинейная формы, соответствующие левой части уравнения абсолюта (*).

Нормальная кривизна $\frac{1}{R_n}$ поверхности (A) задается формулой [4]

$$\frac{1}{R_n} = -\frac{(dAdA_2)}{(dA)^2}.$$

Внося сюда значения $(dA)^2$, $(dAdA_2)$, получаем

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\frac{l^2 - m^2}{l}(\omega^1)^2 + 2\frac{m}{l}\omega^1\omega^3 - \frac{1}{l}(\omega^3)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^3)^2}.$$

Или

$$\left(\frac{1}{R_n} - \frac{l^2 - m^3}{l}\right)(\omega^1)^2 - 2\frac{m}{l}\omega^1\omega^3 + \left(\frac{1}{R_n} + \frac{1}{l}\right)(\omega^3)^2 = 0.$$

Продифференцируем это уравнение по ω^1 и ω^3:

$$\left(\frac{1}{R_n} - \frac{l^2 - m^2}{l}\right)\omega^1 - \frac{m}{l}\omega^3 = 0,$$
$$-\frac{m}{l}\omega^1 + \left(\frac{1}{R_n} + \frac{1}{l}\right)\omega^3 = 0.$$

Исключая отсюда формы ω^1, ω^3, находим

$$\left(\frac{1}{R_n} - \frac{l^2 - m^2}{l}\right)\left(\frac{1}{R_n} + \frac{1}{l}\right) - \frac{m^2}{l^2} = 0$$

или

$$\frac{1}{R_n^2} + \frac{1 - l^2 + m^2}{l}\cdot\frac{1}{R_n} - 1 = 0. \tag{9}$$

Гауссова и средняя кривизны поверхности (A) определяются выражениями [4]

$$K_a = 1 + \frac{1}{R_n' R_n''}, \quad 2H = \frac{1}{R_n'} + \frac{1}{R_n''} \tag{10}$$

$\left(\text{напоминаем, что кривизна эллиптического пространства } \frac{1}{R^2} = 1\right)$.

Из уравнения (9) получим

$$\frac{1}{R_n' R_n''} = -1, \quad \frac{1}{R_n'} + \frac{1}{R_n''} = -\frac{1 - l^2 + m^2}{l}.$$

Внося значения $\frac{1}{R'_n R''_n}$, $\frac{1}{R'_n}+\frac{1}{R''_n}$ в (10), получим

$$K_{a_0}=0,\ 2H_0=-\frac{1-l^2+m^2}{l}=\frac{l^2-m^2-1}{l}. \qquad (11)$$

Таким образом, поверхность (A) имеет нулевую гауссову кривизну.

Аналогично для поверхности (A_3) имеем базисные формы ω_3^0, ω_3^2, поэтому систему уравнений (7) можно переписать в виде

$$\omega^2=0,\ \omega_3^1=0,$$

$$\omega^1=\frac{1}{m}\omega_3^0+\frac{l}{m}\omega_3^2,$$

$$\omega_2^1=\frac{l}{m}\omega_3^0+\frac{m^2-l^2}{m}\omega_3^2.$$

Аналогично тому, как сделано для поверхности (A), можно вычислить гауссову и среднюю кривизны поверхности (A_3)

$$K_{a_3}=0,\ 2H_3=\frac{m^2-l^2-1}{m}. \qquad (12)$$

Следовательно, поверхности (A) и (A_3) имеют нулевую гауссову кривизну. Теорема доказана.

Теорема 4. *Конгруэнции (7) двумя способами расслаиваются в однопараметрическое семейство цилиндров.*

Доказательство. Действительно, получим в силу уравнений (7)

$$D(\omega^1+\omega_3^2)=[\omega^2\omega_2^1]+[\omega^3\omega_3^1]+[\omega_3^1\omega_1^2]-[\omega^3\omega^2]=0,$$

$$D(\omega^1-\omega_3^2)=[\omega^2\omega_2^1]+[\omega^3\omega_3^1]-[\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega^3\omega^2]=0.$$

Положим поэтому

$$\omega^1+\omega_3^2=du,\quad \omega^1-\omega_3^2=dv,$$

где u, v — некоторые переменные. Равенство $u=\text{const}$ выделяет некоторую линейчатую поверхность, принадлежащую конгруэнции (7). Уравнения этих поверхностей имеют вид

$$\omega^2=0,\quad \omega_3^1=0,\quad \omega^1+\omega_3^2=0. \qquad (13)$$

Эти поверхности являются цилиндрами [6]. Так как каждому значению u соответствует цилиндр (13), то конгруэнции (7) представляют собой однопараметрическое семейство таких цилиндров.

Аналогично обнаруживаем, что равенство $v=\text{const}$ выделяет некоторый цилиндр

$$\omega^2=0,\quad \omega_3^1=0,\quad \omega^1-\omega_3^2=0, \qquad (4)$$

и конгруэнции (7) расслаиваются в однопараметрическое семейство таких цилиндров.

Таким образом, конгруэнции (7) двумя способами расслаиваются в однопараметрическое семейство цилиндров. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для конгруэнций (7) точка, полярно сопряженная с точкой A (или с точкой A_3) и лежащая на нормали к поверхности (A) (или к поверхности (A_3)), описывает поверхность с нулевой гауссовой кривизной, а ее средняя кривизна равна с противоположным знаком средней кривизне поверхности (A) (или поверхности (A_3)).*

Доказательство. Так как касательные плоскости к поверхностям (A) и (A_3) в точках A и A_3 совпадают соответственно с плоскостями AA_3A_1 и AA_3A_2, то мы имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} &\omega^2 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \\ &\omega_1^2 = l\omega^1 - m\omega_3^2, \\ &\omega^3 = m\omega^1 - l\omega_3^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку полюс касательной плоскости AA_3A_1 к поверхности (A) является вершиной A_2, то точка A_2 полярно сопряженная с точкой A и лежит на нормали к этой поверхности.

Из равенства

$$dA_2 = \omega_2^1 A_1 + \omega_2^3 A_3 \quad (\omega^2 = 0)$$

следует, что точка A_2 описывает поверхность (A_2), касательная плоскость к которой является плоскостью $A_1A_2A_3$ в точке A_2 и прямая AA_2 служит нормалью к этой поверхности. На поверхности (A_2) мы имеем базисные формы ω_2^1, ω_2^3. Систему (7) теперь можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\omega^2 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \\ &\omega^1 = -\frac{1}{l}\,\omega_2^1 - \frac{m}{l}\,\omega_2^3, \\ &\omega^3 = -\frac{m}{l}\,\omega_2^1 + \frac{l^2 - m^2}{l}\,\omega_2^3. \end{aligned}$$

Первая и вторая квадратичные формы поверхности (A_2) определяются формулами

$$(dA_2)^2 = (\omega_2^1)^2 + (\omega_2^3)^2,$$

$$-(dAdA_2) = -(\omega^1\omega_2^1 + \omega^3\omega_2^3) = \frac{1}{l}(\omega_2^1)^2 + 2\frac{m}{l}\,\omega_2^1\omega_2^3 - \frac{l^2 - m^2}{l}(\omega_2^3)^2.$$

Нормальная кривизна поверхности (A_2) задается формулой

$$\frac{1}{R_n} = -\frac{(dAdA_2)}{(dA_2)^2} = \frac{\frac{1}{l}(\omega_2^1)^2 + 2\frac{m}{l}\,\omega_2^1\omega_2^3 - \frac{l^2 - m^2}{l}(\omega_2^3)^2}{(\omega_2^1)^2 + (\omega_2^3)^2}.$$

Или

$$\left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{l}\right)(\omega_2^1)^2 - 2\frac{m}{l}\,\omega_2^1\omega_2^3 + \left(\frac{1}{R_n} + \frac{l^2 - m^2}{l}\right)(\omega_2^3)^2 = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по ω_2^1 и ω_2^3, получаем

$$\left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{l}\right)\omega_2^1 - \frac{m}{l}\,\omega_2^3 = 0,$$

$$-\frac{m}{l}\overset{1}{\omega_2}+\left(\frac{1}{R_n}+\frac{l^2-m^2}{l}\right)\overset{3}{\omega_2}=0.$$

Исключая отсюда формы $\overset{1}{\omega_2}$, $\overset{3}{\omega_2}$, имеем

$$\frac{1}{R_n^2}+\frac{l^2-m^2-1}{l}\frac{1}{R_n}-1=0.$$

Отсюда найдем

$$\frac{1}{R_n'R_n''}=-1,\quad \frac{1}{R_n'}+\frac{1}{R_n''}=-\frac{l^2-m^2-1}{l}.$$

Следовательно, средняя и гауссова кривизны поверхности (A_2) имеют значения

$$2H_2=\frac{1}{R_n'}+\frac{1}{R_n''}=-\frac{l^2-m^2-1}{l}=-2H_0,$$

$$K_{a_2}=1+\frac{1}{R_n'R_n''}=0=K_{a_0}.$$

Аналогично точка A_1 является точкой, полярно сопряженной с точкой A_3, и лежит на нормали к этой поверхности.

Из равенства

$$dA_1=\overset{0}{\omega_1}A+\overset{2}{\omega_1}A_2$$

следует, что точка A_1 описывает поверхность (A_1). Очевидно, прямая A_1A_3 является нормалью к поверхности (A_1). На поверхности (A_1) имеем базисные формы ω_1, $\overset{0}{\omega_1}$. Тогда систему (7) перепишем в виде

$$\omega^2=0,\quad \overset{1}{\omega_3}=0,$$

$$\overset{3}{\omega_2}=\frac{1}{m}\overset{2}{\omega_1}+\frac{l}{m}\overset{0}{\omega_1},\quad \overset{3}{\omega_0}=\frac{l}{m}\overset{2}{\omega_1}+\frac{l^2-m^2}{m}\overset{0}{\omega_1}.$$

Аналогично тому, как показано для поверхности (A_2), можно вычислить среднюю и гауссову кривизну поверхности (A_1)

$$2H_1=-\frac{m^2-l^2-1}{m}=-2H_3,\quad K_{a_1}=0=K_{a_3}.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Любая точка, лежащая на нормали к поверхности нулевой гауссовой кривизны на заданном постоянном расстоянии от поверхности, описывает поверхность нулевой гауссовой кривизны.*

Доказательство. Пусть точка A описывает поверхность нулевой гауссовой кривизны, обозначим ее через (A). Присоединяем к каждой точке A поверхности (A) тетраэдр T $(AA_1A_2A_3)$, автополярный относительно абсолюта эллиптического пространства, три вершины которого A, A_1, A_3 лежат в касательной плоскости к поверхности (A). Для этой поверхности находим

$$\omega^2=0,$$
$$\overset{2}{\omega_1}=a\omega^1+b\omega^3,\quad \overset{2}{\omega_3}=b\omega^1+c\omega^3, \tag{14}$$
$$1+ac-b^2=0.$$

Последнее равенство означает, что поверхность (A) — нулевой гауссовой кривизны.

