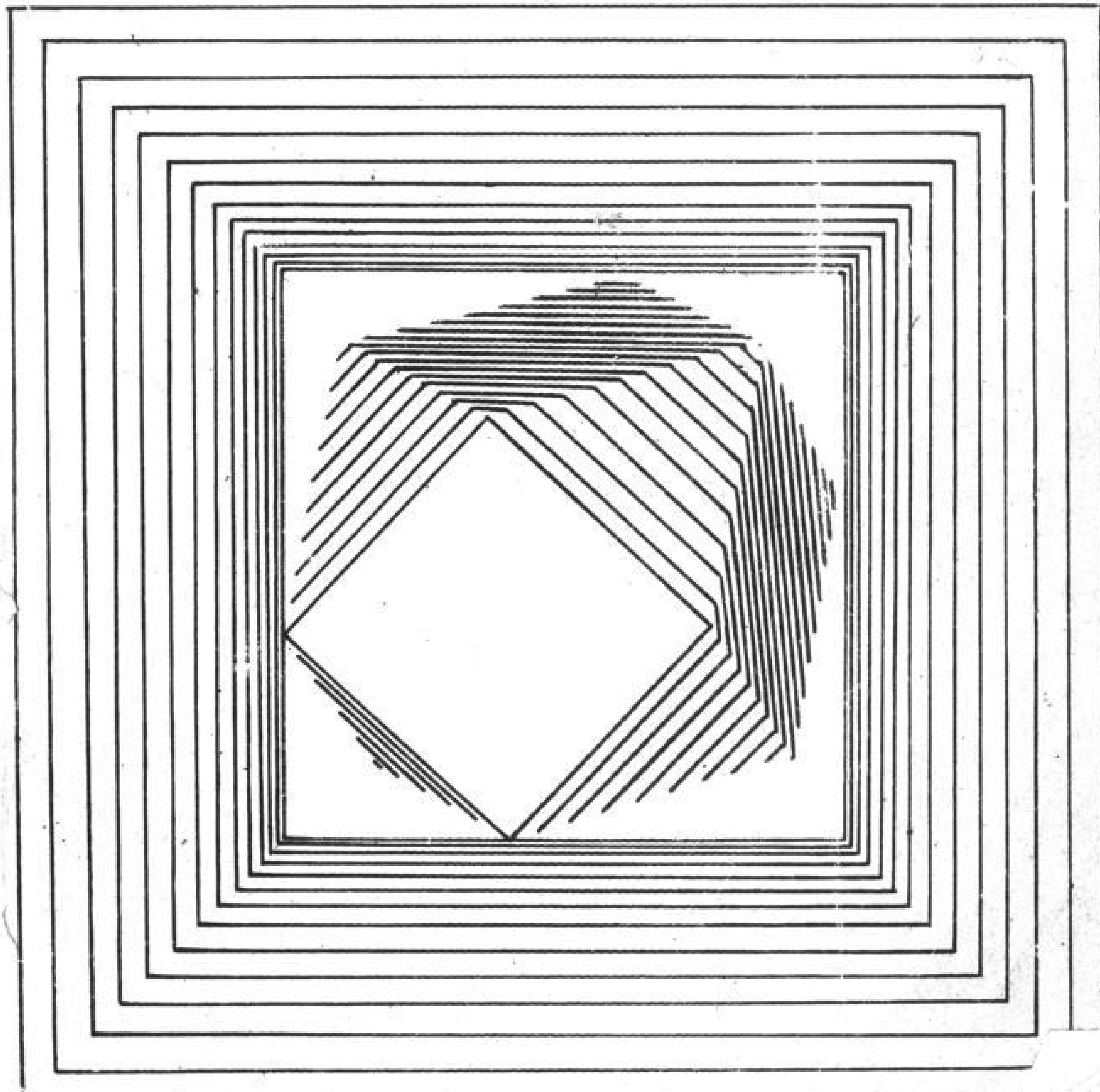
издательство харьковского университета

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск 12



РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ
НАУЧНЫЙ СБОРНИК

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 12

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1972

517.5
У45

В сборник включены статьи, посвященные широкому кругу вопросов геометрии пространств различных размерностей: геометрии в целом, римановой, финслеровой, неголономной, проективно-дифференциальной, неевклидовой и евклидовой; теории линейчатых комплексов, теории векторных полей, теории относительности, теории устойчивости оболочек.

Адрес редакционной коллегии:
310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

Редактор *З. Н. Щегельская*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Техредактор *П. П. Александрова*
Корректор *Ж. Л. Бялая*

Сдано в набор 10/XI 1971 г. Подписано к печати 4/VIII 1971 г. БЦ 50252. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Объем 10,75 физ. печ. л., 10,75 усл. печ. л., 11,8 уч.-изд. л. Зак. 1-2275. Тираж 700. Цена 1 руб. 18 коп. Св. ТП 1972 г., п. 187.

Типоофсетная фабрика «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров УССР. Харьков, ул. Энгельса, 11.

2—2—3
187—72М

О ПОВЕДЕНИИ ЛИНИЙ ТОКА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЦИКЛА

Ю. А. Аминов
Харьков

Пусть в области трехмерного евклидова пространства E^3 задано единичное векторное поле $\boldsymbol{n}$ и пусть L — замкнутая линия тока этого поля. Рассмотрим поведение линий тока в окрестности L: 1) вращение полос, составленных из линий тока поля $\boldsymbol{n}$ по отношению к полосе главных нормалей линии L; 2) устойчивость L как замкнутой траектории дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{n}(x)$, где $x \in E^3$. В некоторых случаях о поведении линий тока в окрестности L можно судить зная лишь геометрические инварианты поля n на самой кривой L. При рассмотрении указанных вопросов естественным образом возникает один из таких инвариантов

$$\Lambda = \sqrt{(\operatorname{div} \boldsymbol{n})^2 - 4K + (\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n})^2}, \tag{1}$$

где K — полная кривизна поля $\boldsymbol{n}$ [4]. Оказывается, что в случа $\Lambda = 0$ бесконечно близкие к L линии тока ведут себя одинаково вым образом.

Рассмотрим полосу, составленную из линий тока, проходящую через L. После однократного обхода кривой L полоса повернется на некоторый угол $\Delta\varphi$ относительно первоначального положения (точную формулировку см. в [2]).

Теорема 1. *Пусть L—замкнутая линия тока поля $\boldsymbol{n}$ и пусть на кривой L инвариант $\Lambda = 0$. Тогда угол поворота всех полос, составленных из линий тока, один и тот же и он равен интегралу*

$$\int_L \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n}) - \varkappa \right\} ds, \tag{2}$$

где $\varkappa$ — кручение L.

Если этот интеграл, деленный на 2π, есть рациональное число $\frac{p}{q}$, то полоса после q оборотов вдоль L и p оборотов относительно полосы главных нормалей вернется в прежнее положение, если это число иррациональное, то полоса наматывается на L всюду плотно.

Указанное ниже условие устойчивости является обобщением условия Пуанкаре для поля в плоскости. В [3] доказывается

Теорема 2. *Пусть L замкнутая траектория дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=\boldsymbol{n}(x)$. Если*

$$\int_L \operatorname{div} \boldsymbol{n} ds < -\int_L \Lambda ds, \tag{3}$$

то L — орбитально устойчивый предельный цикл.

Интеграл берется в положительном направлении линии L, соответствующем положительному направлению t. Заметим, что при $\Lambda=0$ на L все близкие траектории ведут себя относительно устойчивости одинаковым образом. Легко построить пример поля с замкнутой линией тока, для которого применима теорема 2.

1. Инвариант Λ

Прежде всего укажем, как вычислить инвариант Λ через правую часть дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=\boldsymbol{A}(x)$, где $\boldsymbol{A}=(A_1, A_2, A_3)$ произвольное векторное поле класса C^1. Так как $\operatorname{div}\boldsymbol{n}$ и $(\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{n})$ после нормировки $\boldsymbol{A}$ вычисляются просто, то достаточно указать выражение K (см. [4])

$$K=-\frac{\begin{vmatrix} A_{1x_1} A_{1x_2} A_{1x_3} A_1 \\ A_{2x_1} A_{2x_2} A_{2x_3} A_2 \\ A_{3x_1} A_{3x_2} A_{3x_3} A_3 \\ A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad 0 \end{vmatrix}}{(A_1^2+A_2^2+A_3^2)^2}.$$

В том случае, когда поле $\boldsymbol{n}$ голономное, т. е. ортогонально семейству поверхностей и $1/R_i$ — главные кривизны этих поверхностей

$$\Lambda=\left|\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right|.$$

В дальнейшем нам понадобится другое выражение Λ:

$$\Lambda=\sqrt{[(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{b})]^2+[(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a})]^2}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные, ортогональные друг другу и $\boldsymbol{n}$ поля, такие что $[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{n}$. Для доказательства используем следующую формулу, справедливую для любых двух векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (см., например [3], стр. 176).

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_b - \boldsymbol{b}_a, \tag{5}$$

где, например, через $\boldsymbol{b}_a$ обозначена производная вектора $\boldsymbol{b}$ в направлении вектора $\boldsymbol{a}$, умноженная на $|\boldsymbol{a}|$. Можем записать

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{bn}] = \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{n}_b,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{b} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{na}] = \boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}_a - \boldsymbol{a}_n.$$

Отсюда находим

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_n) - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_b),$$

$$(\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_a) - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_n).$$

Вычитая из первого выражения второе и учитывая, что $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_n) + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_n) = 0$, получим

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_b) - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_a). \tag{6}$$

Умножая выражение $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$ и выражение $\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{a}$ и складывая, получим

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_a) - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_b). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$[(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{b})]^2 + [(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a})]^2 =$$
$$= [\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_b) + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_a)]^2 + [(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_a) - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_b)]^2.$$

Выберем теперь декартовы оси координат x_1, x_2, x_3 так, чтобы в некоторой фиксированной точке M ось x_3 была направлена по вектору $\boldsymbol{n}(M)$, ось x_1 по вектору $\boldsymbol{a}$ и ось x_2 по вектору $\boldsymbol{b}$. Пусть в этой системе координат $\boldsymbol{n}$ имеет компоненты ξ_1, ξ_2, ξ_3. При этом в точке M $\xi_1 = \xi_2 = \xi_{3x_i} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Тогда можно записать

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_b) + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_a) = \xi_{1x_2} + \xi_{2x_1},$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_a) - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_b) = \xi_{1x_1} - \xi_{2x_2}.$$

Отсюда находим

$$[(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_b) + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_a)]^2 + [(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_a) - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_b)]^2 = (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})^2 +$$
$$+ (\xi_{1x_1} - \xi_{2x_2})^2 = (\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2})^2 - 4(\xi_{1x_1}\xi_{2x_2} - \xi_{1x_2}\xi_{2x_1}) +$$
$$+ (\xi_{1x_2} - \xi_{2x_1})^2 = (\operatorname{div}\boldsymbol{n})^2 - 4K + (\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{n})^2 = \Lambda^2,$$

что и доказывает (4).

Заметим, что при $\Lambda = 0$ в точке M для функций ξ_1, ξ_2 выполняется система Коши — Римана

$$\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1} = 0, \quad \xi_{1x_1} - \xi_{2x_2} = 0.$$

В *п*. 3 нам понадобится следующее соотношение:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{n} = \xi_{1x_1} + \xi_{2x_2} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_a) + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}_b). \tag{8}$$

Установим геометрический смысл обращения в ноль инварианта Λ (при доказательстве теорем 1 и 2 это не используется). В трехмерном евклидовом пространстве рассмотрим поле комплексных векторов $\bar\beta = \bar\tau + i\bar\sigma$, где $\bar\tau$ и $\bar\sigma$ единичные векторы, ортогональные друг другу и $\boldsymbol{n}$. Положим по определению

$$\operatorname{rot} \bar\beta = \operatorname{rot} \bar\tau + i \operatorname{rot} \bar\sigma.$$

Тогда комплексной неголономностью будем называть величину

$$(\bar\beta \operatorname{rot} \bar\beta) = (\bar\tau \operatorname{rot} \bar\tau) - (\bar\sigma \operatorname{rot} \bar\sigma) + i\,\{(\bar\tau \operatorname{rot} \bar\sigma) + (\bar\sigma \operatorname{rot} \bar\tau)\}.$$

Как выше было доказано, модуль этого числа не зависит от выбора векторов $\bar\tau$ и $\bar\sigma$, причем $|(\bar\beta \operatorname{rot} \bar\beta)| = \Lambda$. Более того, если

$$\boldsymbol{a} = \cos\gamma\bar\tau + \sin\gamma\bar\sigma, \tag{9}$$
$$\boldsymbol{b} = -\sin\gamma\bar\tau + \cos\gamma\bar\sigma,$$

то можно показать, что

$$(\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}) = \cos 2\gamma\,[(\bar\tau \operatorname{rot} \bar\tau) - (\bar\sigma \operatorname{rot} \bar\sigma)] +$$
$$+ \sin 2\gamma\,[(\bar\tau \operatorname{rot} \bar\sigma) + \bar\sigma \operatorname{rot} \bar\tau)].$$
$$(\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) = -\sin 2\gamma\,[(\bar\tau \operatorname{rot} \bar\tau) - (\bar\sigma \operatorname{rot} \bar\sigma)] +$$
$$+ \cos 2\gamma\,[(\bar\tau \operatorname{rot} \bar\sigma) + (\bar\sigma \operatorname{rot} \bar\tau)].$$

Будем называть комплексный вектор $\bar\beta$ голономным, если существуют комплексные функции λ и ψ от действительных переменных x_1, x_2, x_3, такие что

$$\beta = \lambda \operatorname{grad} \psi. \tag{10}$$

Если расписать λ и ψ через действительные функции $\lambda = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, то (10) запишется в виде системы двух уравнений

$$\alpha_1 \operatorname{grad} \varphi_1 - \alpha_2 \operatorname{grad} \varphi_2 = \bar\tau, \tag{11}$$
$$\alpha_2 \operatorname{grad} \varphi_1 + \alpha_1 \operatorname{grad} \varphi_2 = \bar\sigma.$$

Докажем следующее у т в е р ж д е н и е: комплексное векторное поле $\bar\beta = \bar\tau + i\bar\sigma$ голономно тогда и только тогда, когда комплексная неголономность $(\bar\beta \operatorname{rot} \bar\beta) = 0$, т. е. когда выполняются два уравнения

$$(\bar\tau \operatorname{rot} \bar\tau) - (\bar\sigma \operatorname{rot} \bar\sigma) = 0, \tag{12}$$
$$(\bar\sigma \operatorname{rot} \bar\tau) + (\bar\tau \operatorname{rot} \bar\sigma) = 0.$$

В этом случае, если взять в нормальной к $\boldsymbol{n}$ плоскости два ортогональных друг другу отрезка a_0 и b_0 с началом в точке P_0 и провести через них линии тока поля $\boldsymbol{n}$, то полученные поверхностные полосы будут ортогональны вдоль всей линии L.

Дифференциальное уравнение, задаваемое полем $\boldsymbol{n}$, можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(x)\,[\operatorname{grad}\varphi_1,\ \operatorname{grad}\varphi_2],$$

причем $\operatorname{grad}\varphi_1 \perp \operatorname{grad}\varphi_2$ и выполнено уравнение

$$\left(\operatorname{grad}\varphi_1,\ \operatorname{grad}\varphi_2,\ \operatorname{grad}\frac{|\operatorname{grad}\varphi_1|}{|\operatorname{grad}\varphi_2|}\right) = 0.$$

Докажем утверждение. Пусть, например, поле голономное

$$\overline{\beta} = \alpha \operatorname{grad}\psi.$$

Легко проверить, переходя к действительным функциям, что

$$\operatorname{rot}\overline{\beta} = [\operatorname{grad}\alpha,\ \operatorname{grad}\psi].$$

Поэтому в одну сторону утверждение тривиально

$$(\overline{\beta}\operatorname{rot}\overline{\beta}) = \alpha(\operatorname{grad}\psi\operatorname{grad}\alpha\operatorname{grad}\psi) = 0.$$

Пусть теперь $(\overline{\beta}\operatorname{rot}\overline{\beta}) = 0$. Рассмотрим вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, см. (9), причем γ подберем ниже. В силу $\Lambda = 0$ условия (12) будут справедливы и для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Простым вычислением находим

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = (\overline{\tau}\operatorname{rot}\overline{\tau}) + \sin^2\gamma\,\{(\overline{\sigma}\operatorname{rot}\overline{\sigma}) - (\overline{\tau}\operatorname{rot}\overline{\tau})\} +$$

$$+ \cos\gamma\sin\gamma\,\{\overline{(\sigma\operatorname{rot}\overline{\tau})} + \overline{(\tau\operatorname{rot}\overline{\sigma})}\} - \frac{d\gamma}{ds}.$$

В нашем случае отсюда получим

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = \overline{(\tau\operatorname{rot}\overline{\tau})} - \frac{d\gamma}{ds}.$$

Функцию γ зададим так, чтобы $(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = 0$, что эквивалентно решению дифференциального уравнения

$$\gamma_{x_1}\tau_1 + \gamma_{x_2}\tau_2 + \gamma_{x_3}\tau_3 = 0,\quad \tau = (\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3).$$

Так как имеют место равенства

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) = 0, \tag{13}$$

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = 0,$$

то $(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) = 0$, т. е. поля $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ голономные. Поэтому существуют такие функции λ, μ, φ_1 и φ_2, что

$$\boldsymbol{a} = \cos\gamma\tau + \sin\gamma\sigma = \lambda\operatorname{grad}\varphi_1, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{b} = -\sin\gamma\tau + \cos\gamma\,\sigma = \mu\operatorname{grad}\varphi_2.$$

Используем теперь второе из соотношений (13). Вычислением находим

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) = \lambda(\operatorname{grad}\varphi_1\operatorname{grad}\varphi_2\operatorname{grad}\mu),$$

$$(\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = \mu(\operatorname{grad}\varphi_2\operatorname{grad}\varphi_1\operatorname{grad}\lambda).$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = \lambda^2(\operatorname{grad}\varphi_1,\ \operatorname{grad}\varphi_2,\ \operatorname{grad}\mu/\lambda) = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{grad}\frac{\mu}{\lambda}=\xi\operatorname{grad}\varphi_1+\eta\operatorname{grad}\varphi_2.$$

Производная функции $\frac{\mu}{\lambda}$ по направлению $[\operatorname{grad}\varphi_1\operatorname{grad}\varphi_2]$ равна нулю. Это направление лежит в плоскости, ортогональной к $\operatorname{grad}\varphi_1$, и в плоскости, ортогональной к $\operatorname{grad}\varphi_2$, т. е. оно касается поверхности $\varphi_1=C_1$ и $\varphi_2=C_2$. Следовательно, это направление касательное к линии пересечения поверхностей $\varphi_1=C_1$ и $\varphi_2=C_2$. На всей этой линии функция $\frac{\mu}{\lambda}$ постоянна. Поэтому

$$\frac{\mu}{\lambda}=F(\varphi_1,\ \varphi_2).$$

Из уравнений (14) находим

$$\bar{\tau}=\lambda\cos\gamma\operatorname{grad}\varphi_1-\mu\sin\gamma\operatorname{grad}\varphi_2,$$
$$\bar{\sigma}=\lambda\sin\gamma\operatorname{grad}\varphi_1+\mu\cos\gamma\operatorname{grad}\varphi_2.$$

В комплексном виде это запишется так

$$\bar{\tau}+i\bar{\sigma}=\lambda e^{i\gamma}\operatorname{grad}\varphi_1+\mu e^{i\gamma}\operatorname{grad}\varphi_2.$$

Обозначим $\cos\alpha=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$, $\sin\alpha=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$, очевидно, α — функция только от φ_1 и φ_2. Покажем, что можно подобрать такую функцию $u+iv$ (интегрирующий множитель), чтобы

$$(u+iv)(\cos\alpha\operatorname{grad}\varphi_1+i\sin\alpha\operatorname{grad}\varphi_2)=$$
$$=\operatorname{grad}\psi(\varphi_1,\ \varphi_2)+i\operatorname{grad}\theta(\varphi_1,\ \varphi_2).$$

Приравнивая коэффициенты при $\operatorname{grad}\varphi_i$, получим две пары действительных уравнений

$$\begin{cases}\psi'_{\varphi_1}=u\cos\alpha,\\ \psi'_{\varphi_2}=-v\sin\alpha,\end{cases}\qquad\begin{cases}\theta'_{\varphi_1}=v\cos\alpha,\\ \theta'_{\varphi_2}=u\sin\alpha.\end{cases}\tag{15}$$

Условия интегрируемости системы (15) имеют вид

$$(u\cos\alpha)_{\varphi_2}+(v\sin\alpha)_{\varphi_1}=0,$$
$$(v\cos\alpha)_{\varphi_2}-(u\sin\alpha)_{\varphi_1}=0.$$

Это эллиптическая система двух линейных дифференциальных уравнений для u и v. Так как существует решение этой системы, то разрешима и система (15). Итак, можем записать

$$\bar{\tau}+i\bar{\sigma}=\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{u+iv}e^{i\gamma}\{\operatorname{grad}\psi+i\operatorname{grad}\theta\}$$

Следовательно, комплексный вектор $\bar{\beta}=\bar{\tau}+i\bar{\sigma}$ голономный.

2. Вращение полос линий тока

Рассмотрим полосы, составленные из линий тока $\boldsymbol{n}$. Для этого через точку $P_0 \in L$ проведем нормальную к L плоскость F. В этой плоскости возьмем бесконечно малый отрезок α, проходящий через P_0, и через точки отрезка α проведем линии тока поля $\boldsymbol{n}$. В произвольной точке P кривой L полоса пересекает нормальную плоскость по некоторому отрезку $\alpha(P)$, который составит с главной нормалью кривой L некоторый угол φ. Мы считаем φ непрерывной функцией длины дуги L. Будем предполагать, что поле главных нормалей вдоль L продолжается непрерывно и однозначно. Полученная полоса после однократного обхода кривой L пересечет плоскость F по бесконечно малому отрезку α_1, который будет повернут на некоторый угол $\Delta\varphi$ относительно отрезка α. Докажем сформулированную во введении теорему 1.

Лемма 1. *Пусть $\bar{\eta}$ — поле главных нормалей к линиям тока поля $\boldsymbol{n}$, ν — поле бинормалей.* Тогда

$$2\varkappa = (\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n}) - (\bar{\eta} \operatorname{rot} \bar{\eta}) - (\bar{\nu} \operatorname{rot} \bar{\nu}) \tag{16}$$

Используем формулу (6). Мы применим ее для единичных векторных полей $\boldsymbol{n}$, $\bar{\eta}$ и $\bar{\nu}$. Имеем

$$\operatorname{rot} \bar{\nu} = \operatorname{rot} [\boldsymbol{n} \bar{\eta}] = \boldsymbol{n} \operatorname{div} \bar{\eta} - \bar{\eta} \operatorname{div} \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}_{\bar{\eta}} - \bar{\eta}_{\bar{n}}. \tag{17}$$

Следовательно, неголономность поля бинормалей равна

$$(\bar{\nu} \operatorname{rot} \bar{\nu}) = -\varkappa + (\nu \boldsymbol{n}_{\eta}). \tag{18}$$

Далее с помощью (5) находим

$$\operatorname{rot} \eta = \operatorname{rot} [\nu \boldsymbol{n}] = \nu \operatorname{div} \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \operatorname{div} \nu + \nu_n - \boldsymbol{n}_{\nu}. \tag{19}$$

Поэтому неголономность поля главных нормалей равна

$$(\eta \operatorname{rot} \eta) = -\varkappa - (\eta \boldsymbol{n}_{\nu}). \tag{20}$$

Наконец, найдем неголономность основного поля $\boldsymbol{n}$

$$(\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n} \operatorname{rot} [\eta \nu]) = (\boldsymbol{n},\ \eta \operatorname{div} \nu - \nu \operatorname{div} \eta + \eta_{\nu} - \nu_{\eta}) =$$
$$= (\boldsymbol{n} \eta_{\nu}) - (\boldsymbol{n} \nu_{\eta}) = (\boldsymbol{n}_{\eta} \nu) - (\boldsymbol{n}_{\nu} \eta). \tag{21}$$

Складывая соотношения (18) и (20) и вычитая (21), получим доказываемую формулу (16).

Из леммы 1, например, следует, что если кривая не плоская, то к ней нельзя пристроить триортогональное семейство поверхностей так, чтобы она была ортогональна к поверхности одного семейства, лежала бы на некоторой поверхности второго семейства и на некоторой поверхности третьего семейства, причем на поверхности второго семейства она была бы геодезической, а на поверхности третьего семейства асимптотической.

Лемма 2. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ такие векторные поля, что

$$\boldsymbol{a} = \cos\varphi\eta + \sin\varphi\nu, \quad \boldsymbol{b} = -\sin\varphi\eta + \cos\varphi\nu.$$

Тогда

$$2\varkappa = (\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}) - 2\frac{d\varphi}{ds}. \tag{22}$$

где $\frac{d\varphi}{ds}$ — производная угла вдоль линии тока поля $\boldsymbol{n}$.

Непосредственным вычислением находим

$$(\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) = \cos^2\varphi\,(\eta \operatorname{rot} \eta) + \sin^2\varphi\,(\nu \operatorname{rot} \nu) + \\ + \cos\varphi \sin\varphi\,\{(\nu \operatorname{rot} \eta) + (\eta \operatorname{rot} \nu)\} - \frac{d\varphi}{ds}.$$

Соответствующее выражение для $(\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b})$ получается заменой φ на $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$(\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}) = \sin^2\varphi\,(\eta \operatorname{rot} \eta) + \cos^2\varphi\,(\nu \operatorname{rot} \nu) - \\ - \cos\varphi \sin\varphi\,\{(\nu \operatorname{rot} \eta) + (\eta \operatorname{rot} \nu)\} - \frac{d\varphi}{ds}.$$

Складывая эти два выражения, находим

$$(\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}) = (\eta \operatorname{rot} \eta) + (\nu \operatorname{rot} \nu) - 2\frac{d\varphi}{ds}.$$

Из этого выражения и леммы 1 следует (22).

Рассмотрим теперь полосу, составленную из линий тока. Очевидно, можно включить ее в регулярное семейство таких полос. Определим векторное поле $\boldsymbol{b}$ как поле нормалей к полосам. По определению поле $\boldsymbol{b}$ — голономное, т. е. $(\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}) = 0$. Векторное поле $\boldsymbol{a}$ касается полосы и ортогонально к линиям тока поля $\boldsymbol{n}$. Из (22) находим, что поворот такой полосы относительно полосы главных нормалей η будет равен

$$\int\limits_L \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n}) - \varkappa - \frac{1}{2} (\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) \right\} ds.$$

Для произвольного поля $\boldsymbol{n}$ величина $(\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a})$ будет зависеть от выбора полосы. Если же на кривой L инвариант $\Lambda = 0$, то в силу (4) $(\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}) = 0$, поэтому все полосы поворачиваются на один и тот же угол. Отсюда следует утверждение теоремы 1.

3. Устойчивость

Пусть L — замкнутая линия тока поля $\boldsymbol{n}$. Выберем на L положительное направление. Мы найдем условие, выраженное через геометрические инварианты поля $\boldsymbol{n}$ на самой кривой, при котором L будет орбитально асимптотически устойчивым предельным циклом дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{n}(x)$.

Теорема 2 выражает в геометрических терминах критерий устойчивости Важевского.

Перейдем к ее доказательству.

Пусть $r^0(s)$ — радиус-вектор кривой L, s — ее длина дуги, l — длина всей кривой, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два единичных векторных поля, ортогональных друг другу и $\boldsymbol{n}$, периодические на L. Пусть значению s на кривой L отвечает точка $P(s)$, $F(s)$ — нормальная к L плоскость в этой точке. В плоскости $F(0)$ возьмем отрезок α, проходящий через точку $P_0 = P(0)$, и из его точек выпустим линии тока поля $\boldsymbol{n}$. Пусть P_0' — точка отрезка α и $\varepsilon_0 = |P_0P_0'|$. Обозначим через L' — бесконечно близкую к L линию тока, выпущенную из точки P_0', $P'(s)$ — точка пересечения L' с плоскостью $F(s)$. Тогда мы обозначим через $\varepsilon(s) = |PP'|$. Радиус-вектор бесконечно близкой к L траектории L' запишем в виде

$$r(s) = r^0(s) + \varepsilon(s, \varepsilon_0)\{\cos\varphi(s, \varepsilon_0)\, \boldsymbol{a}(s) + \sin\varphi(s, \varepsilon_0)\, \boldsymbol{b}(s)\}.$$

Через u обозначим длину дуги кривой L'. Можем записать

$$r_u \frac{du}{ds} = r_s^0 + \varepsilon_s(\cos\varphi \boldsymbol{a} + \sin\varphi \boldsymbol{b}) + \varepsilon(\cos\varphi \boldsymbol{a} + \sin\varphi \boldsymbol{b})_s'.$$

Вектор r_u есть вектор поля $\boldsymbol{n}(P')$. Умножим это выражение на $(\cos\varphi \boldsymbol{a} + \sin\varphi \boldsymbol{b})$. Тогда получим

$$\frac{d\varepsilon(u, \varepsilon_0)}{du} = (\boldsymbol{n}(P'),\ \cos\varphi \boldsymbol{a} + \sin\varphi \boldsymbol{b}). \tag{23}$$

Запишем разложение

$$\boldsymbol{n}(P') = \boldsymbol{n}(P) + \varepsilon(u, \varepsilon_0)(\boldsymbol{n}_a \cos\varphi + \boldsymbol{n}_b \sin\varphi) + 0(\varepsilon).$$

Обозначим $\dfrac{d\varepsilon(s, 0)}{d\varepsilon_0} = f$. Подставим $\boldsymbol{n}(P')$ в (23), разделим обе части равенства на ε_0 и перейдем к пределу по ε_0. Мы рассматриваем один виток L'. Можно показать, что существует $\lim \varphi(s, \varepsilon_0)$ при $\varepsilon_0 \to 0$, который мы обозначим через $\varphi(s)$. Тогда на кривой L получим

$$\frac{d \ln|f(s)|}{ds} = (\boldsymbol{n}_a \boldsymbol{a})\cos^2\varphi + (\boldsymbol{n}_b \boldsymbol{b})\sin^2\varphi +$$

$$+ \cos\varphi \sin\varphi[(\boldsymbol{n}_a \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{n}_b \boldsymbol{a})] = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{n}_a \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{n}_b \boldsymbol{b})] +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos 2\varphi[(\boldsymbol{n}_a \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{n}_b \boldsymbol{b})] + \frac{1}{2}\sin 2\varphi[(\boldsymbol{n}_a \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{n}_b \boldsymbol{a})].$$

Используем формулы (8), (7) и (6)

$$\frac{d \ln|f(s)|}{ds} = \frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{n} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi[(\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b})] +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos 2\varphi[(\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a})]. \tag{24}$$

Заметим, что сумма последних двух членов в силу (4) меньше $\Lambda(s)$. Интегрируя (24) по L в положительном направлении и используя условие (3), мы получим $\left|\frac{f(l)}{f(0)}\right| < 1$ равномерно для всех начальных отрезков α в плоскости $F(0)$. Это неравенство достаточно для устойчивости.

Легко построить пример поля с замкнутой линией L, для которого теорема 2 дает устойчивость. Возьмем любую замкнутую пространственную кривую L и через каждую точку $P \in L$ проведем кусочек поверхности строго положительной кривизны с главными радиусами R_1 и R_2, обращенный вогнутостью в сторону положительного направления L так, чтобы в этой точке он был ортогонален к L. При перемещении точки P по кривой L получим регулярное в некоторой окрестности L семейство поверхностей. Определим поле $\boldsymbol{n}$ как поле нормалей к этому семейству. В этом случае $\Lambda = \left|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right|$, $\operatorname{div} \boldsymbol{n} = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} < -\Lambda$. Следовательно, L — устойчивый предельный цикл. Если же хотя бы одна главная кривизна равна нулю, то в окрестности L могут быть замкнутые траектории, т. е. L не будет предельным циклом.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. ОГИЗ, М.—Л., 1947.
2. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. Изд-во «Наука», М., 1967.
3. Н. Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд-во «Наука», М., 1965.
4. Ю. А. Аминов. Дивергентные свойства кривизн векторного поля и семейства поверхностей. «Матем. зам.», т. 3, вып. 1, 1968, стр. 103—111

Поступила 19 апреля 1971 г.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

В. И. Бабенко

Харьков

Вариационный принцип В

1. Исследование потери устойчивости упругих оболочек в работе [1] сведено к вариационному принципу **В**, который позволяет в основном приближении определить критическую нагрузку, при которой происходит потеря устойчивости оболочки «в малом».

Именно, *если действующая на оболочку нагрузка критическая, то вариационная задача для функционала*

$$W = U - A \tag{1}$$

на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности оболочки имеет нетривиальное решение, т. е. изгибающее поле, являющееся решением, не равно нулю тождественно.

Функционал определен на полях бесконечно малых изгибаний с разрывами, удовлетворяющими условию

$$\Delta u \tau = 0, \tag{2}$$

или, что то же самое [2],

$$\Delta u = \sigma\beta. \tag{3}$$

Здесь Δu — разрыв искомого изгибающего поля u, σ — составляющая разрыва; τ и β — единичные векторы соответственно касательной и бионормали кривой γ, вдоль которой происходит разрыв изгибающего поля.

Слагаемое U функционала W представляет собой энергию деформации оболочки, которая определяется в основном деформацией оболочки в окрестности линий разрыва γ. Линейная часть по σ энергии U вычисляется по формуле [2]

$$U = \int\limits_{\gamma} \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} K_\gamma \sigma \sin\alpha\, ds. \tag{4}$$

Здесь K_γ — нормальная кривизна срединной поверхности F недеформированной оболочки в направлении линии γ, α — угол между соприкасающейся плоскостью кривой γ и касательной плоскостью поверхности F; δ — толщина оболочки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Интегрирование выполняется по дуге s кривой γ.

Слагаемое A функционала W определяется обычным образом, как производимая внешней нагрузкой работа при деформации, задаваемой изгибающим полем u.

2. Использование принципа $\boldsymbol{B}$ связано с известными трудностями, так как приходится строить изгибающие разрывные поля с заранее не известными линиями и величинами разрыва (функции σ).

В данной работе показано, что для безмоментных оболочек слагаемое A функционала W так же, как и U, выражается через параметры поверхности F и изгибающего поля, определенные вдоль линий разрывов γ. Это позволило, не решая задачи о непосредственном определении изгибающих полей, получить критерий неустойчивости общего безмоментного напряженного состояния строго выпуклых оболочек в виде некоторого соотношения для инвариантов поля напряжений докритического равновесного состояния. При некоторых дополнительных предположениях относительно действующей на оболочку нагрузки и вида разрывных изгибающих полей аналогичное соотношение иным путем было получено ранее А. В. Погореловым [1], [2], [3]. Кроме того, в работе рассмотрены примеры по определению критических нагрузок.

Неустойчивость общего напряженного безмоментного состояния равновесия оболочек

3. Постановка задачи. Пусть условия закрепления края оболочки фиксированы и не допускают непрерывных бесконечно малых изгибаний ее срединной поверхности. Будем считать, что при достаточно малой внешней нагрузке существует единственная устойчивая форма равновесия рассматриваемой оболочки, близкая к форме недеформированной оболочки. С увеличением действующей на оболочку нагрузки может наступить критический момент, когда оболочка потеряет устойчивость. Допустим, что критическая нагрузка, вызывающая это явление, определяется, как нагрузка, при которой наряду с исходной (основной) формой равновесия оболочки существуют смежные, весьма близкие к ней, другие формы равновесия.

Кроме того, предположим, что либо докритическое напряженное состояние в известном приближении безмоментно, либо потеря устойчивости оболочки сопровождается изменением ее формы, локализуемой в некоторой области F^* срединной поверхности F оболочки, где ее напряженное состояние близко к безмоментному, хотя на остальной части оболочки оно может быть существенно моментным. Иными словами, если X — вектор плотности внешней поверхностной нагрузки, действующей на оболочку, а $T_{(\nu^*)}$ — вектор плотности контурного усилия, эквивалентного действию на область F^* остальной части оболочки, то в докритическом состоянии равновесия нагрузка $(X,\ T_{(\nu^*)})$ создает в F^* поле напряжения $T^{\alpha\beta}$, удовлетворяющее следующим уравнениям равновесия безмоментной теории оболочек:

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} + X^\alpha = 0,$$

$$T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + Z = 0 \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2), \tag{5}$$

а на границе f^* области F^* краевому условию

$$T^{\alpha\beta} r_{,\alpha} \nu^*_\beta = T_{(\nu^*)}. \tag{6}$$

Здесь $r(x^1,\ x^2)$ — радиус вектор точки $(x^1,\ x^2)$ на F с криволинейными координатами $x^1,\ x^2$; запятая означает ковариантную производную по соответствующей координате x^β в метрике $a_{\alpha\beta}$ поверхности F; $b_{\alpha\beta}$ — тензор второй квадратичной формы поверхности F; ν^* — единичный вектор нормали к f^* на поверхности F; $\nu^*_\beta = \nu^* r_{,\beta}$; $X = X^\alpha r_{,\alpha} + Zn$; n — единичный вектор нормали к F.

При определении критических нагрузок и форм потери устойчивости оболочки будем исходить из вариационного принципа B.

4. Вычислим слагаемое A в функционале W. Работа A, производимая нагрузкой X, $T_{(\nu^*)}$, действующей на F^*, при деформации, задаваемой изгибающим полем u, определяется по формуле

$$A = \iint\limits_{F^*} Xu\,dF^* + \int\limits_{f^*} T_{(\nu^*)} u\,df^*, \tag{7}$$

где интегрирование производится по поверхности F^* в первом интеграле и по ее границе f^* во втором интеграле.

Подставим в интеграл по поверхности в формуле (7) выражение для X через поле напряжений $T^{\alpha\beta}$ из уравнений (5). Преобразуем полученный поверхностный интеграл по формуле Грина к контурному, принимая во внимание уравнение для изгибающего поля u. С учетом краевого условия (6) правую часть (7) таким образом можно преобразовать к контурному интегралу вдоль линий разрыва γ изгибающего поля. Именно

$$A = -\int_{\gamma} T_{(\nu)} \Delta u ds, \tag{8}$$

где $T_{(\nu)} = T^{\alpha\beta} r_{,\alpha} \nu_{\beta}$, $\nu_{\beta} = \nu r_{,\beta}$, ν — единичный вектор нормали к γ на F.

Если изгибающее поле непрерывно ($\Delta u = 0$), то из формулы (8) получаем известный факт: сумма элементарных работ внешних сил, приложенных к оболочке, которая находится в состоянии безмоментного напряженного равновесия на перемещениях, соответствующих произвольным непрерывным изгибаниям срединной поверхности, равна нулю.

Подставляя (4) и (8) в функционал W, представим его через контурный интеграл вдоль линий разрыва γ

$$W = \int_{\gamma} \left[\frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} K_{\gamma} + T_{(\gamma)} \right] \sigma \sin \alpha \, ds. \tag{9}$$

Здесь учтено условие (3) и введено следующее обозначение для нормального усилия на площадках, перпендикулярных к линиям:

$$T_{(\nu)} = T^{\alpha\beta} \nu_{\alpha} \nu_{\beta}. \tag{10}$$

5. Пусть u — изгибающее поле, о котором идет речь в принципе B. Тогда λu также является таковым. Очевидно, что $W(\lambda u) = \lambda W(u)$. Но W стационарен на поле u, поэтому $\frac{dW}{d\lambda} = 0$ при $\lambda = 1$, т. е.

$$\int_{\gamma} \left[\frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} K_{\gamma} + T_{(\nu)} \right] \sigma \sin \alpha ds = 0. \tag{11}$$

Итак, если нагрузка, действующая на оболочку, критическая (напряженное состояние $T^{\alpha\beta}$ оболочки критическое), то вдоль каждой из линий разрыва должны выполняться равенства (11). Линии разрыва могут быть как замкнутыми, так и разомкнутыми. В случае защемленных оболочек ребро может находиться у края оболочки.

6. Рассмотрим сначала специальный случай нагружения, когда докритическое напряженное состояние таково, что отношение

$$T = \frac{T_{(\nu)}}{K_{\gamma}} \tag{12}$$

не зависит ни от точки P на F^*, где оно вычисляется, ни от направления кривой γ в точке P. Это означает, что тензоры $T^{\alpha\beta}$ и $c^{\alpha\nu}c^{\beta\mu}b_{\nu\mu}$ пропорциональны, т. е.

$$T^{\alpha\beta} = -Tc^{\alpha\nu}c^{\beta\mu}b_{\nu\mu}, \quad T = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Здесь $c^{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор с компонентами

$$c^{11} = c^{22} = 0, \quad c^{12} = -c^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

где a — дискриминант первой квадратичной формы поверхности F.

Условие (11) в рассматриваемом случае можно записать так:

$$\left[\frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} - T\right]\int\limits_{\gamma} K_{\gamma}\sigma \sin\alpha ds = 0. \tag{14}$$

Откуда, предположив, что кривые γ нигде не касаются асимптотических линий на F^*, и учитывая, что σ вдоль данной линии γ не меняет знака ([1] стр. 137—141), заключаем: при напряженном состоянии (13) — критическом параметр T, его определяющий, положителен и равен

$$T_{\text{кр}} = \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}. \tag{15}$$

При этом форма потери устойчивости (изгибающие поля u) в рассматриваемом приближении для W (9) не определяется.

Для создания напряженного состояния типа (13) в случае, если гауссова кривизна K поверхности F^* отлична от нуля, кроме приложенных вдоль края оболочки соответствующих усилий, необходимо, чтобы поверхностная нагрузка X удовлетворяла условию

$$X^{\alpha} = 0, \quad Z = -2KT.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить выражение (13) в уравнения (5).

Если $K \neq 0$, то критическое напряженное состояние можно задавать значением критической нормальной поверхностной нагрузки, равной

$$Z_{\text{кр}} = -\frac{2E\delta^2 K}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}. \tag{16}$$

В случае развертывающихся оболочек (без уплощений) с краем, совпадающим с линиями кривизны, напряженное состояние (13) реализуется, если прямолинейный край свободен, а криволинейный сжат вдоль образующих усилием q. Сжимающее усилие q должно быть пропорционально нормальной кривизне K_{22} поверхности F в направлении рассматриваемого края. Критическое значение усилия q равно

$$q_{\text{кр}} = \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} K_{22}.$$

В пологом эллиптическом параболоиде F с плоским краем f состояние (13), а значит и критическая нагрузка (16), реализуется тогда (сравни с (I) стр. 141—145), когда на f нормальные к F смещения $W=0$ и краевая нагрузка не создает момента относительно вертикальной оси, пересекающей f. Если же на f, кроме W равны нулю касательные к f смещения, то из (25) следует, что

$$Z_{\text{кр}} = -\frac{2E\delta^2 K}{\sqrt{3(1-\nu^2)}\left[1+2\frac{\sqrt{e(e+1)}}{1+\nu+2e}\right]}, \left(e = \frac{(K_{11}-K_{22})^2}{4K}\right), \tag{17}$$

так как $T^{(12)} = 0$, $T^{(11)} = -\frac{P}{2}\frac{K_{11}+\nu K_{22}}{K(1+\nu+2e)}$, $T^{22} = -\frac{PK_{22}+\nu K_{11}}{2K(1+\nu+2e)}$.

7. Общий случай нагружения. В дальнейшем речь будет идти только о строго выпуклых оболочках F^*. Нормальная кривизна срединной поверхности строго выпуклой оболочки $K_\gamma > c > 0$ (c — некоторая положительная константа), кроме того $\sin\alpha > 0$. Поэтому из условия (11) следует, что в критическом состоянии величина

$$\frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{T_{(\nu)}}{K_\gamma} \tag{18}$$

должна менять знак вдоль линии разрыва γ.

Введем на F^* ортогональную криволинейную систему координат (x^1, x^2) с координатными линиями, совпадающими с линиями кривизны. Преобразуем выражение (18) к следующему виду:

$$\frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{1}{2K}\left[Z - 2\sqrt{K}T^{(12)}\sin 2\psi - (T^{(11)}K_{11} - T^{(22)}K_{22})\cos 2\psi.\right. \tag{19}$$

Здесь

$$\operatorname{tg}\psi = -\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}\operatorname{tg}\varphi,$$

где φ — угол между кривой γ и координатной линией x^1, K_{11} и K_{22} — главные нормальные кривизны, $T^{(\alpha\beta)}$ — физические компоненты тензора поля напряжения $T^{\alpha\beta}$. При получении выражения (19) было использовано второе уравнение системы (5).

Минимизируя выражение (19) по углу φ, убеждаемся, что оно постоянно в тех точках P^0 поверхности F^*, где

$$T^{(12)} = 0,\ T^{(11)}K_{11} - T^{(22)}K_{22} = 0. \tag{20}$$

В остальных точках P' поверхности E^* оно имеет единственный минимум, достигаемый в направлении φ', определяемом равенством

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2K_{11}T^{(12)}}{T^{(11)}K_{11} - T^{(22)}K_{22} + \sqrt{Z^2 + 4K(T^{(12)^2} - T^{(11)}T^{(22)})}}. \tag{21}$$

Здесь нумерация координат выбрана так, чтобы

$$T^{(11)}K_{11} - T^{(22)}K_{22} \geqslant 0.$$

Выражение (19) в данной точке P поверхности F^* знакоопределено при любых значениях угла φ, если

$$\left| \frac{2E\delta^2 K}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + Z \right| > \sqrt{Z^2 + 4K(T_2^1 T_1^2 - T_1^1 T_2^2)}. \tag{22}$$

Оно знакоположительно при положительном выражении, стоящем под знаком модуля в неравенстве (22). В неравенстве (22) система координат не специализирована, жонглирование индексами тензора $T^{\alpha\beta}$ производится с помощью метрического тензора поверхности F.

Если в рассматриваемой точке P поверхности F^* левая часть неравенства (22) не превосходит правую, то в этой точке всегда существует направление φ_0, на котором выражение (19) обращается в нуль.

При достаточно малых нагрузках величина

$$\min_{F^*} \left[\frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{1}{2K} \left(Z - \sqrt{Z^2 + 4K(T_2^1 T_1^2 - T_1^1 T_2^2)} \right) \right] \tag{23}$$

положительна, а значит, и знакоположительно всюду на F^* выражение (18), и условие (11) реализовано быть не может. Отсюда заключаем, что при достаточно малых нагрузках безмоментное напряженное состояние устойчиво.

Выражение (23) определяется для данной оболочки заданием внешней нагрузки $(X, T_{(\nu^*)})$. Поэтому его можно рассматривать, как функцию от значений параметров Q, определяющих внешнюю нагрузку. Эту функцию будем обозначать через $\Phi(Q)$ или $\Phi(X, T_{(\nu^*)})$. Параметр Q имеет, вообще говоря, не более пяти компонент.

Обозначим через Y максимальную область (связную) параметров Q, в которой содержится окрестность, соответствующая малым нагрузкам и в которой имеет место неравенство

$$\Phi(X, T_{(\nu^*)}) > 0. \tag{24}$$

Безмоментное напряженное состояние оболочки, соответствующее нагрузке из области Y, устойчиво. В частности, Y может совпасть с областью всех допустимых значений внешней нагрузки, тогда безмоментное состояние будет устойчивым при любых допустимых нагрузках.

Пусть для рассматриваемой оболочки F^* существуют такие допустимые значения нагрузки, при которых левая часть неравенства (24) будет неположительна. Пусть y — граница области Y. На границе области Y функция Φ обращается в нуль. Нагрузку, соответствующую точкам границы области Y, будем называть верхней критической.

Если при данной верхней критической нагрузке минимум (23) достигается одновременно на множестве G точек поверхности F^*, содержащем либо область G^0 только из точек типа P^0, либо линию γ^1, направление которой в каждой ее точке типа P' совпадает с направлением φ', то соответствующее этой нагрузке состояние равновесия будет критическим. Действительно. Первый случай уже рассмотрен в пункте 6. Во втором случае в качестве линии разрыва γ в условии (11) можно, например, взять произвольную достаточно малую часть линий γ', т. к. вдоль нее выражение (18) тождественно равно нулю.

Пусть в любой окрестности данной точки $\overline{Q}$ на y существуют точки Q^-, у которых минимум (23) для соответствующего им напряженного безмоментного состояния отрицательный, т. е. $\Phi(Q^-) < 0$. Покажем, что в этом случае всегда найдется такая нагрузка Q^-, сколь угодно близкая к $\overline{Q}$, при которой соответствующее ей напряженное состояние будет критическим, если только среди точек множества G, где достигается минимум (23) для нагрузки $\overline{Q}$, найдется либо точка $\overline{P}'$ типа P', либо изолированная точка $\overline{P}^0$ типа P^0. Действительно. Пусть тензорное поле $T^{\alpha\beta}$ и функция $\Phi(Q)$ непрерывны. Тогда точка $\overline{P}'$ имеет окрестность $\varepsilon_{\overline{P}'}$, состоящую только из точек типа P'. Точка $\overline{P}^0$ имеет либо окрестность без областей, состоящих только из точек типа P^0, либо окрестность только из точек типа P^0, причем всюду в этих окрестностях, кроме точки $\overline{P}^0$ выражение (18) положительно. В каждом из трех указанных случаев выбираем нагрузку Q^-, не принадлежащую области $Y+y$ и настолько близкую к $\overline{Q}$, чтобы в указанную выше окрестность точки $\overline{P}'$ $(\overline{P}^0)$ попадала хотя бы одна точка $\tilde{P}$, где достигается минимум $F(\tilde{Q}^-)$, вместе с областью ε^-, в которой неравенство (22) имеет противоположный смысл. В ε^- либо можно выделить область ε', состоящую только из точек типа P', и в ней построить кривую γ', направление которой в каждой ее точке совпадает с направлением, где выражение (18) обращается в нуль, либо можно указать кривую γ^0 только из точек типа P^0 и на которой выражение (18) также обращается в нуль. Поэтому в рассматриваемом случае условие (11) реализовано.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Напряженное безмоментное состояние равновесия строго выпуклой оболочки F^* устойчиво, если действующая на нее внешняя нагрузка $XT_{(\nu^*)}$ такова, что имеет место неравенство (24).

Если действующая на оболочку F^* внешняя нагрузка может принимать значения (верхние критические), при которых в обо-

лочке возникают значительные сжимающие нормальные усилия такие, что в неравенстве (24) *достигается знак равенства,* т. е.

$$\max_{F^*} \frac{-Z+\sqrt{Z^2+4K\left(T_2^1T_1^2-T_1^1T_2^2\right)}}{K}=\frac{2E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (25)$$

то

либо соответствующее верхним критическим значениям нагрузки безмоментное состояние будет критическим,

либо оно может оказаться таковым для нагрузок (если они существуют), по крайней мере, сколь угодно близким к верхним критическим и для которых неравенство (24) *имеет противоположный смысл,*

либо безмоментное состояние равновесия будет критическим как в первом, так и во втором случае.

Неустойчивость безмоментных оболочек вращения

8. Рассмотрим несколько примеров по определению верхних критических значений внешней нагрузки для безмоментных строго выпуклых оболочек вращения, компоненты поля напряжений которых выписываются в замкнутом виде через параметры внешней нагрузки.

Пусть на рассматриваемую оболочку F^*, ограниченную двумя плоскими краями, действуют равномерное давление p и постоянные вдоль каждого края касательные, и нормальные усилия, значения которых вдоль меньшего края $\rho=\bar{\rho}$ равны соответственно τ и q. Через ρ мы обозначим радиус параллели на F^*. Тогда компоненты тензора поля напряжения будут выражаться через внешнюю нагрузку по формулам

$$T^{(11)}=R_2\left[\frac{p}{2}+\frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2}\left(\frac{q}{R_2(\bar{\rho})}-\frac{p}{2}\right)\right], \qquad (26)$$

$$T^{(22)}=R_2\left(p-\frac{1}{R_1}T^{(11)}\right),\quad T^{(12)}=\frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2}\tau^2,$$

где $R_1(\rho)$ — радиус кривизны меридиана, а $R_2(\rho)$ — радиус кривизны F^* в направлении параллели. Подставляя выражение (26) в формулу (25), получим следующее соотношение, определяющее верхние критические значения нагрузок p, q, τ

$$\frac{2E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}=\max_{\rho}\left\{\frac{1}{K}\left[-p+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\left(\left[\frac{R_2}{R_1}\left(1-\frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2}\right)-1\right]p+2\frac{\bar{\rho}^2R_2}{\rho^2R_1}\frac{q}{R_2(\bar{\rho})}\right)^2+4K\frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2}\tau^2}\right]\right\}. \quad (27)$$

Отсюда получаем верхние критические значения нагрузок (мы их будем снабжать индексом e) при следующих конкретных способах нагружения.

9. Однопараметрическое нагружение без кручения

$$\left(\tau = 0,\ q = \lambda p \frac{R_2(\bar{\rho})}{2},\ \lambda \text{ — фиксированная константа}\right)$$

$$|p_e| = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \min_{\rho} \frac{K}{\left|\frac{R_2}{R_1}\left[1-(1-\lambda)\frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2}\right]-1\right|-\operatorname{sign} p}. \qquad (28)$$

Отсюда следует, что при внутреннем давлении оболочка может потерять устойчивость, если только на ней найдется параллель, где

$$\frac{R_2}{R_1}\left[1-(1-\lambda)\frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2}\right] > 2.$$

Это условие обеспечивает наличие в оболочке значительных отрицательных нормальных усилий $T^{(22)}$ ($T^{(11)}$ положительные). Аналогичное условие можно получить и для оболочек произвольной формы. Действительно. Если в оболочке касательные усилия $T^{(12)}$ не всюду равны нулю, то из формулы (25) следует, что оболочка теряет устойчивость при наличии внутреннего давления p только тогда, когда отрицательные нормальные усилия (пусть таковыми будут $T^{(22)}$,) удовлетворяют неравенству

$$-\frac{E\Delta^2}{\sqrt{3(1-\nu)^2}} \leqslant T^{(22)} < 0.$$

Полагая в формуле (28) λ равным нулю, получим случай равномерного давления, при λ, равном $\frac{\bar{\rho}}{R(\bar{\rho})}$ — случай всестороннего сжатия, при $\bar{\rho} = 0$ — формулы для оболочки без отверстия при равномерном давлении.

10. Осевое сжатие (растяжение) ($p = \tau = 0$)

$$Q_e \equiv \frac{2\pi\bar{\rho}^2}{R_2(\bar{\rho})}|q_e| = \frac{2\pi E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \min_{\rho}\left(\frac{\rho}{R_2}\right)^2.$$

11. Кручение ($p = q = 0$)

$$M_e = 2\pi\bar{\rho}^2|\tau_e| = \frac{2\pi E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \min_{\rho} \rho^2\sqrt{K}.$$

12. В случае сферической оболочки ($R_1 = R_2 = R$, $\bar{\rho} \neq 0$) соотношение (27) принимает следующую форму:

$$-\bar{p} + \sqrt{\left(\frac{2q}{R} - p\right)^2 + 4\frac{\tau^2}{R^2}} = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}. \qquad (29)$$

Отсюда в частности следует, что для сферической оболочки с отверстием верхнее критическое давление p_e ($q = \tau = 0$) вдвое ниже классического значения для оболочек без отверстия. Это, по-видимому, связано с тем, что в данном случае возможны новые формы потери устойчивости, кроме того следует учесть, что минимум (27) достигается здесь у выреза $\rho = \bar{\rho}$, где докритическое состояние заведомо не линейное, поэтому формула (29) нуждается в дальнейшем уточнении.

13. Соотношением (25) можно пользоваться для учета несовершенств оболочки, приложения сил и закрепления края.

Например, в случае сферической оболочки, подверженной действию фиксированного усилия q меньшего q_e, верхнее критическое значение внешнего давления $p(\tau = 0)$ равно

$$|p_e| = \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} - \frac{q}{R}.$$

Если указанные выше несовершенства приводят к появлению малых дополнительных усилий Δq и τ, то верхнее критическое значение давления изменяется на величину

$$\Delta p_e \approx -\frac{\Delta q}{R} - \frac{2\tau^2}{R^2\left(\frac{2q}{R} - p_e\right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. Изд-во «Наука», М., 1967.

2. А. В. Погорелов. Исследование потери устойчивости сферической оболочки под внешним давлением, ДАН СССР, 200, № 4, 1971.

3. А. В. Погорелов. О влиянии несовершенства закрепления края оболочки на потерю устойчивости, ДАН СССР, т. 179, № 2, 1968.

Поступила 17 мая 1971 г.

ОБОБЩЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ СЕГРЕ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Я. П. Бланк, Н. Н. Бондина, Л. И. Маркова

Харьков

1. Рассмотрим регулярную точку M гиперповерхности S четырехмерного проективного пространства.

Пусть Γ кривая, расположенная на S и проходящая через M. Гиперплоскости, касательные к S в точках M и M_1, бесконечно близкой к M на Γ, пересекаются по 2-плоскости, предельным положением которой служит касательная к S в точке M 2-плоскость ω. Предельным положением прямой MM_1 служит прямая l, касательная к Γ в M.

Будем говорить, что касательная 2-плоскость ω и касательная прямая l взаимно сопряжены.

Тем самым устанавливается проективное соответствие между прямыми и 2-плоскостями, касательными к S в точке M.

Аналитически это соответствствие определяется так.

Пусть x и ξ — точечные и тангенциальные координаты гиперповерхности. Тогда

$$S\xi x = S\xi x_i = Sx\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$S\xi x_{ik} = -S\xi_i x_k = Sx\xi_{ik} = a_{ik}. \tag{1}$$

Условие сопряженности

$$Sd\xi\delta x = 0$$

или

$$a_{ik} du^i \delta u^k = 0. \tag{2}$$

Линейному элементу δu^k соответствуют линейные элементы du^i, заполняющие сопряженную ему касательную — плоскость.

Возьмем на Γ третью точку M_2. Точки M, M_1, M_2 определяют в пределе соприкасающуюся 2-плоскость π кривой Γ, а касательные гиперплоскости в точках M, M_1, M_2 определяют в пределе прямую p, принадлежащую гиперплоскости ξ.

Поэтому возникает соответствие между ∞^4 2-плоскостей π, проходящих через точку x гиперповерхности, и ∞^4 прямых p, принадлежащих гиперплоскости ξ, касательной к S в x.

Найдем аналитические выражения этого соответствия.

Соприкасающаяся 2-плоскость π к кривой Γ, лежащей на гиперповерхности S

$$(xdxd^2x) = y^0 (xx_1x_2) + y^1 (xx_2x_3) +$$
$$+ y^2 (xx_3x_1) + y^3 (xx_1X) + y^4 (xx_2X) + y_5 (xx_3X), \tag{3}$$

где X — точка вне касательной гиперплоскости ξ.

$$dx = x_r du^r,$$
$$d^2x = x_{rs} du^r du^s + x_r d^2u^r. \tag{4}$$

Для гиперповерхности в P_4 имеют место деривационные формулы [1]

$$x_{rs} = a_{rst} A^{ti} x_i + a_{rs} X + p_{rs} x, \tag{5}$$

где A^{ti} — алгебраические дополнения к a_{rs};

$$a_{rst} = S\xi x_{rst}. \tag{6}$$

Следовательно

$$d^2x = (a_{rst} A^{ti} x_i + a_{rs} X + p_{rs} x) du^r du^s + x_r d^2u^r. \tag{7}$$

Внеся в (3) выражения для dx и d^2x из (4) и (7), найдем локальные координаты y_i 2-плоскости π:

$$y^0 = du^1 d^2u^2 - du^2 d^2u^1 + a_{rst} (A^{t2} du^1 - A^{t1} du^2) du^r du^s,$$
$$y^1 = du^2 d^2u^3 - du^3 d^2u^2 + a_{rst} (A^{t3} du^2 - A^{t2} du^3) du^r du^s,$$

$$y^2 = du^3d^2u^1 - du^1d^2u^3 + a_{rst}(A^{t1}du^3 - A^{t3}du^1)\,du^r du^s, \tag{8}$$
$$y^3 = du^1F_2(du^1,\ du^2,\ du^3),$$
$$y^4 = du^2F_2(du^1,\ du^2,\ du^3),$$
$$y^5 = du^3F_2(du^1,\ du^2,\ du^3),$$

где

$$F_2(du^1,\ du^2,\ du^3) = a_{rs}du^r du^s. \tag{9}$$

2-плоскость π зависит от четырех параметров, ее шесть локальных координат y^i однородны и связаны зависимостью

$$y^0y^5 + y^1y^3 + y^2y^4 \equiv 0. \tag{10}$$

Для соответствующей прямой p

$$(\xi d\xi d^2\xi) = \eta^0(\xi\xi_1\xi_2) + \eta^1(\xi\xi_2\xi_3) + \eta^2(\xi\xi_3\xi_1) + $$
$$+ \eta^3(\xi\xi_1\Xi) + \eta^4(\xi\xi_2\Xi) + \eta^5(\xi\xi_3\Xi), \tag{11}$$

где Ξ — гиперплсскость, не проходящая через x.

Воспользовавшись деривационными формулами гиперповерхности в тангенциальных координатах [1]

$$\xi_{rs} = -a_{rst}A^{ti}\xi_i + a_{rs}\Xi + \pi_{rs}\xi, \tag{12}$$

находим выражения для локальных координат

$$\eta^0 = du^1d^2u^2 - du^2d^2u^1 - (A^{t2}du^1 - A^{t1}du^2)\,a_{rst}du^r du^s,$$
$$\eta^1 = du^2d^2u^3 - du^3d^2u^2 - (A^{t3}du^2 - A^{t2}du^3)\,a_{rst}du^r du^s,$$
$$\eta^2 = du^3d^2u^1 - du^1d^2u^3 - (A^{t1}du^3 - A^{t3}du^1)\,a_{rst}du^r du^s, \tag{13}$$
$$\eta^3 = du^1F_2(du^1,\ du^2,\ du^3),$$
$$\eta^4 = du^2F_2(du^1,\ du^2,\ du^3),$$
$$\eta^5 = du^3F_2(du^1,\ du^2,\ du^3).$$

Локальные координаты прямой p связаны зависимостью

$$\eta^0\eta^5 + \eta^1\eta^3 + \eta^2\eta^4 \equiv 0. \tag{14}$$

Из (8)

$$du^i = \lambda y^{i+2}\ \ (i = 1, 2, 3), \tag{15}$$
$$\lambda\sqrt{F_2(y^3, y^4, y^5)} = 1. \tag{16}$$

Из (8) и (13) следует

$$\rho\eta^0 = y^0F^2(y^3,\ y^4,\ y^5) - 2a_{rst}y^{r+2}y^{s+2}\ (A^{t2}y^3 - A^{t1}y^4),$$
$$\rho\eta^1 = y^1F_2(y^3,\ y^4,\ y^5) - 2a_{rst}y^{r+2}y^{s+2}\ (A^{t3}y^4 - A^{t2}y^5),$$
$$\rho\eta^2 = y^2F_2(y^3,\ y^4,\ y^5) - 2a_{rst}y^{r+2}y^{s+2}\ (A^{t1}y^5 - A^{t3}y^3),$$
$$\rho\eta^3 = y^3F_2(y^3,\ y^4,\ y^5), \tag{17}$$
$$\rho\eta^4 = y^4F_2(y^3,\ y^4,\ y^5),$$
$$\rho\eta^5 = y^5F_2(y^3,\ y^4,\ y^5).$$

Полученное соответствие между 2-плоскостями, инцидентными точке x гиперповерхности, и прямыми, инцидентными ее касательной гиперплоскости ξ — бирациональное третьей степени и обобщает соответствие Сегре [2] на гиперповерхности в P_4.

2. Рассмотрим обобщение соответствия Сегре на гиперповерхности n-мерного проективного пространства.

Пусть M точка на гиперповерхности S пространства P_n.

Возьмем на кривой Γ, расположенной на S и проходящей через M, бесконечно близкую точку M_1. Две гиперплоскости, касательные к S в M, M_1, пересекаются по $(n-2)$-плоскости, которая в пределе служит касательной $(n-2)$-плоскостью к S в M.

Эту касательную $(n-2)$-плоскость будем называть сопряженной с прямой, касательной к Γ в точке M.

Условие сопряженности

$$S dx \delta\xi = 0,$$

или

$$a_{ik} du^i \delta u^k = 0, \tag{18}$$

где

$$a_{ik} = S\xi x_{ik} = -S x_i \xi_k = S x \xi_{ik}. \tag{19}$$

Три бесконечно близкие точки на кривой Γ, лежащей на гиперповерхности S, в пределе определяют соприкасающуюся 2-плоскость к Γ. Касательные гиперплоскости в этих трех точках пересекаются по $(n-3)$-плоскости, которая имеет своим пределом некоторую $(n-3)$-плоскость, принадлежащую касательной гиперплоскости к S в точке M.

Тем самым устанавливается соответствие между $(n-3)$-плоскостями, лежащими в касательной гиперплоскости к S в точке M, и 2-плоскостями, проходящими через M.

Последние мы можем рассматривать как соприкасающиеся к кривым на S, проходящим через M.

Найдем аналитические выражения этого соответствия.

Соприкасающаяся плоскость к кривой Γ на S

$$(x dx d^2x) = y^{jk}(x x_j x_k) + y^i (x x_i X), \tag{20}$$

где X — точка, не лежащая в касательной гиперплоскости к S в точке M

$$d^2x = x_{rs} du^r du^s + x_r d^2u^r. \tag{21}$$

Деривационные формулы гиперповерхности

$$x_{rs} = a_{rst} A^{ti} x_i + a_{rs} X + p_{rs} x, \tag{22}$$

здесь A^{ti} — алгебраические дополнения к a_{rs}.

$$a_{rst} = S\xi x_{rst}. \tag{23}$$

По (22)

$$d^2x = (a_{rst}A^{ti}du^r du^s + d^2u^i)x_i + a_{rs}du^r du^s X + p_{rs}du^r du^s. \tag{24}$$

Из (20) с помощью (24) находим выражения локальных координат y^{ik}, y^i

$$y^{jk} = du^j(a_{rst}A^{tk}du^r du^s + d^2u^k) - du^k(a_{rst}A^{tj}du^r du^s + d^2u^j) \tag{25}$$

$$y^i = du^i F(du^1, \ldots, du^{n-1}),$$

где

$$F(du^1, \ldots, du^{n-1}) = d_{rs}du^r du^s. \tag{26}$$

Для соответствующей $(n-3)$-плоскости

$$(\xi d\xi d^2\xi) = \eta^{jk}(\xi\xi_j\xi_k) + \eta^i\xi\xi_i\Xi, \tag{27}$$

где Ξ — гиперплоскость, не проходящая через точку x.

Воспользовавшись деривационными формулами гиперповерхности в тангенциальных координатах

$$\xi_{rs} = a_{rst}A^{ti}\xi_i + a_{rs}\Xi + \pi_{rs}\xi, \tag{28}$$

найдем выражения для локальных координат η^{jk}, η^i

$$\eta^{jk} = du^k(a_{rst}A^{tj}du^r du^s + d^2u^j - du^j(a_{rst}A^{tk}du^r du^s + d^2u^k), \tag{29}$$

$$\eta^i = du^i F(du^1, \ldots, du^{n-1}).$$

Из формул (25) следует

$$du^k = \lambda y^k, \tag{30}$$

$$\lambda\sqrt[3]{F(y^1, \ldots, y^{n-1}} = 1. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\rho\eta^{jk} = y^{jk}F(y^1, \ldots, y^{n-1}) + 2a_{rst}y^r y^s(y^k A^{tj} - y^j A^{tk}),$$

$$\rho\eta^i = y^i F(y^1, \ldots, y^{n-1}). \tag{32}$$

Уравнения (32) обобщают соответствие Сегре на гиперповерхности n-мерного проективного пространства. Соответствие бирационально, третьей степени.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Fubini — E. Čech, Geometria projettiva differenziale, т. II, Bologna, 1927.
2. C. Segre. Complementi alla teoria delle tangenti conjuagate di una superficie. Rend dei Lincei, 5, 17, сем. 2, 1908, стр. 410.

Поступила 31 мая 1971 г.

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВАЯ АКСИОМАТИКА n-МЕРНОГО ФЛАГОВОГО ПРОСТРАНСТВА

В. Р. Болотин

Южно-Сахалинск

В работах геометров кильской школы [1]—[2] построена теоретико-групповая аксиоматика четырех из девяти плоских геометрий Кэли-Клейна — евклидовой, гиперболической, эллиптической и псевдоевклидовой. В дальнейшем в ряде работ (см. библиографию в [1]) было дано теоретико-групповое обоснование пространственных геометрий, группы движений которых являются подгруппами ортогональной группы.

В статье рассматриваются теоретико-групповая аксиоматика n-мерного флагового пространства F_n (см. [3]).

1. Система аксиом и первые следствия

Основное допущение. *Пусть задана группа G_n и система S ее инволютивных образующих, причем*

1. $S = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} S^{(k)}$, где $(\forall k)(S^{(k)} \neq \varnothing)$.
2. $(\forall i \neq k)(S^{(i)} \cap S^{(k)} = \varnothing)$.
3. $(\forall g \in G_n)(a \in S^{(i)} \Rightarrow a^g \in S^{(i)})$; $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Элементы из $S^{(0)}$ обозначим прописными буквами латинского алфавита и будем называть точками. Элементы из $S^{(k)}$ $(k > 0)$ будем называть k-мерными плоскостями и обозначать строчными буквами латинского алфавита с индексом сверху, т. е. через $a^{(k)}$ и т. д., через $a^{(n)}$ — всю группу G_n.

Пусть $I = \{a \in G_n \mid a^2 = 1 \wedge a \neq 1\}$. Если $a, b \in I$ и $ab \in I$, то будем писать $a \mid b$. Очевидно, что при $a \neq b$

$$a \mid b \rightleftarrows ab = ba \rightleftarrows a^b = a \rightleftarrows b^a = b.$$

Если $a, b \in I$, но $ab \notin I$, то будем писать $\overline{a \mid b}$, где черта, как обычно, означает отрицание.

Если

$$a_{ij} \in I, \ (i = 1, 2, \ldots, k; \ j = 1, 2, \ldots, m),$$

то символ

$$a_{11}, \ldots, a_{1m} \mid a_{21}, \ldots, a_{2m} \mid \ldots \mid a_{k1}, \ldots, a_{km}$$

означает, что $a_{pq} \mid a_{rs}$ при $p < r$.

Определение. 1. *Точки A и B будем называть k-несоединимыми, где $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ и писать $\tilde{H}_k(A, B)$, если*

$$(\forall a^{(k)})(A \mid a^{(k)} \Rightarrow \overline{B \mid a^{(k)}}).$$

Дополнительно положим

$$\widetilde{H}_0(A, B) = (\exists a^{(1)})(A, B \mid a^{(1)}).$$

Определение 2. *Систему точек $A_0, A_1, \ldots, A_s$ назовем базисом, если для всех $k = 0, 1, \ldots, s-1$.*

1. $\widetilde{H}_k(A_k, A_{k+1})$;
2. $(\exists a^{(k)})(A_0, A_1, \ldots, A_k \mid a^{(k)})$.

Если $A_0, \ldots, A_s$ базис, то будем писать $[A_k]_0^s$. Если $(\exists a^{(s)})(A_0, \ldots, A_s \mid a^{(s)})$, то будем писать

$$[A_k]_0^s \subset a^{(s)} \text{ или } a^{(s)} = ([A_k]_0^s).$$

Определение 3. *Если $s < k$ и $a^{(s)} \mid a^{(k)}$, то будем говорить, что плоскость $a^{(s)}$ инцидентна плоскости $a^{(k)}$ (или «$a^{(s)}$ принадлежит $a^{(k)}$» или «$a^{(k)}$ проходит через $a^{(s)}$»).*

Рассмотрим следующую систему аксиом $\{F_n\}$:

$S^k: (\forall a^{(k)})(\forall b^{(k)})(\forall c^{(k)})(\exists d^{(k)})(a^{(k)}b^{(k)}c^{(k)} = d^{(k)})$,

$G: A^B = A \Rightarrow A = B$,

$N: (\exists a^{(n-1)})(\exists A)\overline{(A \mid a^{(n-1)})}$,

$E_1^k: (\forall [A_i]_0^k)(\exists!\, a^{(k)})(a^{(k)} = ([A_i]_0^k))$,

$E_2^k: (\forall a^{(k)})(\exists a^{(k-1)})(\exists A)(A, a^{(k-1)} \mid a^{(k)} \wedge \overline{A \mid a^{(k-1)}})$,

$V^k: (\forall a^{(k)})(\forall b^{(k)})(a^{(k)} \neq b^{(k)} \wedge (\exists a^{(k+1)})(a^{(k)}, b^{(k)} \mid a^{(k+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists A)((a^{(k)}b^{(k)})^A = b^{(k)}a^{(k)} \vee (a^{(k)}b^{(k)})^A = a^{(k)}b^{(k)}))$,

$H_1^k: (\forall a^{(k)})(\forall A)\overline{(A \mid a^{(k)}} \Rightarrow (\exists B)(\exists b^{(k)})(ABa^{(k)} = b^{(k)}))$.