Пусть $M = A + \lambda A_2$ ($\lambda = \mathrm{const}$) — точка на нормали к поверхности (A). (Как известно, расстояние d от точки A до точки $A + \lambda A_2$ определяется равенством $\operatorname{tg} d = \lambda$). Тогда

$$dM = (\omega^1 - \lambda\omega_1^2) A_1 + (\omega^3 - \lambda\omega_3^2) A_3 = \tilde{\omega}^1 A_1 + \tilde{\omega}^3 A_3 \quad (\omega^2 = 0), \tag{15}$$

где

$$\tilde{\omega}^1 = \omega^1 - \lambda\omega_1^2, \quad \tilde{\omega}^3 = \omega^3 - \lambda\omega_3^2. \tag{16}$$

Точка M описывает поверхность, обозначим ее через (M). Касательная плоскость к этой поверхности является плоскостью

$$\pi = (AA_1A_3) + \lambda (A_2A_1A_3).$$

Полюс этой плоскости является точкой $N = -\lambda A + A_2$. Следовательно, прямая MN служит нормалью к поверхности (M) в точке M.

Далее, найдем

$$-dN = (\lambda\omega^1 + \omega_1^2) A_1 + (\lambda\omega^3 + \omega_3^2) A_3 = \Omega_1 A_1 + \Omega_3 A_3, \tag{17}$$

где

$$\Omega_1 = \lambda\omega^1 + \omega_1^2; \quad \Omega_3 = \lambda\omega^3 + \omega_3^2. \tag{18}$$

Учитывая значения ω_1^2, ω_3^2, преобразуем равенства (16):

$$\tilde{\omega}^1 = (1 - a\lambda)\,\omega^1 - b\lambda\omega^3, \quad \tilde{\omega}^3 = -b\lambda\omega^1 + (1 - c\lambda)\,\omega^3.$$

Решая эти уравнения относительно ω^1, ω^3, получим

$$\omega^1 = \frac{(1 - c\lambda)\,\tilde{\omega}^1 + b\lambda\tilde{\omega}^3}{(1 - a\lambda)(1 - c\lambda) - b^2\lambda^2}, \quad \omega^3 = \frac{b\lambda\tilde{\omega}^1 + (1 - a\lambda)\,\tilde{\omega}^3}{(1 - a\lambda)(1 - c\lambda) - b^2\lambda^2}. \tag{19}$$

Из уравнений (16) имеем

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\lambda}(\omega^1 - \tilde{\omega}^1), \quad \omega_3^2 = \frac{1}{\lambda}(\omega^3 - \tilde{\omega}^3).$$

Внося значения ω^1, ω^3, ω_1^2, ω_3^2 в (18), найдем

$$\Omega_1 = \omega_1^2 + \lambda\omega^1 = \frac{(1 + \lambda^2)\,\omega^1 - \tilde{\omega}^1}{\lambda} =$$

$$= \frac{\{(1 - c\lambda)(a + \lambda) + b^2\lambda\}\,\tilde{\omega}^1 + b\,(1 + \lambda^2)\,\tilde{\omega}^3}{(1 - a\lambda)(1 - c\lambda) - b^2\lambda^2},$$

$$\Omega_3 = \omega_3^2 + \lambda\omega^3 = \frac{(1 + \lambda^2)\,\omega^3 - \tilde{\omega}^3}{\lambda} =$$

$$= \frac{\{(1 - a\lambda)(c + \lambda) + b^2\lambda\}\,\tilde{\omega}^3 + b\,(1 + \lambda^2)\,\tilde{\omega}^1}{(1 - a\lambda)(1 - c\lambda) - b^2\lambda^2}.$$

Первая и вторая квадратичные формы поверхности (M) задаются формулами

$$(dM)^2 = (\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^3)^2,$$

$$-(dMdN) = \Omega_1\tilde{\omega}^1 + \Omega_3\tilde{\omega}^3 = \frac{(1-c\lambda)(a+\lambda)+b^2\lambda}{\Lambda}(\tilde{\omega}^1)^2 + $$
$$+\frac{2b(1+\lambda^2)}{\Lambda}\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^3 + \frac{(1-a\lambda)(c+\lambda)+b^2\lambda}{\Lambda}(\tilde{\omega}^3)^2,$$

где

$$\Lambda = (1-a\lambda)(1-c\lambda) - b^2\lambda^2.$$

Нормальная кривизна поверхности (M) определяется формулой

$$\frac{1}{R_n} = -\frac{dMdN}{dM^2} = \frac{\{(1-c\lambda)(a+\lambda)+b^2\lambda\}(\tilde{\omega}^1)^2 + 2b(1+\lambda^2)\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^3}{\Lambda\{(\tilde{\omega}^1)^2+(\tilde{\omega}^3)^2\}} +$$
$$+\frac{(1-a\lambda)(c+\lambda)+b^2\lambda}{\Lambda\{(\tilde{\omega}^1)^2+(\tilde{\omega}^3)^2\}}(\tilde{\omega}^3)^2,$$

или

$$\left(\frac{1}{R_n}-\alpha\right)(\tilde{\omega}^1)^2 - 2\beta\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^3 + \left(\frac{1}{R_n}-\gamma\right)(\tilde{\omega}^3)^2 = 0, \qquad (20)$$

где

$$\alpha = \frac{2\lambda+a-c\lambda^2}{\Lambda}; \quad \beta = \frac{b(1+\lambda^2)}{\Lambda}; \quad \gamma = \frac{2\lambda+c-a\lambda^2}{\Lambda}.$$

Дифференцируя уравнение (20) по $\tilde{\omega}^1$ и $\tilde{\omega}^3$, получаем

$$\left(\frac{1}{R_n}-\alpha\right)\tilde{\omega}^1 - \beta\tilde{\omega}^3 = 0,$$
$$-\beta\tilde{\omega}^1 + \left(\frac{1}{R_n}-\gamma\right)\tilde{\omega}^3 = 0.$$

Исключая отсюда $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^3$, находим уравнение, определяющее главные кривизны поверхности (M):

$$\frac{1}{R_n^2} - (\alpha+\gamma)\frac{1}{R_n} + \alpha\gamma - \beta^2 = 0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{R_n'R_n''} = \alpha\gamma - \beta^2, \quad \frac{1}{R_n'} + \frac{1}{R_n''} = \alpha + \gamma.$$

Гауссова и средняя кривизны поверхности (M) задаются формулами

$$K_a = 1 + \frac{1}{R_n'R_n''} = 1 + \alpha\gamma - \beta^2; \quad 2H = \frac{1}{R_n'} + \frac{1}{R_n''} = \alpha + \gamma.$$

Внося сюда значения α, β, γ, получаем

$$K_a = 0, \quad 2H = \frac{4\lambda + (1-\lambda^2)(a+c)}{1-(a+c)\lambda-\lambda^2}.$$

Следовательно, каждая точка, которая лежит на нормали к заданной поверхности нулевой гауссовой кривизны и отстоит от нее на заданном постоянном расстоянии, описывает поверхность с нулевой гауссовой кривизной. Теорема доказана.

Заметим, что для $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ имеем

$$H_{A_0} = H_0 = \frac{a+c}{2}, \quad H_{C_1} = -\frac{2}{a+c}, \quad H_{C_2} = \frac{2}{a+c}.$$

Отсюда следует

$$H_0 H_{C_1} = -1, \quad H_0 H_{C_2} = 1$$
$$(C_1 = A + A_2, \quad C_2 = A - A_2).$$

Таким образом, *произведение средней кривизны H_0 поверхности (A) на среднюю кривизну H_{C_1} (или H_{C_2}) поверхности, описываемой серединой одной из полупрямых, на которые взаимно-перпендикулярные точки A и A_2 делят всю эллиптическую прямую, равно единице со знаком плюс или минус.*

Теорема 7. *Поверхность постоянной гауссовой кривизны эллиптического пространства существует с произволом в две функции одного аргумента.*

Доказательство. Пусть точка A описывает поверхность постоянной гауссовой кривизны, обозначим ее через (A). Присоединяем к каждой точке A поверхности (A) тетраэдр $T(A\,A_1\,A_2\,A_3)$, автополярный относительно абсолюта эллиптического пространства, три вершины которого A, A_1, A_3 лежат в касательной плоскости к этой поверхности. Для поверхности (A) имеем систему (14)

$$\omega^2 = 0,\ \omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^3,\ \omega_3^2 = b\omega^1 + c\omega^3,\ 1 + ac - b^2 = \text{const}. \quad (\divideontimes)$$

Последнее равенство означает, что поверхность (A) — постоянной гауссовой кривизны.

Дифференцируя систему уравнений (14) внешним образом, получаем с помощью леммы Картана следующую систему:

$$\begin{aligned} da &= x_1\omega^1 + x_2\omega^3 - 2b\omega_3^1, \\ db &= x_2\omega^1 + x_3\omega^3 - (c-a)\,\omega_3^1, \\ dc &= x_3\omega^1 + x_4\omega^3 + 2b\omega_3^1. \end{aligned} \tag{21}$$

Дифференцируя теперь равенство $(\divideontimes)$, находим

$$cda + adc - 2bdb = 0.$$

Внося в это уравнение значения da, db, dc, получаем

$$(cx_1 - 2bx_2 + ax_3)\,\omega^1 + (cx_2 - 2bx_3 + ax_4)\,\omega^3 = 0.$$

Поскольку на поверхности (A) формы ω^1, ω^3 независимы, то

$$cx_1 - 2bx_2 + ax_3 = 0,\ cx_2 - 2bx_3 + ax_4 = 0. \tag{22}$$

Следовательно, в соответствии с общепринятыми обозначениями [5] $q = 2$, $s_1 = 2$, $s_2 = q - s_1 = 0$, число Картана $Q = s_1 + 2s_2 = 2$. Число произвольных параметров $N = 2 = Q$.

Система (14) в инволюции и ее решение существует с произволом в две функции одного аргумента.

Итак, поверхности постоянной гауссовой кривизны в эллиптическом пространстве существуют с произволом в две функции одного аргумента. Это совпадает с известным фактом в евклидовом пространстве, где поверхности постоянной гауссовой кривизны существуют также с произволом в две функции одного аргумента.