H_2^k: *Если $A \mid a^{(k)}$, то существует не более одной точки B, такой что*

$$B \mid a^{(k)} \text{ и } \widetilde{H}_k(A, B).$$

$T_1^k: (\forall s < k)(A_0, \ldots, A_s \mid a^{(k)} \wedge [A_i]_0^s \Rightarrow ([A_i]_0^s) \mid a^{(k)})$,

$T_2^k: (\forall s < k)(A \mid a^{(s)} \wedge a^{(s)} \mid a^{(k)} \Rightarrow A \mid a^{(k)})$.

Здесь $k = 0, 1, \ldots, n-1$ в аксиомах S^k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ в E_1^k, E_2^k, H_1^k, H_2^k, V^k $k = 2, 3, \ldots, n-1$ в T_1^k, T_2^k.

В V^{n-1} вторую часть посылки можно опустить. Символ $\exists!$ означает «существует и единственен».

Из аксиом S^k, G, T_1^k, T_2^k, E_2^k следуют теоремы:

1.1. $a^{(k)}b^{(k)}c^{(k)} = c^{(k)}b^{(k)}a^{(k)}$,

1.2. $a^{(k)}b^{(k)}c^{(k)}d^{(k)} = c^{(k)}d^{(k)}a^{(k)}b^{(k)}$, 1.3. $(a^{(k)}b^{(k)})^{c^{(k)}} = b^{(k)}a^{(k)}$,

1.4. $a^{(k)}(a^{(k)})^{b^{(k)}c^{(k)}} = (a^{(k)})^{b^{(k)}}(a^{(k)})^{c^{(k)}} = (b^{(k)}c^{(k)})^2$,

1.5. $a^{(s)},\ b^{(s)} \mid a^{(k)} \Rightarrow (a^{(s)})^{b^{(s)}} \mid a^{(k)}$,

1.6. 1. $(AB)^2 = 1 \rightleftarrows A = B \rightleftarrows AB = 1$,

2. $M^{AB} = M \rightleftarrows M^A = M^B \rightleftarrows A = B$.

1.7. $A^M = A^{a^{(k)}} \Rightarrow M \mid a^{(k)}$.

1.8. $(\forall a^{(k)})(\exists A_0)\ldots(\exists A_k)(A_0, \ldots, A_k \mid a^{(k)} \wedge (\forall i)(\forall j)(A_i \neq A_j))$.

1.9. *Отношение инцидентности симметрично и транзитивно.*

2. Отношение $H_k(A, B)$.

Определим на множестве $S^{(0)} \times S^{(0)}$ предикат

$$H_k(A, B) = (\exists a^{(k)})(\exists b^{(k)})(AB = a^{(k)}b^{(k)}).$$

Из определения следует

2.1. $H_k(A, B) \rightleftarrows (\exists c^{(k)})(\exists d^{(k)})(AB = d^{(k)}c^{(k)})$.

Далее легко доказать теоремы 2.2—2.7.

2.2. $H_k(A, B)$ *есть отношение эквивалентности.*

2.3. $H_k(A, B) \rightleftarrows (\forall a^{(k)})((AB)^{a^{(k)}} = BA) \rightleftarrows \widetilde{H}_k(A, B) \rightleftarrows$

$\rightleftarrows (\forall a^{(k)})(B \mid a^{(k)} \Rightarrow A^B = A^{a^{(k)}}) \rightleftarrows (\overset{!}{\exists} a^{(k)})(A^{a^{(k)}} = B)$,

2.4. $(\forall A)(\forall a^{(k)})\overline{(A \mid a^{(k)}} \Rightarrow (\exists! B)(B \mid a^{(k)} \wedge H_k(A, B)))$,

2.5. $H_k(A, B) \wedge B \mid a^{(k)} \Rightarrow A \mid ABa^{(k)}$,

2.6. $H_k(A, B) \Rightarrow (\exists! M)(A^M = B \wedge H_k(A, B))$,

2.7. 1. $(\forall A)(\exists a^{(n-1)})\overline{(A \mid a^{(n-1)})}$,

2. $(\forall A)(\forall k)(\exists a^{(k)})(A \mid a^{(k)})$, $(k = 1, \ldots, n-1$

2.8. $(\forall a^{(k)})(\exists A_0)\ldots(\exists A_k)([A_i]_0^k \wedge a^{(k)} = ([A_i]_0^k))$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $a^{(k)}$. По аксиоме E_2^k существуют A_k, $a^{(k-1)}$ такие, что $\overline{A_k \mid a^{(k-1)}}$ и $A_k, a^{(k-1)} \mid a^{(k)}$. Тогда

$$(\exists A_{k-1})(A_{k-1} \mid a^{(k-1)} \wedge H_{(k-1)}(A_{k-1}, A_k)),$$

причем, если

$$A_kA_{k-1} = b^{(k-1)}\ a^{(k-1)},\ \text{то}\ b^{(k-1)} \mid a^{(k)}.$$

Допустим, что уже построены $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_{s+1}$ так, что

1. $H_j(A_j, A_{j+1})$. 2. $A_jA_{j+1} = a^{(j)}b^{(j)}$. 3. $a^{(j)}, b^{(j)} \mid a^{(j+1)}$.

4. $A_j \mid a^{(j)}$. 5. $a^{(s+1)} \mid a^{(s+2)} \mid \ldots \mid a^{(k)}$, $(j = s+1, \ldots, k-1)$.

Построим A_s.

$$(\exists A)(\exists c^{(s)})(A, c^{(s)} \mid a^{(s+1)} \wedge \overline{A \mid c^{(s)}}).$$

Если $\overline{A_{s+1} \mid c^{(s)}}$, то положим $a^{(s)} = c^{(s)}$ и определим A_s из условий $A_s \mid a^{(s)}$ и $H_s(A_s, A_{s+1})$. Тогда $b^{(s)} \mid a^{(s+1)}$ и $A_s A_{s+1} = a^{(s)} b^{(s)}$. Если $A_{s+1} \mid c^{(s)}$, то пусть $B \mid c^{(s)}$, $H_s(A, B)$ и $AB = a^{(s)} c^{(s)}$. Тогда $\overline{A_{s+1} \mid a^{(s)}}$ (если $A_{s+1} \mid a^{(s)}$, то $(a^{(s)} c^{(s)})^{A_{s+1}} = (AB)^{A_{s+1}} = BA = a^{(s)} c^{(s)} = AB$, откуда $A = B$) и точка A_s строится, как описано выше.

Вторая часть теоремы следует из аксиомы E_1^k.

Следствия.

1. $(\forall a^{(k)})(\exists a^{(0)}) \ldots (\exists a^{(k-1)})(a^{(0)} \mid a^{(1)} \mid \ldots a^{(k-1)} \mid a^{(k)})$,
2. $(\forall a^{(k)})(\exists a^{(k+1)})(a^{(k)} \mid a^{(k+1)})$,
3. $H_k(A, B) \Rightarrow (\exists a^{(k+1)})(A, B \mid a^{(k+1)}) \vee H_{k+1}(A, B)$,
4. $a^{(k)} = ([A_i]_0^k) \Rightarrow (\exists B_0) \ldots (\exists B_k)([B_i]_0^k \subset a^{(k)} \wedge H_{s-1}(B_0, B_s))$,

2.9. $AB = a^{(k)} b^{(k)} \Rightarrow (\forall b^{(k-1)})(b^{(k-1)} \mid B, b^{(k)} \Rightarrow A^{b^{(k-1)}} = A^B)$.

Доказательство. Пусть $b^{(k-1)} \mid B, b^{(k)}$. Тогда

$$(Aa^{(k)})^{b^{(k-1)}} = (Aa^{(k)})^B = (Aa^{(k)})^{b^{(k)}} = Aa^{(k)},$$

откуда $H_k(A, A^{b^{(k-1)}})$. По 2.4

$$(\exists B_1)(B_1 \mid b^{(k-1)} \wedge H_{k-1}(A, B_1)).$$

Тогда по 2.3 $A^{B_1} = A^{b(k-1)}$, а значит, $H_k(A, A^{B_1})$, т. е $H_k(A, B_1)$. Но $B_1 \mid b^{(k)}$, а тогда по 2.4 $B_1 = B$ и $A^{b^{(k-1)}} = A^B$.

Из 2.9 следуют

2.10. $AB = a^{(k)} b^{(k)} \Rightarrow (\forall b^{(k-1)})(b^{(k-1)} \mid B, b^{(k)} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists! a^{(k-1)})(AB = a^{(k-1)} b^{(k-1)})$,

2.11. $H_k(A, B) \Rightarrow (\forall s < k)(H_s(A, B))$,

2.12. $H_k(A, B) \Rightarrow (\forall s \leqslant k)(\forall a^{(s)})((AB)^{a^{(s)}} = BA)$,

2.13. $AB = a^{(s)} b^{(s)} = a^{(k)} b^{(k)} \Rightarrow (\forall c^{(m)})(a^{(s)} \mid c^{(m)} \Rightarrow$
$\overline{\Rightarrow b^{(s)} \mid c^{(m)})}$, $(s = 1, 2, \ldots, k-1;\ m = s+1, \ldots, k)$,

$$H_k(A, B) \wedge AA_1 = BB_1 \Rightarrow ((\exists a^{(s)})(A, A_1 \mid a^{(s)}) \rightleftarrows (\exists b^{(s)})(B, B_1 \mid b^{(s)})). \tag{2.14}$$

2.15. Пусть $A, B \mid a^{(s)} \mid a^{(k)}$; $A_1, B_1 \mid a^{(k)}$; $H_k(A, A_1)$; $H_k(B, B_1)$. Тогда $(\exists b^{(s)})(A_1, B_1 \mid b^{(s)} \mid a^{(k)})$, $a^{(k)} \mid b^{(k)} \Rightarrow a^{(k)} = b^{(k)}$,

2.16. $a^{(k)} \mid b^{(k)} \Rightarrow a^{(k)} = b^{(k)}$.

Доказательство. Если $a^{(k)} = ([A_i]_0^k)$, то $A_i^{b^{(k)}} | a^{(k)}$ и из $H_k(A_i, A_i^{b^{(k)}})$ следует $A_i^{b^{(k)}} = A_i$, т. е. $A_i | b^{(k)}$, откуда $b^{(k)} = a^{(k)}$.

Следствия.

1. $(a^{(k)}b^{(k)})^2 = 1 \rightleftarrows a^{(k)} = b^{(k)} \rightleftarrows a^{(k)}b^{(k)} = 1$,
2. $(a^{(k)})^{c^{(k)}} = (a^{(k)})^{b^{(k)}} \rightleftarrows b^{(k)} = c^{(k)}$,
3. $A, a^{(k)} | a^{(k+1)}, b^{(k+1)} \Rightarrow a^{(k+1)} = b^{(k+1)} \vee A | a^{(k)}, \ (k \geqslant 1)$.

3. Отношение $\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)})$.

Определим на множестве $S^{(k)} \times S^{(k)}$ предикат

$$\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)}) = (\exists A)(\exists B)(a^{(k)}b^{(k)} = AB).$$

Так как из определения следует

3.1. $\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)}) \rightleftarrows a^{(k)}b^{(k)} = AB \rightleftarrows H_k(A, B)$,

то из свойств отношения $H_k(A, B)$ следуют теоремы:

3.2. $\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)})$ *есть отношение эквивалентности.*

$$\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)}) \rightleftarrows (\exists M)((a^{(k)})^M = b^{(k)}) \rightleftarrows$$

3.3. $\rightleftarrows \Pi_k(a^{(k)}, (a^{(k)})^{b^{(k)}}) \rightleftarrows (\forall M))(M | a^{(k)} \Rightarrow (b^{(k)})^{a^{(k)}} = (b^{(k)})^M)$,

3.4. $\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)}) \Rightarrow a^{(k)} \cap b^{(k)} = \varnothing$,

3.5. $(\forall A)(\forall b^{(k)})\overline{(A | b^{(k)}} \Rightarrow (\exists!\, a^{(k)})(a^{(k)} | A \wedge \Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)}))$,

3.6. $\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)}) \Rightarrow (\exists!\, m^{(k)})((a^{(k)})^{m^{(k)}} = b^{(k)} \wedge \Pi_k(a^{(k)}, m^{(k)}))$,

3.7. $\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)}) \wedge A, A_1 | a^{(k)} \wedge B | b^{(k)} \Rightarrow BAA_1 | b^{(k)}$,

3.8. $(\exists M)((a^{(k)}b^{(k)})^M = b^{(k)}a^{(k)}) \Rightarrow \Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)})$.

Доказательство. Если $H_k(A, M)$, то $MA = m^{(k)}c^{(k)}$, откуда

$$A = Mm^{(k)}c^{(k)} \text{ и } (a^{(k)}b^{(k)})^A = (a^{(k)}b^{(k)})^{Mm^{(k)}c^{(k)}} = b^{(k)}a^{(k)}.$$

Пусть $A | a^{(k)}$, тогда $(a^{(k)}b^{(k)})^A = a^{(k)}(b^{(k)})^A = b^{(k)}a^{(k)}$, откуда по 3. 3 $\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)})$.

Аналогично можно доказать

3.9. $(\exists a^{(k)})((AB)^{a^{(k)}} = BA) \Rightarrow H_k(A, B)$.

Из 2. 8 следует

3.10. $\Pi_k(a^{(k)}, b^{(k)}) \rightleftarrows (\exists A)(\exists B)(b^{(k)} = (a^{(k)})^{AB})$,

4. Взаимное расположение плоскостей

Следующие теоремы (которые мы приводим без доказательства) описывают некоторые важные случаи взаимного расположения плоскостей в групповом пространстве:

4.1. $$(\exists M)(Ma^{(s)}a^{(k)} \in I) \Rightarrow (\exists A)(\exists B)(\exists b^{(k)})(A \mid a^{(k)} \mid \wedge B \mid a^{(s)} \mid b^{(k)} \wedge \wedge AB = a^{(k)}b^{(k)}), \quad (s < k),$$

4.2. $$(\exists M)\left(M^{a^{(s)}} = M^{a^{(k)}}\right) \Rightarrow (\exists A)(A \mid a^{(s)},\ a^{(k)} \mid \wedge H_k(A,\ M)), (s < k),$$

4.3. $$(\exists a^{(k)})\left((a^{(k)})^M = (a^{(k)})^{a^{(s)}}\right) \Rightarrow (\exists b^{(k)})(b^{(k)} \mid M \wedge b^{(k)} \mid a^{(s)} \wedge \wedge \Pi_k(a^{(k)},\ b^{(k)})),$$

4.4. $$(\exists a^{(s)})((a^{(s)})^{a^{(k)}} = (a^{(s)})^A) \Rightarrow (A \mid a^{(k)} \mid \wedge Aa^{(s)}a^{(k)} \in I),$$

4.5. $$(\exists a^{(s)})\left((a^{(s)})^{a^{(k)}} = (a^{(s)})^{b^{(k)}}\right) \Rightarrow (\exists b^{(s)})(b^{(s)} \mid a^{(k)},\ b^{(k)} \mid).$$

Из 3.10, 4.2 и аксиомы V^k следует

4.6. $$a^{(k)}b^{(k)} \mid a^{(k+1)} \Rightarrow \Pi_k(a^{(k)},\ b^{(k)}) \vee (\exists A)(A \mid a^{(k)},\ b^{(k)}).$$

5. Теорема редукции

Из основного допущения и аксиом S^k сразу следует.

5. 1. Любой элемент $g \in G_n$ может быть представлен в виде произведения не более чем 2 n образующих.

5. 2. Центр группы G_n состоит только из единицы.

Доказательство. Из аксиомы G и 2. 16 следует, что образующие не входят в центр Z_n. Допустим, что элементы, состоящие не более чем из $2n-1$ образующих не входят в центр. Если g есть произведение $2n$ образующих, то достаточно рассмотреть случай

$$g = ABa^{(1)}b^{(1)} \ldots a^{(n-1)}b^{(n-1)}.$$

Пусть $g \in Z_n$, тогда

$$g^2 = (AB \ldots a^{(n-1)}b^{(n-1)})(AB \ldots a^{(n-1)}b^{(n-1)}) =$$
$$= Ba^{(1)} \ldots a^{(n-1)}b^{(n-1)}Ba^{(1)} \ldots a^{(n-1)}b^{(n-1)} = (a^{(1)})^B \ldots (b^{(n-1)})^B \times$$
$$\times a^{(1)} \ldots b^{(n-1)} = a_1^{(1)}c^{(1)} \ldots a_1^{(n-1)}c^{(n-1)} \in Z_n,$$

откуда в силу предположения $g^2 = 1$, т. е. $g = 1$ или $g \in I$.

Рассмотрим случай $g \in I$.

1. $\Pi_{n-1}(a^{(n-1)},\ b^{(n-1)})$. Тогда $a^{(n-1)}b^{(n-1)} = MP$ и g содержит менее $2n-1$ сомножителей.

2. $(\exists M)(M \mid a^{(n-1)},\ b^{(n-1)})$. Пусть $H_{n-2}(P,\ Q)$. Тогда по 2. 12 $(PQ)^{a^{(s)}} = QP$ для всех $s = 0, 1, \ldots, n-2$. Так как $PQg = gPQ$, то $(PQ)^g = PQ$, откуда $(PQ)^{a^{(n-1)}b^{(n-1)}} = PQ$.

Пользуясь произволом в выборе точек P и Q, положим $P = M$; $Q \mid a^{(n-1)}$; $\overline{Q \mid b^{(n-1)}}$ и пусть $R \mid b^{(n-1)}$ и $H_{n-1}(Q, R)$. Тогда $(MQ)^{a^{(n-1)}b^{(n-1)}} = MQ^{b^{(n-1)}} = MQ^R = MQ$, откуда $Q = R$, что противоречит выбору точки Q.

Итак, $g \in I \Rightarrow g \notin Z_n$.

Следствие. *Группа $\overset{*}{G_n}$ внутренних автоморфизмов группы G_n изоморфна группе G_n.*

6. Изотропные плоскости

Пусть $A \in G_n$ и $\omega_A^{(k)} = \{M \mid H_{n-k}(A, M)\}$. Из свойств отношения $H_k(A, B)$ следуют

(6.1) $(\forall A)(\forall k)(\exists!\, \omega^{(k)})\ (A \in \omega^{(k)})$,

(6.2) $B \notin \omega_A^{(k)} \Rightarrow \omega_A^{(k)} \cap \omega_B^{(k)} = \varnothing$,

(6.3) $s < k \Rightarrow (\forall A)\left(\omega_A^{(k)} \subset \omega_A^{(k)}\right)$,

(6.4) $(\forall A)(\exists \omega^{(1)}) \ldots (\exists \omega^{(n-1)})\ (A \in \omega^{(1)} \subset \ldots \subset \omega^{(n-1)})$,

(6.5) $(\forall \omega^{(k)})(\forall a^{(n-k)})(\exists!\, M)\ (M \mid a^{(n-k)} \wedge M \in \omega^{(k)})$.

Определение 1. $\omega_A^{(k)}$ *назовем k-мерной изотропной плоскостью первого типа, проходящей через точку A.*

Определение 2. *Пусть*

$$\varepsilon_A^{(1;\,k)} = \{M \mid H_{n-k}(A, M) \wedge M \mid a^{(k+1)}\}, \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

$\varepsilon_A^{(1;\,k)}$ *назовем одномерной k-изотропной плоскостью второго типа (k-изотропной прямой) с базой A.*

Для общности положим $\varepsilon^{(1;\,0)} = a^{(1)}$, $\varepsilon^{(1;\,n-1)} = \omega^{(1)}$.

Через каждую точку группового пространства проходят n-прямых

(6.6) $\varepsilon^{(1;\,0)}, \ldots, \varepsilon^{(1;\,n-1)}$.

Пусть задана $\varepsilon^{(1;\,k)}$, где $k = 0, 1, \ldots, n-2$. Тогда $(\exists a^{(k+1)}) \times (\varepsilon^{(1;\,k)} \subset a^{(k+1)})$. По следствию 3 из 2.8

$$(\forall m)(m > k+1 \Rightarrow (\exists a^{(m)})(a^{(k+1)} \mid a^{(m)}).$$

Это позволяет ввести следующее

Определение 3. *Пусть задана* $\varepsilon^{(1;\,k_1)}$ *и* $k_1 < k_2 \leqslant n-1$. *Тогда*

$$\varepsilon^{(2;\,k_1,\,k_2)} = \left\{\varepsilon_M^{(1;\,k_2)} \mid M \in \varepsilon^{(1;\,k_1)}\right\}$$

назовем двумерной изотропной плоскостью второго типа с базой $\varepsilon^{(1;\,k_1)}$. Дополнительно положим $\varepsilon^{(2;\,n-2,\,n-1)} = \omega^{(2)}$.

Пусть уже построены $\varepsilon^{(m;\,k_1,\,\ldots,\,k_m)}$, где $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ и $k_m < k_{m+1} \leqslant n-1$. Тогда

$$\varepsilon^{(m+1;\,k_1,\,\ldots,\,k_m,\,k_{m+1})} = \left\{\varepsilon_M^{(1;\,k_{m+1})} \mid M \in \varepsilon^{(m;\,k_1,\,\ldots,\,k_m)}\right\}$$

назовем $(m+1)$-мерной изотропной плоскостью второго типа с базой $\varepsilon^{(m;\,k_1,\,\ldots,\,k_m)}$. Дополнительно положим $\varepsilon^{(m+1;\,n-m-2,\,\ldots,\,n-1)} = \omega^{(m+1)}$.

Определение 4. *Групповое пространство, дополненное изотропными плоскостями, будем называть идеальным пространством, порожденным группой G_n. Плоскости идеального пространства будем называть идеальными плоскостями.*

Через каждые $k+1$ точек идеального пространства, не лежащих в $(k-1)$-мерной идеальной плоскости, проходит единственная k-мерная идеальная плоскость (6. 7).

Доказательство. Пусть $k=2$. Так как

1. $(\forall A)(\forall B)(\exists_s)(H_s(A, B))$;
2. $H_s(A, B) \Rightarrow (\exists a^{(s+1)})(A, B \mid a^{(s+1)})$, то $A_0, A_1 \in \varepsilon^{(1; k_1)}$.

Допустим, что теорема верна для k точек, и рассмотрим точки $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k$. Тогда $(\exists!\, \varepsilon^{(k-1)})(A_0, \ldots, A_{k-1} \in \varepsilon^{(k-1)})$, но $A_k \notin \varepsilon^{(k-1)}$. Если $A_0, A_j \in \varepsilon^{(1; m_j)}$, $(j=1, \ldots, k-1)$ (при этом можно считать, что $m_1 < m_2 < \ldots < m_{k-1}$), а $A_0, A_k \in \varepsilon^{(1; m)}$, то $m \neq m_j$ $(j = 1, \ldots, k-1)$.

Пусть для определенности $m_r < m < m_{r+1}$. Тогда

$$A_0, \ldots, A_k \in \varepsilon^{(k; m_1, \ldots, m_r, m, m_{r+1}, \ldots, m_{k-1})}.$$

7. Введение координат

Рассмотрим произвольную плоскость $a^{(2)}$. Для идеальных прямых, лежащих в этой плоскости, справедлива следующая теорема.

Через любые две точки проходит единственная идеальная прямая. Две различные идеальные прямые имеют не более одной общей точки (7. 1).

(7. 2) $A, A_1 \mid a^{(1)} \wedge AA_1 = BB_1 \Rightarrow (\exists!\, b^{(1)})(B, B_1 \mid b^{(1)} \wedge \Pi_1(a^{(1)}, b^{(1)})$.

В самом деле, по (3. 6) $(\exists!\, b^{(1)})(B \mid b^{(1)} \wedge \Pi_1(a^{(1)}, b^{(1)})$. Тогда по (3. 7) $B_1 \mid b^{(1)}$, а по аксиоме E_1^k получим $b^{(1)} \mid a^{(2)}$.

Определение. *Две идеальные прямые $\varepsilon_1^{(1; k)}$ и $\varepsilon_2^{(1; k)}$, где $k = 0, 1$ назовем параллельными и будем писать $\varepsilon_1^{(1; k)} \parallel \varepsilon_2^{(1; k)}$, если существуют точки A, A_1, B, B_1 такие, что $A, A_1 \in \varepsilon_1^{(1; k)}$, $B, B_1 \in \varepsilon_2^{(1; k)}$ и $AA_1 = BB_1$.*

Из (7. 2) следует

(7. 3) $$\varepsilon_1^{(1; k)} \parallel \varepsilon_2^{(1; k)} \wedge \varepsilon_1^{(1; k)} = a^{(1)} \Rightarrow \varepsilon_2^{(1; k)} = b^{(1)} \wedge \Pi_1(a^{(1)}, b^{(1)}).$$

Если $\varepsilon_1^{(1; k)} \parallel \varepsilon_2^{(1; k)}$ и одна из прямых изотропная, то и другая — изотропная.

Тогда имеет место (7. 4).

Отношение параллельности рефлексивно, симметрично и транзитивно (7. 5).

(7. 6) $$\varepsilon_1^{(1; k)} \parallel \varepsilon_2^{(1; k)} \Leftrightarrow \varepsilon_1^{(1; k)} \cap \varepsilon_2^{(1; k)} = \varnothing.$$

В плоскости $a^{(2)}$ через любую точку, не лежащую на данной идеальной прямой, проходит единственная идеальная прямая, не пересекающая данную (7. 7).

В плоскости $a^{(2)}$ выполняются все аффинные аксиомы инцидентности (7.8).

Легко видеть, что

В плоскости $a^{(2)}$ выполняется малая аффинная теорема Дезарга (7.9).

Тогда из [4] следует

Плоскость $a^{(2)}$ может быть представлена как аффинная координатная плоскость над Веблен-Веддербарновым телом (7.10).

Потребуем дополнительно, чтобы в плоскости $a^{(2)}$ выполнялась следующая аксиома K. *Пусть шесть точек M_1, M_2, M_3, A_1, A_2, A_3 таковы, что M_k, A_i, M_l коллинеарны при всех перестановках i, k, l чисел* 1, 2, 3. *Обозначим $M_kA_iM_l = B_i$. Тогда, если A_1, A_2, A_3 коллинеарны, то и B_1, B_2, B_3 коллинеарны.*

При выполнении аксиомы K

В плоскости $a^{(2)}$ выполняется аффинная теорема Паскаля-Паппа (7.1).

Доказательство ср. [1] стр. 253.

Известно, что аффинная плоскость, в которой выполняется аффинная теорема Паскаля-Паппа, может быть представлена как аффинная координатная плоскость над некоторым полем P. Так из аксиомы G следует, что характеристика этого поля $\neq 2$, то получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Если группа G_n удовлетворяет основному допущению и системе аксиом $\{F_n\}$, то всякая двумерная плоскость $a^{(2)}$, удовлетворяющая аксиоме K может быть представлена как аффинная координатная плоскость над полем характеристики, отличной от 2.*

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть группа G_n удовлетворяет основному допущению и системе аксиом $\{F_n\}$, K. Тогда порожденное группой G_n идеальное пространство есть n-мерное аффинное пространство $A_n(P)$ над полем P характеристики $\neq 2$.*

При этом наличие в пространстве $A_n(P)$ изотропных прямых и плоскостей (см. 6) вносит в пространство A_n характерную структуру флагового пространства (см. [3]).

Система аксиом $\{F_n\}$, K непротиворечива, так как ей удовлетворяет группа движений флагового пространства над полем R.

Автор выражает благодарность И. М. Яглому, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Бахман. Построение геометрии на основе понятия симметрии Изд-во «Наука», М., 1969.

2. H. Wolff. Minkowskische und absolute Geometrie, I, II. Math. Ann. 171, 1967, 114—163, 165—193.

3. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы пространства. Изд-во «Наука» М., 1969.

4. Л. А. Скорняков. Проективные плоскости. УМН, 6, 46. 1951. 112—154.

О СТРОЕНИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ С НУЛЕВОЙ МЕРОЙ ХАУСДОРФА СФЕРИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

А. А. Борисенко
Харьков

Известно, что поверхности нулевой гауссовой кривизны развертывающиеся. Аналогичный результат для случая гладких поверхностей получен А. В. Погореловым, который доказал, что через каждую точку гладкой поверхности в E^3 нулевой внешней кривизны проходит прямолинейная образующая с концами на границе и стационарной касательной плоскостью вдоль образующей [1]. Там же показано, что полная гладкая поверхность нулевой кривизны является цилиндром.

Черн и Лашоф в работе [6] доказали следующую лемму.

Пусть f — функция, определенная на открытом связном подмножестве Dn-мерного векторного пространства V, причем ранг $r(x)$ ее преобразования Лежандра $L(x)$ меньше n во всех точках из D. Пусть $x_0 \in D$ такова, что $r(x_0) = r^*(x_0) = k$, где $r^*(x_0)$ — максимальный ранг в некоторой окрестности x_0. Тогда отображение L постоянно на некотором $n-k$ — плоском сечении π_{n-k} множества D, проходящем через $x_0 u r(x) = r^*(x) = k$ для всех $x \in \pi_{n-k}$ и $r(x) \geqslant k$ для $x \in \bar{\pi}_{n-k}$. Кроме того, существует окрестность U точки x_0, в которой из равенства $L(x) = L(x_0)$ $(x \in U)$ следует, что $x \in \pi_{n-k}$.

Хартман и Ниренберг в работе [5] доказали следующую теорему.

Пусть φ — погружение односвязного n-мерного многообразия M в E^{n+1}. Предположим, что M полно в римановой метрике, индуцированной погружением φ, и что ранг сферического отображения M на S^n, где S^n — единичная сфера в E^{n+1}, строго меньше двух. Тогда M изометрично пространству E^n и φ погружает M в виде цилиндра.

Мы обобщим эти результаты на гладкие и общие выпуклые гиперповерхности в n-мерном эвклидовом пространстве. Гладкой гиперповерхностью в E^n будем называть гиперповерхность, которая локально задается в виде $z(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$, где z — функция с первыми непрерывными частными производными.

Для формулировки результатов введем определение меры Хаусдорфа.

Пусть R — метрическое пространство со счетной базой. Обозначим $\delta(X) = \sup ab$ — диаметр множества X в $R^{a,\, b \in X}$. Для данного множества $M \subset R$ рассмотрим при заданном $\varepsilon > 0$ все счетные покрытия λ: $\bigcup X_i \supset M$ с $\delta(X_i) < \varepsilon$ и положим

$$|M|_k^{\varepsilon} = \inf \sum \delta^k (X_i).$$

$|M|_k = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} |M|_k^{\varepsilon}$ и называют k-мерной мерой Хаусдорфа [7].

Введем следующие обозначения: F — гладкая или общая выпуклая гиперповерхность в E^n, O — точка на F; $P(X)$ — касательная гиперплоскость в случае гладкой гиперповерхности и опорная в случае общей выпуклой гиперповерхности в точке X; $n(X)$ — нормаль к $P(X)$; F_k — поверхность, полученная сечением F и $k+1$-мерной плоскостью; $\widetilde{F} \subset S^{n-1}$ — сферическое изображение F; $\overline{F}_k \subset S^k \subset S^{n-1}$ — сферическое изображение сечения F_k

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Если двумерная хаусдорфова мера сферического изображения гладкой гиперповерхности F равна нулю, то через каждую точку F проходит $(n-2)$-мерная образующая. Касательная гиперплоскость вдоль образующей* стационарна.

Теорема 2. *Если двумерная хаусдорфова мера сферического изображения полной гладкой гиперповерхности F равна нулю, то F является цилиндром с $(n-2)$-мерными образующими.*

Теорема 3. *Если k-мерная хаусдорфова мера сферического изображения общей выпуклой гиперповерхности F равна нулю, то через каждую точку F проходит $(n-k)$-мерная образующая.*

Теорема 4. *Если двумерная хаусдорфова мера сферического изображения полной общей выпуклой гиперповерхности F равна нулю, то F — локально изометрична гиперплоскости.*

Теорема 5. *Если k-мерная мера Хаусдорфа сферического изображения общей выпуклой гиперповерхности F равна нулю, то F — цилиндрическая гиперповерхность с $(n-k)$-мерными образующими.*

Для доказательства теорем потребуются некоторые леммы.

Лемма 1. *Пусть E^k, где $k < n$ подпространство в E^n, a_1, a_2 — векторы в E^n, φ — угол между ними. $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ — их ортогональные проекции на E^k, $\overline{\varphi}$ — угол между $\overline{a}_1$* и *$\overline{a}_2$*, ψ_1, ψ_2 — углы между a_1 и $\overline{a}_1$, a_2 и $\overline{a}_2$, $\psi = \max(\psi_1, \psi_2)$.

Тогда между φ и *$\overline{\varphi}$ выполняется следующее неравенство:*

$$\overline{\varphi} < \left(\frac{\pi}{2\cos\psi}\right)^2 \varphi.$$

Доказательство. Пусть векторы a_1, a_2, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ выходят с одной точки. Рассмотрим *случай 1*, когда подпространство, натянутое на a_1, a_2, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ будет трехмерным. Не ограничивая общности, можно считать, что a_1, a_2 лежат по одну сторону плоскости, проходящей через $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, иначе бы мы разбили угол φ на два угла, образованных векторами, уже удовлетворяющих данному условию. Отложим единичные векторы направлений a_1, a_2, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ с центра S^2. На сфере получится выпуклый четырехугольник $A_1A_2\overline{A}_2\overline{A}_1$. Точка S — точка пересечения окружностей, проходящих через A_1, $\overline{A}_1$ и A_2, $\overline{A}_2$, кроме того она лежит по ту же сторону большой окружности, проходящей через $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, что и четырехугольник.

Рассмотрим сферический треугольник A_1SA_2,

$$SA_1 = \frac{\pi}{2} - \psi_1, \quad SA_2 = \frac{\pi}{2} - \psi_2, \quad A_1A_2 = \varphi$$

$$< A_1SA_2 = \bar{\varphi}.$$

Пусть для определенности $\psi_2 \geqslant \psi_1$, $\angle SA_1A_2$ — острый.

$$\cos \angle SA_1A_2 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi_2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi_1\right)\cos\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi_1\right)\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Учитывая (1),

$$\cos \angle SA_1A_2 \geqslant \frac{\sin\psi_1 - \sin\psi_1\cos\varphi}{\cos\psi_1\sin\varphi} = \operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

а

$$\sin \angle SA_1A_2 \leqslant \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\psi_1 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}, \qquad (2)$$

$$\frac{\sin\bar{\varphi}}{\sin\varphi} = \frac{\sin < SA_1A_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi_2\right)}. \qquad (3)$$

Из неравенства (2) и (3) получим

$$\frac{\sin\bar{\varphi}}{\sin\varphi} \leqslant \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\psi_1 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\cos\psi_2},$$

$$\sin\bar{\varphi} \leqslant \frac{\sin\varphi}{\cos\psi_2}. \qquad (4)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $0 \leqslant \bar{\varphi} \leqslant \frac{\pi}{2}$, ибо, если это не выполняется, мы разобьем угол φ на два таких угла, что условие будет выполняться. Угол φ будет лежать в тех же пределах.