Теорема 8. *При том положении сопровождающего репера, когда вершины A, A_3 помещены на фокальные поверхности конгруэнции C и фокальные плоскости совмещены с координатными плоскостями AA_3A_1, AA_3A_2 соответственно, прямые AA_1, A_1A_2, A_2A_3 описывают конгруэнции W, а прямые AA_2, A_1A_3 описывают нормальные конгруэнции.*

Доказательство. В данном случае, имеем систему

$$\omega^2 = 0, \ \omega_3^1 = 0,$$
$$\omega_1^2 = l\omega^1 - m\omega_3^2,$$
$$\omega^3 = m\omega^1 - l\omega_3^2.$$

Возьмем, например, конгруэнцию $\{AA_1\}$, тогда

$$\begin{gathered} dA = \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3, \\ d^2A = -\{(\omega^1)^2 + (\omega^3)^2\} A + (\omega^1\omega_1^2 + \omega^3\omega_3^2) A_2 + d\omega^1 A_1 + \\ + d\omega^3 A_3 \ (\omega^2 = 0, \ \omega_3^1 = 0), \\ dA_1 = -\omega^1 A + \omega_1^2 A_2, \\ d^2A_1 = -\{(\omega^1)^2 + (\omega_1^2)^2\} A_1 - (\omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2) A_3 - d\omega^1 A + \\ + d\omega_1^2 A_2. \end{gathered} \tag{23}$$

Асимптотические линии на поверхностях (A) и (A_1) определяются соответственно уравнениями

$$(AA_1\, dA\, d^2A) = 0, \ (AA_1\, dA_1\, d^2A_1) = 0. \tag{24}$$

(Здесь символом ( ) обозначен определитель, составленный из координат точек, стоящих в скобках).

Внесем в (24) значения dA, d^2A, dA_1, d^2A_1 и получим уравнения асимтотических линий

$$\omega^1\omega_1^2 + \omega^3\omega_3^2 = 0, \ \omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2 = 0. \tag{25}$$

Подставив в (25) значения ω_1^2, ω^3 по формулам (7), получим лишь одно уравнение

$$l\{(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2\} = 0 \quad (l \neq 0).$$

Таким образом, уравнения асимптотических линий на обеих фокальных поверхностях (A) и (A_1) совпадают с уравнением

$$(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2 = 0 \quad (l \neq 0). \tag{26}$$

Аналогично предыдущему можно было бы показать, что уравнение асимптотических линий на поверхности (A_2) имеет вид (26).

Следовательно, прямые AA_1, A_1A_2, A_2A_3 описывают конгруэнцию W.

Для конгруэнции $\{AA_2\}$ точка A описывает поверхность нулевой гауссовой кривизны и луч AA_2 служит нормалью к этой поверхности. Следовательно, лучи конгруэнции $\{AA_2\}$ пересекают ортогонально поверхности нулевой гауссовой кривизны. Таким образом, конгруэнция $\{AA_2\}$ является нормальной конгруэнцией.

Аналогично конгруэнция $\{A_1A_3\}$ является нормальной конгруэнцией. Теорема доказана.

Теорема 9. *Для конгруэнций W $\{AA_1\}$ и $\{AA_3\}$ с общей фокальной поверхностью $\sigma = (A)$ и двумя вторыми фокальными поверхностями $\sigma_1 = (A_1)$ и $\sigma_3 = (A_3)$ можно построить однопараметрическое семейство конгруэнций W с этой же первой фокальной поверхностью так, чтобы лучи этих конгруэнций, выходящие из точки A, имели вторые фокусы на прямой A_1A_3.*

Доказательство. Пусть $Q = A_1 + \nu A_3$ ($\nu = \mathrm{const}$) — произвольная точка, лежащая на прямой A_1A_3, и $F = A + tQ$ — точка на прямой AQ. Тогда

$$dF = (\omega^2 + t\omega_1^2 + t\nu\omega_3^2)\,A_2 + (\omega^3 + t\omega_1^3 - t\nu^2\omega_3^1 - \nu\omega^1)\,A_3 - \\ - t\,(\omega^1 + \nu\omega^3)\,A + (\omega^1 + t\nu\omega_3^1 + dt)\,Q;$$

F является фокусом конгруэнции $\{AQ\}$, если выполняются равенства

$$\omega^2 + t\,(\omega_1^2 + \nu\omega_3^2) = 0,$$

$$\frac{1}{t}(\omega^3 - \nu\omega^1) - (1 + \nu^2)\,\omega_3^1 = 0. \qquad (27)$$

Система уравнений, определяющая указанные конгруэнции, следующая:

$$\omega^2 = 0,\ \omega_3^1 = 0.$$

При этом уравнения (27) принимают вид

$$t\,(\omega_1^2 + \nu\omega_3^2) = 0,\ \ \frac{1}{t}(\omega^3 - \nu\omega^1) = 0.$$

Если $\omega_1^2 + \nu\omega_3^2 = 0$, $\omega^3 - \nu\omega^1 = 0$, то прямая AQ неподвижна. Следовательно, имеем только

$$t = 0,\ t = \infty.$$

Отсюда следует, что фокусы конгруэнции $\{AQ\}$ являются точками A и $Q = A_1 + \nu A_3$. Поэтому лучи конгруэнции, выходящие из точки A, имеют вторые фокусы на прямой A_1A_3.

Докажем теперь, что конгруэнция $\{AQ\}$ является конгруэнцией W. Действительно,

$$dQ = -(\omega^1 + \nu\omega^3)\,A + (\omega_1^2 + \nu\omega_3^2)\,A_2,\ (\omega^2 = \omega_3^1 = 0),$$

$$d^2Q = -\{(\omega^1)^2 + (\omega_1^2)^2 + \nu\,(\omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2)\}\,A_1 + \lambda_1 A + \\ + \nu_1 A_2 - \{\nu\,(\omega^3)^2 + (\omega_3^2)^2) + \omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2\}\,A_3.$$

Асимптотические линии на поверхности (Q) определяются уравнением

$$(QAA_2\, d^2Q) = 0.$$

Внося сюда значение d^2Q, находим

$$(1-\nu^2)\{\omega^1\omega^3 + \overset{2}{\omega}_1\overset{2}{\omega}_3\} + \nu\{(\overset{2}{\omega}_3)^2 - (\omega^1)^2 + (\omega^3)^2 - $$
$$- (\overset{2}{\omega}_1)^2\} = 0.$$

Подставляя значения $\overset{2}{\omega}_1$, ω^3 из системы (7), получим

$$\{m(1-\nu^2) + \nu(m^2 - l^2 - 1)\}\{(\omega^1)^2 - (\overset{2}{\omega}_3)^2\} = 0. \qquad (28)$$

Исключаем случай, когда асимптотические линии на поверхности (Q) неопределены. Уравнение асимптотических линий на поверхности (Q) имеет вид

$$(\omega^1)^2 - (\overset{2}{\omega}_3)^2 = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением асимптотических линий на поверхности (A). Следовательно, конгруэнция $\{AQ\}$ является конгруэнцией W. Для разных значений ν получим пучок конгруэнций W (однопараметрическое семейство конгруэнции W Террачини назвал пучком конгруэнции W [7]. Теорема доказана.

Аналогично можно построить пучок конгруэнций W для пар конгруэнций $\{A_3A\} - \{A_3A_2\}$, $\{A_2A_3\} - \{A_2A_1\}$, $\{A_1A\} - \{A_1A_2\}$.

Теорема 10. *При том положении сопровождающего репера, когда вершины A, A_3 помещены на фокальные поверхности конгруэнции и фокальные плоскости совмещены с координатными плоскостями AA_3A_1, AA_3A_2 соответственно, конгруэнция $\{PQ\}$, где $P = A + \lambda A_2$, $Q = A_1 + \nu A_3$* (λ, ν — const), *является конгруэнцией W с фокальными поверхностями* (P) и (Q).

Доказательство. Действительно, в данном случае имеем систему (7)

$$\omega^2 = 0, \quad \overset{1}{\omega}_3 = 0.$$
$$\overset{2}{\omega}_1 = l\omega^1 - m\overset{2}{\omega}_3,$$
$$\omega^3 = m\omega^1 - l\overset{2}{\omega}_3.$$

и дифференциалы

$$dP = (\omega^1 - \lambda\overset{2}{\omega}_1)\; A_1 + (\omega^3 - \lambda\overset{2}{\omega}_3)\; A_3 + (1+\lambda^2)\,\omega^2 A_2 - \lambda\omega^2 P,$$
$$dQ = -(\omega^1 + \nu\omega^3)\,A + (\overset{2}{\omega}_1 + \nu\overset{2}{\omega}_3)\,A_2 + (1+\nu^2)\,\overset{3}{\omega}_1 A_3 + \nu\overset{1}{\omega}_3 Q.$$

Пусть теперь $F = P + tQ$ — произвольная точка на прямой PQ. Тогда

$$dF = dP + tdQ + dtQ = (\omega^1 - \lambda\overset{2}{\omega}_1)(Q - \nu A_3) + (\omega^3 -$$
$$- \lambda\overset{2}{\omega}_3)\,A_3 + \nu\overset{1}{\omega}_3 Q + t\,(\omega^1 + \nu\omega^3)(P - \nu A_2) + t\,(\overset{2}{\omega}_1 +$$
$$+ \nu\overset{2}{\omega}_3)\,A_2 + dtQ + (1+\lambda^2)\,\omega^2 A_2 - \lambda\omega^2 P + t\,(1+\nu^2)\,\overset{3}{\omega}_1 A_3 =$$

$$= \{\omega^3 - \lambda\omega_3^2 - \nu(\omega^1 - \nu\omega_1^2) + t\,(1+\nu^2)\,\omega_1^3\}\,A_3 + \{t\lambda\,(\omega^1 + \nu\omega^3) + t\,(\omega_1^2 + \nu\omega_3^2) + (1+\lambda^2)\,\omega^2\}\,A_2 - \{t\,(\omega^1 + \nu\omega^3) + \lambda\omega^2\}\,P + \{\omega^1 - \lambda\omega_1^2 + \nu\omega_3^1 + dt\}\,Q;$$

F — является фокусом конгруэнции $\{PQ\}$, если выполняются равенства

$$(1+\lambda^2)\,\omega^2 + t\,\{\lambda\,(\omega^1 + \nu\omega^3) + (\omega_1^2 + \nu\omega_3^2)\} = 0, \tag{29}$$
$$(1+\nu^2)\,\omega_1^3 + \frac{1}{t}\,\{\omega^3 - \lambda\omega_3^2 - \nu\,(\omega^1 - \lambda\omega_1^2)\} = 0.$$

Учитывая равенства

$$\omega^2 = 0,\ \ \omega_3^1 = 0$$

в уравнениях (29), получим

$$t\,\{\lambda\,(\omega^1 + \nu\omega^3) + (\omega_1^2 + \nu\omega_3^2)\} = 0,$$
$$\frac{1}{t}\,\{\omega^3 - \lambda\omega_3^2 - \nu\,(\omega^1 - \lambda\omega_1^2)\} = 0.$$

Если

$$\lambda\,(\omega^1 + \nu\omega^3) + (\omega_1^2 + \gamma\omega_3^2) = 0,$$
$$\omega^3 - \lambda\omega_3^2 - \nu\,(\omega^1 - \lambda\omega_1^2) = 0,$$

то прямая PQ при $\omega^2 = 0$, $\omega_3^1 = 0$ неподвижна. Следовательно, имеем только

$$t = 0,\ \ t = \infty.$$

Отсюда следует, что фокусы конгруэнции $\{PQ\}$ являются точками P и Q.

Легко проверить, что уравнения асимптотических линий на поверхностях (P) и (Q) соответственно имеют вид

$$\{l\,(1-\lambda^2) - \lambda\,(m^2 - l^2 + 1)\}\,\{(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2\} = 0,$$
$$\{m\,(1-\gamma^2) + \nu\,(m^2 - l^2 - 1)\}\,\{(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2\} = 0.$$

Исключаем случай, когда асимптотические линии на обеих поверхностях не определены. Тогда оба эти уравнения совпадают с уравнением

$$(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2 = 0.$$

Поэтому уравнения асимптотических линий на обеих фокальных поверхностях совпадают.

Таким образом, конгруэнция $\{PQ\}$ является конгруэнцией W с фокальными поверхностями (P) и (Q). Теорема доказана.

Как известно, системой Бианки [5, 8] называется совокупность двух однопараметрических семейств поверхностей (σ) и (σ') и одного двупараметрического семейства (C) конгруэнций W, если между точками всех поверхностей (σ) и (σ') установлено однозначное соответствие, сохраняющее асимптотические линии так, что прямая, соединяющая соответствующие точки любой пары поверхностей σ, σ' касается их, описывая одну из конгруэнций C. Следовательно, α^2 конгруэнций (C) имеет поверхности (σ) и (σ') своими фокальными поверхностями.

Так как любая поверхность σ связана конгруэнциями (C) со всеми поверхностями (σ'), то точки M' этих поверхностей, соответствующие точке M поверхности σ, лежат в ее касательной плоскости, проведенной в точке M; по тем же соображениям лежат в касательной плоскости любой поверхности семейства (σ'), если ее провести в точке, соответствующей точке M. Так как две плоскости пересекаются по прямой, то все соответствующие друг другу точки M' лежат на одной прямой d'; точно так же все соответствующие им точки M поверхностей (σ) лежат на другой прямой d. Перемещая точку M по поверхности σ, заставим прямые d, d' описать две конгруэнции, которые образуют расслояемую пару.

Теорема 11. *При том положении сопровождающего репера, когда вершины A, A_3 помещены на фокальные поверхности $\sigma = (A)$ и $\sigma_3 = (A_3)$ конгруэнции и фокальные плоскости совмещены с координатными плоскостями AA_3A_1 и AA_3A_2, можно построить систему Бианки для двух однопараметрических семейств поверхностей (σ_λ) и (σ_ν), где $\sigma_\lambda = (A + \lambda A_2)$, $\sigma_\nu = (A_1 + \nu A_3)$ $(\lambda, \nu = \mathrm{const})$.*

Доказательство. Действительно, при указанном положении репера имеем систему уравнений

$$\omega^2 = 0,\ \omega_3^1 = 0,\ \omega_1^2 = l\omega^1 - m\omega_3^2,\ \omega^3 = m\omega^1 - l\omega_3^2.$$

Пусть

$$(C) = (\{A + \lambda A_2,\ A_1 + \nu A_3\}).$$

Семейство конгруэнций (C) представляет собой одно двупараметрическое семейство конгруэнции W (см. теорему 10). Между точками всех поверхностей (σ_λ) и (σ_ν) установлено однозначное соответствие, сохраняющее асимптотические линии; прямая, соединяющая соответствующие точки любой пары поверхностей σ_λ и σ_ν, касается их, описывая одну из конгруэнций (C).

Совокупность конгруэнций (C) имеет поверхности (σ_λ) (σ_ν) своими фокальными поверхностями. Касательные плоскости поверхностей (σ_λ) проходят через точки A_1 и A_3, следовательно, пересекаются по прямой $d' = A_1A_3$. Касательные плоскости поверхностей (σ_ν) проходят через точки A и A_2. Следовательно, пересекаются по прямой $d = AA_2$. Прямые d, d' описывают две конгруэнции, которые образуют расслояемую пару.

Поскольку асимптотические линии на всех поверхностях (σ_λ) и (σ_λ) находятся в отношении асимптотического преобразования, т. е. служат фокальными поверхностями одной конгруэнции W, то имеем систему Бианки. Теорема доказана.

Конгруэнцию будем называть изотропной, если линейчатые поверхности конгруэнции имеют общие горловые точки на каждом луче [2—4].

Найдем теперь условие того, чтобы точка луча

$$M = A + tA_3$$

была горловой точкой линейчатой поверхности

$$\omega^1 : \omega_3^2, \ \omega^2 = 0, \ \omega_3^1 = 0. \tag{30}$$

В эллиптической геометрии две не пересекающиеся прямые имеют в общем случае два общих перпендикуляра, полярно сопряженных относительно абсолюта. Следовательно, каждый луч косой линейчатой поверхности содержит, вообще говоря, две горловые точки. Чтобы их найти, примем во внимание, что всякий перпендикуляр к прямой в эллиптическом пространстве всегда пересекает кроме данной прямой также и прямую, полярно сопряженную с ней относительно абсолюта. Следовательно, если мы возьмем два бесконечно близких луча AA_3 и $A'A_3'$ $(A_\alpha' = A_\alpha + dA_\alpha)$ поверхности (30), то их общие перпендикуляры пересекут также прямые A_1A_2, $A_1'A_2'$ $(A_1' = A_1 + dA_1, \ A_2' = A_2 + dA_2)$. Очевидно, поверхность (30), описанная лучом A_1A_2, будет пересекаться этими перпендикулярами в ее горловых точках.

Пусть $P = A_1 + \rho A_2$ одна из таких точек, лежащих на луче A_1A_2. В таком случае прямые MP, $A'A_3'$, $A_1'A_2'$ будут определяться соответственно следующими плюккеровыми координатами:

$$MP\,(1, \ \rho, \ 0, \ 0, \ -t, \ -\rho t),$$
$$A'A_3'(\omega_3^1, \ \omega_3^2, \ 1, \ 0, \ \omega^1, \ \omega^2),$$
$$A_1'A_2'(\omega^2, \ -\omega^1, \ 0, \ 1, \ -\omega_3^2, \ \omega_3^1).$$

(В скобках координаты выписаны в следующем порядке P^{01}, P^{02}, P^{03}, P^{12}, P^{13}, P^{23}, кроме того, в координатах прямых $A_1'A_2'$, $A'A_3'$ отбросили члены, содержащие произведения форм). Потребуем теперь, чтобы имело место попарное пересечение прямых MP и $A'A_3'$, MP и $A_1'A_2'$. Это приводит к равенствам

$$\omega^2 + t\omega_3^2 - (\omega^1 + t\omega_3^1)\,\rho = 0,$$
$$\omega_3^1 - t\omega^1 + (\omega_3^2 - t\omega^2)\,\rho = 0.$$

Исключив из этих двух равенств ρ, найдем квадратное уравнение, определяющее горловые точки на луче AA_3:

$$(\omega^2 + t\omega_3^2)(\omega_3^2 - t\omega^2) + (\omega^1 + t\omega_3^1)(\omega_3^1 - t\omega^1) = 0$$

или

$$(\omega^2\omega_3^2 + \omega^1\omega_3^1)(t^2 - 1) + \{(\omega^2)^2 + (\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2 - (\omega_3^1)^2\}\,t = 0.$$

Внося сюда значения

$$\omega^2 = 0, \ \omega_3^1 = 0,$$

получаем уравнение, определяющее горловые точки поверхности (30):

$$\{(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2\}\,t = 0.$$

Возможны такие случаи:

1. $(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2 = 0$ — этот случай характеризует цилиндры (у цилиндра горловые точки не определены).

2. $t = 0$ — в этом случае линейчатые поверхности (7) имеют общие горловые точки на каждом луче.

Таким образом, имеет место

Теорема 12. *Конгруэнция* (4) *является изотропной конгруэнцией.*

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский. Конгруэнции прямых эллиптического пространства. М., 1941.
2. Б. А. Розенфельд. Теория конгруэнций и комплексов прямых в эллиптическом пространстве. «Изд. АН СССР, сер. матем.», 5, 1941.
3. В. И. Машанов. К теории конгруэнции прямых трехмерного пространства Римана. Труды Томского ун-та, т. 161, 1962.
4. Л. Я. Березина. К метрической теории конгруэнций в пространствах постоянной кривизны. Рига, 1962.
5. R. Rosca Geometria diferentiala A Congruentelor in spatiul Eliptic. Bucuresti, 1969.
6. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.— Л., ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.
7. М. А. Солейман. Об одном классе комплексов в эллиптическом пространстве. «Укр. геометр. сб.», вып. 10, Харьков, Изд-во ХГУ, 1972.
8. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнций. М., 1954.

Поступила 20 января 1972 г.

О КОНФОРМНОЙ И ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ПОЛНОТЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФИЗИЧЕСКОГО ТИПА

М. А. Улановский

Харьков

Псевдориманово пространство физического типа — это дифференцируемое многообразие X_n с определенной на нем квадратичной дифференциальной формой ds^2 сигнатуры $(1, n-1)$ $(+ - \cdots -)$. Изучению в целом таких пространств посвящено значительное количество работ, появившихся в печати в последние годы. Интерес к таким пространствам, по-видимому, основан на возможности приложений в физике (описание пространства — времени), а также на том обстоятельстве, что эти пространства составляют наиболее естественный класс упорядоченных топологических пространств, наделенных дифференциальной структурой.