Применяя к (4) неравенства

$$\frac{2}{\pi}\bar{\varphi} \leqslant \sin\bar{\varphi}, \quad \sin\varphi \leqslant \varphi,$$

получим

$$\bar{\varphi} \leqslant \left(\frac{\pi}{2\cos\psi}\right)\varphi. \qquad (5)$$

Случай 2. Пусть подпространство, натянутое на a_1, a_2, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ будет четырехмерным. Натянем E^3 на a_1, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ — проекция a_1, a_2 на E^3. Проекции $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ на плоскость, проходящую через $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, совпадают с $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Пусть $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$ — углы между $\tilde{a}_1$ и a_1, $\tilde{a}_2$

и a_2. Учитывая, что $\tilde{\psi}_i \leqslant \psi$, $i=1, 2$, и дважды применяя неравенство (5), получим

$$\bar{\varphi} \leqslant \left(\frac{\pi}{2\cos\psi}\right)^2 \varphi.$$

Лемма 2. *Пусть F — гладкая гиперповерхность в E^n, $O \in F$,* $n(O)$ — нормаль в точке O, *E^{k+1} — подпространство, проходящее через точку O, содержит $n(O)$, $F_k = F \cap E^{k+1}$ — гладкая гиперповерхность в E^{k+1}, $\bar{n}(X)$ — ортогональная проекция $n(X)$ на E^{k+1}, где $X \in F_k$. Тогда $\bar{n}(X)$ будет нормалью F_k в точке X.*

Доказательство. $P(X) \cap E^{k+1}$ бтдет касательной гиперплоскостью к F_k. Проведем E^3 через $n(X)$, $\bar{n}(X)$ и l, где любая прямая, которая принадлежит $P(X) \cap F$ и проходит через точку O. $\bar{n}(X)$ будет ортогональной проекцией $n(X)$ на плоскость, которая проходит через $\bar{n}(X)$ и l. $n(X)$ перпендикулярна к l, а значит и $\bar{n}(X)$ перпендикулярна к l. Так как l — произвольная прямая $P(X) \cap E^{k+1}$, то $\bar{n}(X)$ перпендикулярно к $P(X) \cap E^{k+1}$, что и требовалось доказать.

Аналогичная лемма верна для общих выпуклых гиперповерхностей, если заменить нормаль к касательной гиперплоскости нормалью к произвольной опорной гиперплоскости в точке O.

Лемма 3. *Пусть F — гладкая гиперповерхность, $O \in F$, Q — достаточно малая окрестность O на F, E^{k+1} — подпространство, которое проходит через точку O и содержит $n(O)$, Q_k — окрестность O на F_k и лежит внутри Q.*

Если m-мерная хаусдорфова мера сферического изображения F равна нулю, то m-мерная хаусдорфова мера сферического изображения $Q_k \subset F_k$, также равна нулю.

Доказательство. Эта лемма является следствием лемм 1, 2. $\tilde{Q}_k$ — сферическое изображение Q_k, как множества F. m-мерная мера Хаусдорфа $\tilde{Q}_k$ равна нулю. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ и покрытие λ такое, что $\bigcup X_i \supset \tilde{Q}_k$, $\delta(X_i) < \varepsilon_0$ и

$$\sum \delta^m(X_i) < \varepsilon.$$

$\bar{X}_i$ — ортогональные проекции множеств X_i на S^k, которая содержит $\bar{Q}_k$ — сферическое изображение Q_k, как поверхности E^{k+1}. $\bar{X}_i$ образуют покрытие $\bar{Q}_k$. Это следует из леммы 2.

Из леммы 1 следует, что $\delta(\bar{X}_i) < c\delta(X_i)$, где c — фиксировано для данной окрестности Q

$$\sum \delta^m(\bar{X}_i) < c\varepsilon.$$

Так как ε — произвольно, то m-мерная мера Хаусдорфа $\bar{Q}_k$ равна нулю.

Аналогичная лемма верна для общих выпуклых гиперповерхностей, если нормаль n (O) выберем следующим образом. Концы единичных нормалей к опорным гиперплоскостям в точке O образуют на S^{n-1} выпуклое множество $\tilde{O}$. Пусть $S^k \subset S^{n-1}$ сфера минимальной размерности, содержащая $\tilde{O}\, BS^k \tilde{O}$ будет выпуклой областью. n (O) будем выбирать так, чтобы точка, соответствующая n (O) на S^{n-1}, была внутренней точкой $\tilde{O}$ на S^k.

Лемма 4. *Сферическое изображение полной выпуклой гиперповерхности F — выпукло.*

Доказательство. X_1, $X_2 \in F$, $P(X_1)$, $P(X_2)$ — опорные гиперплоскости в этих точках. Через $P(X_1) \cap P(X_2)$ проведем гиперплоскость P на пересекающую F. Найдем точку $X \in F$, ближайшую P. Такая точка существует, $P(X)$ будет опорной гиперплоскостью в точке X.

Итак, сферическое изображение F содержит две точки и соединяющую их кратчайшую на S^{n-1}, значит оно выпукло.

Пусть F — выпуклая гиперповерхность, $O \in F$, P (O) — произвольная опорная плоскость в точке O. Отрезок $l \in P(O) \cap F$ проходит через точку O внутренним образом, если точка O — внутренняя точка l. Объединение этих отрезков образует выпуклое тело. L_1 — подпространство минимальной размерности, содержащее это тело, L — минимальное подпространство, содержащее $P(O) \cap F$.

Лемма 5. *Если* $\dim L_1 < \dim L$, *то в окрестности точки O найдется точка X и опорная гиперплоскость $P(X)$ такая, что* $\dim P(X) \cap F \leqslant \dim L_1$.

Подпространство L будет прямой суммой взаимноортогональных подпространств L_1, L_2, $P(O) = L + L_3$, где L_3 — ортогональное L. $F_2 = F \cap L_2$ —выпуклое тело с двумя свойствами: а) точка O — граничная, б) через точку O не проходит внутренним образом, который бы принадлежал F_2.

Тогда найдется точка $X_0 \in F$ в окрестности точки O, являющаяся единственной общей точкой $P_2(X_0)$ и F_2. Будем доказывать по индукции. Если размерность F_2 равна двум, то, повернув опорную прямую P_2 (O) на малый угол, мы отсечем шапочку от F_2. Сферическое изображение особых точек выпуклой гиперповерхности имеет меру нуль [2]. А значит, найдется опорная гиперплоскость к шапочке, имеющая с ней одну общую точку, так как сферическое изображение шапочки отлично от нуля.

Допустим, что утверждение справедливо для размерности $l-1$. Пусть $\dim F_2 = l$, $\dim F_2 \cap P_2(O) \leqslant l-1$ и точка O на $F_2 \cap P_2(O)$ обладает свойствами а), б). Отсюда по предположению индукции существует опорная гиперплоскость P_3, имеющая с $F_2 \cap P_2(O)$ лишь одну общую точку. Повернем P_2(O) вокруг P_3 так, чтобы повернутая P_2 (O) проходила через P_3. Мы отсечем от F_2 шапочку. Следовательно, найдется точка, являющаяся единственной общей точкой $P_2(X_0)$ и F_2. Проведем сечение F, проходящее через $n(O)$, L_2, L_3. В сечении будет выпуклая гиперповерхность F_3. В точке X_0 будет существовать такая опорная гиперплоскость, что $P_3(X_0) \cap F_3$ будет иметь одну общую точку с опорной гиперплоскостью в точке X_0. Пусть L_4 — эта гиперплоскость. Повернув $P_3(X_0)$ вокруг L_4, мы снова отрежем шапочку и, как в предыдущих случаях, найдем точку X, которая представляет собой единственную общую точку между опорной гиперплоскостью к $F_3P_3(X)$ и F_3. Это и будет точка, удовлетворяющая условию леммы. $P(X)$ — та опорная гиперплоскость к F, что содержит $P_3(X)$.

Пусть F^k — подпространство (где $k < n$), содержащее точку O, и E^1 — прямая, ортогональная E^k, проходит через точку O.

Лемма 6. *Если L_{k+1} — объединение всех плоскостей, натянутых на E^1 и l, где l — произвольная прямая E^k, и проходит через точку* O, *то L_{k+1} — подпространство*, натянутое на E^k и E^1.

Доказательство. Натянем на E^k и E^1 E^{k+1}. Каждый вектор $l \in E^k$ однозначно представляется в виде $l = l_k + l_1$, где $l_k \in E^k$, $l_1 \in E^1$. Но это значит, что l принадлежит плоскости, натянутой на E^1 и l_k. Следовательно, $l \in L_{k+1}$ и $L_{k+1} = E^{k+1}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть F — гладкая гиперповерхность в E^n, $O \in F$, $P(O)$ — касательная гиперплоскость в точке O. Для случая $n = 3$ теорема доказана А. В. Погореловым, так как двумерная хаусдорфова мера на S^2 при этом совпадает с лебеговой мерой. Будем проводить доказательство по индукции, существенно используя этот результат. Если точка содержится в плоской окрестности, то утверждение доказано.

Допустим, что в $P(0)$ существует вектор $\bar{a}$, в направлении которого через точку O не проходит отрезок $a \in F$, содержащий O внутри. Через точку проведем гиперплоскость E^{n-1}, она содержит $n(O)$, $\bar{a}$. $F_{n-2} = F \cap E^{n-2}$, если ограничимся окрестностью Q_{n-2} точки O из леммы 3, будет гиперповерхностью в E^{n-1}. По лемме 3 двумерная хаусдорфова мера $\overline{Q}_{n-2}$ равна нулю. По предположению индукции через точку O в F_{n-2} будет проходить $(n-3)$-мерная образующая E^{n-3}. Так как $\bar{a} \in E^{n-1}$, то точка O не содержит плоской окрестности на F_{n-2}. Значит, единственное E^{n-3} проходит через точку O на F_{n-2}. Проведем через точку O E_0^3, ортогональное E^{n-3}. $F_2^0 = F \cap E_0^3$ будет двумерной поверхностью с нулевым сферическим изображением на S^2. И по теореме А. В. Погорелова [1] через точку O на F_2^0 пройдет внутренним образом отрезок l_0.

Проведем E_1^3 через l_0, $n(O)$ и l, где l — произвольная прямая E^{n-3}, которая проходит через точку O. На $F_2^1 = F \cap E_1^3$ через точку O проходят два прямолинейных отрезка l_0 и l. Отсюда следует, что окрестность O на F_2^1 — плоская. По лемме 6 через точку будет проходить $(n-2)$-мерная образующая. Если точка О не имеет плоской окрестности на F, то образующая будет единственной. Допустим, что проходят две $(n-2)$-мерных образующих через точку О E_1^{n-2} и E_2^{n-2}. Тогда найдется отрезок $l_2 \in E_2^{n-2}$, на котором $O \in l_2$ и $l_2 \bar{\in} E_1^{n-2}$. Проводим E_2^3 через $n(0)$, l_2 и произвольный $l_1 \in E_1^{n-2}$ такой, что $O \in l_1$.

В сечении будет двумерная поверхность с плоской окрестностью точки О на ней. В силу произвольности l_1 и леммы 6 точка О будет иметь на F плоскую окрестность, что противоречит условию.

Докажем стационарность касательной гиперплоскости вдоль E^{n-2}. Пусть точка $X \in E^{n-2}$. Проведем E^3 через отрезок OX, $n(O)$ и прямую $l \in P(O)$ ортогональную E^{n-2}. В точках О и X поверхности $F_2 = F \cap E^3$ по теореме, доказанной А. В. Погореловым, будет одна и та же касательная плоскость.

Касательные гиперплоскости к F в точках О, X проходят через E^{n-2}, кроме того, из стационарности касательной плоскости вдоль OX поверхности F_2, следует, что $P(O)$ и $P(X)$ содержат прямые, параллельные l. Значит, касательные гиперплоскости в точке О и X совпадают.

Доказательство теоремы 2. Пусть F — полная гладкая гиперповерхность. Нужно показать, что она цилиндр с $(n-2)$-мерными образующими. Если точка имеет плоскую окрестность, то часть гиперповерхности на этой гиперплоскости будет полосой между E_1^{n-2} и E_2^{n-2}, которые параллельны, и точки E_1^{n-2} и E_2^{n-2} уже не имеют плоских окрестностей на F. Это следует из полноты F. Если О — внутренняя точка полосы, то через нее можно провести E^{n-2}, параллельное E_1^{n-2}, подпространство E^{n-2} полностью лежит на F. Теперь через каждую точку гиперповерхности проходит единственная образующая, и направление образующих непрерывно зависит от точки.

Пусть E_1^{n-2} и E_2^{n-2} — две образующие, которые проходят через достаточно близкие точки O_1, O_2. Точку O_1 будет считать за начало координат, $P(O_1)$ — за гиперплоскость $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$-переменных, E_1^{n-2} — за плоскость $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$-переменных, $n(O_1)$ — ось z. Проведем плоскость z, x_1. Она пересечет поверхность F по кривой L, имеющей с каждой образующей между E_1^{n-2} и E_2^{n-2} одну общую точку $O_2 \in L$. В окрестности точки O_1 гиперповерхность задается уравнением $z = z(x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Мы докажем, что часть гиперповерхности между F_1^{n-2} и E_2^{n-2} можно задать в виде $z = f(x)$. Это эквивалентно тому, что проекции E_1^{n-2} и E_2^{n-2} на гиперплоскость $P(O_1)$ параллельны. Допустим, что это не так. Пусть X_0 — какая-нибудь точка пересечения $\overline{E}_1^{n-2}$ и $\overline{E}_2^{n-2}$, $X_1 \in E_1^{n-2}$, $X_2 \in E_2^{n-2}$ — точки поверхности F, проекцирующиеся в X_0. Проведем плоскость z, x_1 через точку X_1. Она пересечет F между E_1^{n-2} и E_2^{n-2} по гладкой кривой L_1 с концами в точках X_1, X_2. Так как отрезок X_1X_2, параллельный оси z, то на L_1 найдется точка X с касательной, параллельной оси. Значит, нормаль $n(X)$ перпендикулярна оси z. Но точка X лежит на образующей гиперповерхности, проходящей через точку кривой L. По теореме 1 касательная гиперплоскость вдоль образующей стационарна, так что $P(X)$ будет касательной гиперплоскостью в одной из точек кривой L. Но нормали в точках L близки по направлению к оси z ввиду малости окрестности. Мы пришли к противоречию.

Итак, гиперповерхность F между E_1^{n-2} и E_2^{n-2} задается уравнением $z = z(x)$.

$\overline{E}_1^{n-2}$ и $\overline{E}_2^{n-2}$ делят $P(O_1)$ на три непересекающиеся области. Вместо гиперповерхности F будем рассматривать гиперповерхность F_1. Над полосой между $\overline{E}_1^{n-2}$ и $\overline{E}_2^{n-2}$ это будет гиперповерхность F, над областью, примыкающей к $\overline{E}_1^{n-2} - P(O_1)$, над областью, примыкающей к $\overline{E}_2^{n-2} - P(O_2)$. Это полная гладкая гиперповерхность, F_1 — задается уравнением $z = z_1(x)$. Гиперповерхность F_1 удовлетворяет условию теоремы. Допустим, что в E_1^{n-2} найдется прямая l_1, для которой нет параллельной в E_2^{n-2}. Проведем E^3 через z, x_1 и l, E^3 пересечет F_1 по полной двумерной поверхности F_2. Если F_2 не плоскость, то через точку O_1 на F_2 будет проходить одна образующая l_1. По лемме 3 и по теореме А. В. Погорелова F_2 будет цилиндром. Значит, через точку $O_2 \in F_2$ будет проходить прямая $l_2 \parallel l_1$. l_2 принадлежит E_2^{n-2}, что противоречит предположению. Теперь докажем, что любые две образующие E_1^{n-2} и E_2^{n-2} параллельны между собой. $O_1 \in E_1^{n-2}$, $O_2 \in E_2^{n-2}$ — произвольные точки на образующих. Соединим O_1 и O_2 простой кривой K. Кривая K задается уравнением $r = r(t)$, где вектор $r \in E^n$, а $t \in [01]$, причем $r(0) = O_1$, $r(1) = O_2$. Существует $\varepsilon > 0$, когда при $t \leqslant \varepsilon$ через точки $r(t)$ проходят параллельные образующие. ε_0 — максимально среди таких ε, покажем, что $\varepsilon_0 = 1$. Допустим, что $\varepsilon_0 < 1$. Точка $r(\varepsilon_0)$ имеет на F окрестность, в которой, образующие, проходящие через точки ее, параллельны. А это показывает, что ε_0 — не максимально.

Следствие. Гиперповерхность F, удовлетворяющая условию теоремы 2, *изометрична либо* E^{n-1}, *либо* $E^{n-2} \times S^1$, где S^1 — окружность соответствующего радиуса.

Доказательство теоремы 4. Пусть F — выпуклая гиперповерхность. O — точка на ней. $P(O)$ — произвольная опорная гиперплоскость к F в точке O. Допустим, что $\dim P(O) \cap F < n - k$ для определенности положим $\dim P(O) \cap F = n - k - 1$ и точка O является внутренней точкой выпуклого тела $P(O) \cap F$. Проведем через точку O подпространство E^{k+1}, которое ортогонально E^{n-k-1}, содержащему $P(O) \cap F$. F пересечется по выпуклой гиперповерхности F_k в E^{k+1}, имеющей с опорной гиперплоскостью $P(O) \cap E^{k+1}$ лишь одну общую точку. Значит, от F_k можно отрезать шапочку. Из этого следует, что лебегова мера $\overline{F}_k$ на S^k отлична от нуля. Если множество $M \subset S^l$, где S^l — единичная l-мерная сфера на S^{n-1}, то k-мерная хаусдорфова мера M на S^{n-1} совпадает с k-мерной хаусдорфовой мерой на S^l, так как расстояние между точками M, измеренное на S^l, совпадает с расстоянием, измеренным на S^{n-1}, потому что S^l — выпуклое множество.

В данном случае $l = k$, значит k-мерная мера хаусдорфа $\overline{F}_k$ совпадает с лебеговой мерой на S^k. Выходит, что k-мерная мера Хаусдорфа $\overline{F}_k$ отлична от нуля. Но это противоречит утверждению леммы 3.

Из леммы 5 и предыдущих рассуждений следует, что не может быть и случая, когда $\dim F \cap P(O) \geqslant n-k$, а отрезки, которые проходили бы через точку O и принадлежали $F \cap P(O)$ порождают подпространство размерности меньше $n-k$.

Значит, точка O должна быть внутренней точкой выпуклого тела размерности $n-k$, лежащего в $F \cap P(O)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть F — выпуклая гиперповерхность. O — произвольная точка на ней. Если O имеет плоскую окрестность, то утверждение теоремы доказано. Если плоской окрестности нет, то через точку O проходит единственная $(n-2)$-мерная образующая E^{n-2}. Проведем через точку O E^2 ортогональное E^{n-2}. Она пересечет F по выпуклой кривой γ. Одну из опорных плоскостей в точке O возьмем за координатную гиперплоскость $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ось z направим по нормали гиперплоскости. E^{n-1} будет координатной плоскостью $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$. Утверждаем, что окрестность D на F, ограниченная образующими E_1^{n-2} и E_2^{n-2}, проходящими через концы кривой и гиперплоскостями $x_i = \pm \varepsilon, i = 1, \ldots, n-2)$, где ε — мало, изометрична области на гиперплоскости.

Возьмем на кривой γ достаточно густо точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Проведем через эти точки опорные гиперплоскости $P(A_i)$. Рассмотрим пересечение полупространств, ограниченных $P(A_i)$, которые содержат F. Образовавшееся тело ограничивает выпуклая гиперповерхность F_m. Рассмотрим часть ее, лежащую над D. Так как дальше мы будем говорить только о ней, то также эту часть будем обозначать F_m. F_m разворачивается на гиперплоскость и их пределом будет область на гиперплоскости. Кроме того, $\lim\limits_{m \to \infty} F_m = F$. Соответствие устанавливается ортогональным проектированием вдоль оси z. А по теореме А. Д. Александрова [2] внутренние метрики F_m стремятся к метрике F. Значит, F — изометрична гиперплоскости.

Доказательство теоремы 6. Так как по лемме 4 сферическое изображение полной выпуклой гиперповерхности выпукло, то F лежит в S^{k-1}, где $S^{k-1} \subset S^{n-1}$. Проведем E^{n-k}, ортогональное E^k, содержащему S^{k-1}. Каждая опорная гиперплоскость к F содержит подпространство, параллельное E^{n-k}. Покажем, что подпространство E^{n-k}, проведенное через произвольную точку X гиперповерхности F, полностью принадлежит F. Допустим, что это не так. Найдется точка 0 такая, что E^{n-k}, которое проходит через 0, содержит точку $X_0 \overline{\in} F$. F — граница выпуклого тела в E^n, которое является пересечением подпространств, образованных опорными гиперплоскостями к F и содержащих F. Найдется опорная гиперплоскость P_0 к F с точками О и X_0 в различных полупространствах. Но тогда P_0 не содержит подпространства, параллельного F^{n-k}, что противоречит ранее доказанному.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Изд-во «Наука», 1969.
2. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, 1948.
3. С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. Изд-во «Мир», 1970.
4. Ефимов, Розендорн. Линейная алгебра и многомерная геометрия. Изд-во «Наука», 1970.
5. P. Hartman, L. Nurenberg. Amer. J. Math., 81 (1959).
6. S. S. Chern, R. Lashof. Amer. J. Math., 79 (1957).
7. Буземанн. Выпуклые поверхности. Изд-во «Наука», 1964.

Поступила 12 апреля 1971 г.

О ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЭКВИДИСТАНТНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПРОСТРАНСТВ ПЕРВОГО КЛАССА

Е. З. Горбатый

Одесса

§ 1. Эквидистантными [1] мы называем такие римановы пространства V_n, в которых разрешимы уравнения

$$\lambda_{,ij} = \varphi g_{ij}; \quad \varphi = \varphi(\lambda); \quad \lambda \neq \text{const}. \tag{1}$$

Запятая означает ковариантное дифференцирование в V_n. Если $\varphi \neq 0$, то пространство принадлежит к основному случаю, при $\varphi = 0$ — к особому. Пространства основного случая в некоторой системе координат имеют полуприводимую метрику [1], [7]

$$ds^2 = (dx^1)^2 + f(x^1)\, ds_1^2,$$

где

$$ds_1^2 = a_{\alpha\beta}(x^2, \ldots, x^n)\, dx^\alpha dx^\beta \ (\alpha, \beta = 2, \ldots, n).$$

Задача нетривиального геодезического отображения (н. г. о.) эквидистантных пространств ставилась и решалась в ряде работ [1—4]. В работе Н. С. Синюкова [1] установлено, что каждое эквидистантное V_n основного случая допускает н. г. о. на некоторое эквидистантное $\overline{V}_n$. В работах Г. И. Кручковича [2, 3] исследовалось н. г. о. полуприводимых V_n, в частности показано, что эквидистантные V_n допускают н. г. о. только на эквидистантные $\overline{V}_n$. Указанные результаты получены в некоторой специальной системе координат. В настоящей статье свойства н. г. о. эквидистантных пространств изучаются в тензорной форме, не зависящей от выбора системы координат.

1. Запишем некоторые соотношения, используемые нами в дальнейшем [5].

Если риманово пространство V_n с метрическим тензором g_{ij} допускает н. г. о. на $\overline{V}_n$ с метрическим тензором $\overline{g}_{ij}: V_n \xrightarrow{\psi} \overline{V}_n$, то необходимое и достаточное условие [5]

$$\left\{\overline{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}}\right\} = \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} + \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i, \tag{2}$$

где ψ — отображающая функция, $\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}$ и $\left\{\overline{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}}\right\}$ — символы Кристоффеля в V_n и $\overline{V}_n$. Равносильное условие

$$\overline{g}_{hi,j} = 2\psi_j \overline{g}_{hi} + \psi_h \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{hj}. \tag{3}$$

Условия интегрируемости для (3):

$$\overline{g}_{h\alpha} R^{\alpha}_{ijk} + \overline{g}_{i\alpha} R^{\alpha}_{hjk} = \overline{g}_{hj}\psi_{ik} - \overline{g}_{hk}\psi_{ij} + \overline{g}_{ij}\psi_{hk} - \overline{g}_{ik}\psi_{hj}, \tag{4}$$

где $\psi_{ij} = \psi_{,ij} - \psi_i \psi_j$.

Зависимость между тензорами Римана в V_n и $\overline{V}_n$

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \psi_{ij} - \delta^h_j \psi_{ik}. \tag{5}$$

2. **Теорема 1.** *Все эквидистантные пространства основного случая допускают н. г. о. на эквидистантные и только на них.*

Для доказательства первой части достаточно положить

$$\overline{g}_{ij} = p g_{ij} + q \lambda_i \lambda_j,$$

где

$$p = -\frac{1}{F}; \quad q = \frac{1}{2F^2}; \quad \psi = -\frac{1}{2} \ln F; \quad F = \int \varphi d\lambda.$$

Найдем $\overline{g} = |\overline{g}_{ij}|$; при этом обозначим $g = |g_{ij}|$. Легко убедиться, что

$$\overline{g} = g(p^n + p^{n-1} q \Delta_1 \lambda).$$

Свернув (1) с $\lambda^j = g^{aj}\lambda_a$, находим, что $(\Delta_1\lambda)_i = 2\varphi\lambda_i$ и $\Delta_1\lambda = 2F + C$. Отсюда

$$\bar{g} = gp^{n-1}\frac{C}{2F^2}.$$

Так как F определено с точностью до произвольной постоянной, то мы можем считать $C \neq 0$, следовательно, $\bar{g} \neq 0$.

Перейдем ко второй части. Пусть V_n — эквидистантное $V_n \xrightarrow{\psi} \overline{V}_n$. Построим вектор

$$\sigma_i = e^{-\psi}\bar{g}_{i\alpha}g^{\alpha\beta}\lambda_\beta.$$

Продифференцируем его в пространстве $\overline{V}$ ($|$ — знак ковариантного дифференцирования в $\overline{V}_n$) и учтем (1) и (2)

$$\sigma_{i|j} = e^{-\psi}(\psi + g^{\alpha\beta}\lambda_\alpha\psi_\beta)\bar{g}_{ij},$$

откуда следует, что $\sigma_i = \sigma_{,i}$; V_n — эквидистантное и

$$\mu(\sigma) = e^{-\psi}(\varphi + g^{\alpha\beta}\lambda_\alpha\psi_\beta). \tag{6}$$

Следствие. Если для эквидистантных пространств $V_n \xrightarrow{\psi} \overline{V}_n$, то

$$\varphi' g_{ij} - \mu' g_{ij} + \psi_{ij} = 0 \quad \left(\varphi' = \frac{d\varphi}{d\lambda}; \quad \mu' = \frac{d\mu}{d\sigma}\right).$$

Доказательство. Продифференцируем (6)

$$\varphi'\lambda_i = e^{\psi}\mu'\sigma_i - g^{\alpha\beta}\lambda_\alpha\psi_{\beta i}. \tag{7}$$

Условия интегрируемости для (1)

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{hij} = \varphi'(\lambda_j g_{hi} - \lambda_i g_{hj}). \tag{8}$$

Свернем (4) с $\lambda_k = g^{\alpha k}\lambda_\alpha$ и учтем (7) и (8)

$$\varphi'(\sigma_n g_{ij} + \sigma_i g_{hj}) = \mu'(\sigma_h\bar{g}_{ij} + \sigma_i\bar{g}_{hj}) - \sigma_h\psi_{ij} - \sigma_i\psi_{hj}.$$

Тензор $u_{hij} = \sigma_n(\varphi' g_{ij} - \mu' g_{ij} + \psi_{ij})$ симметричен по i, j и антисимметричен по h и i. Поэтому $u_{hij} = 0$, откуда вытекает следствие.

3. В дальнейшем будут использованы результаты [4]. Отметим их без доказательства.

Предложение 1. Если $u_i b_{hj} - u_h b_{ij} = v_i c_{hj} - v_h c_{ij}$, причем b_{ij} и c_{ij} — симметричные; $|b_{ij}| \neq 0$, то

$$v_i = pu_i, \; b_{ij} = pc_{ij} + gu_i u_j.$$

Предложение 2. Если $V_n \xrightarrow{\psi} \overline{V}_n$ и $\bar{g}_{ij} = pg_{ij} + gu_i u_j$, где $u_i = u_{,i}$, то V_n и $\overline{V}_n$ — эквидистантные, причем

$$g_{ij} = r(\psi)\psi_{,ij} + s(\psi)\psi_i\psi_j,$$
$$\bar{g}_{ij} = \bar{r}(\psi)\psi_{,ij} + \bar{s}(\psi)\psi_i\psi_j.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если $V_n \xrightarrow{\psi} \overline{V}_n$ и $pg_{ij} + q\overline{g}_{ij} = \psi_{ij}$, где $p, q \neq \mathrm{const}$, то V_n и $\overline{V}_n$ — эквидистантные.

Запишем для указанного уравнения условия интегрируемости и преобразуем

$$\psi_\alpha R^\alpha_{hij} = g_{hi}(p_j - p\psi_j) - g_{hj}(p_i - p\psi_i) + \overline{g}_{hi}q_j - \overline{g}_{hj}q_i. \quad (9)$$

Свернув (4) с $\psi^k = g^{\alpha k}\psi_\alpha$ и учитывая (9), получим $y_{hij} + y_{ihj} = 0$, где введены обозначения

$$y_{hij} = g_{ij}u_h + (v_h - p_h)\overline{g}_{ij} - q_h\overline{g}_{i\alpha}\overline{g}_{i\beta}g^{\alpha\beta};$$
$$u_n = g^{\alpha\beta}p_\alpha\overline{g}_{\beta h}; \quad V_n = g^{\alpha\beta}q_\alpha\overline{g}_{\beta h}.$$

Отсюда $y_{hij} = 0$. Преобразуем полученное уравнение

$$u_n\overline{g}^{\alpha\beta}g_{i\alpha}g_{i\beta} + (V_n - p_n)g_{ij} - q_n\overline{g}_{ij} = 0. \quad (10)$$

Выберем z^n так, чтобы $z^\alpha u_\alpha = e^{2\psi}$. Свернем (10) с z^n и продифференцируем в V_n

$$\lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} + a_k g_{ij} + b_k\overline{g}_{ij} + b(2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik}) = 0, \quad (11)$$

где

$$\lambda_i = -e^{2\psi}g_{i\alpha}g^{-\alpha\beta}\psi_\beta; \quad a = z^\alpha(V_\alpha - p_\alpha); \quad b = -q_\alpha z^\alpha.$$

Если $b\psi_k + b_k = 0$, то $a_k = \lambda_k$ и равенство записывается так

$$\lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} + \lambda_k g_{ij} + \sigma_i\overline{g}_{jk} + \sigma_j\overline{g}_{ik} + \sigma_k\overline{g}_{ij} = 0, \quad \sigma_i = b\psi_i. \quad (12)$$

Покажем, что при $n > 2$ такое равенство невозможно. Свернув (12) с g^{ij}, будем иметь

$$(n+2)\lambda_k + \rho\sigma_k + 2\sigma^\alpha\overline{g}_{\alpha k} = 0; \quad \rho = g^{\alpha\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}. \quad (13)$$

Свернем теперь (12) с $\sigma^i = g^{\alpha i}\sigma_\alpha$ и используем (13)

$$\lambda^\alpha\sigma_\alpha g_{jk} + \Delta_1\sigma\overline{g}_{jk} - \frac{n}{2}(\lambda_j\sigma_k + \lambda_k\sigma_j - \rho\sigma_j\sigma_k) = 0. \quad (14)$$

Если $\Delta_1\sigma = 0$, то $\lambda^\alpha\sigma_\alpha - 0$, так как ранг $\|g_{ij}\| > 2$. Если же $\Delta_1\sigma \neq 0$, то $\lambda^\alpha\sigma_\alpha \neq 0$. Свернем (14) с σ^j

$$\lambda_k\Delta\sigma(n+1) + \sigma_k\left(\lambda_\alpha\sigma^\alpha\frac{n-2}{n} + \frac{3}{2}\rho\Delta_1\sigma\right) = 0.$$

В обоих случаях получаем, что $\lambda_k = \mu\sigma_k$. Подставив это в (12), запишем равенство в виде

$$\sigma_k(\mu g_{ij} + \overline{g}_{ij}) + \sigma_i(\mu g_{jk} + \overline{g}_{jk}) + \sigma_j(\mu g_{ik} + \overline{g}_{ik}) = 0.$$

Приведем квадратичную форму $\mu g_{ij} + \overline{g}_{ij}$ к диагональному виду. Тогда

$$\mu g_{ij} + \overline{g}_{ij} = 0,$$

что невозможно из-за н. г. о. Поэтому (при $n > 2$) $b\psi_k + b_k \neq 0$.

Проальтернируем (11) по индексам j и k

$$(\lambda_j - a_j) g_{ik} - (\lambda_k - a_k) g_{ij} + (b_k + b\psi_k) \bar{g}_{ij} - (b_j + b\psi_j) \bar{g}_{ik} = 0.$$

На основании предложений 1 и 2 получаем, что V_n и $\bar{V}_n$ — эквидистантные.

Из доказательства следует, что если $p = \mathrm{const}$, то $q = \mathrm{const}$. В этом случае среди V_n существуют и не эквидистантные [3]. Эквидистантные пространства этого типа характеризуются уравнением $\lambda_{,ij} = (k\lambda + k_1) g_{ij}$, где k и $k_1 = \mathrm{const}$.

§ 2. Пространством V_n первого класса называется гиперповерхность плоского пространства. Его тензорные признаки (необходимые и достаточные условия):

$$R_{hijk} = \varepsilon (b_{hk} b_{ij} - b_{hj} b_{ik}); \quad \varepsilon = \pm 1; \quad b_{hi} = b_{ih}; \quad b_{hi,j} = b_{hj,i}.$$

Задача н. г. о. для римановых пространств первого класса была поставлена Н. С. Синюковым. В [1] выделены эквидистантные V_n первого класса. В настоящей работе доказывается, что V_n первого класса могут допускать н. г. о. только на такие римановы $\bar{V}_n$, класс которых не выше двух.

Пусть V_n — первого класса, $n > 2$ и $V_n \xrightarrow{\psi} \bar{V}_n$. Заменим в (5) R^h_{ijk} его выражением и свернём с $\bar{g}_{ih}$; обозначив $c_{li} = \varepsilon g_{l\alpha} \bar{g}^{\alpha\beta} b_{\beta i}$, получим

$$\bar{R}_{lijk} = c_{lk} b_{ij} - c_{lj} b_{ik} + \bar{g}_{ik} \psi_{lj} - \bar{g}_{ij} \psi_{lk}. \tag{15}$$

Воспользуемся равенством $\bar{R}_{lijk} = \bar{R}_{jkli}$

$$\bar{g}_{ik} \psi_{lj} - \bar{g}_{lj} \psi_{ik} = c_{ij} b_{lk} - c_{lk} b_{ij} + b_{ik} (c_{lj} - c_{jl}). \tag{16}$$

Рассмотрим далее два случая.

I. Ранг $\| b_{ij} \| > 2$. Приведем b_{ij} в произвольной точке к диагональному виду. Пусть b_{11}, b_{22}, $b_{33} \neq 0$. В (16) меняем пары индексов l, k и i, j местами и складываем полученные равенства

$$b_{ij} (c_{kl} - c_{lk}) + b_{ik} (c_{lj} - c_{jl}) + b_{kl} (c_{ji} - c_{ij}) + b_{jl} (c_{ik} - c_{ki}) = 0$$

$$i = k = 1; \quad l, j > 1; \quad c_{lj} = c_{jl}$$

$$i = k = 2; \quad l = 1, \; j > 2; \quad c_{1j} = c_{j1}.$$

$$i = k = 3; \quad l = 1; \; j = 2; \quad c_{12} = c_{21}.$$

Поэтому c_{ij} — симметричный. Из (16) получаем

$$\bar{g}_{ik} \psi_{lj} - \bar{g}_{lj} \psi_{ik} = c_{ij} b_{lk} - c_{lk} b_{ij}. \tag{17}$$

Найдем такой тензор a^{lj}, что

$$a^{\alpha\beta} \bar{g}_{\alpha\beta}, \quad a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \neq 0.$$

Свернем (17) с a^{lk} и выразим c_{ij}

$$c_{ij} = a_1 b_{ij} + a_2 \bar{g}_{ij} + a_3 \psi_{ij}; \tag{18}$$

$$a_1 = \frac{a^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}}{a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}}; \quad a_2 = -\frac{a^{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}}{a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}}; \quad a_3 = \frac{a^{\alpha\beta} \bar{g}_{\alpha\beta}}{a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}}.$$

Подставляем выражение для c_{ij} в (17). После преобразований будем иметь

$$\left(b_{lk}-\frac{1}{a_3}\bar{g}_{lk}\right)(a_3\psi_{ij}+a_2\bar{g}_{ij})=\left(b_{ij}-\frac{1}{a_3}\bar{g}_{ij}\right)(a_3\psi_{lk}+a_2\bar{g}_{lk}). \quad (19)$$

Возможны такие случаи.