Отношение порядка в псевдоримановом пространстве V_n физического типа определяется следующим образом [1, 2]. Должен быть отмечен один из двух полуконусов конуса $ds^2 \geqslant 0$ (ниже он называется «конусом будущего») так, чтобы полученное поле полуконусов было непрерывным на V_n (что, разумеется, не всегда возможно). Отношение $a \prec b$ означает, что a и b могут быть соединены кусочно гладкой дугой, в каждой точке которой полукасательная, соответствующая направлению от a к b, принадлежит конусу будущего.

Не требуется особой изобретательности для составления примеров V_n с патологическими (с физической точки зрения) свойствами. Так, примеры пространств с «машиной времени» (замкнутой временноподобной или изотропной дугой) можно указать среди однородных V_3 и V_4; в частности, машиной времени обладает V_3 (диффеоморфное евклидову E_3) с просто транзитивной группой движений, алгебра Ли которой определена соотношениями:

$$(X_1, X_2) = X_3, \ (X_2, X_3) = (X_1, X_3) = 0$$

(если открытый конус будущего содержит вектор X_3).

В то же время «модные» модели пространства времени, как правило, лишены подобных недостатков. Это обстоятельство в немалой степени основано на рассмотрении пространств, допускающих в целом «синхронную систему отсчета»; так называют систему координат $x^1, \ldots, x^{n-1}, t$ на V_n, представляющем собой $V_{n-1} \times R$, где t — координата вещественной прямой R; $x^1, \ldots, x^{n-1}$ — координаты на V_{n-1}, если фундаментальная форма ds^2 в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}(t, x^1, \ldots, x^{n-1})\, dx^i\, dx^j \quad (i, j = 1, \ldots, n-1). \qquad (1)$$

Определение легко может быть обобщено на тот случай, когда V_{n-1} не может быть покрыто одной координатной окрестностью. Не трудно показать, что в области определения синхронных координат указанные выше отношения порядка обладают весьма простыми свойствами (в частности, нет машины времени). В этом смысле единственный вопрос, возникающий при изучении в целом «готовых» синхронных метрик, заключается в следующем: нельзя ли данное V_n с определенной на нем синхронной системой отсчета представить как собственное подмногообразие другого пространства V_n той же размерности, на котором, возможно, уже не удастся ввести синхронные координаты. Легко видеть, что такая возможность не исключена и в том случае, когда метрика (1) определена для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Естественным критерием при решении подобных вопросов может служить геодезическая полнота V_n; однако практическая проверка его обычно весьма затруднительна. В этой заметке рассматривается некоторый ослабленный критерий полноты, выполнение которого гарантирует возможность локально изометрического отображения данного V_n на собственное открытое подмногообразие произвольного V'_n. Технически к этому вопросу примыкает критерий конформной полноты, который может быть использован в связи с идеей «конформной бесконечности» Пенроуза [3]. Приводятся также некоторые условия, при выполнении которых V_n не может быть конформно полным.

Пусть $\varphi: V_n \to V'_n$ — регулярное отображение V_n в V'_n такое, что образами конусов будущего пространства V_n (в соответствующем отображении касательных пространств) служат конусы будущего пространства V'_n; не предполагается, что φ — мономорфизм. Очевидно, φ — конформное отображение V_n в V'_n, частным случаем которого можно считать изометрическое отображение. Отметим также, что на отношение $\prec$ в пространствах V_n и V'_n не налагаются какие-либо ограничения; в частности, может случиться, что для некоторых $a \neq b$ из V_n или V'_n одновременно $a \prec b$ и $b \prec a$.

Установим следующие простые леммы.

Лемма 1. *Если каждая изотропная геодезическая $\gamma' \subset V'_n$, которая содержит образ $\varphi(\gamma)$ изотропной геодезической $\gamma \subset V_n$, не содержит точки $a' \in \gamma' \setminus \varphi(\gamma)$, следующей (в смысле отношения $\prec$) после какой-либо точки из $\varphi(\gamma)$, то V'_n не содержит точки, не принадлежащей $\varphi(V_n)$ и следующей после какой-либо точки из $\varphi(V_n)$.*

Заметим, что образ изотропной геодезической $\gamma \subset V_n$ есть также изотропная геодезическая $\varphi(\gamma) \subset V'_n$; поэтому $\varphi(\gamma)$ всегда составляет собственную или несобственную часть непродолжаемой геодезической $\gamma' \subset V'_n$. Условия леммы означают, что, начиная от некоторой точки $a' \in \varphi(\gamma)$, весь геодезический луч, направленный в будущее вдоль γ' от точки a', принадлежит $\varphi(\gamma)$. В частности, если γ' замкнута, то $\varphi(\gamma)$ «пробегает» γ' бесконечное число раз.

Пусть $a' \in \varphi(V_n)$, $b' \in V'_n \setminus \varphi(V_n)$ и $a' \prec b'$. Для доказательства леммы достаточно заметить, что a' и b' всегда возможно соединить ломаной, направленной в будущее от a' к b' и содержащей конечное число звеньев, из которых каждое есть отрезок изотропной геодезической. Если $a \in V_n$ — один из прообразов точки a', то, рассматривая прообразы звеньев указанной ломаной, найдем прообраз точки b', что противоречит предположению.

Разумеется, имеет место также «двойственная» лемма, полученная из доказанной путем замены «будущее — прошлое».

Лемма 2. *Пусть U — подмножество V_n; если $(V_n \setminus U)$ не содержит ни точек, следующих после какой-либо точки из U, ни точек, предшествующих какой-либо точке из U, то $U = V_n$.*

Пусть a — граничная точка U; на времениподобной геодезической, проходящей через a, возьмем точку b; пусть, например, $b \prec a$. Легко видеть, что «будущее» b содержит некоторую окрестность ω точки a, очевидно, $b \in U$, откуда и $\omega \subset U$, что противоречит предположению.

Из изложенных лемм следует непосредственно

Лемма 3. *Если отображение $\varphi: V_n \to V'_n$ таково, что образ каждой непродолжаемой изотропной геодезической $\gamma \subset V_n$ есть также непродолжаемая изотропная геодезическая пространства V'_n, то $\varphi(V_n) = V'_n$.*

Определение. V_n называется *ограниченно полным в будущем* (в метрическом смысле), если каждая изотропная геодезическая, начиная от своей произвольной точки, может быть продолжена в будущее до сколь угодно больших значений аффинной дуги.

Аналогично определяется «ограниченная полнота в прошлом». Очевидно, V_n, ограниченно полное в прошлом и будущем, не допускает локально изометрического отображения на собственное подмножество какого-либо V'_n. Тем самым V_n, не удовлетворяющее требованию ограниченной полноты в прошлом или будущем, не является геодезически полным. Хорошо известно, что при этом V_n не обязательно является «частью» полного V'_n. Именно в подобных случаях, по-видимому, следует говорить о метрике с истинными особенностями [4 — 6].

Преимущество определения «ограниченной полноты» заключается в простоте проверки этого критерия. Приведем один пример. Рассмотрим метрику

$$ds^2 = dt^2 - f^2(t)\, d\sigma^2, \tag{2}$$

где $d\sigma^2$ — полная положительная метрика, определенная на некотором V_{n-1}. Предположим, что $f(t)$ определена для всех $t \in (-\infty, \infty)$. Легко убедиться, что метрика (2) будет ограниченно полной в будущем (прошлом) тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} |f|\, dt = \infty \left(\int\limits_{-\infty}^{t_0} |f|\, dt = \infty \right).$$

Почти очевидно, как обобщить приведенное выше определение ограниченной (метрической) полноты для конформных отображений V_n. Для этого нужно рассмотреть известное понятие конформной связности. Ниже кратко излагается одна из ее интерпретаций.

Пусть X_n — дифференцируемое многообразие. Касательное T_x каждой точки $x \in X_n$ представим как аффинное пространство с отмеченной точкой O, дополним до проективного $P_n(x)$ и вложим в качестве гиперплоскости в проективное $P_{n+1}(x)$. В каждом $P_{n+1}(x)$ отметим квадрику l_x, определенную в однородных координатах уравнением $L_x = 0$, где L_x — квадратичная форма сигнатуры $(n, 2)$. Потребуем также, чтобы гиперплоскость $P_n(x)$ касалась квадрики l_x в отмеченной точке O. Тем самым по определению X_n наделено «конформной структурой». Наделенные такой структурой X_n и X'_n изоморфны в диффеоморфизме $\varphi: X_n \to X'_n$, если φ может быть продолжено до изоморфизма соответствующих пучков «центропроективных» $P_{n+1}(x)$, в котором образами отмеченных квадрик l_x служат соответствующие квадрики l'_x.

Квадрика l_x в пересечении с $P_n(x)$ определяет в $P_n(x)$ (соответственно в T_x) конус $ds^2 = 0$ — конус своих прямолинейных образующих; ds^2 имеет сигнатуру $(n-1, 1)$. Тем самым конформная структура на X_n определяет в X_n конформную геометрию в классическом смысле этого слова. Наоборот, конформная геометрия $\rho(x) \cdot ds^2$, заданная на X_n, определяет конформную структуру X_n с точностью до изоморфизма.

Если X_n наделено конформной структурой, то комформная связность X_n — это закон отображения $P_{n+1}(x + dx)$ на $P_{n+}\ (x)$, переводящего l_{x+dx} в l_x. Следуя Э. Картану, выберем в каждом $P_{n+1}(x)$ репер из $n+2$ «аналитических» точек $A_0, A_1, \ldots, A_{n+1}$ (это означает, что $A(\rho x^0, \ldots, \rho x^{n+1})$ считается не совпадающей с $A(x_0, \ldots, x^{n+1})$.

Комформная связность может быть задана формулами

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \, (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n+1), \tag{3}$$

где линейные формы ω_α^β, однако, должны удовлетворять определенным условиям. Именно, матрица $\omega = \{\omega_\alpha^\beta\}$ должна быть линейной формой со значениями в той подалгебре Ли проективной группы, которая соответствует преобразованиям, сохраняющим квадрику l_x.

Репер $A_0, \ldots, A_{n+1}$ выберем таким образом, чтобы A_0 геометрически совпадала с «отмеченной» точкой O, а $A_1, \ldots, A_{n+1}$ лежали в $P_n(x)$. За счет выбора параметров и с учетом указанных выше требований можно добиться, чтобы формы ω_α^β удовлетворяли таким условиям:

1) $\omega_0^1, \ldots, \omega_0^n$ — линейно независимы;

2) $\omega_\alpha^\alpha = 0$ (по α не суммировать, $\alpha = 0, 1, \ldots, n+1$); $\omega_{n+1}^0 = \omega_0^{n+1} = 0$; $\omega_i^{n+1} = \omega_0^i \, (i = 1, \ldots, n-1)$; $\omega_n^{n+1} = -\omega_0^n$; $\omega_i^0 = \omega_{n+1}^i + \omega_0^i \, (i = 1, \ldots, n-1)$, $\omega_n^0 = -\omega_{n+1}^n - \omega_0^n$; $\omega_j^i = -\omega_i^j \, (i, j = 1, \ldots, n-1)$, $\omega_n^i = \omega_i^n \, (i = 1, \ldots, n-1)$. Заметим, что эти условия соответствуют выбору репера, при котором уравнение квадрики имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} x^{i^2} - x^{n^2} + x^{n+1^2} - 2x^{n+1}x^0 = 0. \tag{4}$$

При этом конформная геометрия X_n определяется полем конусов

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega^{i^2} - \omega^{n^2} = 0. \tag{5}$$

Пусть $\Omega = \{\Omega_\beta^\alpha\}$ — форма кривизны нашей связности ($\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n+1$);

$$\Omega_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha = P_{\beta,\gamma\delta}^\alpha \omega_0^\gamma \wedge \omega_0^\delta$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, n+1$). Из всего множества связностей, совместимых с заданной конформной структурой X_n, можно выделить одну следующими инвариантными требованиями:

$$\Omega_0^s = 0 \, (s = 0, 1, \ldots, n),$$

$P_{j,ki}^i = 0 (i, j, k = 1, \ldots, n$, по i суммировать). Если $\omega_i^0 = \Gamma_{ij}^0 \omega_0^j$, то, согласно этим условиям, Γ_{ij}^0 могут быть вычислены по формулам

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{2}{n-2} R_{ij} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \varepsilon_i \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k R_{kk} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \delta_{ij}, \tag{6}$$

где $R_{ij} = R^k_{i,\,jk}$ — тензор Риччи связности Леви-Чивита, соответствующей метрике

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{i^2} - \omega^{n^2}; \tag{7}$$

$\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{n-1} = 1,\ \varepsilon_n = -1;\ \delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$.

С помощью конформной связности, определенной на X_n, можно известным образом определить для каждой дуги $\gamma(t) \subset X_n$ развертку — некоторую дугу, расположенную на квадрике l_x. В частности, легко проверить, что изотропные геодезические метрики (7) могут быть определены как дуги, развертками которых служат прямолинейные образующие квадрик l_x. В этом и заключается одно из доказательств конформной инвариантности изотропных геодезических пространств V_n физического типа.

Определение. V_n называется *конформно полным в будущем*, если развертка (построенная соответственно описанной выше конформной связности) каждого непродолжаемого луча изотропной геодезической, направленного в будущее, есть непродолжаемый луч прямолинейной образующей квадрики l_x, т. е., если развертка геодезического луча, начиная от точки $O \in l_x$, «пробегает» прямолинейную образующую бесчисленное множество раз.

Пусть $\varphi : V_n \to V'_n$ — конформное отображение, описанное выше. Если γ — луч изотропной геодезической, исходящей из некоторой точки $a \in V_n$, и развертка γ в инвариантной конформной связности непродолжаема, то легко видеть, что и развертка луча $\varphi(\gamma) \subset V'_n$ также непродолжаема; очевидно, $\varphi(\gamma)$ есть непродолжаемый в будущее луч изотропной геодезической пространства V'_n. Из приведенных выше лемм следует, что конформно полные V_n (т. е. V_n конформно полные и в прошлом, и в будущем) не допускают конформных отображений в собственные подмногообразия других пространств V'_n.

Пусть $\gamma(t)$ (t — аффинная дуга, $0 \leqslant t < t_0$, $t_0 \leqslant \infty$) есть непродолжаемый луч изотропной геодезической пространства V_n, направленный в будущее. Не ограничивая общности, можно предположить, что на этом луче

$$\omega^1 = \omega^n = dt,$$
$$\omega^2 = \cdots = \omega^{n-1} = 0$$

и разверткой этого луча служит прямолинейная образующая p

$$x^1 = x^n,\ x^2 = \cdots = x^{n-1} = 0,\ x^{n+1} = 0$$

квадрики $l_{\gamma(0)}$. Пользуясь приведенными выше соотношениями между формами ω^α_β и дифференциальными уравнениями геодезических, легко получить, что вдоль луча $\gamma(t)$

$$dA_0 = (A_1 + A_n)\,dt,$$
$$d(A_1 + A_n) = A_0(\omega^0_1 + \omega^0_n),$$

или, учитывая (6),

$$dA_0 = (A_1 + A_n)\, dt,$$
$$d(A_1 + A_n) = \frac{2}{n-2} \rho\, dt \cdot A_0, \tag{8}$$

где ρ — значение формы Риччи метрики (7) в V_n на поле параллельно переносимых касательных векторов геодезической $\gamma(t)$. Элементарный анализ уравнений (8) показывает, что, если $\rho \geqslant 0$, развертка $\gamma(t)$ не может пробегать бесконечное множество раз образующую p. Таким образом, имеет место.

Теорема. *Если форма Риччи неотрицательна на изотропных конусах в каждой точке V_n, то V_n не может быть конформно полным.*

(Во избежание недоразумений напомним, что здесь используется определение $R_{ij} = R^k_{i,\,jk}$ тензора Риччи, тогда как $R^i_{j,\,kl} = \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{\alpha_l} \Gamma^\alpha_{jk} [k, l]$). Из уравнений (8) можно было бы получить и достаточное условие конформной полноты ($\rho \leqslant -c^2 < 0$), однако это условие не эффективно. Укажем только, что класс конформно полных V_n не пуст. Прежде всего он содержит квадрику l, определенную в P_{n+1} так же, как были определены квадрики l_x в $P_{n+1}(x)$. Конформная структура на квадрике l определяется очевидным образом: все $P_{n+1}(x)$ отождествляем с P_{n+1}, а все квадрики l_x — с квадрикой l; при этом развертка изотропной геодезической (прямолинейной образующей) совпадает с ней.

Если угодно получить пример односвязного V_n, достаточно построить универсальное накрывающее l, конформная структура которого автоматически определяется с помощью накрывающего отображения $\psi : V_n \to l$. В действительности, V_n — не что иное, как «универсальное конформно плоское пространство» [3].

Более общий случай: пространство $V_n = V_{n+1} \times R$ с приводимой метрикой

$$ds^2 = dt^2 - d\sigma^2,$$

причем метрика $d\sigma^2$, определенная на V_{n-1}, имеет отделенную от нуля отрицательную форму Риччи ($R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant -c^2 < 0$, $|\xi| = 1$); очевидно, V_{n-1} компактно. Действительно, в этом случае легко проверить, что уравнения (8) определяют «полную» развертку изотропной геодезической. Этот результат немедленно переносится и на V_n с метриками типа (2), конформными в целом (при очевидных условиях) V'_n с приводимой метрикой.

Замечание. Если V_n конформно полно, но не полно в метрическом смысле, то метрика V_n, с нашей точки зрения, имеет истинные особенности: в силу конформной полноты V_n не является «частью» геодезически полного V'_n. Пример:

$$ds^2 = dt - \frac{d\sigma^2}{(1+t^2)^2},$$

где $d\sigma^2$ — естественная метрика сферы S_{n-1}.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Улановский. Упорядоченные псевдоримановы пространства, I. «Укр. геометр. сб.», вып. 7, Харьков, Изд-во ХГУ, 1969.
2. М. А. Улановский. Упорядоченные псевдоримановы пространства, II. «Укр. геометр. сб.», вып. 9, Харьков, Изд-во ХГУ, 1970.
3. Р. Пенроуз. Конформная трактовка бесконечности. Сб. «Гравитация и топология». Изд-во «Мир», 1966.
4. S. W. Hawking. The occurrance of singularities in cosmology, I. Proceed. Roy. Soc., s. A, 294, 1966.
5. S. W. Hawking. The occurrance of singularities in cosmology, II. Proceed. Roy. Soc., s. A, 295, 1966.
6. S. W. Hawking. The occurrance of singularities in cosmology, III. Proceed. Roy. Soc. s. A, 300, 1967.

Поступила 14 февраля 1972 г.

О НАЛОЖИМЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Л. А. Шор

Харьков

Говорят, что выпуклая поверхность F_0 *наложима* на изометричную ей выпуклую поверхность F_1, если она допускает непрерывное изгибание в поверхность F_1 в классе всех выпуклых поверхностей, т. е. существует непрерывное по параметру t, $t \in [0, 1]$ семейство изометричных между собой выпуклых поверхностей F_t.

А. В. Погорелов [1] формулирует среди нерешенных вопросов следующую теорему:

Теорема 1. *Гомеоморфная открытому кругу выпуклая поверхность, край которой имеет всюду неположительный поворот, наложима на любую изометричную ей выпуклую поверхность.*

Там же А. В. Погорелов дает подход к доказательству этой теоремы, согласно которому сначала устанавливается, что два изометричных выпуклых многогранника, удовлетворяющие условию теоремы, наложимы. На втором шаге доказательства предлагается воспользоваться теоремой о возможности одновременного приближения изометричных выпуклых поверхностей F_0 и F_1 изометричными выпуклыми многогранниками P_{i0} и P_{i1}, $i = 1, 2, \ldots$ и теоремой об однозначной определенности общих выпуклых поверхностей. Однако осуществление второго шага доказательства встречает трудности, так как требует построения такой последовательности непрерывных семейств изометричных между собой выпуклых многогранников P_{it} $i = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, 1]$, которая сходится к непрерывному семейству выпуклых поверхностей.

В настоящей заметке доказывается теорема 1 сразу для общих выпуклых поверхностей и тем самым указанная выше трудность обходится. Доказательство основано на теореме А. Д. Александрова «о склеивании» [2] и теореме А. В. Погорелова об однозначной определенности общих выпуклых поверхностей [1, 3]. Иным методом решает эту задачу А. Д. Милка [4]. Пусть F_0 и F_1 гомеоморфные открытому кругу изометричные между собой выпуклые поверхности с краем ограниченной вариации поворота. Обозначим край поверхности F_j ($j = 0, 1$) через Γ_j, границу ее выпуклой оболочки через $\overline{F}_j$. Изометрия поверхностей F_0 и F_1 по непрерывности распространяется на Γ_0 и Γ_1. Развернутое на плоскость дополнение поверхности F_j до поверхности $\overline{F}_j$ обозначим через Q_j, а его границу через L_j. Подклеивание Q_j к F_j, задаваемое отображением ψ_j его границы L_j на край Γ_j поверхности F_j и восстанавливающее поверхность $\overline{F}_j$, называется тривиальным [5, 6]. Чтобы выпуклая поверхность F_0 была наложима на выпуклую поверхность F_1, необходимо и достаточно, чтобы существовала деформация (Q_t, ψ_t), $t \in [0, 1]$ тривиального подклеивания (Q_0, ψ_0) в тривиальное подклеивание (Q_1, ψ_1).