1) $b_{lk}-\frac{1}{a_3}\bar{g}_{lk}=0.$

После дифференцирования в V_n по i и альтернирования по i и k найдем вследствие $|\bar{g}_{ij}|\neq 0$, что $a_3=ce^{\psi}$; $b_{lk}=\frac{1}{ce^{\psi}}\bar{g}_{lk}$. Заменим b_{ij} в (18):

$$c_{ij}=\tau\bar{g}_{ij}+ce^{\psi}\psi_{ij}, \text{ где } \tau=\frac{a_1}{a_3}+a_2. \quad (20)$$

Из (15) получим, учитывая (20)

$$\bar{R}_{lijk}=\frac{\tau}{a_3}(\bar{g}_{lk}\bar{g}_{ij}-\bar{g}_{lj}\bar{g}_{ik})+\psi_{kl}\bar{g}_{ij}-\psi_{lj}\bar{g}_{ik}+\psi_{ij}\bar{g}_{lk}-\psi_{ik}\bar{g}_{lj}. \quad (21)$$

Свернем (21) с $\bar{g}^{lk}$

$$\bar{R}_{ij}=\mu\bar{g}_{ij}+(n-2)\psi_{ij}. \quad (22)$$

Выражаем отсюда ψ_{ij} и подставляем в (21)

$$\bar{R}_{lijk}=\frac{1}{n-2}(\bar{R}_{kl}\bar{g}_{ij}-\bar{R}_{lj}\bar{g}_{ik}+\bar{R}_{ij}\bar{g}_{lk}-\bar{R}_{ik}\bar{g}_{lj})+$$
$$+\frac{\bar{R}}{(n-1)(n-2)}(\bar{g}_{lj}\bar{g}_{ik}-\bar{g}_{lk}\bar{g}_{ij}).$$

Заменяем в (22) ψ_{ij}, выраженное из (20), и дифференцируем в $\bar{V}_n$

$$\bar{R}_{ij|k}=u_k\bar{g}_{ij}+v_i\bar{g}_{jk}+v_j\bar{g}_{ik}.$$

Следовательно, $\bar{V}_n$ — конформно-плоское L_n [6].

2) $b_{lk}-\frac{1}{a_3}\bar{g}_{lk}\neq 0$. На основании (19)

$$a_3\psi_{ij}+a_2\bar{g}_{ij}=a_4\left(b_{ij}-\frac{1}{a_3}\bar{g}_{ij}\right).$$

Отсюда

$$\psi_{ij}=\sigma b_{ij}+\nu\bar{g}_{ij};\quad \sigma=\frac{a_4}{a_3};\quad \nu=-\frac{a_2a_3+a_4}{a_3^2}. \quad (23)$$

Условия интегрируемости имеют вид

$$b_{ij}(\lambda_k+\sigma\psi_k-\sigma_k)-b_{ik}(\lambda_j+\sigma\psi_j-\sigma_j)=\nu_k\bar{g}_{ij}-\nu_j\bar{g}_{ik}, \quad (24)$$

где $\lambda_k=\varepsilon\psi_\alpha g^{\alpha\beta}b_{\beta k}$. Пусть $\nu\neq\mathrm{const}$, тогда (предложение 1)

$$\nu_k=p(\lambda_k+\sigma\psi_k-\sigma_k);\quad b_{ij}=p\bar{g}_{ij}+q\nu_i\nu_j. \quad (25)$$

Из (23) и (18) получаем

$$\begin{aligned} \psi_{ij} &= (p\sigma + \nu)\bar{g}_{ij} + q\sigma\nu_i\nu_j, \\ c_{ij} &= [p(a_1 + a_4) - \sigma]\bar{g}_{ij} + q(a_1 + a_4)\nu_i\nu_j. \end{aligned} \tag{26}$$

Заменим в (26) c_{ij} на $\varepsilon\bar{g}_{i\alpha}g^{\alpha\beta}b_{\beta j}$. Из (25) и (26) после преобразований будем иметь

$$\bar{g}_{ij} = rg_{ij} + S\nu_i\nu_j,$$

откуда (предложение 2) V_n и $\bar{V}_n$ — эквидистантные. Если в (15) учесть (25) и (26), то после преобразований убеждаемся, что (при $n > 3$) $\bar{V}_n$ — конформно-плоское. В этом случае V_n и $\bar{V}_n$ — субпроективные пространства В. Ф. Кагана [4].

3) В предыдущем случае мы положили $\nu \neq \mathrm{const}$. Если $\nu = \mathrm{const}$, то из (24) следует $\lambda_k + \sigma\psi_k - \sigma_k = 0$, так как ранг $\| b_{ij} \|$ больше 1. Из (18) и (23) получаем

$$c_{ij} = (a_1 + a_4)b_{ij} - \frac{a_4}{a_3}\bar{g}_{ij} = fb_{ij} - \sigma\bar{g}_{ij}.$$

Заменим c_{ij}

$$\varepsilon g^{\alpha\beta}\bar{g}_{i\alpha}b_{\beta j} = fb_{ij} - \sigma\bar{g}_{ij}. \tag{27}$$

Продифференцировав это равенство в V_n по k и проальтернировав по j и k, убедимся, что $2f\psi_k - f_k = 0$ и $f = ce^{2\psi}$; $c = \mathrm{const}$. В этом случае равенство (27) можно записать

$$(\varepsilon\bar{g}_{i\alpha} - ce^{2\psi}g_{i\alpha})g^{\alpha\beta}b_{\beta j} = -\sigma\bar{g}_{ij}. \tag{28}$$

Если $\sigma \neq 0$, то $|b_{ij}| \neq 0$. Обозначим через p^{ij} такой тензор, что $p^{\alpha i}b_{\alpha j} = \delta^i_j$. Поднимем в (27) индекс i тензором $\bar{g}^{ik}$ и j — тензором p^{hj}

$$\varepsilon g^{ij} - ce^{2\psi}\bar{g}^{ij} = -\sigma p^{ij}.$$

Продифференцируем это равенство и опустим индексы i и j тензором b_{ij}, используя тождество

$$p^{\alpha i}b_{\alpha j,k} + p^{\alpha i}_{.k}b_{\alpha j} = 0.$$

Приходим к следующему:

$$\sigma b_{ij,k} = \sigma_k b_{ij} + \sigma_i b_{jk} + \sigma_j b_{ik}.$$

Обозначим σb_{ij} через $\check{g}_{ij}$. Тогда

$$\check{g}_{ij,k} = 2\frac{\sigma_k}{\sigma}\check{g}_{ij} + \frac{\sigma_i}{\sigma}\check{g}_{jk} + \frac{\sigma_j}{\sigma}\check{g}_{ik}.$$

Если $\sigma_k \neq 0$, то $V_n \xrightarrow{\ln\sigma} \check{V}_n$. На основании случая 1) $\check{V}_n$ — конформно-плоское L_n. Для $\bar{V}_n$ находим тензор Римана из (15).

$$\bar{R}_{hijk} = ce^{2\psi}(b_{hk}b_{ij} - b_{hj}b_{ik}) + \nu(\bar{g}_{hk}\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{hj}\bar{g}_{ik}). \tag{29}$$

Пусть $\bar{b}_{hi} = \sqrt{|c|}e^{\psi}b_{hi}$. Дифференцируя в $\bar{V}_n$, убеждаемся, что

$$\bar{b}_{hi||j} = \bar{b}_{hj||i},$$

поэтому $\bar{V}_n$ — гиперповерхность пространства постоянной кривизны.

Если $\sigma_k = 0$, $\sigma = \text{const} \neq 0$, то $b_{ij,k} = 0$. Дифференцируя (27), убеждаемся, что $c = 0$. В этом случае V_n и $\bar{V}_n$ — пространства постоянной кривизны.

4) Пусть $\sigma = 0$. Из (23) следует

$$\psi_{ij} = \nu\bar{g}_{ij}; \quad \nu = \text{const}.$$

Приходим к выводу, что $\bar{V}_n$ — эквидистантное пространство. Его тензор Римана имеет вид (29). Прообразом является эквидистантное V_n первого класса [1].

II. Если ранг $\| b_{ij} \|$ равен 2, то можно записать

$$b_{ij} = u_i u_j + v_i v_j,$$

где u_i и v_i — векторы. Для тензора Римана V_n получим

$$R_{hijk} = \varepsilon (u_h v_i - u_i v_h)(u_k v_j - u_j v_k).$$

Запишем соотношение

$$u_l R^h_{ijk} + u_k R^h_{ilj} + u_j R^h_{ikl} = 0.$$

Выразим из (5) R^h_{ijk} и подставим в (30). Опустим индекс h тензором $\bar{g}_{hi}$, просимметрируем по индексам h и i и свернем с $\bar{g}^{hj}$

$$u_l\psi_{ik} - u_k\psi_{il} + z_l\bar{g}_{ik} - z_k\bar{g}_{il} = 0,$$

$$z_l = \frac{g^{\alpha\beta}(u_\alpha\psi_{\beta l} - u_l\psi_{\alpha\beta})}{n-1}.$$

Из предложения 1 следует

$$\psi_{ij} = p\bar{g}_{ij} + qu_i u_j.$$

Но то же самое можно повторить для вектора V_i

$$\psi_{ij} = p_1\bar{g}_{ij} + q_1 v_i v_j.$$

Вычтя эти равенства, будем иметь

$$0 = (p - p_1)\bar{g}_{ij} + qu_i u_j - q_1 v_i v_j,$$

т. е. ранг $\|\bar{g}_{ij}\|$ равен 2. При $n > 2$ это невозможно. Если $n > 2$, то $q = 0$. Отсюда $p = \text{const}$. Докажем, что c_{ij} симметричен и в этом случае. Заменим в (16) ψ_{ij} на $p\bar{g}_{ij}$ и приведем тензор b_{ij} к диагональному виду. Пусть $h = i = j = 1$, $k = 2$; тогда $c_{12} = 0$. Если положим $h = i = j = 2$, $k = 1$, то $c_{21} = 0$.

Следовательно, c_{ij} — симметричный тензор и можно применить все рассуждения пункта I. Для тензора Римана в $\bar{V}_n$ вновь получаем строение (29).

Из рассмотренных случаев следует.

Теорема 3. *Класс римановых $\bar{V}_n$, геодезически соответствующих V_n первого класса, не выше двух.*

Из приведенных выше рассуждений ясно, что если конформно-плоское L_n — первого класса, то оно или эквидистантное или допускает н. г. о. на конформно-плоское $\bar{V}_n$. На основании [4] оба пространства являются субпроективными. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Если конформно-плоское L_n — первого класса, то оно субпроективное.*

В заключение выражаю глубокую благодарность Н. С. Синюкову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Синюков. Эквидистантные римановы пространства. Научный ежегодник Одесск. ун-та, 1957.
2. Г. И. Кручкович. Геодезическое соответствие полуприводимых римановых пространств. ДАН СССР, т. 152, № 1, 1963, 43—45.
3. Г. И. Кручкович. О пространствах $V_{(k)}$ и их геодезических отображениях. Труды Всесоюзного энергетического ин-та, вып. 33, 1967.
4. Д. И. Розенфельд. Геодезическое соответствие конформно-плоских римановых пространств. «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6. Изд-во ХГУ, 1969.
5. Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия, ИЛ, 1948.
6. Н. С. Синюков. Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими. ДАН СССР, т. 137, № 6, 1961, 1312—1314.
7. Г. И. Кручкович. О пространствах В. Ф. Кагана. Прил. к книге В. Ф. Кагана «Субпроективные пространства». Физматгиз, 1960.

Поступила 15 февраля 1971 г.

О РАЗРЫВАХ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ В ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В. И. Денисов

Харьков

Пусть S — гиперповерхность в римановом пространстве—времени, при переходе через которую производные метрического тензора терпят разрыв.

Такой гиперповерхностью может быть, например, граница между областями пространства, заполненными материей с различными свойствами, граница между материей и вакуумом.

Тогда на поверхности имеют место условия соединения, которым должны удовлетворять разрывы производных метрического тензора g_{ik} пространства—времени.

В данной работе исследованы условия соединения на гиперповерхности разрыва первых производных метрического тензора g_{ik}. Доказано, что если в окрестности каждой точки несингулярной, неизотропной гиперповерхности S можно ввести гармоническую систему координат, то в этой системе координат первые производные тензора g_{ik} непрерывны. В случае сингулярной гиперповерхности доказано, что она не может быть изотропной и получены выражения, определяющие разрывы первых производных метрического тензора пространства—времени.

В работе [1] получены условия соединения, которым должны удовлетворять разрывы первых производных тензора g_{ik}.

Пусть S — гиперповерхность разрыва первых производных метрического тензора g_{ik}, а сам метрический тензор непрерывен в области, содержащей S. Тогда, если S несингулярна, т. е. на ней нет особенностей в распределении тензора энергии — импульса материи T_{ik}, должны выполняться следующие условия:

$$\left[\Gamma^j_{ik} + \frac{g_{ik}}{2}\left(g^{jm}\Gamma^n_{mn} - g^{mn}\Gamma^j_{mn}\right) - \frac{\delta^j_i\Gamma^l_{kl} + \delta^j_k\Gamma^l_{il}}{2}\right] n_j = 0, \qquad (0.1)$$

где знак [ ] — разрыв выражения, стоящего в скобках, а n_j — нормаль к S. Если же S — сингулярная гиперповерхность, с плотностью тензора энергии — импульса δT_{ik}, то условия соединения имеют вид

$$\left[\Gamma^j_{ik} - \frac{g_{ik}}{2}\left(g^{jm}\Gamma^n_{mn} - g^{mn}\Gamma^j_{mn}\right) - \frac{\delta^j_i\Gamma^l_{kl} + \delta^j_k\Gamma^l_{il}}{2}\right] n_j = \varkappa\delta T_{ik}, \qquad (0.2)$$

где $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна.

Преобразуем условия соединения (0.1) и (0.2). Свертывая, например, выражение (0.1) с g_{ik} получим

$$\left[g^{ik}\Gamma^j_{ik} + 2\left(g^{jm}\Gamma^n_{mn} - g^{mn}\Gamma^j_{mn}\right) - g^{jk}\Gamma^n_{kn}\right] n_j = 0,$$

откуда следует, что на S

$$\left[g^{jm}\Gamma^n_{mn} - g^{mn}\Gamma^j_{mn}\right] n_j = 0. \qquad (0.3)$$

Принимая во внимание (0.3), условия (0.1) теперь можно записать так

$$\left[\Gamma^j_{ik} - \frac{\delta^j_i\Gamma^l_{kl} + \delta^j_k\Gamma^l_{il}}{2}\right] n_j = 0. \qquad (0.4)$$

Аналогичным образом в случае сингулярной гиперповерхности получим

$$\left[g^{jm}\Gamma^n_{mn} - g^{mn}\Gamma^j_{mn}\right] n_j = \varkappa\delta T^l_l,$$

и условия (0.2) теперь имеют вид

$$\left[\Gamma^j_{ik} - \frac{\delta^j_i\Gamma^l_{kl} + \delta^j_k\Gamma^l_{il}}{2}\right] n_j = \varkappa\left(\delta T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\delta T^l_l\right). \qquad (0.5)$$

1. Рассмотрим условия соединения (0. 4) в гармонической системе координат.

Система координат является гармонической, если метрический тензор удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{il}\sqrt{-g}\right)=0. \qquad (1.\ 1)$$

Предположим, что в окрестности каждой точки гиперповерхности S можно ввести гармоническую систему координат. Тогда выражение (1. 1) непрерывно при переходе через S, т. е.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{il}\sqrt{-g}\right)\right]=0. \qquad (1.\ 2)$$

Из кинематических условий соединения [3] следует непрерывность производных тензора g_{ik}, взятых в направлении касательного вектора к гиперповерхности S. Поэтому разрыв производной $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ имеет вид

$$\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right]=h_{ik}n_l, \qquad (1.\ 3)$$

где h_{ik} — симметричный тензор на S.

Подставляя (1. 3) в (1. 2), после простых преобразований получим

$$\sigma n_j - h_{jl}n^l = 0, \qquad (1.\ 4)$$

где $\sigma=\frac{1}{2}g^{mn}h_{mn}$.

Нетрудно видеть, что

$$[\Gamma^l_{ik}]=\frac{1}{2}g^{jl}\left(h_{il}n_k+h_{kl}n_i-h_{ik}n_l\right);$$

$$[\Gamma^l_{il}]=\frac{1}{2}g^{lm}h_{lm}n_i=\sigma n_i,$$

поэтому условия (0. 4) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2}n_i\left(h_{kl}n^l-\sigma n_k\right)+\frac{1}{2}n_k\left(h_{il}n^l-\sigma n_i\right)-\frac{1}{2}h_{ik}\left(n^l n_l\right)=0. \qquad (1.\ 5)$$

Первые два члена в выражении (1. 5) равны нулю в силу (1. 4), поэтому условия соединения имеют вид

$$h_{ik}\left(n^l n_l\right)=0. \qquad (1.\ 6)$$

Из (1. 6) следует справедливость следующего утверждения: если несингулярная гиперповерхность S неизотропна, то в гармонической системе координат метрический тензор g_{ik} пространства—времени непрерывен вместе со своими первыми производными. Другими словами, в случае несингулярной гиперповерхности S с $(n^l n_l)\neq 0$ гармоническая система координат является допустимой по Лихнеровичу [2]. В случае изотропной гиперповерхности условия (1. 6) выполняются тождественно и величины h_{ik}, определяющие разрыв первых производных g_{ik}, должны удовлетворять (1. 4).

2. Пусть S сингулярная гиперповерхность. Тогда на S выполняются условия (0. 5), которые можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2} n_i (h_{kl} n^l - \sigma n_k) + \frac{1}{2} n_k (h_{il} n^l - \sigma n_i) - \frac{1}{2} h_{ik} (n^l n_l) =$$
$$= \varkappa \left(\delta T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \delta T_l^l \right). \qquad (2.\ 1)$$

Предположим, что в окрестности каждой точки сингулярной гиперповерхности S можно ввести гармоническую систему координат. Тогда в гармонической системе координат имеет место (1. 4), поэтому условия соединения (2. 1) примут вид

$$-\frac{1}{2} h_{ik} (n^l n_l) = \varkappa \left(\delta T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \delta T_l^l \right). \qquad (2.\ 2)$$

Из (2. 2) следует, что сингулярная гиперповерхность S не может быть изотропной. Действительно, на сингулярной гиперповерхности S плотность δT_{ik} отлична от нуля. Предположим, что S изотропна, тогда из (2. 2) следует

$$\delta T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \delta T_l^l = 0,$$

откуда имеем

$$\delta T_{ik} = 0,$$

что противоречит предположению о сингулярности S.

Покажем, что условия (2. 2) совместимы с условиями (1. 4). Подставляя (2. 2) в (1. 4), получим условия совместимости, которые имеют вид

$$\delta T_{ik} n^k = 0. \qquad (2.\ 3)$$

В работе [1] показано, что условия (2. 3) выполняются в произвольной системе координат, следовательно, они имеют место и в гармонической системе координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Денисов. Условия соединения на гиперповерхности разрыва первых производных метрического тензора пространства-времени. «Укр. геом. сб.», вып. 3, Харьков, 1966.

2. A. Lichnerowicz. Theories relativistes de la gravitation et de electromagnetisme, Paris, 1955.

3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 4, М., 1957.

Поступила 29 мая 1971 г.

К ОБЩЕМУ УРАВНЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В E^4 С СИММЕТРИЕЙ ПРАВИЛЬНОГО 24-ГРАННИКА

В. Ф. Игнатенко

Полтава

А. С. Лейбин

Харьков

Пусть F_n есть алгебраическая трехмерная поверхность четырехмерного евклидова пространства E^4. В настоящей заметке находится общее уравнение поверхности F_n с симметрией правильного 24-гранника, не содержащей своих плоскостей симметрии.

1°. Зададим вершины четырехмерного куба $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ и правильного 24-гранника $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 2, 0, 0\ 0)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2)$. Тогда уравнения 16-ти плоскостей симметрии куба будут такими:

$$x_i = 0 \ (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

$$x_i \pm x_j = 0 \ (i, j = 1, 2, 3, 4; i < j). \tag{2}$$

Присоединяя к ним

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0, \tag{3}$$

получим уравнения всех 24-х плоскостей симметрии правильного 24-гранника. Группу симметрий четырехмерного куба (правильного 24-гранника) обозначим через G^{16} (G^{24}), а инвариантную относительно нее поверхность F_n — через F_n^{16} (F_n^{24}); группа G^{16} является подгруппой G^{24}. Из (1) и (2) следует, что левые части уравнений F_n^{16}, F_n^{24} должны быть симметрическими функциями от всех x_i^2.

2°. Обозначим через K_n^{16} (K_n^{24}) асимптотический конус поверхности F_n^{16} (F_n^{24}). Пусть $n = 4$. Уравнение конуса K_4^{16} (K_4^{24}) должно иметь вид

$$a_1 \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \right)^2 + a_2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i<j}}^{4} x_i^2 x_j^2 = 0. \tag{4}$$

Отразим этот конус, например, относительно плоскости $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Первый член — сферический — перейдет в себя; сумма же $\sum_{\substack{i, j=1 \\ i<j}}^{4} x_i^2 x_j^2$ преобразуется в многочлен, содержащий произведение $x_1 x_2 x_3 x_4$, т. е. он не инвариантен относительно группы G^{24}. Следовательно, уравнение (4) инвариантно относительно G^{24} только при $a_2 = 0$. Это значит, что поверхность F_4^{24}, отличная от совокупности концентрических сфер, не существует. Поверхность

F_4^{16} ($\neq K_4^{16}$) может быть задана уравнением (4), при $a_2 \neq 0$, если в его правой части поставить постоянную $c \neq 0$.

3°. Положим $n = 6$. Уравнение K_6^{16} (K_6^{24}) можно записать так:

$$a_1\left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right)^3 + a_2\left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right)\sum_{\substack{i,\,j=1\\ i<j}}^{4} x_i^2x_j^2 + a_3 \sum_{\substack{i,\,j,\,k=1\\ i<j<k}}^{4} x_i^2x_j^2x_k^2 = 0$$

или

$$b_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^6 + b_2 \sum_{\substack{i,\,j=1\\ i\neq j}}^{4} x_i^4x_j^2 + b_3 \sum_{\substack{i,\,j,\,k=1\\ i<j<k}}^{4} x_i^2x_j^2x_k^2 = 0. \qquad (5)$$

Этот конус будет инвариантен относительно группы G^{24}, если, например, $b_1 = 0$, $b_3 = -3b_2$ [1, п. 11°]. Следовательно, функция

$$L_1^{24} = \sum_{\substack{i,\,j=1\\ i\neq j}}^{4} x_i^4x_j^2 - 3 \sum_{\substack{i,\,j,\,k=1\\ i<j<k}}^{4} x_i^2x_j^2x_k^2$$

есть элемент симметрии [2, п. 1°] группы G^{24}.

4°. Пусть $\eta_s = 0$ ($s = 1, 2, \ldots, 24$) есть нормированные уравнения (1)—(3) инвариантных плоскостей группы G^{24}. Тогда уравнение

$$\sum_{s=1}^{24} \eta_s^8 = 0$$

определяет конус K_8^{24}. Его левая часть имеет вид

$$9\sum x_i^8 + 28\sum x_i^6x_j^2 + 70\sum_{i<j} x_i^4x_j^4 + 84\sum_{j<k} x_i^4x_j^2x_k^2 +$$
$$+ 504x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2;$$

здесь и дальше предполагается, что в каждом члене каждой суммы все индексы различны, принимают значения 1, 2, 3, 4 и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы. Вычитая из этого многочлена $9(L_4)^2$, где $L_4 = \sum x_i^2$ [2, п. 1°], и сокращая на 8, затем прибавляя произведение $L_1^{24}L_4$ и снова сокращая на 4, получим инвариантную относительно группы G^{24} функцию

$$L_2^{24} = \sum_{i<j} x_i^4x_j^4 - \sum_{j<k} x_i^4x_j^2x_k^2 + 6x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2.$$

Эта функция не является многочленом относительно L_1^{24} и L_4 и поэтому она служит новым элементом симметрии группы G^{24}.

5°. Степень последнего элемента симметрии L_3^{24} не меньше 12 [2, п. 1°]. Чтобы его найти, рассмотрим конус K_{12}^{24}, который при подходящей нормировке уравнений $\eta_s = 0$, $s = 1, 2, \ldots, 24$, (1)—(3), можно записать так:

$$\sum_{s=1}^{24} \eta_s^{12} = 17 \sum x_i^{12} + 98 \sum x_i^{10} x_j^2 + 735 \sum x_i^8 x_j^4 + 1372 \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 +$$
$$+ 90 \sum_{j<k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 + 420 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 + 1050 \sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 +$$
$$+ 2520 \sum_{j<k<l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 + 6300 \sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2 = 0.$$

Левая часть этого уравнения также независима от L_1^{24}, L_2^{24} и L_4 и может служить элементом симметрии; однако ее можно значительно упростить, прибавляя выражение

$$-17 (L_4)^6 + 4 \{L_1^{24} (L_4)^3 - 22 (L_1^{24})^2 - 102 L_2^{24} (L_4)^2\};$$

сокращая на общий числовой множитель, получим окончательно

$$L_3^{24} = 2 \sum_{i<j} x_1^6 x_j^6 + 15 \sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 + 30 \sum_{j<k<l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 +$$
$$+ 48 \sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2.$$

6°. На основании п. 1° статьи [2], всякая поверхность F_n^{24} может быть представлена уравнением

$$\varphi (L_1^{24}, L_2^{24}, L_3^{24}, L_4) = 0,$$

где φ — многочлен от всех своих аргументов. Рассмотрим, например, поверхность F_{10}^{24}, определяемую уравнением

$$\sum_{s=1}^{24} \eta_s^{10} = c.$$

В развернутой форме левая часть этого уравнения имеет вид

$$17 \sum x_i^{10} + 45 \sum x_i^8 x_k^2 + 210 \sum x_i^6 x_k^4 + 140 \sum_{j<k} x_i^6 x_j^2 x_k^2 +$$
$$+ 350 \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 x_k^2 + 2100 \sum_{j<k<l} x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2.$$

Нетрудно убедиться, что она может быть записана так:

$$\sum_{s=1}^{24} \eta_s^{10} \equiv L_4 [17 (L_4)^2 - 40 L_1^{24} L_4 + 160 L_2^{24}].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях ортогональной симметрии поверхностей пространства E^m. «Укр. геометр. сб.», вып. 8. Изд-во ХГУ, 1970, 38—48.

2. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. Об алгебраических поверхностях в E^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника. «Укр. геометр. сб.», вып. 11. Изд-во ХГУ, 1971, 26—31.

Поступила 10 апреля 1971 г.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С СИММЕТРИЕЙ ПИРАМИД И БИПИРАМИД В E^4

В. Ф. Игнатенко

Полтава

А. С. Лейбин

Харьков

В настоящей статье рассматриваются алгебраические трехмерные поверхности F_n порядка $n \geqslant 3$ в четырехмерном евклидовом пространстве E^4, инвариантные относительно конечных групп симметрий E^4, аналогичных группам симметрий правильных пирамид и бипирамид пространства E^3. Для этих поверхностей устанавливаются все возможные значения порядка n поверхности в зависимости от числа N плоскостей симметрии соответствующей группы и приводится общий вид уравнения каждой такой поверхности.

1°. Будем применять следующие обозначения. Через

$$A_4,\ S_4,\ A_5,\ A_4^1,\ S_4^1,\ A_5^1,\ C_p,\ D_{p,q}$$

обозначим совокупность плоскостей симметрии соответствующей группы симметрий пространства E^4; эти совокупности подробно описаны в п. 2°. Соответствующие им поверхности обозначим через

$$F_n^6,\ F_n^9,\ F_n^{15},\ F_n^{6+1},\ F_n^{9+1},\ F_n^{15+1},\ F_n^C,\ F_n^D,$$

здесь верхний числовой индекс указывает число плоскостей соответствующей совокупности. При этом, если, например, $A_4 \subset S_4 \subset S_4^1$, то поверхность F_n^9 инвариантна относительно отражений в плоскостях A_4 и S_4, но не инвариантна относительно отражений в плоскостях S_4^1; иными словами, F_n^9 никаких других плоскостей симметрии, кроме S_4, не имеет. (Обозначения F_n^6, F_n^9, F_n^{15}, F_n^C были применены в работе [1], но там это были 2-поверхности в E^3; смысл обозначения F_n^D тот же, что и в работах [1—3]).

2°. Опишем теперь совокупности плоскостей симметрии.

A_4, S_4, A_5 (A_4^1, S_4^1, A_5^1) есть совокупность плоскостей симметрии правильной четырехмерной пирамиды (бипирамиды), трехмерным основанием которой является соответственно правильный тетраэдр, куб, правильный икосаэдр. Группа симметрий каждой из поверхностей F_n^6, F_n^9, F_n^{15}, имеющих плоскости симметрии соответственно A_4, S_4, A_5, совпадает с группой симметрий трехмерного основания соответствующей 4-пирамиды (символами A_4, S_4, A_5 обычно обозначаются группы вращений этих оснований в E^3). Совокупности A_4, S_4, A_5 имеют соответственно 6, 9, 15 плоскостей, перпендикулярных к плоскости основания 4-пирамиды и пересекающих эту плоскость по 2-плоскостям симметрии основания (тетраэдра, куба, икосаэдра). Присоединяя к плоскостям A_4, S_4, A_5 еще одну — плоскость основания 4-пирамиды, получаем совокупность A_4^1, S_4^1, A_5^1, плоскостей симметрии соответствующей 4-бипирамиды.

C_p — совокупность, состоящая из p-плоскостей, которые проходят через одну 2-плоскость (2-ось) и составляют при ней равные двугранные углы меры $\frac{\pi}{p}$. Эти плоскости определяют в E^4 циклическую группу вращений порядка p. При $p \geqslant 3$ плоскости C_p являются плоскостями симметрии четырехмерного многогранника, который может быть назван правильной двухвершинной p-угольной пирамидой. Две ее трехмерные грани — правильные пирамиды с общим p-угольным основанием; будем предполагать, что высоты h_1 и h_2 этих пирамидальных граней различны, $h_1 \neq h_2$ (случай $h_1 = h_2$ рассмотрен ниже).

$D_{p,q} = C_p \cup C_q$, где две осевые 2-плоскости совокупностей C_p и C_q вполне перпендикулярны друг к другу; $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, но $p + q \geqslant 3$ (так как $D_{1,1} = C_2$). Очевидно, все плоскости C_p перпендикулярны к каждой плоскости из C_q и наоборот, причем символы $D_{p,q}$ и $D_{q,p}$ геометрически эквивалентны.

Заметим, что описанная выше четырехмерная двухвершинная p-угольная пирамида при $h_1 = h_2$ имеет, кроме плоскостей C_p, еще одну плоскость симметрии, проходящую через 2-плоскость p-угольного основания и через середину ребра, соединяющего обе вершины (относительно этой плоскости симметричны друг другу обе p-угольные пирамидальные 3-грани); такая совокупность плоскостей есть $D_{p,1}$. Если же при этом $p = 3$ и все ребра этой двухвершинной треугольной пирамиды — при основании, боковые и соединяющие обе вершины — равны, то этот многогранник есть 4-симплекс, и его группа много богаче группы симметрий, порождаемой плоскостями $D_{3,1}$: она имеет не 4, а 10 плоскостей симметрии (поэтому группа 4-симплекса названа в [4] группой G^{10}, там же рассмотрены и поверхности F_n^{10} в E^4).

Плоскости $D_{p,q}$ при $p \geqslant 3$ и $q \geqslant 3$ представляют собой плоскости симметрии четырехмерного многогранника, который для трехмерной бипирамиды является обобщением на E^4 несколько иного рода, чем в случаях A_4^1, S_4^1, A_5^1, и может быть построен так.

Пусть центры правильных p- и q-угольников совпадают, а их 2-плоскости вполне ортогональны друг другу; 3-гранями нужного нам 4-многогранника служат всевозможные тетраэдры, у каждого из которых одно ребро есть сторона p-угольника, а противоположное ребро — сторона q-угольника. Сами p- и q-угольники являются двумерными диагоналями, но не 2-гранями 4-многогранника (как и p-угольное основание у трехмерной бипирамиды).

В случае $p=q$ не существует 3-плоскость, относительно которой конгруэнтные наборы плоскостей C_p и C_q, составляющие $D_{p,q}$, были бы симметричны. Поэтому при $p=q$ новые плоскости симметрии, вообще говоря, не появляются. Однако в случае, когда $p=q=4$ и оба основные четырехугольника равны друг другу, многогранник есть правильный четырехмерный 16-гранник, двойственный четырехмерному кубу, т. е. этот многогранник имеет группу G^{16} симметрий куба с 16 плоскостями симметрий, в которые совокупность $D_{4,4}$ входит как подмножество; поверхности F_n^{16}, инвариантные относительно группы G^{16}, рассмотрены Э. Гурса [5].

Отметим, что группа симметрий относительно плоскостей совокупности A_5 изоморфна группе G^{10} [4], но геометрически эти группы различны: A_5 имеет 15 плоскостей симметрии, а у группы G^{10} их только 10.

3°. Введем следующие обозначения: запись $i,\ j=(1,\ 2,\ 3)$ означает, что $i,\ j$ принимают последовательно такие пары значений: 1,2; 2,3; 3,1; запись $i,\ j,\ k=(1,\ 2,\ 3)$ — что $i,\ j,\ k$ принимают значения 1, 2, 3, затем 2, 3, 1, затем 3, 1, 2.

Описанные в п. 2° совокупности плоскостей зададим уравнениями

$$
\begin{aligned}
A_4:&\quad x_i \pm x_j = 0, \quad i,\ j=(1,\ 2,\ 3);\\
S_4:&\quad x_i = 0,\\
&\quad x_i \pm x_j = 0, \quad i,\ j=(1,\ 2,\ 3);\\
A_5:&\quad x_i = 0,\\
&\quad x_i \pm \lambda x_j \pm \mu x_k = 0, \quad i,\ j,\ k=(1,\ 2,\ 3),
\end{aligned}
$$

где

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \mu = -\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

добавляя к каждой из этих групп уравнений еще одно уравнение $x_4=0$, получим соответственно A_4^1, S_4^1 и A_5^1;

$$C_p:\ x_1\cos\frac{k\pi}{p} - x_2\sin\frac{k\pi}{p} = 0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1;$$

$$x_1\cos\frac{k\pi}{p} - x_2\sin\frac{k\pi}{p} = 0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1;$$

$$D_{p,q}:\ x_3\cos\frac{l\pi}{q} - x_4\sin\frac{l\pi}{q} = 0,\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ q-1,$$

где $p,\ q \geqslant 1$, целые, $p+q \geqslant 3$.