Условимся далее обозначать соответствующие по отображению ψ точки кривых L и Γ одинаковыми буквами.

Будем считать, что край Γ поверхности F, как это оговорено в условии доказываемой теоремы, имеет всюду неположительный поворот. В силу выпуклости поверхности $\overline{F}$ сумма поворотов кривой Γ и кривой L (со стороны Q) на каждом их склеиваемом участке должна быть неотрицательна. Поэтому поворот кривой L со стороны Q должен быть всюду неотрицателен, и Q является либо выпуклой областью, либо дважды покрытым отрезком. В последнем случае поверхность F получается из выпуклой поверхности $\overline{F}$ разрезом по геодезической. Если оба конца геодезической лежат в вершинах $\overline{F}$, то поверхность F изгибаема с разведением края, в противном случае F однозначно определена [7]. Таким образом, в дальнейшем можно считать, что Q — выпуклая область.

Так как отношение наложимости есть эквивалентность, то доказательство теоремы 1 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 1. *Гомеоморфная открытому кругу выпуклая поверхность F_0 у которой край имеет всюду неположительный поворот и площадь сферического изображения края (как кривой на поверхности $\overline{F}_0$), сосредоточена на бесконечном множестве точек, наложима на некоторую выпуклую повехность F_1, площадь сферического изображения края которой сосредоточена на конечном множестве точек.*

Лемма 2. *Гомеоморфная открытому кругу выпуклая поверхность F_0, у которой край имеет всюду положительный поворот и площадь сферического изображения края сосредоточена на конечном множестве точек, наложима на любую изометричную ей выпуклую поверхность F_1, у которой площадь сферического изображения края сосредоточена на конечном множестве точек.*

Доказательство леммы 1 основано на лемме 1 статьи [8] и проводится подобно доказательству леммы 2 той же статьи.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Пусть F_0 и F_1 поверхности, удовлетворяющие условию леммы. Так как поверхность F_1 изометрична поверхности F_0, то поворот ее края всюду неположителен. Введя в случае необходимости на кривых Γ_0 и Γ_1 дополнительные вершины с равной нулю площадью сферического изображения, разобьем их на соответствующие по изометрии открытые участки, имеющие равную нулю площадь сферического изображения. Последовательные вершины разбиения на кривой Γ_j $(j=0, 1)$ обозначим $A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jm}$. Кривые L_j разбиваются точками A_{jk} на попарно конгруэнтные участки $A_{0k}A_{0k+1}$ и $A_{1k}A_{1k+1}$ $(k=1, 2, \ldots, m;$ $A_{jm+1}\equiv A_{j1})$. Поэтому вписанные в выпуклые области Q_0 и Q_1 выпуклые многоугольники $P_0 = A_{01}A_{02}\ldots A_{0m}$ и $P_1 = A_{11}A_{12}\ldots A_{1m}$ имеют соответственно равные стороны. Так как поверхности F_0 и F_1 нетривиально изометричны, то повороты кривых L_0 и L_1 в точках A_{0k} и A_{1k} хотя бы при некоторых k не равны между собой. Разность поворотов кривых L_0 и L_1 в точках A_{0k} и A_{1k} равна с обратным знаком разности углов многоугольников P_0 и P_1 в этих точках. Разности углов в точках A_{0k} и A_{1k} $(k=1, 2, \ldots, m)$ при обходе вокруг многоугольников P_0 и P_1 должны менять знак не менее четырех раз [5, лемма 2]. Пусть, например, углы многоугольника P_0 в точках A_{0k_1} и A_{0k_3} больше, а в точках A_{0k_2} и A_{0k_4} меньше углов многоугольника P_1 в соответствующих точках. Будем деформировать выпуклый четырехугольник $A_{0k_1}A_{0k_2}A_{0k_3}A_{0k_4}$, поворачивая вокруг точек A_{0k_1}, A_{0k_2}, A_{0k_3} и A_{0k_4} участки $A_{0k_1}A_{0k_2}$, $A_{0k_2}A_{0k_3}$, $A_{0k_3}A_{0k_4}$, $A_{0k_4}A_{0k_1}$ кривой L_0 так, чтобы диагональ $A_{0k_1}A_{0k_3}$ удлинялась. При этом его углы и вместе с ними углы многоугольника P_0 в точках A_{0k_1} и A_{0k_3} будут убывать, а в точках A_{0k_2} и A_{0k_4} возрастать. Деформацию продолжим до тех пор, пока поворот деформированной кривой L_{t_1} хотя бы в одной из точек A_{0k_1}, A_{0k_2}, A_{0k_3}, A_{0k_4} не станет равен повороту кривой L_1 в соответствующей точке. При этом деформированная область Q_{t_1} удовлетворяет условиям подклеивания к поверхности F_0. Число точек, в которых различаются повороты кривых L_{t_1} и L_1, меньше числа точек, где различаются повороты кривых L_0 и L_1. Деформируя теперь описанным образом область Q_{t_1} и т. д., после конечного числа шагов получим область Q_1. Наложимость поверхности F_0 на поверхность F_1 доказана.

Для бесконечных выпуклых поверхностей имеет место теорема, аналогичная теореме 1, и аналогично доказываемая.

Теорема 2. *Гомеоморфная плоскости с удаленным из нее замкнутым кругом бесконечная выпуклая поверхность, у которой граница выпуклой оболочки имеет полную кривизну 2π и край имеет всюду неотрицательный поворот, наложима на любую изометричную ей выпуклую поверхность.*

Приведем еще две теоремы о наложимости многосвязных выпуклых поверхностей.

Теорема 3. *Пусть край конечной выпуклой поверхности F состоит из конечного числа простых замкнутых кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, имеющих, вообще говоря, общие точки $C_1, C_2, \ldots, C_m$ (край не причисляется к поверхности F и F связна). Тогда, если поворот каждой кривой Γ_j всюду неположителен (кроме точек $C_1, C_2, \ldots,$*

C_m, в которых поворот кривых Γ_j со стороны повехности F не определен) и в каждой точке C_k сумма углов секторов поверхности F не меньше π, то поверхность F наложима без раздвижения края в точках C_k на каждую ей изометричную выпуклую поверхность F', ограниченную простыми замкнутыми кривыми $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_n$, соответствующими по изометрии кривым $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\overline{F}$ и $\overline{F}'$ границы выпуклых оболочек поверхностей F и F' и пусть Q_j и Q'_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ плоские выпуклые области, подклеивание которых к поверхностям F и F' вдоль кривых Γ_j и Γ'_j дает поверхности $\overline{F}$ и $\overline{F}'$. Обозначим через $\overline{F}_i$ замкнутые выпуклые поверхности, склеенные из поверхности F и областей $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_i, Q_{i+1}, \ldots, Q_n$ $(i = 0, 1, \ldots, n$; $\overline{F}_0 = \overline{F}$; $\overline{F}_n = \overline{F}')$. Гомеоморфную открытому кругу выпуклую поверхность, полученную из поверхности $\overline{F}_i$ удалением области Q_{i+1}, обозначим через F_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Гомеомофную открытому кругу выпуклую поверхность, полученную из поверхности $\overline{F}_i$ удалением области Q'_i, обозначим через F'_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поверхности F_i и F'_{i+1} изометричны и удовлетворяют условию теоремы 1, следовательно, они наложимы. Вместе с ними наложимы и их части, изометричные поверхности F. Так как части повехностей F_i и F'_i, изометричные поверхности F, равны между собой (как одна и та же часть поверхности $\overline{F}_i$) и часть поверхности F_0, изометричная F_1 есть сама поверхность F, а часть поверхности F'_n, изометричная F, есть поверхность F', то поверхность F наложима на поверхность F'.

Теорема 4. *Пусть край бесконечной выпуклой поверхности F, полная кривизна границы выпуклой оболочки которой равна 2π, состоит из конечного числа простых замкнутых кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, имеющих, вообще говоря, общие точки $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Тогда, если поворот каждой кривой Γ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ всюду неположителен (кроме точек $C_1, C_2, \ldots, C_m$, в которых поворот кривых Γ_j со стороны поверхности F не определен) и в каждой точке C_k сумма углов секторов поверхности F не меньше π, то поверхность F наложима без раздвижения края в точках C_k на каждую ей изометричную выпуклую поверхность F', ограниченную простыми замкнутыми кривыми $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_n$, соответствующими по изометрии кривым $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$.*

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Изд-во «Наука», 1969.

2. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.— Л., Гостехиздат, 1948.

3. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Киев, 1952.

4. А. Д. Милка. О непрерывных изгибаниях выпуклых поверхностей. См. статью настоящего сборника.
5. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
6. Л. А. Шор. О деформациях тривиального подклеивания. «Укр. геометр. сб.», вып. 3, Харьков, Изд-во ХГУ, 1966.
7. Л. А. Шор. Об изгибании выпуклых многогранников с разрезом. УМЖ, т. 16, № 4, 1964.
8. Л. А. Шор. О наложимых выпуклых поверхностях с краем, имеющим неотрицательный поворот. «Укр. геометр. сб.», вып. 10, Харьков, Изд-во ХГУ, 1971.

Поступила 20 февраля 1972 г.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

О внешнем диаметре поверхности отрицательной кривизны. Аминов Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 3—9.

Рассматриваются поверхности в трехмерном евклидовом пространстве и доказываются следующие теоремы: 1. Если гауссова кривизна K полной поверхности класса C^2 удовлетворяет условию $-a^2 \leqslant K \leqslant 0$, где $a = \text{const}$, то поверхность не может содержаться в шаре, радиус которого меньше $\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{a}$. 2. Если на полной поверхности класса C^2, неограниченной во внутреннем смысле, гауссова кривизна стремится к нулю на бесконечности, то поверхность неограничена в пространстве.

Устанавливается также одно свойство сферического образа поверхности строго отрицательной кривизны.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

О двумерных метриках отрицательной кривизны. Аминов Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 9—15.

Доказывается теорема. Пусть $d\tilde{s}^2$ — метрика постоянной отрицательной кривизны $-a^2$. Пусть в геодезическом круге радиуса r в метрике $d\tilde{s}^2$ задана вторая метрика $ds^2 = d\tilde{s}^2 + du^2$, где u — регулярная функция. Пусть гауссова кривизна K метрики ds^2 удовлетворяет неравенству $K \leqslant -b^2$, a и $b > 0$ — постоянные, причем $b > 2a$. Тогда

$$r \leqslant \frac{e\sqrt{3}}{b-2a}.$$

Подобный результат получен и в том случае, когда $d\tilde{s}^2$ — произвольная метрика.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

О классе римановых пространств строго отрицательной кривизны. Борисенко А. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 15—18.