4°. Для удобства записи уравнений поверхностей введем следующие однородные многочлены: шесть элементов симметрии [4] поверхностей (отметим, что эти элементы симметрии взяты из пространства E^3, и даже из E^2, поскольку группы симметрий, определяющие поверхности, также относятся к этим пространствам)

$$L^6 = x_1x_2x_3;\; L_1^9 = \sum_{i,\, j=(1,\,2,\,3)} x_i^2x_j^2;\; L_2^9 = x_1^2x_2^2x_3^2;$$

$$L_1^{15} = \prod_{i,j=(1,\,3,\,2)} (x_i^2 - \lambda^2 x_j^2), \quad \left(\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);$$

$$L_2^{15} = \prod_{i,\, j=(1,\,2,\,3)} (x_i^2 - \lambda^4 x_j^2) \sum_{\alpha,\,\beta,\,\gamma=(1,\,2,3)} (x_\alpha^4 - 2x_\beta^2 x_\gamma^2);$$

$$L_{p,\,ij}^C = \prod_{k=0}^{p-1} \left(x_i \cos\frac{2k+1}{p}\pi - x_j \sin\frac{2k+1}{p}\pi\right)$$

и три левые части уравнений совокупностей плоскостей A_4, A_5 и C_p:

$$\xi = \prod_{i,\, j=(1,\,2,\,3)} (x_i^2 - x_j^2);\; \eta = x_1x_2x_3 \prod_{\substack{i,\, j,\, k=(1,\,2,\,3)\\ \varepsilon_1,\varepsilon_2=\pm 1}} (x_i + \varepsilon_1\lambda x_j + \varepsilon_2\mu x_k);$$

$$\zeta_{h,\,ij} = \prod_{k=0}^{h-1} \left(x_i \cos\frac{k\pi}{h} - x_j \sin\frac{k\pi}{h}\right).$$

5°. Пусть φ — многочлен относительно четырех переменных. Запишем такие функции:

$$U_1 = x_4^s \xi^v \varphi(L^6,\; L_1^9,\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\; x_4);$$
$$U_2 = x_4^s \xi^v (L^6)^w \varphi(L_1^9,\; L_2^9,\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\; x_4);$$
$$U_3 = x_4^s \eta^v \varphi(L_1^{15},\; L_2^{15},\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\; x_4);$$
$$U_4 = \zeta_{h,\,12}^v \varphi(L_{p,\,12}^C,\; x_1^2 + x_2^2,\; x_3,\; x_4);$$
$$U_5 = \zeta_{h,\,12}^v \zeta_{h_1\,34}^{v_1} \varphi(L_{p,\,12}^C,\; L_{q,\,34}^C,\; x_1^2 + x_2^2,\; x_3^2 + x_4^2),$$

где s, v, v_1, $w \geqslant 0$ целые; $h = p$, $h_1 = q$; в случае p или q четного возможны значения $h = \frac{p}{2}$, $h_1 = \frac{q}{2}$. От многочлена φ потребуем, чтобы в него с коэффициентом, отличным от нуля, входил в функции U_1 элемент симметрии L^6, в функции U_2, U_3, U_4 — хотя бы один записанный в них несферический элемент симметрии L, а в U_5 — оба элемента $L_{p,\,12}^C$ и $L_{q,\,34}^C$.

Если $s = 0$ и U_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ содержит x_4 в нечетной степени, а U_4 включает в нечетной степени также и x_3, то, согласно [5], $U_i = 0$ есть общее уравнение поверхности F_n^6, F_n^9, F_n^{15}, F_n^C соответственно. Если же многочлен φ, входящий в U_i $(i = 1, 2, 3)$, содержит x_4 только в четной степени, то при любом целом $s \geqslant 0$ $U_i = 0$ является общим уравнением поверхности F_n^{6+1}, F_n^{9+1}, F_n^{15+1} соответственно. Поверхность F_n^D имеет общее уравнение $U_5 = 0$.

В случаях $v \neq 0$, $w \neq 0$ и $v_1 \neq 0$ поверхность содержит в качестве своих компонент некоторые или все свои плоскости симметрии, и тогда уравнения $U_4 = 0$ и $U_5 = 0$ определяют поверхности F_n^{*C} и F_n^{*D} [6, 3]; в эти уравнения элементы симметрии L могут входить общим множителем.

6°. Теорема 3 работы [1] верна и для поверхностей F_n^{*C} в E^4; примеры F_n^{*C} можно задать уравнениями

$$[(x_1^2+x_2^2)^t+ax_3+bx_4]\,\zeta_{h,\,12}^{v}=0;\ n=2t+hv;$$

$$[(x_1^2+x_2^2)^t+ax_3^{2t+1}+bx_4]\,\zeta_{h,\,12}^{v}=0,\ n=2t+hv+1,$$

где t — натуральное число, $ab\neq 0$.

Отметим, что если в условиях теорем 4 и 5 работы [1] прямую заменить 2-плоскостью, эти теоремы останутся справедливыми и для поверхностей F_n^{*D} в E^4 с группой симметрий, определяемой $D_{p,\,1}$, с тем изменением, что поверхность F_n^{*D} будет нецентральной, причем в теореме 5 будет $n\geqslant 5$ и $h=2, 3, \ldots, n-3$. Пример такой поверхности:

$$x_3^{\varepsilon r}\zeta_{h,\,12}^{v}[(x_1^2+x_2^2)^t+ax_3^2+bx_4]=0,$$

где $r>0$ целое, $\varepsilon=0$ или 1 соответственно теоремам 4 и 5; $n=2t+hv+\varepsilon r$.

7°. Из пп. 5° и 6° следует, что все возможные значения порядка n поверхности и числа N ее плоскостей симметрии в зависимости от типа симметрии поверхности можно представить табл. 1.

Таблица 1

	Тип симметрии	n	N
A_4	F_n^6	$\geqslant 3$	6
S_4	F_n^9	$\geqslant 4$	9
A_5	F_n^{15}	$\geqslant 6$	15
A_4^1	F_n^{6+1}	$\geqslant 3$	7
S_4^1	F_n^{9+1}	$\geqslant 4$	10
A_5^1	F_n^{15+1}	$\geqslant 6$	16
C_p	F_n^C (включая F_n^{*C})	$\geqslant 3$	$1, 2, \ldots, n$ $(N\leqslant n)$
	F_n^C только F_n^{*C}	$\geqslant 5$	$6, 8, \ldots, 2n-4$ $(N>n)$
$D_{p,\,q}$	F_n^D	$\geqslant 3$	$3, 4, \ldots, 2n$

Из табл. 1 вытекает табл. 2 распределения точных верхних границ $\overline{N}$ для чисел N (ср. [1], п. 8°):

Таблица 2

n	3	4	5	6, 7	8	$\geqslant 9$
$\overline{N}$	7	10	10	16	16	$2n$
F_n	F_3^{6+1}	F_4^{9+1}	F_5^{9+1}, F_5^D	F_n^{15+1}	F_8^{15+1}, F_8^D	F_n^D

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Игнатенко. А. С. Лейбин. О плоскостях симметрии алгебраических поверхностей пространства E^3. «Укр. геометр. сб.», вып. 10. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971, 34—40.
2. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях ортогональной симметрии поверхностей евклидова пространства E^m. «Укр. геометр. сб.», вып. 8. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970, 38—48.
3. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях симметрии приводимой поверхности одного специального вида. «Укр. геометр. сб.», вып. 9. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970, 36—39.
4. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. Об алгебраических поверхностях в E^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника. «Укр. геометр. сб.», вып. 11. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.
5. E. Goursat. 'Etude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polièdre régulier. Ann. de l''Ecole Norm., (3) IV, 1887, 159—200, 317—340.
6. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в E^m. «Укр. геометр. сб.», вып. 7. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969 (1970), 39—54.

Поступила 5 мая 1971 г.

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КОМПЛЕКСОВ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Я. Ильяшенко

Киев

Теория комплексов в евклидовом, аффинном и проективном пространствах изучена достаточно полно, в отличие от теории комплексов в классических неевклидовых пространствах.

Первые результаты по теории комплексов прямых в неевклидовых пространствах были получены Н. И. Кованцовым [1, 2] и В. И. Машановым и доложены ими на Первой Всесоюзной геометрической конференции в 1962 г. В 1963 г. вышла работа [3] Н. И. Кованцова, где впервые рассматриваются свойства комплексов в гиперболическом пространстве. Основное внимание уделено первой дифференциальной окрестности.

В докладе [5] В. И. Машанова на Третьей Сибирской конференции в 1964 г. дано объединенное изложение теории комплексов всех трех пространств постоянной кривизны.

В. И. Машанов и Т. И. Тулюпа [6, 7] исследуют свойства комплексов и частные классы комплексов, связанные со свойствами его линейчатых поверхностей, а также свойства неголономных конгруэнций комплекса.

Там же рассмотрены начальные свойства комплексов, в основном геометрические в окрестности первого порядка.

Предмет нашего изучения — свойства комплексов гиперболического пространства во второй дифференциальной окрестности текущего луча.

§ 1. Предварительные соображения

Рассмотрим трехмерное проективное пространство P_3, отнесенное к некоторому неподвижному реперу T_0. Каждая аналитическая точка M имеет в этом репере определенную четверку координат. Зададим овальную поверхность второго порядка (абсолют)

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \equiv M^2 = 0 \quad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

где $M(x^\alpha)$ — произвольная точка поверхности.
Полярную форму для двух точек $M(x^\alpha)$, $N(y^\alpha)$, $a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$, будем записывать в виде MN.

Гиперболическое пространство будет интерпретироваться как внутренняя область этой поверхности.

В качестве подвижного репера T выберем тетраэдр, определяемый четырьмя аналитическими точками A_0, A_1, A_2, A_3, удовлетворяющими условиям:

$$A^2 = -R^2,\ A_i^2 = 1,\ AA_i = 0,\ A_iA_j = 0\ (i \neq j),\ (i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

(Мы положили $A_0 = A$); R — радиус кривизны гиперболического пространства.

Движения гиперболического пространства H_3 — это те коллинеации P_3, которые сохраняют квадратичную форму, стоящую в левой части уравнения абсолюта.

Нет необходимости полагать $A^2 = -R^2$ для пространства с радиусом кривизны R. Можно для этого пространства положить $A^2 = -1$. Выбор соотношений (1) означает лишь выбор подвижного репера, а этот выбор зависит от нас самих. Равенства (1) (их 10) по координатам точек A_α позволяют однозначно определить коэффициенты $a_{\alpha\beta}$. То, что эти равенства одни и те же для всех реперов T, означает, что мы действительно имеем проективные преобразования, сохраняющие форму $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$.

Деривационные уравнения пространства H_3 имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta,\ (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Дифференцируя равенства (1), получим

$$\omega_\alpha^\alpha = 0, \quad \omega_0^i - R^2\omega_i^0 = 0, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{3}$$

Обозначим $\omega_0^i = \omega^i$. Тогда

$$\omega_i^0 = \frac{1}{R^2}\omega^i. \tag{4}$$

Уравнения структуры гиперболического пространства получим, потребовав полной интегрируемости уравнений (2) и учитывая (3), (4):

$$D\omega^i = [\omega^k\omega_k^i], \ D\omega_i^j = \frac{1}{R^2}[\omega^i\omega^j] + [\omega_i^k\omega_k^j]. \tag{5}$$

Пусть K — комплекс пространства H_3. Поместим вершины A и A_3 на его луч. Тогда главными формами инфинитезимального смещения репера будут формы

$$\omega^1, \ \omega^2, \ \omega_3^1, \ \omega_3^2.$$

Эти формы содержат дифференциалы только трех главных параметров. Исключая дифференциалы из форм, получим

$$\omega^2 = a\omega_3^2 + b\omega^1 + k\omega_3^1. \tag{6}$$

Коэффициенты a, b, k зависят от главных параметров, от вторичных, связанных с репером, выбирая который, можно эти коэффициенты привести к удобному для нас виду. Согласно Э. Картану, это делается так. Продифференцируем равенство (6) внешним образом

$$[\omega^1\omega_1^2] + [\omega^3\omega_3^2] - [da\omega_3^2] - [db\omega^1] - [dk\omega_3^1] -$$
$$- a[\omega_3^1\omega_1^2] - \frac{a}{R^2}[\omega^3\omega^2] - b[\omega^2\omega_2^1] - b[\omega^3\omega_3^1] -$$
$$- k[\omega_3^2\omega_2^1] - \frac{k}{R^2}[\omega^3\omega^1] = [\Delta a\omega_3^2] + [\Delta b\omega^1] + [\Delta k\omega_3^2] = 0.$$

Отсюда с помощью леммы Картана получаем

$$\begin{aligned} \Delta a &\equiv - da + (ab + k)\,\omega_2^1 + \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)\omega^3 = p\omega_3^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^1, \\ \Delta b &\equiv - db + (b^2 + 1)\,\omega_2^1 - \frac{ab + k}{R^2}\,\omega^3 = \alpha\omega_3^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^1, \\ \Delta k &\equiv - dk - (a - bk)\,\omega_2^1 - \frac{ak + bR^2}{R^2}\,\omega^3 = \beta\omega_3^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^1. \end{aligned} \tag{7}$$

Запишем уравнение, определяющее инфлекционные центры луча комплекса, которое используется в дальнейшем.

Возьмем на луче AA_3 произвольную точку

$$M = A + tA_3. \tag{8}$$

Плоскость, соответствующая ей в нормальной корреляции на луче, (см. [3]), имеет тангенциальные координаты

$$\Pi = (a + t)(AA_3A_1) + (bt - k)(AA_3A_2). \tag{9}$$

Условия неподвижности точки M и плоскости Π имеют соответственно вид

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0,\ \omega^2 + t\omega_3^2 = 0,\ \left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right)\omega^3 + dt = 0. \tag{10}$$

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = 0,\ \omega^2 + t\omega_3^2 = 0, \tag{11}$$

$$(bt - k)\,d(a + t) - (a + t)\,d(bt - k) + [(bt - k)^2 + (a + t)^2]\,\omega_2^1 = 0.$$

Из третьих равенств (10) и (11) исключим dt. Сделав необходимые преобразования, получим

$$(bt - k)\,\Delta a - t(a + t)\,\Delta b + (a + t)\,\Delta k = 0.$$

Подставляя вместо Δa, Δb, Δk их значения из (7) и выражая, например, ω^1, ω_3^2 через ω_3^1, из первых двух равенств (10) и (11), найдем уравнение, которое определяет инфлекционные центры (случай $ab + k = 0$, соответствующий специальным комплексам, т. е. комплексам касательных к произвольной поверхности, сейчас из рассмотрения исключим)

$$\begin{aligned} qt^4 - 2(\gamma + \alpha b - aq)\,t^3 + (qa^2 - 4a\gamma + r - 2\alpha ba + 2\alpha k + \\ + 2\beta b + pb^2)\,t^2 + 2(ar - \gamma a^2 + \beta ba - \beta k + \alpha ka - \\ - bkp)\,t + (ra^2 - 2\beta ka + pk^2) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

§ 2. Комплексы с неопределенными центрами

Как известно (см. [3]), центрами луча называются такие две полярно сопряженные относительно абсолюта точки, которым соответствуют в нормальной корреляции взаимно-перпендикулярные плоскости.

В общем случае таких центров на каждом луче два.

Рассмотрим свойства комплексов, у которых центры неопределенны, иначе говоря, каждая точка луча является центром. Предварительно найдем квадратное уравнение, определяющее центры.

Пусть $M = A + tA_3$ — произвольная конечная (т. е. лежащая внутри абсолюта) точка луча комплекса, ей соответствует в нормальной корреляции на луче плоскость (9). Точке $M' = A + \frac{R^2}{t}A_3$, полярно сопряженной с точкой M относительно абсолюта, соответствует в нормальной корреляции на луче плоскость

$$\Pi' = (at + R^2)(AA_3A_1) - (bR^2 - kt)(AA_3A_2). \tag{13}$$

Плоскости, проходящие через луч AA_3 и касающиеся абсолюта, имеют тангенциальные координаты

$$\Pi_1 = (AA_3A_1) + i\,(AA_3A_2);\ \Pi_2 = (AA_3A_1) - i\,(AA_3A_2). \tag{14}$$

Плоскости Π и Π' взаимно-перпендикулярны, если

$$W = (\Pi_1\Pi_2\Pi\Pi') = -1. \tag{15}$$

Отсюда

$$t^2(a - bk) + t\,(b^2R^2 + a^2 + k^2 + R^2) + R^2(a - bk) = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) определяет на луче комплекса центры.

Центры луча комплекса будут неопределенными, если

$$\begin{cases} a - bk = 0 \\ (b^2 + 1)(R^2 + k^2) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Как видим, имеем всего два условия вместо возможных трех.

Возможны следующие случаи.

а) Клиффордовы комплексы

Комплекс, представляющий собой однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций, директрисами которых являются образующие одного семейства абсолюта, называется клиффордовым комплексом.

Пусть

$$k^2 + R^2 = 0,\ a - bk = 0.$$

Тогда

$$k = \pm\, iR;\ a = \pm\, ibR. \tag{18}$$

Уравнение (6) имеет в этом случае вид

$$\omega^2 = \pm\, ibR\omega_3^2 + b\omega^1 \pm iR\omega_3^1. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (7), получаем

$$\mp\, iRdb \pm iR\,(b^2 + 1)\,\omega_2^1 + (b^2 + 1)\,\omega^3 = p\omega_3^2 + \alpha\omega^1,$$

$$-db + (b^2 + 1)\,\omega_2^1 \mp \frac{i\,(b^2 + 1)}{R}\,\omega^3 = \alpha\omega_3^2 + q\omega^1. \tag{20}$$

$$\beta = \gamma = r = 0.$$

Возьмем верхний знак.

Из первых равенств (20) следует

$$p = iR\alpha;\ \alpha = iRq;\ p = -R^2q.$$

Следовательно, 4 уравнения (6) и (7) сведутся к следующим двум:

$$\omega^2 = iR\omega_3^1 + b\,(\omega^1 + iR\omega_3^2),$$

$$-iRdb + (b^2 + 1)\,(\omega^3 + iR\omega_2^1) = p\left(\omega_3^2 - \frac{i}{R}\,\omega^1\right). \tag{21}$$

Класс таких комплексов существует с произволом в одну функцию одного аргумента (устанавливаем обычным путем; то обстоятельство, что коэффициенты уравнений (21) мнимы, сути дела, очевидно, не меняет).

Уравнение (12), определяющее инфлекционные центры, принимает вид

$$q\,(t^4 - 2R^2t^2 + R^4) = 0. \tag{22}$$

Имеем следующие случаи: 1°. $q = 0$. Инфлекционные центры оказываются неопределенными, следовательно, комплекс линейный. Покажем, что такой комплекс существует. Действительно, мы имеем в данном случае $p = 0$.

Второе уравнение из системы (21) принимает вид

$$-iRdb + (b^2 + 1)\,(\omega^3 + iR\omega_2^1) = 0$$

и оказывается вполне интегрируемым, ибо

$$D\,(\omega^3 + iR\omega_2^1) = [\omega^1\omega_1^3] + b\,[\omega^1\omega_2^3] + iR\,[\omega_3^1\omega_2^3] +$$
$$+ iR\,[\omega_2^3\omega_3^1] - b\,[\omega_3^2\omega^1] - [\omega_3^1\omega^1] = 0.$$

Следовательно, решение системы (21) существует с произволом в две постоянные. С таким произволом и существует класс линейных комплексов с неопределенными центрами.

Для исследования этого класса комплексов канонизируем репер так, чтобы вершинам A, A_3 соответствовали плоскости AA_3A_2, AA_3A_1. Тогда $a = b = 0$ (см. [3]). В этом случае это можно сделать. При этом, поскольку $k = \pm iR \neq 0$, то из равенства $a = 0$ следует равенство $b = 0$, и наоборот.

Уравнения (21) принимают вид

$$\omega^2 = iR\omega_3^1,$$
$$\omega^3 + iR\omega_2^1 = p\left(\omega_3^2 - \frac{i}{R}\,\omega^1\right). \tag{a}$$

При $p = 0$ конгруэнция

$$\omega^1 + iR\omega_3^2 = 0 \tag{*}$$

голономна, т. к.

$$D\,(\omega^1 + iR\omega_3^2) = [\omega^2\omega_2^1] + [\omega^3\omega_3^1] +$$
$$+ iR\left([\omega_3^1\omega_1^2] + \frac{1}{R^2}\,[\omega^3\omega^2]\right) = 0.$$

Таким образом, рассматриваемый сейчас мнимый линейный комплекс представляет собой однопараметрическое семейство конгруэнций (*). Конгруэнция (*) линейная, директрисами ее являются мнимые образующие одного семейства абсолюта. Действительно, фокусы этой конгруэнции определяются уравнениями

$$\begin{cases} -iR\omega_3^2 + t\omega_3^1 = 0, \\ \ \ iR\omega_3^1 + t\omega_3^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что фокусы конгруэнции совпадают с точками

$$F_1 = A + RA_3, \ F_2 = A - RA_3.$$

Дифференциалы (каждый в отдельности)

$$dF_1 = R(\omega_3^2 + i\omega_3^1)(A_2 - iA_1) + \frac{\omega^3}{R}F_1,$$

$$dF_2 = R(i\omega_3^1 - \omega_3^2)(A_2 + iA_1) - \frac{\omega^3}{R}F_2$$

зависят от одной формы (первый — от $(\omega_3^2 + i\omega_3^1)$, второй — от $(i\omega_3^1 - \omega_3^2)$). Таким образом, фокальные поверхности конгруэнции вырождаются в линии, касательные к которым совпадают с прямыми

$$l_1 = (A_2 - iA_1, \ A + RA_3); \ l_2 = (A_2 + iA_1, \ A - RA_3).$$

Легко проверить, что $dl_1 \equiv 0 \pmod{l_1}$, $dl_2 \equiv 0 \pmod{l_2}$, а это означает, что рассматриваемые линии — прямые, при этом они являются мнимыми образующими одного семейства абсолюта. Утверждение доказано.

Соответствие между указанными образующими есть инволюция. Докажем это.

Две образующие одной серии абсолюта

$$-R(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$$

определяются уравнениями

$$\begin{cases} Rx^0 + x^1 = -u_1(x^2 + ix^3), \\ -Rx^0 + x^1 = \frac{1}{u_1}(x^2 - ix^3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} Rx^0 + x^1 = -u_2(x^2 + ix^3), \\ -Rx^0 + x^1 = \frac{1}{u_2}(x^2 - ix^3). \end{cases}$$

Возьмем на первой образующей точку M_1, определяемую четверкой чисел

$$x^0 = 1, \ x^1 = t, \ x^2 = \frac{R(1 + u_1^2) + t(1 - u_1^2)}{2u_1},$$

$$x^3 = \frac{R(1 - u_1^2) + t(u_1^2 + 1)}{-2iu_1},$$

а на второй образующей — точку M_2, определяемую числами

$$y^0 = 1, \ y^1 = \tau, \ y^2 = \frac{R(1 + u_2^2) + \tau(1 - u_2^2)}{2u_2},$$

$$y^3 = \frac{R(1 - u_2^2) + \tau(u_2^2 + 1)}{-2iu_2}.$$

Найдем плюккеровы координаты прямой M_1M_2 и внесем их в уравнение линейного комплекса. Приравняв нулю коэффициенты при независимых переменных t и τ, получим 3 соотношения на коэффициенты линейного комплекса. Этим будет доказано, что произвол инволютивного соответствия между образующими одной серии — две постоянные. Это и объясняет геометрическую суть того факта, что класс комплексов (21) при $p = 0$ имеет широту, определяемую двумя постоянными.

$2°$. $q \neq 0$.

В этом случае уравнение

$$t^4 - 2R^2t^2 + R^4 = (t^2 - R^2)^2 = 0$$

определяет на каждом луче комплекса два двойных инфлекционных центра, совпадающих с точками пересечения луча с абсолютом.

Инфлекционные центры описывают, таким образом, поверхность, совпадающую с абсолютом.

Плоскости, соответствующие в нормальной корреляции на луче инфлекционным центрам, определяются координатами

$$\Pi_1 = (AA_3A_1) + i\,(AA_3A_2); \quad \Pi_2 = (AA_3A_1) + i\,(AA_3A_2).$$

Эти плоскости (см. (14)) совпадают с плоскостями, проходящими через AA_3 и касающимися абсолюта в мнимых точках. Каждая из этих плоскостей пересекает абсолют по двум мнимым образующим.

Покажем, что комплекс (а) — мнимый клиффордов комплекс. Действительно, возьмем две любые взаимно-перпендикулярные точки $M = A + tA_3$ и $M' = A + \frac{R^2}{t} A_3$, им в нормальной корреляции на луче соответствуют плоскости

$$\Pi = t\,(AA_3A_1) - iR\,(AA_3A_2); \quad \Pi' = R^2\,(AA_3A_1) - iRt\,(AA_3A_2).$$

Эти плоскости взаимно-перпендикулярны, т. к. имеет место (15). Это свойство полностью характеризует комплекс. Доказательство того, что всякий клиффордов комплекс есть комплекс (а), не вызывает затруднений.

Чтобы построить произвольный комплекс (а), надо взять одно семейство мнимых образующих абсолюта и, задав между ними произвольное соответствие (одна функция одного аргумента), принять соответствующие образующие за директрисы линейной конгруэнции. Совокупность таких конгруэнций и есть комплекс (а). Доказательство этого утверждения — аналогично случаю эллиптического пространства [2]. Несмотря на то, что директрисы конгруэнций мнимы, конгруэнции не есть эллиптические, так как директрисы не комплексно сопряжены. Комплексно сопряженными образующими всегда являются образующие разных семейств, пересекающиеся в действительной точке абсолюта.

б) Специальные комплексы с неопределенными центрами

1. Пусть $b^2+1=0$, $a-bk=0$. Поскольку сейчас $ab+k=0$, то комплекс — специальный.

Уравнение (6) принимает вид

$$\omega^2 = \pm ik\omega_3^2 \pm i\omega^1 + k\omega_3^1.$$

Подставляя в (7) значение $b=\pm i$, $a=\pm ki$, получим

$$\begin{aligned} \mp idk + \frac{k^2+R^2}{R^2}\omega^3 &= p\omega_3^2 + \beta\omega_3^1, \\ -dk \mp i\frac{k^2+R^2}{R^2}\omega^3 &= \beta\omega_3^2 + r\omega_3^1. \end{aligned} \tag{23}$$

Умножив первое равенство (23) на $\mp i$, получим второе. Отсюда

$$\beta = \mp ip;\ r = \mp i\beta;\ r = -p.$$

Таким образом, уравнения (6), (7) принимают вид

$$\omega^2 = \pm ik\omega_3^2 \pm i\omega^1 + k\omega_3^1,$$

$$\mp dk + \frac{R^2+k^2}{R^2}\omega^3 = p\left(\omega_3^2 \mp i\omega_3^1\right).$$

Класс комплексов существует с произволом в одну функцию одного аргумента. Уравнение (12), определяющее инфлекционные центры, в этом случае тождественно исчезает, как и следовало ожидать.

Полагая $k=0$, будем иметь

$$\omega^2 = \pm i\omega^1,\ \omega^3 = p\left(\omega_3^2 \mp i\omega_3^1\right).$$

При неподвижном луче $(\omega^1=\omega_3^1=\omega_3^2=0)$ имеем и неподвижную точку A $(\omega^1=\omega^2=\omega^3=0)$. Это — следствие равенства $k=0$. Равенство (9) показывает, что каждой точке $M=A+tA_3$ луча в нормальной корреляции соответствует одна и та же плоскость

$$\Pi = \mp i(\pm it-k)(AA_3A_1) \pm i(AA_3A_2).$$

Эта плоскость становится неопределенной при

$$\pm it - k = 0.$$

Если $k=0$ (это зависит от нас), то точка M совпадает с A. Для всех остальных точек имеем одну и ту же плоскость

$$\Pi_{1,2} = (AA_3A_1) \pm i(AA_3A_2) = (AA_3A_1 \pm iA_2).$$

Верхнему знаку соответствует одна плоскость, нижнему — другая. Обе эти плоскости являются касательными плоскостями абсолюта.

$$dA = \omega^1(A_1 \pm iA_2) + \omega^3A_3.$$

Таким образом, точка A перемещается в поверхности Σ, касательной к одной из плоскостей $\Pi_{1,2}$.

$$d\Pi_{1,2} = \pm i\omega_2^1 \Pi_{1,2} + \left(\omega_3^2 \pm i\omega_3^1\right)(AA_2A_1).$$

Это означает, что поверхность Σ — развертывающаяся. Линия пересечения двух бесконечно близких плоскостей $\Pi_{1,2}$ и $\Pi_{1,2} + d\Pi_{1,2}$ (образующая развертывающейся поверхности) есть

$$l = (A, A_1 \pm iA_2).$$

Точка $N = A_1 \pm iA_2$ лежит на абсолюте. Имеем

$$dN = \pm i\omega_2^1 N + \left(\omega_1^3 \pm i\omega_2^3\right) A_3.$$

Таким образом, точка N описывает кривую α на абсолюте, эта кривая не есть образующая абсолюта. Касательная к ней проходит через точку A_3. При неподвижной точке A_3 точка A описывает прямую $l = (AN)$. Прямая l есть линия пересечения плоскости, полярно сопряженной точке A_3, с касательной плоскостью в точке N. Следовательно, касательная плоскость к абсолюту в точке N проходит через точки A, A_3, что можно проверить непосредственно. Можно предположить следующее безынтегральное представление комплекса. Берем на абсолюте произвольную кривую α (одна функция одного аргумента) и торс, образованный касательными плоскостями к абсолюту вдоль этой кривой. Совокупность касательных к этому торсу, т. е. совокупность всех прямых, расположенных в касательных плоскостях торса, есть рассматриваемый комплекс.

Для доказательства репер канонизируем так. Точка A_3 помещается на касательную к кривой α (ребро возврата торса), точка A — на линии пересечения касательной плоскости к абсолюту в N с плоскостью, полярно сопряженной A_3 относительно абсолюта. Точка N будет тогда обязательно лежать на прямой A_1A_2, а поскольку она лежит на абсолюте, то представляется в виде $N = A_1 \pm iA_2$. Так как, по условию, $dN = \lambda N + \mu A_3$, то отсюда следует

$$\omega^2 = \pm i\omega^1,$$

что характеризует рассматриваемый комплекс.

Комплекс — не линейный, хотя инфлекционные центры неопределенны. Этот комплекс каждой точке M пространства действительно ставит в соответствие плоскость, в которой лежат прямые комплекса — прямые, что проходят через M и лежат в касательной плоскости торса, проходящей через M. Однако не каждой плоскости σ пространства отвечает точка — центр пучка прямых комплекса. Если σ не является касательной плоскостью торса, то она пересекает касательные плоскости торса по прямым, которые огибают некоторую кривую. Эти прямые принадлежат комплексу, но они не образуют пучка.

Итак, инфлекционные центры на каждом луче неопределенны, но комплекс не линейный. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что при неопределенности инфлекционных центров комплекс линейный лишь тогда, когда он не специальный. Специальные комплексы при выводе уравнения инфлекционных центров из рассмотрения исключались. Сейчас же мы имеем дело как раз со специальным комплексом, причем с частным специальным — совокупностью касательных к торсу, а не к произвольной поверхности.

2. Пусть теперь $b^2+1=0$, $k^2+R^2=0$, $a-bk=0$. Уравнение (6) принимает вид

$$\omega^2 = -R\omega_3^2 \pm i\omega^1 \pm iR\omega_3^1. \tag{24}$$

Подставляя в (7) значения $b=\pm i$, $k=\pm iR$, $a=-R$, получим

$$p=\alpha=\beta=\gamma=q=r=0.$$

Класс комплексов существует с произволом в одну постоянную. Покажем, как построить этот комплекс.

Возьмем на луче AA_3 произвольную точку $M=A+tA_3$. Плоскость, соответствующая ей в нормальной корреляции на луче, определяется координатами

$$\Pi = (-R+t)(AA_3A_1) + (it-iR)(AA_3A_2).$$

Таким образом, каждой точке на луче AA_3 соответствует одна и та же плоскость, которая проходит через AA_3 и касается абсолюта. Из равенства

$$d\Pi = (\omega_3^2 - i\omega_3^1)\,[(AA_2A_1) - R\,(A_2A_3A_1)] +$$
$$+ i\omega_2^1\,[(AA_3A_1) + i\,(AA_3A_2)]$$

следует, что совокупность плоскостей Π зависит от одного параметра. Семейство таких плоскостей образует пучок с осью на прямой

$$(A+RA_3,\ A_1+iA_2). \tag{25}$$

Эта прямая принадлежит абсолюту, т. е. является его образующей.

Итак, рассматриваемый комплекс есть специальный комплекс с осью на прямой (25).

§ 3. Комплексы, у которых всякой паре точек на луче с постоянным расстоянием между ними соответствуют в нормальной корреляции плоскости с постоянным углом между ними

Рассмотрим комплексы, у которых для всякой пары точек с постоянным расстоянием соответствующие плоскости образуют постоянные углы.

Репер канонизируем так, чтобы

$$a = b = 0. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (6) и (7), получим уравнения

$$\omega^2 = k\omega_3^1,$$

$$k\omega_2^1 + \omega^3 = p\omega_3^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^1,$$

$$\omega_2^1 - \frac{k}{R^2}\omega^3 = \alpha\omega_3^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^1,$$

$$-dk = \beta\omega_3^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^1.$$

Возьмем на луче AA_3 две произвольные точки

$$M_1 = A + t_1A_3, \quad M_2 = A + t_2A_3.$$

Как известно, расстояние $d = M_1M_2$ определяется по формуле

$$d = \frac{R}{2}\ln W, \tag{27}$$

где R — фундаментальная постоянная гиперболического пространства;

W — сложное отношение точек P_1, P_2, M_1, M_2.

Точки P_1 и P_2 — точки пересечения луча AA_3 с абсолютом

$$P_1 = A + RA_3, \quad P_2 = A - RA_3.$$

Найдем сложное отношение W.

$$W = (P_1P_2M_1M_2) = \frac{t_1t_2 - R(t_2 - t_1) - R^2}{t_1t_2 + R(t_2 - t_1) - R^2}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27), получим

$$\operatorname{th}\frac{d}{R} = \frac{R(t_2 - t_1)}{R^2 - t_1t_2}. \tag{29}$$

Плоскости, соответствующие точкам M_1, M_2 в нормальной корреляции на луче, определяются соответственно координатами

$$\sigma_1 = t_1(AA_3A_1) - k(AA_3A_2), \quad \sigma_2 = t_2(AA_3A_1) - k(AA_3A_2)$$

(см. [9], где надо положить $a = b = 0$).

Найдем теперь угол между этими плоскостями. Для этого составим сложное отношение

$$W = (\Pi_1\Pi_2\sigma_1\sigma_2) = \frac{k^2 + t_1t_2 - ik(t_2 - t_1)}{k^2 + t_1t_2 + ik(t_2 - t_1)}.$$

Обозначим

$$A = k^2 + t_1t_2, \quad B = k(t_2 - t_1).$$

Положим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A} = \frac{k(t_2 - t_1)}{k^2 + t_1t_2}. \tag{30}$$

Тогда φ — угол между плоскостями σ_1 и σ_2 (см. [3]).

Пусть в нашем случае

$$\frac{R(t_2-t_1)}{R^2-t_1t_2}=D=\text{const},$$
$$\frac{k(t_2-t_1)}{k^2+t_1t_2}=F=\text{const}. \tag{31}$$

Уравнения относительно произвольных t_1 и t_2

$$R(t_2-t_1)+Dt_1t_2-DR^2=0,$$
$$k(t_2-t_1)-Ft_1t_2-Fk^2=0$$

должны совпадать. Отсюда

$$\frac{R}{k}=\frac{D}{-F}=\frac{DR^2}{Fk^2},$$

т. е.

$$k=\pm iR,\ D=iF. \tag{32}$$

Таким образом, между постоянными D и F существует соотношение (32), а равенство $k=\pm iR$ приводит к случаю а).

§ 2. Итак, комплексы, у которых каждой паре точек на луче с постоянным расстоянием между ними в нормальной корреляции соответствуют плоскости с постоянным углом между ними, есть те, у которых центры на каждом луче являются неопределенными, следовательно, есть клиффордовы комплексы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Теория комплексов в неевклидовых пространствах. Первая Всесоюзная геометрическая конференция. Тезисы сообщений. К., 1962, 23—24.

2. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Изд-во КГУ, 1963.

3. Н. И. Кованцов. Комплексы в гиперболическом пространстве, «Сибирск. математ. ж.», 4 : 5, 1963, 1106—1119.

4. В. И. Машанов. Построение общей теории комплексов прямых пространств Лобачевского, Евклида, Римана. Доклады III Сибирской математической конференции, 1964.

5. В. И. Машанов, Т. И. Тулюпа. Общая теория комплексов прямых пространств постоянной кривизны. Тр. Иркутск. ун-та, 66, № 1, 1969, 137—155.

6. Т. И. Тулюпа. Неголономные конгруэнции комплекса прямых в пространстве постоянной кривизны. Тр. Иркутск. ун-та, 1969, 64, 117—131.

7. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., 1948.

Поступила 16 марта 1971 г.

СИСТЕМЫ КОНГРУЭНЦИЙ С ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н. Курбанов

Ашхабад

I. Рассмотрим некоторые частного вида однопараметрические семейства линейчатых конгруэнций с заданным соответствием между их образующими. Данные семейства выражаем через системы линейчатых поверхностей, в связи с этим сначала определим нужные нам трансверсальные системы поверхностей путем последовательного сужения класса всех однопараметрических семейств линейчатых поверхностей вообще. Выясним прежде всего с каким произволом существует общий такой геометрический образ. Всякое однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей (поверхности этого семейства будем обозначать через σ) определяет двупараметрическое семейство прямых — конгруэнцию обозначим K. Класс всех конгруэнций K существует с широтой в две функции двух аргументов. Каждую из конгруэнций можно разложить в однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей с произволом одна функция двух аргументов. Задать соответствие между образующими поверхностей σ семейства можно также с широтой в одну функцию двух аргументов. Задать такое соответствие — значит задать второе однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей (будем обозначать их символом δ), расслаивающих конгруэнцию K. Каждая поверхность второго семейства пересекает поверхности первого семейства по соответствующим образующим. Следовательно, *класс однопараметрических семейств линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве с заданным соответствием между их образующими существует с произволом четыре функции двух аргументов*. (Сравним — однопараметрические семейства кривых в трехмерном точечном пространстве с заданным соответствием между их точками существуют с произволом три функции двух аргументов. Действительно, однопараметрическое семейство кривых определяет поверхность — одна функция двух аргументов. На этой поверхности можно задать однопараметрическое же семейство кривых с произволом одна функция двух аргументов. Наконец, соответствие между точками этих кривых можно задать с помощью второго однопараметрического семейства кривых — еще одна функция двух аргументов).

Мы будем рассматривать не произвольные однопараметрические семейства линейчатых поверхностей σ с заданным соответствием между их образующими, а такие семейства, у которых соответствующие образующие оказываются принадлежащими одной и той же квадрике δ (демиквадрике). Следовательно, конгруэнции, образуемые всеми прямыми поверхностей семейства, распадаются в однопараметрические семейства квадрик. Очевидно, *класс однопараметрических семейств квадрик с заданным соответствием между их образующими* (т. е. между образующими разных квадрик) *существует с произволом в одну функцию двух аргументов.*

Сузим еще более класс рассматриваемых геометрических образов. Возьмем три какие-либо поверхности σ_1, σ_2, σ_3. На каждой квадрике δ эти поверхности высекают тройку прямых l_1, l_2, l_3. За поверхность σ мы будем принимать геометрическое место таких образующих l квадрик δ, которые вместе с тройкой l_1, l_2, l_3 образуют постоянное сложное отношение. Обозначим его символически $(l_1 l_2 l_3 l)$. Таким образом, для каждой поверхности σ имеем $(l_1 l_2 l_3 l) = \lambda = \text{const}$, при этом под l, l_1, l_2, l_3 мы понимаем текущие соответствующие образующие поверхностей σ, σ_1, σ_2, σ_3. Поскольку в конгруэнции K (двупараметрическом многообразии прямых) тройка поверхностей σ_1, σ_2, σ_3 существует с произволом три функции одного аргумента, то, присоединяя к этому произволу произвол существования всего класса конгруэнций K, расслаивающихся в однопараметрические семейства квадрик (девять функций одного аргумента), мы заключим, что *рассматриваемый класс семейств поверхностей σ зависит от двенадцати функций одного аргумента.*

Пусть, как и ранее, l — произвольная прямая конгруэнции K. Через нее проходят две поверхности — линейчатая поверхность σ и квадрика δ. В каждой точке прямой l имеем две плоскости — одна из них касается поверхности σ, другая — квадрики δ. В общем случае существуют две точки, в которых эти плоскости совпадают друг с другом. Мы назовем такие точки *фокусами* поверхности σ, соответствующими прямой l. В общем же случае фокусы описывают на каждой квадрике δ какую-то пару кривых. Мы ограничимся рассмотрением лишь таких однопараметрических семейств поверхностей σ (с заданным соответствием между образующими), у которых указанные кривые есть прямые линии — образующие второго семейства квадрики δ (к первому принадлежит прямая l). Назовем такие прямые *трансверсалями*, а системы поверхностей σ, обладающие такими трансверсалями, — *трансверсальными системами поверхностей.*

Найдем широту класса трансверсальных систем поверхностей. В отличие от предыдущего, эта широта не может быть определена непосредственно. Прибегнем поэтому к аналитическим выкладкам.

Возьмем упомянутые выше поверхности системы — σ_1, σ_2, σ_3. Поместим в фокусы поверхности σ_1 вершины A_1, A_2 подвижного репера проективного пространства, в фокусы поверхности σ_2 — вершины A_3, A_4 репера, в фокусы поверхности σ_3 — точки $P = A_1 + A_3$, $Q = A_2 + A_4$. Тогда фокусы поверхности σ, соответствующие прямой l, будут совпадать с точками $M = A_1 + \lambda A_3$, $N = A_2 + \lambda A_4$. (Мы принимаем прямые l_1, l_2 за базисные, l, l_3 —

за делящие, причем порядок базисных и делящих точек приведен в тексте).

Как обычно, инфинитезимальные смещения репера определяются уравнениями

$$dA_i = \omega_i^j A_j \, (i, \;\; j = 1, 2, 3, 4). \tag{1.1}$$

Формы ω_i^j подчиняются известным уравнениям структуры

$$D\omega_i^j = \left[\omega_i^k \omega_k^j\right] \;\; (k = 1, 2, 3, 4). \tag{1.2}$$

В выбранном репере квадрика δ имеет уравнение

$$x^1x^4 - x^2x^3 = 0. \tag{1.3}$$

Касательная плоскость к квадрике (1.3) в точке $L = M + tN$ имеет уравнение

$$\lambda t x^1 - \lambda x^2 - t x^3 + x^4 = 0. \tag{1.4}$$

Очевидно, все формы ω_i^j зависят лишь от одного главного параметра и его дифференциала, так как каждая из прямых l описывает линейчатую поверхность σ, при этом между прямыми этих поверхностей установлено соответствие, в котором они отвечают одному и тому же значению главного параметра. Вторичные параметры (их всего два) — это те параметры, которые определяют два нормирования координат вершин репера. Два других нормирования (из четырех возможных) уже сделаны, поскольку за фокусы на прямой l_3 мы взяли именно точки $A_1 + A_3$ и $A_2 + A_4$. Параметры, определяющие положения вершин A_1, A_2, A_3, A_4, фиксированы, так как эти вершины помещены в фокусы поверхностей σ_1, σ_2.

Вершины A_1, A_2 находятся на прямой l_1, поэтому формы ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4 зависят только от дифференциала главного параметра. Аналогично, поскольку вершины A_3A_4 лежат на прямой l_2, формы ω_3^1, ω_3^2, ω_4^1, ω_4^2 также зависят лишь от дифференциала главного параметра.

Наконец, точки P, Q помещены на луч l_3, значит формы $\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1$, $\omega_2^3 + \omega_4^3 - \omega_2^1 - \omega_4^1$, $\omega_1^4 + \omega_3^4 - \omega_1^2 - \omega_3^2$, $\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2$ зависят лишь от дифференциала главного параметра.

Исключая из 12 выписанных форм дифференциал главного параметра, мы получим в общем случае одиннадцать соотношений. Этим соотношениям можно придать тот или иной вид в зависимости от поверхностей σ_1, σ_2, σ_3. В каждой четверке форм, записанных выше, по крайней мере, одна отлична от нуля, поэтому выразим остальные формы через нее. Тогда результаты исключения могут быть записаны в виде:

$$\omega_1^3 = a_1\omega_2^4, \;\; \omega_2^3 = b_1\omega_2^4, \;\; \omega_1^4 = c_1\omega_2^4,$$

$$\omega_3^1 = a_2\omega_4^2,\ \ \omega_4^1 = b_2\omega_4^2,\ \ \omega_3^2 = c_2\omega_4^2,$$
$$\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1 = a_3(\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2), \tag{1.5}$$
$$\omega_2^3 + \omega_4^3 - \omega_2^1 - \omega_4^1 = b_3(\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2),$$
$$\omega_1^4 + \omega_3^4 - \omega_1^2 - \omega_3^2 = c_3(\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2),$$
$$\omega_4^2 = p\omega_2^4,\ \ \omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2 = q\omega_2^4.$$

В общем случае (все три поверхности не выrождены) мы должны полагать $p \neq 0$, $q \neq 0$. (Примечание: Если бы все 12 форм равнялись нулю, то, очевидно, конгруэнция K вырождалась бы в неподвижную квадрику δ. Исключая этот случай, мы должны впредь считать, что даже при вырождениях одна из форм отлична от нуля. Пусть это будет форма ω_2^4, следовательно, поверхность σ_1 у нас всегда будет предполагаться невырожденной.

Касательная плоскость к поверхности σ_1 в точке $A_1 + tA_2$ имеет уравнение

$$(c_1 + t)\,x^3 - (a_1 + b_1 t)\,x^4 = 0. \tag{1.6}$$

Записав уравнение (1.4) при $\lambda = 0$, получим касательную плоскость к квадрике δ в точке $A_1 + tA_2$

$$tx^3 - x^4 = 0. \tag{1.7}$$

В точках A_1, A_2 имеем соответственно уравнения (полагаем в (1.7) $t = 0$, $t = \infty$):

$$x^4 = 0,\ \ x^3 = 0. \tag{1.8}$$

С другой стороны, уравнение (1.6) при $t = 0$, $t = \infty$ принимает соответственно вид

$$c_1x^3 - a_1x^4 = 0,\ \ x^3 - b_1x^4 = 0. \tag{1.9}$$

Требуя, чтобы уравнения (1.9) совпали с уравнениями (1.8) получаем

$$c_1 = 0,\ \ b_1 = 0. \tag{1.10}$$

Предположим, что $a_1 \neq 0$. Аналогичные рассуждения относительно поверхностей σ_2, σ_3 дают еще четыре равенства

$$c_2 = b_2 = 0,\ \ c_3 = b_3 = 0. \tag{1.11}$$

В таком случае система (1.5) принимает вид:

$$\omega_1^3 = a_1\omega_2^4,\ \ \omega_3^1 = a_2\omega_4^2,\ \ \omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1 = a_3(\omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2),$$
$$\omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_1^4 = \omega_4^1 = 0,\ \ \omega_1^2 = \omega_3^4,\ \ \omega_2^1 = \omega_4^3, \tag{1.12}$$
$$\omega_4^2 = p\omega_2^4,\ \ \omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2 = q\omega_2^4.$$

Таким образом, трансверсальная система поверхностей характеризуется системой уравнений (1.12) и она имеет решение, определяемое с произволом 7 функций одного аргумента.

II. Пусть теперь лучи l_1, l_2, l_3 квадрики описывают соответственно конгруэнции K_1, K_2, K_3. Это значит, что три четверки форм, управляющих движениями лучей l_1, l_2, l_3, зависят от дифференциалов двух параметров u, v. Исключив дифференциалы этих параметров, мы получим 10 соотношений, которым в частности можно придать следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\omega_2^3 = k_1\omega_1^3 + l_1\omega_2^4, \quad \omega_4^1 = k_2\omega_3^1 + l_2\omega_4^2, \\
\omega_1^4 = m_1\omega_1^3 + n_1\omega_2^4, \quad \omega_3^2 = m_2\omega_3^1 + n_2\omega_4^2, \\
\omega_2^3 + \omega_4^3 - \omega_2^1 - \omega_4^1 = k_3(\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1) + l_3(\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \\
- \omega_4^2), \qquad (2.1) \\
\omega_1^4 + \omega_3^4 - \omega_1^2 - \omega_3^2 = m_3(\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1) + n_3(\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \\
- \omega_4^2), \\
\omega_3^1 = A\omega_1^3 + B\omega_2^4, \quad \omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1 = A'\omega_1^3 + B'\omega_2^4, \\
\omega_4^2 = C\omega_1^3 + D\omega_2^4, \quad \omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2 = C'\omega_1^3 + D'\omega_2^4.
\end{gathered}
$$

Общий произвол решения такой системы конгруэнций будет 12 функций двух аргументов. Мы покажем это без аналитических выкладок. Действительно, двупараметрическое семейство квадрик (некоторый комплекс C) существует с произволом девять функций двух аргументов. Фиксация образующей l_1 на каждой квадрике равносильна заданию одной функции двух аргументов. Выбрав эту функцию, мы получим определенную трансверсальную конгруэнцию K_1 комплекса C. Чтобы задать две другие трансверсальные конгруэнции K_2, K_3, следует взять еще две произвольных функции двух аргументов. *В общей сложности имеем 12 функций двух аргументов.*

Если теперь на каждой квадрике фиксируем некоторую образующую l_4 так, чтобы сложное отношение четверки образующих l_1, l_2, l_3, l_4 не зависело от u, v, то мы придем к однопараметрической системе конгруэнций.

Поскольку между лучами конгруэнций этой системы установлено взаимно-однозначное соответствие, то такое же соответствие будет установлено и между поверхностями этих конгруэнций.

Из сказанного следует, что после фиксации линейчатой поверхности в одной из конгруэнций система (2.1) должна совпадать с системой (1.12). Линейчатую поверхность можно задать одним соотношением между базисными формами конгруэнции K_1 в виде

$$\omega_1^3 = a_1\omega_2^4. \qquad (2.2)$$

Подставляя это в систему (2.1), получим

$$\omega_2^3 = (k_1a_1 + l_1)\,\omega_2^4, \quad \omega_4^1 = (k_2a_2 + l_2)\,\omega_4^2,$$

$$
\begin{gathered}
\omega_1^4 = (m_1 a_1 + n_1)\, \omega_2^4, \quad \omega_3^2 = (m_2 a_2 + n_2)\, \omega_4^2, \\
\omega_2^3 + \omega_4^3 - \omega_2^1 - \omega_4^1 = (k_3 a_3 + l_3)\,(\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2), \\
\omega_1^4 + \omega_3^4 - \omega_1^2 - \omega_3^2 = (m_3 a_3 + n_3)\,(\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2), \\
\omega_4^2 = p\omega_2^4, \quad \omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2 = q\omega_2^4,
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

где

$$
a_2 = \frac{Aa_1 + B}{Ca_1 + D}, \quad a_3 = \frac{A'a_1 + B'}{C'a_1 + D'}.
$$

Сравнивая системы (2. 3) и (1. 12), находим условие совпадения этих систем

$$
\begin{gathered}
k_1 a_1 + l_1 = 0, \ (Ak_2 + Cl_2)\, a_1 + Bk_2 + Dl_2 = 0, \\
(A'k_3 + C'l_3)\, a_1 + B'k_3 + D'l_3 = 0, \\
m_1 a_1 + n_1 = 0, \quad (Am_2 + Cn_2)\, a_1 + Bm_2 + Dn_2 = 0, \\
(A'm_3 + C'n_3)\, a_1 + B'm_3 + D'n_3 = 0.
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Ограничимся вначале частным случаем систем конгруэнций. Мы потребуем, чтобы *все* системы соответствующих поверхностей, определяемые уравнением (2. 2), были трансверсальными и, кроме того, трансверсали их совпадали с трансверсалями A_1A_3, A_2A_4 конгруэнций. Это означает, что равенства (2. 3), в которых k_i, l_i, m_i, n_i, A, B, C, D, A', B', C', D' — заданные функции от u и v ($i = 1, 2, 3$), должны выполняться при любых значениях a_1, т. е. при условии, что a_1 — совершенно произвольная функция параметров u, v. В таком случае из (2. 3) получаем

$$
\begin{gathered}
k_1 = l_1 = m_1 = n_1 = 0, \quad k_2 A + l_2 C = 0, \quad k_2 B + l_2 D = 0, \\
m_2 A + n_2 C = 0, \quad m_2 B + n_2 D = 0, \quad k_3 A' + l_3 C' = 0, \\
k_3 B' + l_3 D' = 0, \quad m_3 A' + n_3 C' = 0, \quad m_3 B' + n_3 D' = 0.
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

Рассмотрим случаи вырождения отдельных конгруэнций. В уравнениях (2. 1), определяющих базисные формы конгруэнций (A_3A_4), (PQ), обозначим определители

$$
\Delta_2 = AD - BC, \quad \Delta_3 = A'D' - B'C'.
$$

Мы будем иметь следующие случаи:

I. $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$.
II. $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 \neq 0$.
III. $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 = 0$.
IV. $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$.

I-й случай (общий)

В этом случае неравенства $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$ преобразуют систему (2. 5) в систему равенств

$$\begin{aligned} k_1 = l_1 = m_1 = n_1 = k_3 = l_3 = 0, \\ k_2 = l_2 = m_2 = n_2 = m_3 = n_3 = 0. \end{aligned} \tag{2. 6}$$

Внося равенства (2. 6) в систему (2. 1), получим систему конгруэнций

$$\begin{gathered} \omega_2^3 = \omega_1^4 = \omega_3^2 = \omega_4^1 = 0, \quad \omega_1^2 = \omega_3^4, \quad \omega_2^1 = \omega_4^3, \\ \omega_3^1 = A\omega_1^3 + B\omega_2^4, \quad \omega_3^3 - \omega_1^1 = A_0\omega_1^3 + B_0\omega_2^4, \\ \omega_4^2 = C\omega_1^3 + D\omega_2^4, \quad \omega_4^4 - \omega_2^2 = C_0\omega_1^3 + D_0\omega_2^4, \end{gathered} \tag{2. 7}$$

где

$$A_0 = A' + A - 1, \quad B_0 = B' + B, \quad C_0 = C' + C, \quad D_0 = D' + D - 1.$$

Выясним, с каким произволом существует решение системы (2. 7). Продифференцировав внешним образом систему (2. 7), получим следующие квадратичные и конечные уравнения:

$$\begin{gathered} [\omega_1^2, \ \omega_1^3 - \omega_2^4] = 0, \quad [\omega_2^1, \ \omega_1^3 - \omega_2^4] = 0, \\ [dA, \ \omega_1^3] + [dB + (2AB_0 - BA_0 - BC_0)\,\omega_1^3, \ \omega_2^4] = 0, \\ [dC, \ \omega_1^3] + [dD - (2DC_0 - CD_0 - CB_0)\,\omega_1^3, \ \omega_2^4] = 0, \\ [dA_0, \ \omega_1^3] + [dB_0 + (2B + A_0B_0 - B_0C_0)\,\omega_1^3, \ \omega_2^4] = 0, \\ A + B = C + D. \\ [dC_0, \ \omega_1] + [dD_0 - (2C + D_0C_0 - C_0B_0)\,\omega_1^3, \ \omega_2^4] = 0, \\ A_0 + B_0 = C_0 + D_0. \end{gathered} \tag{2. 8}$$

Раскрывая квадратичные уравнения по лемме Картана и учитывая конечные уравнения, будем иметь

$$\begin{gathered} \omega_1^2 = \lambda_1(\omega_1^3 - \omega_2^4), \quad \omega_2^1 = \lambda_2(\omega_1^3 - \omega_2^4), \\ dC + dD - dB = \lambda_3\omega_1^3 + \lambda_4\omega_2^4, \\ dB + (2B_0C - 2BC_0 + 2B_0D - BD_0 - BB_0)\,\omega_1^3 = \lambda_4\omega_1^3 + \lambda_5\omega_2^4, \\ DC = \lambda_6\omega_1^3 + \lambda_7\omega_2^4, \quad dD - (2DC_0 - CD_0 - CB_0)\,\omega_1^3 = \lambda_7\omega_1^3 + \lambda_8\omega_2^4, \\ dC_0 + dD_0 - dB_0 = \lambda_9\omega_1^3 + \lambda_{10}\omega_2^4, \\ dB_0 + (2B - B_0^2 + D_0B_0)\,\omega_1^3 = \lambda_{10}\omega_1^3 + \lambda_{11}\omega_2^4, \\ dC_0 = \lambda_{12}\omega_1^3 + \lambda_{13}\omega_2^4, \quad dD_0 - (2C + D_0C_0 - C_0B_0)\,\omega_1^3 = \lambda_{13}\omega_1^3 + \lambda_{14}\omega_2^4, \end{gathered} \tag{2. 9}$$

где $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_9, \lambda_{10}$ — функции остальных λ_i $(i = 1, 2, \ldots, 14)$.

В соответствии с общепринятыми обозначениями $q=8$ — характеристических форм $dB, dC, dD, dB_0, dC_0\ dD_0, \omega_1^2, \omega_2^1$; $S_1=6$ — квадратичных уравнений, $N=10$ произвольных параметров. Из равенства $q=S_1+S_2$ следует, что $S_2=2$, а так как $Q=S_1+2S_2=10$, то $Q=N$. Следовательно, система (2.7) в инволюции и ее решение существует с произволом две функции двух аргументов.

Исследуя строение системы конгруэнций (2.7), нетрудно убедиться в том, что все прямые A_1A_2, A_3A_4, PQ, MN описывают конгруэнции, а трансверсали $l\equiv A_1A_3$, $l'\equiv A_2A_4$ — линейчатые поверхности. Эти поверхности служат фокальными поверхностями указанных конгруэнций, следовательно, лучи A_1A_2, A_3A_4, PQ, MN описывают одну и ту же конгруэнцию с установленным соответствием между ее лучами. Поверхности (A_1A_3), (A_2A_4) образуют пару T.

Найдем уравнения асимптотических линий на фокальных поверхностях (A_1A_3), (A_2A_4). Условия

$$(A_1A_2A_3d^2A_1)=0,\quad (A_1A_2A_4d^2A_2)=0,$$

определяющие асимптотические, приводят к уравнениям

$$\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4=0,\quad \omega_2^1\omega_1^3+\omega_2^4\omega_4^3=0,$$

которые можно записать в виде

$$\lambda_1\left[(\omega_1^3)^2-(\omega_2^4)^2\right]=0,\quad \lambda_2\left[(\omega_1^3)^2-(\omega_2^4)^2\right]=0.$$

(Мы учли, что касательными плоскостями к поверхностям (A_1A_3), (A_2A_4) в точках A_1, A_2 являются соответственно плоскости $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, что легко показывается). Исключив случай $\lambda_1=\lambda_2=0$ (его рассмотрим позже), будем считать, что, по крайней мере, один из λ_1, λ_2 не равен нулю. В таком случае будем иметь всего одно уравнение

$$(\omega_1^3)^2-(\omega_2^4)^2=0. \tag{2.10}$$

Это значит, что конгруэнции нашей системы являются конгруэнциями W с линейчатыми фокальными поверхностями. Этого, конечно, и следовало ожидать, так как пара T линейчатых поверхностей всегда является парой фокальных поверхностей некоторой конгруэнции W. Все лучи квадрики δ, соответствующие $\lambda=\text{const}$, как уже говорилось, описывают ту же конгруэнцию. Она имеет следующую структуру.

В каждой точке $M_1=A_1+t_1A_3$ луча поверхности (A_1A_3) касательная плоскость пересекает луч A_2A_4 в некоторой точке $M_2=A_2+t_2A_4$. Таким образом, каждой точке M_1 соответствует единственная прямая M_1M_2, совокупность которых и образует конгруэнцию. Ту же совокупность прямых получим, если будем исходить из поверхности (A_2A_4).

Эти свойства системы конгруэнций (2.7) позволяют построить ее следующим образом.

Возьмем пару T линейчатых поверхностей (произвол — четыре функции одного аргумента). Они являются фокальными поверхностями некоторой конгруэнции W. Каждый луч конгруэнции определяет пару образующих фокальных поверхностей, которую он пересекает. В свою очередь, эта пара образующих определяет некоторую демиквадрику δ', состоящую из лучей конгруэнции W. Положение каждой образующей на этой демиквадрике определяется одним параметром. Сделаем этот параметр функцией выбранного луча конгруэнции. Так как луч конгруэнции определяется двумя аргументами, то, следовательно, мы должны взять произвольную функцию двух аргументов. Этим устанавливается некоторое соответствие между лучами конгруэнции W. Зададим еще одно подобное соответствие (еще одна функция двух аргументов). Примем первоначально выбранный луч конгруэнции за ребро A_1A_2 сопровождающего репера. Один из соответствующих ему лучей — за ребро A_3A_4, другой — за прямую PQ ($P = A_1 + A_3$, $Q = A_2 + A_4$). Возьмем луч конгруэнции MN ($M = A_1 + \lambda A_3$, $N = A_2 + \lambda A_4$). Когда луч A_1A_2 описывает конгруэнцию W, то все лучи MN описывают ту же самую конгруэнцию, однако, поскольку между лучами установлено соответствие, то рассматриваемая конгруэнция W представляется как система конгруэнций. Покажем, что это как раз та система, которая определяется уравнениями (2. 7).

Поскольку при указанном выборе репера касательными плоскостями к поверхностям, описанном ребрами A_1A_3, A_2A_4 в точках A_1, A_2, A_3, A_4 являются соответственно плоскости $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_3A_2$, то будут выполнены равенства

$$\omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_1^4 = \omega_4^1 = 0. \tag{2. 11}$$

Далее, так как ребра A_1A_3, A_2A_4 описывают поверхности (о чем мы сказали выше), то

$$\omega_1^2 = \alpha\omega_3^4, \ \omega_2^1 = \alpha'\omega_4^3. \tag{2. 12}$$

Касательные плоскости к поверхностям (A_1A_3), (A_2A_4) в точках P, Q совпадают соответственно с плоскостями (PQA_1), (PQA_2). В то же время эти плоскости определяются координатами

$$\omega_1^2 (A_1A_3A_2) + \omega_3^4 (A_1A_3A_4),$$

$$\omega_2^1 (A_2A_4A_1) + \omega_4^3 (A_2A_4A_3),$$

отсюда видно, что

$$\omega_1^2 = \omega_3^4, \quad \omega_2^1 = \omega_4^3. \tag{2. 13}$$

Поскольку луч A_3A_4 соответствует лучу A_1A_2, то его базисные формы ω_3^1, ω_4^2 должны быть функциями от базисных форм луча A_1A_2, т. е.

$$\omega_3^1 = A\omega_1^3 + B\omega_2^4, \ \omega_4^2 = C\omega_1^3 + D\omega_2^4. \tag{2. 14}$$

Аналогично, если луч PQ соответствует лучу A_1A_2, то его базисные формы $\omega_1^3+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_3^1$, $\omega_2^4+\omega_4^4-\omega_2^2-\omega_4^2$ должны быть функциями от базисных форм луча A_1A_2

$$\begin{aligned}\omega_1^3+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_3^1 &= A'\omega_1^3+B'\omega_2^4,\\ \omega_2^4+\omega_4^4-\omega_2^2-\omega_4^2 &= C'\omega_1^3+D'\omega_2^4.\end{aligned} \tag{2. 15}$$

Учитывая (2. 14), мы получим

$$\omega_3^3-\omega_1^1=A_0\omega_1^3+B_0\omega_2^4,\ \ \omega_4^4-\omega_2^2=C_0\omega_1^3+D_0\omega_2^4. \tag{2. 16}$$

Собирая вместе уравнения (2. 11), (2. 13), (2. 14), (2. 16), получаем

$$\begin{gathered}\omega_2^3=\omega_3^2=\omega_1^4=\omega_4^1=0,\ \ \omega_1^2=\omega_3^4,\ \ \omega_2^1=\omega_4^3,\\ \omega_3^3-\omega_1^1=A_0\omega_1^3+B_0\omega_2^4,\ \ \omega_3^1=A\omega_1^3+B\omega_2^4,\\ \omega_4^4-\omega_2^2=C_0\omega_1^3+D_0\omega_2^4,\quad \omega_4^2=C\omega_1^3+D\omega_2^4.\end{gathered} \tag{2. 17}$$

Эта система совпадает с системой (2. 7), что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим исключенный случай $\lambda_1=\lambda_2=0$, когда

$$\omega_1^2=\omega_2^1=\omega_3^4=\omega_4^3=\omega_2^3=\omega_3^2=\omega_1^4=\omega_4^1=0. \tag{2. 18}$$

Следовательно, трансверсали $l\equiv A_1A_3$, $l'\equiv A_2A_4$ неподвижны, все лучи трансверсальной системы описывают одну и ту же линейную конгруэнцию $(l,\ l')$. Исследования показывают, что такая система существует с произволом две функции двух аргументов. Точно с таким же произволом устанавливается соответствие между лучами A_1A_2 и A_3A_4; A_1A_2 и PQ. Таким образом, здесь мы также имеем дело с одной конгруэнцией, но с заданным соответствием между ее лучами. Установленное соответствие и определяет систему конгруэнций.

II-й случай ($\Delta_2=0,\ \Delta_3\neq 0$)

I. В силу соотношений $\Delta_2=0$, $\Delta_3\neq 0$, система (2. 5) принимает вид:

$$k_1=l_1=m_1=n_1=k_3=l_3=m_3=n_3=0, \tag{2. 19}$$

$$\frac{k_2}{l_2}=\frac{m_2}{n_2}=-\frac{C}{A}=-\frac{D}{B}\overset{def}{=}b.$$

Внося эти равенства в систему (2. 1), получим

$$\begin{gathered}\omega_2^3=\omega_3^2=\omega_1^4=\omega_4^1=0,\ \ \omega_1^2=\omega_3^4,\ \ \omega_2^1=\omega_4^3,\\ \omega_3^1=A\omega_1^3+B\omega_2^4,\ \ \omega_4^2=b\omega_3^1,\\ \omega_3^3-\omega_1^1=A_0\omega_1^3+B_0\omega_2^4,\ \ \omega_4^4-\omega_2^2=C_0\omega_1^3+D_0\omega_2^4.\end{gathered} \tag{2. 20}$$

(Здесь

$A_0=A'+A-1,\ B_0=B'+B,\ C_0=C'+C,\ D_0=D'+D-1$).

Найдем широту решения класса систем конгруэнций (2. 20). С этой целью внесем равенства (2. 19) в систему квадратичных уравнений (2. 8). Конечные уравнения системы (2. 8) принимают вид

$$(A+B)(A-C)=0, \quad A_0+B_0=C_0+D_0.$$

Отсюда получаем

1) $A+B\neq 0, \quad A-C=0,$

2) $A+B=0, \quad A-C\neq 0,$

3) $A+B=0, \quad A-C=0.$

Рассматривая 1), приходим к противоречию, т. к. равенство $A=C$ влечет за собой и равенство $A+B=0$. Это значит, что система конгруэнций, для которой $A+B\neq 0$, $A=C$ не существует. Покажем это.

Вычитая из равенства второй строки равенство третьей строки системы (2. 8) в силу неравенства $[\omega_1^3\omega_2^4]\neq 0$, получаем

$$2AB_0+2DC_0-B(A_0+C_0)-C(D_0-B_0)=0.$$

Учитывая равенства

$$A=C,\ B=D,\ A_0+B_0=C_0+D_0,$$

приводим к виду

$$(A+B)(A_0-C_0)=0, \text{ т. е. } A_0=C_0.$$

Теперь, вычитая из равенства четвертой строки равенство пятой строки, в силу полученных равенств будем иметь

$$2B+A_0B_0-B_0C_0+2C+D_0C_0-C_0B_0=0,$$

отсюда следует

$$A+B=0.$$

А это противоречит первоначальному условию.

Рассмотрим 2). Принимая во внимание соотношения $A-C\neq 0$, $A+B=0$, систему (2. 20) можем записать в виде:

$$\begin{gathered}\omega_2^3=\omega_3^2=\omega_1^4=\omega_4^1=0,\ \omega_1^2=\omega_3^4,\ \omega_2^1=\omega_4^3,\\ \omega_3^1=A(\omega_1^3-\omega_2^4),\ \omega_4^2=b\omega_3^1, \qquad (2.21)\\ \omega_3^3-\omega_1^1=A_0\omega_1^3+B_0\omega_2^4,\ \omega_4^4-\omega_2^2=C_0\omega_1^3+D_0\omega_2^4.\end{gathered}$$

В этом случае система квадратичных уравнений (2. 8) принимает вид:

$$\begin{gathered}[\omega_1^2,\ \omega_1^3-\omega_2^4]=0,\ [\omega_2^1,\ \omega_1^3-\omega_2^4]=0,\ [d(AD),\ \omega_1^3-\omega_2^4]=0,\\ [dA,\ \omega_1^3-\omega_2^4]+A(2B_0+A_0+C_0)[\omega_1^3,\ \omega_2^4]=0,\\ [dA_0,\ \omega_1^3]+[dB_0+(2B+A_0B_0-B_0C_0)\omega_1^3,\ \omega_2^4]=0, \quad (2.22)\end{gathered}$$

$$[dC_0,\ \omega_1^3] + [dD_0 - (2C + D_0C_0 - C_0B_0)\,\omega_1^3,\ \omega_2^4] = 0,$$
$$A + B = 0,\ C + D = 0,\ A_0 + B_0 = C_0 + D_0.$$

Для этой системы мы имеем

$$q = 7,\ S_1 = 6,\ S_2 = 1,\ Q = N = 8.$$

Следовательно, решение системы (2. 21) существует с произволом одной функции двух аргументов.

2. Исследуя строение системы конгруэнций (2. 21), убеждаемся: единственное отличие ее от системы (2. 7) состоит в том, что прямая A_3A_4 описывает некоторую поверхность, а не конгруэнцию, как это было в предыдущем случае.

3. Поэтому систему конгруэнций (2. 21) можем построить следующим образом.

Берем, как и прежде, произвольную конгруэнцию W с линейчатыми фокальными поверхностями (четыре функции одного аргумента). Фиксируем на каждой демиквадрике δ' какую-нибудь образующую l_2 (еще одна функция одного аргумента). Задаем соответствие между лучами конгруэнций указанным в случае I способом (одна функция двух аргументов). Если с текущим лучом первой конгруэнции совместить ребро A_1A_2, с текущим лучом соответствующей конгруэнции — луч PQ, а с прямой l_2 — ребро A_3A_4, то мы придем к системе (2. 21).

4. Приведем аналитические выкладки.

В построенном выше репере, как было показано в предыдущем случае, уравнения пары T поверхностей (A_1A_3), (A_2A_4) имеют вид

$$\omega_1^4 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = \omega_2^3 = 0,\ \omega_1^2 = \omega_3^4,\ \omega_2^1 = \omega_4^3. \tag{2. 23}$$

Прямая (A_3A_4) опишет поверхность, если

$$\omega_4^2 = b\omega_3^1. \tag{2. 24}$$

Как видно из безынтегрального представления (1-й случай), лучи A_1A_2, PQ описывают одну и ту же конгруэнцию W. В таком случае мы будем иметь соответствие между базисными формами этих лучей, которое можно задать равенствами

$$\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1 = A'\omega_1^3 + B'\omega_2^4,$$
$$\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2 = C'\omega_1^3 + D'\omega_2^4. \tag{2. 25}$$

Продифференцировав внешним образом равенства (2. 23) и раскрывая результат по лемме Картана, мы получим в частности

$$\omega_3^1 = A\,(\omega_1^3 - \omega_2^4). \tag{2. 26}$$

Равенства (2. 23) — (2. 26) составляют систему (2. 21), что и требовалось.

Рассмотрим 3). $A+B=0$, $A-C=0$. Из равенства (2. 19) следует также равенство $A+D=0$. В таком случае система (2. 20) примет вид:

$$\begin{gathered}\omega_2^3=\omega_3^2=\omega_1^4=\omega_4^1=0,\ \omega_1^2=\omega_3^4,\ \omega_2^1=\omega_4^3,\\ \omega_3^1=A(\omega_1^3-\omega_2^4),\ \ \omega_3^1=\omega_4^2,\\ \omega_3^3-\omega_1^1=A_0\omega_1^3+B_0\omega_2^4,\ \omega_4^4-\omega_2^2=C_0\omega_1^3+D_0\omega_2^4.\end{gathered}\tag{2. 27}$$

Выясним, с каким произволом существует решение системы конгруэнций (2. 27). С этой целью вносим равенства $A=C=-B=-D$ в систему квадратичных уравнений (2. 8). Мы получим

$$\begin{gathered}[\omega_1^2,\ \omega_1^3-\omega_2^4]=0,\ [\omega_2^1,\ \omega_1^3-\omega_2^4]=0,\ A_0+B_0=C_0+D_0,\\ [dA-A(2B_0+A_0+C_0)\,\omega_2^4,\ \omega_1^3-\omega_2^4]=0,\\ [dA_0,\ \omega_1^3]+[dB_0+(A_0B_0-2A-B_0C_0)\,\omega_1^3,\ \omega_2^4]=0,\\ [dC_0,\ \omega_1^3]+[dD_0-(2C+D_0C_0-C_0B_0)\,\omega_1^3,\ \omega_2^4]=0.\end{gathered}\tag{2. 28}$$

Для этой системы

$$q=6,\ S_1=5,\ S_2=1,\ N=Q=7.$$

Следовательно, решение системы (2. 27) существует с тем же произволом, что и системы (2. 21) — одна функция двух аргументов. В этой системе конгруэнций все прямые и точки описывают те же образы, что и в предыдущем подслучае. Поэтому мы остановимся лишь на одном свойстве системы (2. 27), которое отличает ее от системы (2. 21)

Как показывает равенство

$$\sigma_1'=(A_3A_4dM_1)=\omega_3^1\,[(A_3A_4A_1)+t\,(A_3A_4A_2)],$$

касательная плоскость σ_1' к поверхности (A_3A_4) в точке $M_1=A_3+tA_4$ совпадает с касательной плоскостью к квадрике δ. Строится эта система аналогично предыдущей. Однако сейчас за прямую l_2 берется не произвольная образующая квадрики δ, а именно та образующая, которая является характеристической образующей семейства квадрик δ. Такая образующая определяется на каждой квадрике δ однозначно. В монографии С. П. Финикова «Теория конгруэнций» утверждается, что всякая пара линейчатых фокальных поверхностей конгруэнций W порождает трансверсальную пару фокальных линейчатых поверхностей новой конгруэнции W. Обе конгруэнции W имеют для каждых соответствующих двух пар прямолинейных образующих фокальных поверхностей одну и ту же квадрику. В рассматриваемом случае ребро A_3A_4 совпадает с образующей фокальной поверхности второй конгруэнции W.