Доказывается следующая теорема: n-мерные римановы пространства строго отрицательной кривизны нельзя локально вложить в евклидово пространство размерности $2n-2$. Этот результат распространяется также на тот случай, когда в качестве объемлющего пространства вместо евклидова пространства берется риманово.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

О строении l-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n-мерном евклидовом пространстве. А. А. Борисенко. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 18—27.

Черн и Кейпер ввели определение индекса точки $\nu(X)$ l-мерной поверхности в E^n. В статье вводится определение ранга точки поверхности $r(X)$ и типа точки $j(X)$. Доказывается, что эти величины связаны неравенством

$$\nu(X) \geqslant (l-r) - j \quad (n-l-1).$$

Библиографических ссылок 8.

УДК 513.838

Пространства когомологий с компактными носителями комплексных аналитических многообразий. Головин В. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 27—63.

Показано, что в пространствах когомологий комплексного аналитического многообразия с компактными носителями и с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке топологии, определяемые соответственно с помощью открытых или замкнутых покрытий и с помощью дифференциальных форм, совпадают. Для пространств когомологий с компактными носителями доказана теорема двойственности и рассмотрены некоторые ее приложения.

Библиографических ссылок 25.

УДК 513.838

По поводу одной работы В. Виллани. Головин В. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, стр. 63—66.

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, счетное в бесконечности, $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ — такая последовательность открытых множеств в X, что $\bigcup Xp = X$ и $\mathbf{F}$ — когерентный аналитический пучок на X. Исследуются условия, при которых канонические отображения

$$H^k(X;\ \mathbf{F}) \to \lim H^k(X_p;\ \mathbf{F})$$

является изоморфизмами.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513

Жесткость выпуклых гиперповерхностей эллиптического пространства. Горзий Т. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 66—68.

В работе для случая n-мерного эллиптического пространства доказаны теоремы: 1. Общая замкнутая выпуклая гиперповерхность эллиптического пространства, целиком лежащая в полугиперсфере, не содержащая плоских областей размерности $n-1$, жесткая. В случае, если гиперповерхность содержит плоские области, она жесткая вне этих областей. 2. Выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности $n-1$, жесткая в окрестности каждой своей точки строгой выпуклости. Если она содержит плоские области, то она жесткая вне плоских областей. Доказательство проводится с помощью n-мерных преобразований А. В. Погорелова.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

О прямолинейных отрезках на границе выпуклого тела. Иванов Б. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 69—71.

Доказана следующая теорема: Если продлить в R^n все отрезки ненулевой длины, лежащие на границе выпуклого тела в R^n, то полученные прямые заполнят в R^n множество σ-конечной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа.

Библиографических ссылок 1.

УДК — 513

Общее уравнение алгебраической поверхности с симметрией правильного 600-гранника в пространстве E^4. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 71—74.

Показано, что общее уравнение произвольной алгебраической поверхности в пространстве E^4, инвариантной относительно группы симметрий G^{60} правильного четырехмерного 600-гранника, может быть записано так:

$$\varphi\left(\sum_{s=1}^{60}\eta_s^{12},\ \sum_{s=1}^{60}\eta_s^{20},\ \sum_{s=1}^{60}\eta_s^{30},\ \sum_{i=1}^{4}x_i^2\right)\prod\eta_s^{r_s}=0,$$

где φ — многочлен четырех переменных; $\eta_s=0$ $(s=1,\ 2,\dots,\ 60)$ — нормированные уравнения плоскостей симметрии группы G^{60}; $r_s\geqslant 0$ — целое.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513.

Комплексы в гиперболическом пространстве, у которых центры луча совпадают с кратными инфлекционными центрами. Ильяшенко В. Я. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 75—88.

Рассматриваются свойства комплексов в гиперболическом пространстве, у которых двойной, тройной, один двойной и один простой инфлекционные центры совпадают с центрами луча, и дается их безынтегральное представление. Доказывается, что комплексы с двумя двойными и четырехкратным инфлекционными центрами, совпадающими с центрами луча, не существуют.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

Квазиспециальные комплексы в трехмерном евклидовом пространстве E_3. Кованцов Н. И., Ищенко Е. Н. «Украинский геометрический сборник». вып. 13, 1973, стр. 88—95.

Рассматриваются геометрические свойства нормально-инфлекционных комплексов с двойным инфлекционным центром в трехмерном евклидовом пространстве E_3. Для этого класса комплексов получена система дифференциальных уравнений и дано безынтегральное представление.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

О некоторых свойствах структуры, определяемой тензором Римана на пространстве аффинной связности. Ковалев П. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 95—100.

Пусть A — бесконечно дифференцируемое многообразие, на котором задана аффинная связность без кручения; A_p — касательное пространство в точке $p\in A$. Тензор кривизны определяет в A_p структуру общей тройной системы Ли; среди таких систем можно выделить нильпотентные и простые. В статье доказано, что множество всех точек $p\in A$ таких, что общая тройная система Ли A_p нильпотентна (соответственно проста), замкнуто (соответственно открыто). Наиболее хорошо изучены общие тройные системы Ли, которые могут быть определенным образом вложены в алгебры Ли (они просто называются тройными системами Ли).

Для тройных систем Ли могут быть определены понятия разрешимости и полупростоты, аналогичные соответствующим понятиям теории алгебр Ли. В статье доказано, что множество всех точек p полусимметрического пространства A, таких что тройная система Ли A_p разрешима (соответственно полупроста), замкнуто (соответственно открыто).

Библиографических ссылок 3.

УДК 513 **Применение вариационной теории геодезических к исследованию псевдоримановых пространств кинематического типа.** С. Е. Козлов. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 101—106.

Работа посвящена распространению на случай псевдориманова пространства$^{n-1}$ V_n ряда основных аспектов теории Морса и ее теоремы об индексе. Полученные результаты применяются затем к исследованию метрики Робертсона—Уолкера, использующейся в ряде однородных моделей вселенной.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513 **О сравнении разверток локальных путей дифференцируемого многообразия.** Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 106—109.

Устанавливается зависимость разверток в групповое пространство $GL(n, R)$ локальных путей расслоенного пространства реперов $E(V_n)$ для различных линейных связностей дифференцируемого многообразия V_n.

Библиографических ссылок 1.

УДК 513 **Правильный симплекс, вписанный в куб.** Медяник А. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 109—112.

Правильный симплекс называется вписанным в куб, если все его вершины являются вершинами куба. В заметке получены следующие результаты.

Если в n-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности, то 1) $n+1$ делится на 4; 2) ребро симплекса в $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ раз больше стороны куба; 3) в $(2n+1)$-мерный куб можно вписать правильный $(2n+1)$-мерный симплекс.

В n-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности, если $\frac{n+1}{4}$ — целое число вида $2^{m-2}(p+1)$, где $m \geqslant 0$ — целое, p — нечетное простое число.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513 **Неразложимость выпуклой поверхности.** Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 112—129.

Множество на выпуклой поверхности, внутренность которого содержит все крайние точки этой поверхности, называется нормальным. Множество в евклидовом пространстве, не представимое (представимое) в виде векторной суммы двух множеств (компонент исходного множества), каждое из которых не сводится к точке, называется неразложимым (разложимым). Доказываются следующие теоремы. 1. Нормальное множество на замкнутой выпуклой поверхности в E^3 неразложимо. 2. Нормальное множество на выпуклой поверхности в E^3 типа параболоида, не являющейся поверхностью переноса, неразложимо. Описывается строение компонент нормального разложимого множества на выпуклой поверхности в E^3 типа параболоида. Приводятся также другие результаты о разложимых и неразложимых множествах в E^n, в E^3 и в плоскости. Как следствия формулируются некоторые теоремы о неразложимости вероятностных законов.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513 **О непрерывных изгибаниях выпуклых поверхностей.** Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 129—141.

Основной результат работы. Пусть F — выпуклая поверхность с краем, состоящим из конечного числа непересекающихся кривых. Пусть поворот края на F на каждой его компоненте — одного знака. Тогда эта поверхность непрерывно изгибается в любую изометричную ей и так же ориентированную выпуклую поверхность. Этой теоремой дается полное решение соответствующей задачи о непрерывных изгибаниях выпуклых поверхностей, поставленной А. В. Погореловым в числе других открытых вопросов в монографии «Внешняя геометрия выпуклых поверхностей». Примечание: ряд результатов по этой задаче другим методом получен также Л. А. Шором.

Библиографических ссылок 10.

УДК 513 **Об одном нелинейном преобразовании пространства прямых.** Пеклич В. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 142—155.

В двух полуплоскостях α и β пространства K заданы коллинеации K_α и K_β. Рассматривается преобразование, переводящее прямую, пересекающую α и β в точках A_1 и B_1, в прямую $A_2 B_2$, где A_2, B_2 — образы точек A_1, B_1 в K_α, K_β. Найдены фундаментальные и исключительные элементы преобразования и образы простейших линейчатых многообразий.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513 **Об одном классе конгруэнций в эллиптическом пространстве.** Солейман М. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13. 1973, стр. 155—172.

Комплекс, характеризующийся совпадением центров луча с парой инфлекционных центров назван автором центроинфлекционным.

Автор доказывает, пользуясь классическим методом Картана, существование такого комплекса и находит ряд его свойств.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513 **О конформной и геодезической полноте псевдоримановых пространств физического типа.** Улановский М. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 172—179.

Рассматриваются условия, при которых псевдориманово V_n с сигнатурой $(n-1,1)$ фундаментальной формы не может быть локально изометрически или конформно отображено на собственное открытое подмногообразие другого пространства той же размерности.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513 **О наложимых выпуклых поверхностях.** Шор Л. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 13, 1973, стр. 179—183.

Доказано: если выпуклая поверхность гомеоморфна открытому кругу и поворот ее края всюду неположителен, то она наложима на любую изометричную ей выпуклую поверхность. Аналогичная теорема справедлива для гомеоморфных плоскости с удаленным из нее замкнутым кругом бесконечных выпуклых поверхностей, кривизна границы выпуклой оболочки которых равна 2π. Из этих результатов следуют некоторые теоремы о наложимости многосвязных выпуклых поверхностей.

Библиографических ссылок 8.

СОДЕРЖАНИЕ