III-й случай ($\Delta_2 \neq 0,\ \Delta_3 = 0$)

Учитывая соотношения $\Delta_2 \neq 0,\ \Delta_3 = 0$, из системы (2. 5) получим

$$k_1 = l_1 = m_1 = n_1 = k_2 = l_2 = m_2 = n_2 = 0,$$
$$\frac{k_3}{l_3} = \frac{m_3}{n_3} = -\frac{c'}{A'} = -\frac{D'}{B'} = b'.$$

Внося эти равенства в систему (2. 1), получим систему уравнений

$$\omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_1^4 = \omega_4^1 = 0,\ \omega_1^2 = \omega_3^4,\ \omega_2^1 = \omega_4^3,$$
$$\omega_3^1 = A\omega_1^3 + B\omega_2^4,\ \omega_4^2 = C\omega_1^3 + D\omega_2^4. \tag{2. 29}$$
$$\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1 = A'\omega_1^3 + B'\omega_2^4,\ \omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2 =$$
$$= b'(A'\omega_1^3 + B'\omega_2^4),$$

характеризующую рассматриваемую систему конгруэнций. Этот случай не дает новых геометрических построений, он является двойственным ко II-му случаю. Здесь в роли прямой A_3A_4 выступает прямая PQ и наоборот. Действительно, заменяя в системе (2. 29) главные формы $\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1$, $\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2$ прямой PQ главными формами ω_3^1, ω_4^2 прямой A_3A_4 и наоборот, мы получим систему (2. 21). Поэтому решение системы (2. 29) существует с тем же произволом, что и системы (2. 21).

IV-й случай ($\Delta_2 = \Delta_3 = 0$)

1. В силу равенств $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ система (2. 5) принимает вид

$$k_1 = l_1 = m_1 = n_1 = 0,$$
$$\frac{k_2}{l_2} = \frac{m_2}{n_2} = -\frac{C}{A} = -\frac{D}{B} = b,\ \frac{k_3}{l_3} = \frac{m_3}{n_3} = -\frac{C'}{A'} = -\frac{D'}{B'} = b'. \tag{2. 30}$$

Эти равенства преобразуют систему (2. 1) в систему

$$\omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_1^4 = \omega_4^1 = 0,\ \omega_1^2 = \omega_3^4,\ \omega_2^1 = \omega_4^3,$$
$$\omega_3^1 = A\omega_1^3 + B\omega_2^4,\ \omega_4^2 = b\omega_3^1, \tag{2. 31}$$
$$\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1 = A'\omega_1^3 + B'\omega_2^4,\ \omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2 =$$
$$= b'(\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1).$$

Определим широту решения полученной системы конгруэнций (2. 31). С этой целью вносим равенства (2. 30) в систему квадратичных уравнений (2. 8). Тогда конечные уравнения системы (2. 8) принимают вид:

$$(A - C)(A + B) = 0,\ (A' - C')(A' + B') = 0.$$

Исследования показывают, что случаи $A+B\neq 0$, $A'+C'\neq 0$ противоречивы, т. е. системы конгруэнций, для которых имеют место указанные неравенства, не существуют. Поэтому мы рассмотрим только подслучаи

1) $A+B=A'+B'=0,\ A-C\neq 0,\ A'-C'\neq 0,$

2) $A+B=A'+B'=0,\ A-C=A'-C'=0.$

Рассмотрим первый подслучай

$$(A+B=A'+B'=0,\ A-C\neq 0,\ A'-C'\neq 0).$$

Последние соотношения дают еще два равенства

$$C+D=0,\ C'+D'=0$$

и система (2. 31) теперь примет вид:

$$\begin{gathered}\omega_2^3=\omega_3^2=\omega_1^4=\omega_4^1=0,\ \omega_1^2=\omega_3^4,\ \omega_2^1=\omega_4^3,\\ \omega_3^1=A\,(\omega_1^3-\omega_2^4),\ \omega_4^2=b\omega_3^1,\\ \omega_1^3+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_3^1=A'\,(\omega_1^3-\omega_2^4),\ \omega_2^4+\omega_4^4-\omega_2^2-\omega_4^2=\\ =b'A'\,(\omega_1^3-\omega_2^4).\end{gathered}\tag{2. 32}$$

Обычным путем находим, что решение системы (2. 32) существует с произволом шесть функций одного аргумента.

2. Исследуем строение системы конгруэнций (2. 32). В этом случае, как и в предыдущих, трансверсали A_1A_3, A_2A_4 описывают поверхности, образующие пару T. Прямые A_2A_1, MN описывают одну и ту же конгруэнцию W, для которой пара T поверхностей (A_1A_3), (A_2A_4) служит фокальными поверхностями, а прямые A_3A_4, PQ описывают поверхности. Эти свойства системы конгруэнций (2. 32) достаточны для ее безынтегрального представления.

3. Возьмем пару T поверхностей (l), (l') с текущими лучами l, l' (произвол — четыре функции одного аргумента). Рассмотрим демиквадрику δ' (квадрики δ), лучи которой пересекают прямые l_1, l'. Возьмем два луча l_2, l_3 демиквадрики δ' (еще две функции одного аргумента). Расположим теперь вершины репера A_1A_3 на луче l, а A_2, A_4 на l'. При этом вершины A_3, A_4 расположены в точках пересечения прямой l_2 с лучами l', l. Касательные плоскости к поверхностям (l), (l') в точках A_1, A_2, A_3, A_4 совпадают соответственно с плоскостями $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$. Пронормировав соответствующим образом координаты вершин репера, точки пересечения прямой l_3 с лучами l, l' можем представить в виде $P=A_1+A_3$, $Q=A_2+A_4$. При таких условиях любая прямая MN демиквадрики δ', отвечающая постоянному значению $\lambda=(A_1A_3PM)=(A_2A_4QN)=\mathrm{const}$, описывает ту же конгруэнцию W, что и луч A_1A_2.

4. Подтвердим это аналитическими выкладками.

Действительно, в построенном выше репере, как было показано в предыдущих случаях, уравнения пары T поверхностей (A_1A_3), (A_2A_4) имеют вид

$$\omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_1^4 = \omega_4^1 = 0,\ \omega_1^2 = \omega_3^4,\ \omega_2^1 = \omega_4^3. \tag{2.33}$$

В таком случае уравнения поверхностей (A_3A_4), (PQ) можно представить в виде

$$\omega_4^2 = b\omega_3^1,\ (\omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^2) = b'(\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1). \tag{2.34}$$

Продифференцировав равенства (2.33) внешним образом и раскрыв результат по лемме Картана, будем иметь

$$\omega_3^1 = A(\omega_1^3 - \omega_2^4),\ \omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1 = A^1(\omega_1^3 - \omega_2^4). \tag{2.35}$$

Уравнения (2.33), (2.34), (2.35) вместе составляют систему (2.32), что и доказывает утверждение.

Приступим теперь к рассмотрению подслучая

$$A + B = A' + B' = A - C = A' - C' = 0,$$

ему соответствует система уравнений

$$\begin{gathered}\omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_1^4 = \omega_4^1 = 0,\ \omega_1^2 = \omega_3^4,\ \omega_2^1 = \omega_4^3,\\ \omega_3^1 = A(\omega_1^3 - \omega_2^4),\ \omega_3^1 = \omega_4^2, \qquad (2.36)\\ \omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1 = A'(\omega_1^3 - \omega_2^4),\ \omega_2^4 + \omega_4^4 - \omega_2^2 = \omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1.\end{gathered}$$

Внося равенства

$$A = C = -B = -D,\ A' = C' = -B' = -D'$$

в систему квадратичных уравнений (2.8), находим, что решение системы (2.36) существует с произволом четыре функции одного аргумента. Мы не будем приводить построение этой системы конгруэнций, так как методы построения ее и несколько интересных свойств приведены в упомянутой выше монографии, а коснемся лишь тех свойств, которыми эта система отличается от системы (2.32).

В этом случае одна из демиквадрик квадрики δ касается поверхностей (A_1A_3), (A_2A_4), а другая касается поверхностей (A_3A_4), (PQ). Таким образом, поверхности (A_3A_4), (PQ) также образуют пару T. Это видно из равенств

$$\Sigma_1 = (A_3A_4dM_1) = \omega_3^1[(A_3A_4A_1) + t(A_3A_4A_2)],$$

$$\Sigma_2 = (PQdM_2) = (\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_3^1)[(PQA_3) + t(PQA_4)],$$

$$\Sigma_1' = (A_3A_4A_1) + t(A_3A_4A_2),\ \Sigma_2' = (PQA_3) + t(PQA_4),$$

где Σ_1, Σ_2 — касательные плоскости к поверхностям (A_3A_4), (PQ) соответственно в точках $M_1 = A_3 + A_4$, $M_2 = P + tQ$; Σ_1^1, Σ_2^1 — касательные плоскости в этих же точках к квадрике δ. Таким образом, в рассматриваемом случае ребра A_1A_3, A_2A_4 совмещены с прямолинейными образующими одной пары поверхностей T, а прямые A_3A_4, PQ — с образующими другой (соответствующими) пары T. Система конгруэнций имеет произвол, совпадающий лишь с произволом одной пары поверхностей T.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М., 1948.
2. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнций. М., 1956.
3. Н. Дадажанов. Канонические трансверсальные системы комплексов. Автореф. канд. дисс., К., 1962.

Поступила 23 марта 1970 г.

О НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ СВОЙСТВАХ ПРИМИТИВНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

А. И. Медяник

Харьков

Будем называть *грань* выпуклого многогранника *политригональной*, если число ее вершин кратно трем. *Многогранник* называется *политригональным*, если все его грани политригональны.

Пусть P — выпуклый многогранник, α — плоскость, отделяющая его вершину A от остальных вершин, $\alpha+$ — замкнутое полупространство, определяемое плоскостью α и содержащее все вершины многогранника, кроме вершины A. Многогранник $P \equiv \equiv P \cap \alpha+$ называется *усечением* многогранника P.

Нами изучена возможность превращения заданного выпуклого многогранника с помощью многократных операций усечения в политригональный. Этот вопрос приведен в работе Шепарда [1]. Опираясь на результаты Хивуда [2], Хадвигер показал, что он эквивалентен известной проблеме четырех красок для карт.

Применив операцию усечения к каждой вершине выпуклого многогранника P, получим *примитивный многогранник*, т. е. многогранник, каждой вершине которого инцидентно три ребра. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только примитивные выпуклые многогранники.

§ 1. Необходимые и достаточные условия разрешимости проблемы политригонализации примитивных выпуклых многогранников

Лемма 1. *Необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы политригонализации примитивных выпуклых многогранников является существование такой нумерации всех его вершин двумя номерами 1 и 2, что сумма номеров вершин, инцидентных одной и той же грани, кратна трем.*

Доказательство очевидно, поскольку при «отрезании» вершины A примитивного многогранника у каждой грани, инцидентной A, вместо A появляются две новые вершины. Лемма 1 является перефразировкой применительно к проблеме политригонализации теоремы Хивуда [2].

Обозначим x_i — номер вершины v_i $(i = 1, 2, \ldots v)$ примитивного многогранника. Пусть u_k — сумма номеров вершин, принадлежащих грани S_k $(k = 1, 2, \ldots s)$. Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы политригонализации примитивных многогранников является разрешимость в числах 1 и 2 системы сравнений Хивуда* $u_k \equiv 0 \pmod 3$ $(k = 1, 2, \ldots s)$ [4].

Следствие. *Необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы политригонализации примитивных многогранников является разрешимость в числах 1 и 2 сравнения*

$$\prod_{k=1}^{s} (1 - u_k^2) \equiv 1 \pmod 3 \ [5].$$

В связи с последним результатом рассмотрим произвольный многочлен от v неизвестных x_i над полем Z_3 (поле классов вычетов по модулю 3), причем $x_i^2 = 1$ $(i = 1, 2, \ldots v)$,

$$f(x_1, x_2 \ldots x_v) = \sum_{k=0}^{2^v - 1} a_k y_k, \qquad (1)$$

где $y_0 = 1$, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1 x_2$ и вообще x_i входит в y_k тогда и только тогда, когда в двоичной записи числа k на i-м месте стоит 1 (заметим, что в силу условия $x_i^2 = 1$ каждое неизвестное входит в (1) не более, чем в первой степени). Условимся также обозначать α_m следующий набор значений x_i $(i = 1, 2, \ldots v) : x_i = 1$, если в двоичной записи числа m на i-м месте стоит 1, и $x_i = 2$ — в противном случае. Соответствующее этому набору α_m значение многочлена (1) обозначим b_m.

Лемма 3. *Каждому набору чисел* b_m $(m = 0, 1, \ldots 2^v - 1)$ *однозначно соответствует многочлен* (1) *такой, что* $f(\alpha_m) = b_m$. *Его коэффициенты определяются из равенств*

$$2^v a_k = \sum_m \beta_{km} b_m, \qquad (2)$$

где

$$\beta_{km} = \begin{cases} 1, & \text{если при наборе } \alpha_m \ y_k = 1 \\ 2, & \text{если при наборе } \alpha_m \ y_k = 2 \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что одночлен y_k принимает 2^{v-1} раз значение 1 и 2^{v-1} раз значение 2. Так как $y_0 = 1$ для всех α_m, то

$$2^v a_0 = \sum_m b_m,$$

что является частным случаем (2) при $k = 0$ и $\beta_{0m} = 1$.

Пусть $k \neq 0$. Выясним сколько раз одночлены y_k и y_m принимают одинаковые и различные значения. Если $m = 0$, то y_k и y_0 принимают 2^{v-1} раз пару значений 1,1 и столько же раз $-2,1$. Если и $m \neq 0$, то можно считать, что y_k и y_m не имеют общих множителей. Пусть p и q — числа множителей y_k и y_m соответственно. Тогда заданную пару значений они принимают $2^{p-1} \cdot 2^{q-1} \cdot 2^{v-p-q} = 2^{v-2}$ раз. Отсюда следует, что при фиксированном значении y_k, y_m принимает значения 1 и 2 одинаковое число раз. Для определения a_k имеем систему уравнений $f(\alpha_m) = b_m$. Умножая m-е уравнение на β_{km} и складывая все уравнения, получаем (2), так как из доказанного следует равенство нулю коэффициентов при a_l $(l \neq k)$. Лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что *между многочленами* (1) *и наборами значений* b_m $(m = 0, 1, \ldots 2^v - 1)$ *существует взаимно-однозначное соответствие, такое что* $f(\alpha_m) = b_m$.

§ 2. Свойства знакопеременной группы четвертой степени

Знакопеременная группа A_4 порождается подстановками $u = (234)$ и $w = (123)$ (подстановки заданы циклами). Образующие группы A_4 связаны соотношениями $u^3 = w^3 = uwuw = e$, где e — тождественная подстановка. Пусть $\prod\limits_{i=1}^{n} \gamma_i = e$, где γ_i равно u или w. Из свойств обратных элементов группы следует

Лемма 4. *Произведение γ_i, циклически переставленных, равно e.*

Лемма 5. *Произведение квадратов γ_i в том же порядке равно e.*

Действительно, $u^2 = (243)$ и $w^2 = (132)$ получаются из u и w взаимной заменой 2 и 3. Но при этом e переходит в e. Лемма доказана.

Лемма 6. *Произведение γ_i, взятых в обратном порядке, равно e.*

Действительно, по лемме 5

$$e = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i^2 = \prod_{i=n}^{1} \gamma_i,$$

так как $\gamma_i^3 = e$.

Обозначим $\overline{\gamma_i}$ элемент, равный w, если $\gamma_i = u$, и равный u, если $\gamma_i = w$. Будем называть $\overline{\gamma_i}$ сопряженным γ_i.

Лемма 7. *Произведение элементов, сопряженных γ_i, равно e.* Действительно, u получается из w взаимной заменой 1 и 4 и наоборот. Но при этом e переходит в e. Лемма доказана.

Равенство $\Pi\gamma_i = e$ можно преобразовать следующим образом. Пусть в произведении w встречается k раз. Перенумеруем слева направо все подстановки w, обозначив i-ю ($i = 1, 2, \ldots k$) w_i. Пусть n_i — число сомножителей на участке от w_i до w_{i+1} ($w_{k+1} = w_1$).

Непосредственно проверяется, что

$$(uw^2u)\,u^x\,(uw^2u) = w^{2x}, \tag{3}$$

где x — любое натуральное число или ноль. Для участка w_iw_{i+1} имеем

$$wu^{n_i-2}w = (u^2w^2u^2)\,u^{n_i-2}\,(u^2w^2u^2) =$$

$$= u\,(uw^2u)\,u^{n_i}\,(uw^2u)\,u = u\,(wu^2w)\,u^{n_i}\,(wu^2w)\,u.$$

Из последних двух равенств следует, что $\Pi\gamma_i = e$ можно записать следующими двумя способами:

$$\prod_{i=1}^{k}(uwu^{n_i}wu) = e, \tag{4}$$

$$u^{n_1}w^{2n_2}u^{n_3}w^{2n_4}\ \ldots = (uw^2u)^k. \tag{5}$$

В (5) на нечетном i-м месте стоит u^{n_i}, а на четном j-м w^{2n_j}. Заметим, что при четном k правая часть (5) равна e.

Найдем решение следующего уравнения:

$$u^2\left(\prod_{i=1}^{n}\gamma_i\right)w^2\left(\prod_{i=n}^{1}\overline{\gamma_i}\right) = e, \tag{6}$$

где $\overline{\gamma^i}$ — сопряженный элемент γ_i и в $\overline{\varphi} = \prod\limits_{i=n}^{1}\overline{\gamma_i}$ обратный порядок сомножителей по сравнению с $\varphi = \prod\limits_{i=1}^{n}\gamma_i$. Требуется найти все φ, удовлетворяющие уравнению (6).

Предположим, что $\varphi = \beta_1\beta_2\beta_3$, где β_i либо u, либо w, либо степень u или w. Тогда $\varphi\beta_3^2\beta_2^2\beta_1^2 = e$. По лемме 6 $\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\left(\prod\limits_{i=n}^{1}\gamma_i\right) = e$. Отсюда по лемме 7 $\overline{\varphi} = \overline{\beta_3}\overline{\beta_2}\overline{\beta_1}$. Значит, когда φ пробегает все элементы группы

$$e,\ u,\ u^2,\ w,\ w^2,\ uw^2,\ wu^2,\ u^2w,\ w^2u,\ uw,\ wu,\ uw^2u$$

$\overline{\varphi}$ принимает в том же порядке следующие значения:

$$e,\ w,\ w^2,\ u,\ u^2,\ u^2w,\ w^2u,\ uw^2,\ wu^2\ uw,\ wu,\ wu^2w.$$

Из этих двенадцати пар значений уравнению (6) удовлетворяют только три значения φ

$$u,\ w,\ uw^2u. \tag{7}$$

Те же значения, только в другом порядке, принимает φ, Точнее, $\bar{\varphi}$ принимает значения, сопряженные φ в указанном выше смысле. Элемент uw^2u самосопряженный, поскольку $uw^2u = wu^2w$.

§ 3. Комбинаторный тип многогранника

Комбинаторный (топологический) характер проблемы политригонализации дает возможность заменять исследуемый выпуклый многогранник любым комбинаторно эквивалентным ему многогранником и даже любой комбинаторно эквивалентной ему сетью на выпуклой поверхности.

Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между их вершинами, ребрами и гранями с сохранением инцидентности. Комбинаторный тип выпуклого многогранника можно представить на плоскости следующим образом. Спроектируем выпуклый многогранник P из точки S, лежащей вне P, на плоскость σ, не пересекающую P. Точка S и плоскость σ должны быть выбраны так, чтобы грань Q многогранника проектировалась в выпуклый многоугольник Q' на σ, а любая другая — в выпуклый многоугольник, содержащийся в Q'. Такая проекция называется диаграммой Шлегеля многогранника P [1].

Грань Q' диаграммы Шлегеля имеет общие внутренние точки со всеми гранями диаграммы. Чтобы устранить это, поставим в соответствие грани Q замыкание дополнения Q'. Полученное представление выпуклого многогранника на всей плоскости σ представляет собой (конечную) сеть из вершин, ребер и граней, обладающую приведенными ниже свойствами.

I. Каждое ребро инцидентно с двумя и только с двумя вершинами (гранями).

II. У двух вершин (граней) может быть только одно инцидентное им обеим ребро.

III. Всякая вершина (грань) инцидентна, по крайней мере, трем граням (вершинам) [6].

Назовем абстрактным многогранником произвольную конечную сеть на плоскости из вершин, ребер и граней, удовлетворяющую условиям I — III. Такое название оправдывается известной теоремой Штейница:

Для любого абстрактного многогранника существует комбинаторно эквивалентный ему выпуклый многогранник.

§ 4. Общие теоремы о комбинаторном строении примитивных выпуклых многогранников

Пусть P — примитивный абстрактный многогранник. Простой замкнутый контур, составленный из ребер P, называется *циклом*. Цикл C по теореме Жордана делит P на два абстрактных многогранника P_1 и P_2. Пусть P_1 — абстрактный многогранник, покрывающий внутреннюю (конечную) область, P_2 — другой абстрактный многогранник с краем C.

Вершина многогранника с краем называется свободной, если она инцидентна лишь одной грани этого многогранника. Очевидно, свободные вершины лежат на цикле C. Свободные вершины разбивают цикл на участки, которые будем называть *элементарными дугами*. Будем говорить, что две вершины цикла разделены, если не существует элементарной дуги цикла, содержащей обе эти вершины. Цикл C_1 называется *расширением* цикла C, если C лежит внутри C_1 и все грани, расположенные между C и C_1, политригональны. Если между C и C_1 заключена одна политригональная грань, то расширение C_1 называется *простым*.

Лемма 8. *Расширение C_1 цикла C является результатом последовательных простых расширений C.*

Доказательство следует из конечности числа граней абстрактного многогранника.

Пусть v_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ — вершины цикла C (именно в этом порядке). Вершину v_1 назовем начальной вершиной цикла. Отнесем свободным вершинам подстановку u группы A_4 (§ 2), остальным вершинам C отнесем подстановку w. Определим $\varphi(C) = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i$, где γ_i — подстановка, отвечающая вершине v_i.

Лемма 9. *Пусть C_1 — простое расширение цикла C. Если начальные, не являющиеся свободными, вершины и направления обходов циклов C и C_1 совпадают, то $\varphi(C_1) = \varphi(C)$.*

Доказательство. Пусть расширение происходит через элементарную дугу цикла C, имеющую m вершин (две из них свободны). При расширении C_1 две свободные вершины C превращаются в несвободные C_1. Кроме того, на C_1 появляется $3k - m$ новых свободных вершин, где $3k$ — число вершин политригональной грани, расположенной между C и C_1. Но $uw^{m-2}u = wu^{3k-m}w$ при всех m и k, так как из соотношений между образующими группы A_4 (§ 2) следует, что $u^2 = wuw$, $uwu = w^2$, $uw^2u = wu^2w$. Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть P — гомеоморфный кругу примитивный выпуклый многогранник с краем C. $\varphi(C) = e$ тогда и только тогда, когда существует примитивный выпуклый многогранник Q такой, что P комбинаторно эквивалентен многограннику с краем $Q_1 \subset Q$, а все не принадлежащие Q_1 грани Q политригональны.*

Необходимость. Пусть Q' — абстрактный многогранник, комбинаторно эквивалентный Q. Не ограничивая общности можно считать, что абстрактный многогранник Q'_1, комбинаторно эквивалентный P, расположен внутри цикла L_0. Рассмотрим последовательность расширений $L_1, L_2, \ldots, L_n$ цикла L_0, где $n + 1$ — число политригональных граней вне L_0. Каждое последующее расширение является простым расширением предыдущего цикла. По лемме 9 для любых двух циклов L_i и L_j $\varphi(L_j)=e$, если $\varphi(L_i)=e$, и наоборот. Так как L_n — граница политригональной грани, то $\varphi(L_n)=e$. Значит, $\varphi(C)=\varphi(L_0)=e$.

Достаточность. Пусть $\varphi(C)=e$. Пусть P' — абстрактный многогранник с краем C', комбинаторно эквивалентный P (сначала строится абстрактный многогранник для границы выпуклой оболочки P). Будем считать, что P' находится внутри C'. Чтобы доказать существование многогранника Q с требуемыми свойствами достаточно в силу теоремы Штейница заполнить внешнюю область цикла C' политригональными гранями так, чтобы выполнялись условия I — III (§ 3). Условиям I, III легко удовлетворить. Дальнейшие построения проводятся с целью удовлетворить условию II (касающемуся граней). Выполнение этого условия для P' следует из выпуклости P.

Первое расширение цикла C'. Пусть A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ свободные вершины C' (в порядке его обхода). Так как $\varphi(C')=e$, то $n\geqslant 2$. Построим прямолинейные отрезки A_iB_i, не пересекающие P' в других точках и друг друга. Если они достаточно велики, то многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ не пересекает P'. Превратим грань, прилегающую к элементарной дуге A_iA_{i+1}, в политригональную, добавив на ребре B_iB_{i+1} минимально необходимое число свободных вершин. Полученный цикл, который обозначим M, является расширением цикла C'. По леммам 8, 9 а также 4 и 6 $\varphi(M)=e$.

Простое расширение будем называть простым расширением рода k $(k=0, 1, 2)$, если при таком расширении появляется k новых свободных вершин. Простое расширение рода k уменьшает число всех свободных вершин на $2-k$.

Второе расширение цикла C'. Обозначим его K. K является расширением цикла M и строится с помощью простых расширений M_1, M_2, $\ldots$ рода 0 или 1, действительно уменьшающих общее число свободных вершин. Расширение K считается построенным, если дальнейшее простое расширение рода 0 или 1 невозможно. Число простых расширений M_i конечно, так как на M свободных вершин конечное число и простое расширение рода 0 или 1 уменьшает это число по крайней мере на единицу. Расширение K строится неоднозначно. Очевидно, $\varphi(K)=e$. Покажем, что для расширения K выполняется условие II.

Новые политригональные грани, построенные при первом расширении, имеют с циклом M связное пересечение. Простое расширение рода 0 также не нарушает этого свойства. Нарушения возможны только при простом расширении рода 1 и только тогда, когда элементарная дуга FG цикла M_i, через которую происходит расширение M_{i+1}, вся лежит на $B_pB_{p+1}\subset M$ и, значит, содержит всего две вершины F и G. Следовательно, при M_{i+1} добавляется треугольник с вершинами F и G, не являющимися уже свободными на M_{i+1}, и единственной новой свободной вершиной H. В силу равенства $\varphi(M_{i+1}) = e$ вершины F и G разделены. Если F и G будут принадлежать M_j ($j \geqslant i + 1$), они также будут разделены, поскольку M_j будет принадлежать и свободная вершина H, разделяющая их. Поэтому вершины F и G никогда не будут инцидентными одной и той же третьей грани. Отсюда следует выполнение условия II для всех граней внутри цикла K.

Третье расширение цикла C'. Если на K нет свободных вершин, то требуемый абстрактный многогранник построен, так как в силу условия $\varphi(K) = e$ последняя грань политригональна. Если же на K есть свободные вершины, то из предыдущего следует, что числа вершин всех элементарных дуг цикла K имеют вид $3p + 1$. Поступая так же, как и при построении первого расширения, получим требуемый абстрактный многогранник. Теорема доказана.

Условие гомеоморфности кругу в теореме 1 можно ослабить. Сущность этого ослабления становится ясной из рассмотрения следующего простейшего случая.

Пусть P — абстрактный многогранник, P_i ($i = 1, 2$) — абстрактный многогранник с краем L_i, гомеоморфный кругу. Будем считать, что P_i расположен внутри L_i и многогранники P_1 и P_2 не имеют общих элементов. Пусть A_i, B_i — свободные вершины P_i, l — путь без самопересечений, составленный из ребер P, который соединяет вершины B_1 и B_2 и не имеет других общих вершин с L_i. Объединение циклов L_i и пути l назовем вырожденным циклом L. Выберем определенное направление обхода. Если A_1 — начальная вершина L, то вершины A_i, B_i проходятся в следующем порядке $A_1B_1B_2A_2B_2B_1A_1$, т. е. путь l проходится дважды, причем во взаимно-противоположных направлениях. Поэтому будем различать пути B_1B_2 и B_2B_1.

Для определения свободных вершин этих путей рассмотрим следующие части вырожденного цикла L $l_1 = A_1B_1B_2A_2$ и $l_2 = A_2B_2B_1A_1$. По теореме Жордана можно различать стороны пути l_i ($i = 1, 2$). Свободные вершины пути B_1B_2 (B_2B_1) определяются исходя из правил: 1) из двух вершин пути B_1B_2 (B_2B_1) только одна является свободной, если ребра, инцидентные этим вершинам и не принадлежащие l_1 (l_2), направлены в различные стороны l_1 (l_2); 2) вершины B_1 и B_2 не являются свободными. После этого для вырожденного цикла L находится $\varphi(L)$, если свободным вершинам сопоставить подстановку u, а остальным — w.

Теорема 2. *Пусть P — примитивный выпуклый многогранник и L — вырожденный цикл на нем. Пусть $P_i \subset P$ ($i = 1, 2$) — гомеоморфный кругу выпуклый многогранник с краем $L_i \subset L$. Тогда, если все грани P, не принадлежащие P_1 и P_2 политригональны, то $\varphi(L) = e$.*

Доказательство проводится так же, как и доказательство необходимости условий в теореме 1. Аналогично можно сформулировать и достаточные условия существования примитивного выпуклого многогранника, содержащего заданный вырожденный цикл.

§ 5. Некоторые следствия из общих теорем о комбинаторном строении примитивных выпуклых многогранников

Рассмотрим более подробно случай, когда все грани примитивного выпуклого многогранника P, за исключением двух граней S_1 и S_2, политригональны. Пусть n_i $(i = 1, 2)$ — число вершин грани S_i. Поскольку сумма чисел вершин всех граней P в силу его примитивности равна утроенному числу вершин, то $n_1 + n_2$ кратно трем. Пусть $n_1 = 3k + 1$, $n_2 = 3m + 2$.

Хивуд доказал, что любые две смежные грани P политригональны, если только все другие грани P политригональны [7]. Из этой теоремы Хивуда вытекает, что грани S_1 и S_2 не могут быть смежными.

Легко показать, что теорема Хивуда является следствием теоремы 1. Действительно, пусть A и B смежные грани P и C — наименьший цикл, содержащий внутри A и B. Если вне цикла C все грани политригональны, то по теореме 1 $\varphi(C) = e$. Это равенство, следуя (5), можно записать в виде

$$u^p w^{2q} = e, \tag{8}$$

где p и q — числа вершин граней A и B. Но (8) возможно только при значениях p и q, кратных трем. Значит, смежные грани A и B также политригональны.

Чтобы выяснить особенности взаимного расположения граней S_1 и S_2, воспользуемся теоремой 2.

Обозначим B_i вершину грани S_i. Пусть L — вырожденный цикл, содержащий все ребра граней S_1 и S_2, l_1 (l_2) — путь B_1B_2 (B_2B_1) без крайних вершин. Выберем направление обхода L. Начиная с вершины B_1 и обходя сначала границу S_1, по теореме 2 имеем

$$\varphi(L) = wu^{3k}w\varphi(l_1)\, wu^{3m+1}w\varphi(l_2) = e.$$

После упрощений получаем

$$w^2\varphi(l_1)\, u^2\varphi(l_2) = e. \tag{9}$$

Поскольку $\varphi(l_2)$ получается из $\varphi(l_1)$ изменением на обратный порядка сомножителей и взаимной заменой u и w. то (9) эквивалентно уравнению (6) § 2. Поэтому из (7) следует, что $\varphi(l_1)$ может равняться только u, w, uw^2u. Умножив эти значения слева и справа на w, получим для $\varphi(B_1B_2)$ следующие значения: u^2, e, u. Только такие значения принимает и $\varphi(B_2B_1)$. Поэтому можно говорить о значении $\varphi(l)$ для неориентированного пути l, соединяющего вершины $B_1 \in S_1$ и $B_2 \in S_2$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть P — примитивный выпуклый многогранник, только две грани S_1 и S_2 которого не являются политригональными. Пусть l — путь без самопересечений, имеющий с S_1 и S_2 только по одной общей вершине. Тогда $\varphi(l)$ может равняться только e, u или u^2.*

Замечание. Следует иметь в виду, что свободным вершинам l сопоставляется подстановка u, а остальным (в том числе и крайним) — подстановка w. Если же свободным вершинам относить подстановку w, то получим для $\varphi(l)$ значения e, w или w^2.

Можно было бы доказать, что заключение теоремы 3 является достаточным условием для существования примитивного выпуклого многогранника с заданным взаимным расположением граней S_1 и S_2.

Теорема Хивуда и теорема 3 дают исчерпывающую информацию о взаимном расположении граней S_1 и S_2.

Укажем несколько достаточных условий разрешимости проблемы политригонализации примитивных выпуклых многогранников.

Пусть P — примитивный многогранник, S_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ — его грани. Обозначим x_k номер вершины v_k $(k = 1, 2, \ldots, v)$, равный 1 или 2. По лемме 2 разрешимость системы сравнений Хивуда

$$u_i \equiv 0 \pmod 3 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{10}$$

где u_i — сумма номеров вершин грани S_i является необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы политригонализации.

Сравнение системы (10) будем называть зависимым от остальных, если решение (10) без учета этого сравнения удовлетворяет ему. По теореме Хивуда [7], если система (10) разрешима (в числах 1 и 2), то любые два ее сравнения, относящиеся к смежным граням, зависят от остальных. Условие независимости числа зависимых сравнений от многогранника влечет разрешимость проблемы политригонализации.

Теорема 4. *Если для каждого примитивного выпуклого многогранника, который можно превратить в политригональный, число зависимых сравнений Хивуда равно 2, то проблема политригонализации разрешима для любого многогранника.*

Доказательство. Проблема политригонализации тривиально разрешима для тетраэдра. Предположим, что она разрешима для любого примитивного выпуклого многогранника, число граней которого не больше n. Пусть P — примитивный многогранник, имеющий $n+1$ грань, P' — абстрактный многогранник, комбинаторно эквивалентный P. По лемме Штейница [6] на P' можно найти такие две смежные грани S_1 и S_2, при объединении которых снова получается абстрактный многогранник, обозначим его Q'. Пусть S_3 и S_4 — грани смежные обеим граням S_1 и S_2, x_1 —

номер вершины, инцидентной граням S_1, S_2 и S_3, x_2 — номер вершины, инцидентной граням S_1, S_2 и S_4. Обозначим H_{n+1} систему сравнений Хивуда для P', H_n — для Q' и H_{n-3} подсистему системы H_{n+1}, в которую не входят сравнения для S_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

По предположению индукции система H_n разрешима в числах 1 и 2. Поэтому система H_{n-3} также разрешима. Из условия теоремы следует, что существует такое решение системы H_{n-3}, которое не является решением H_n, так как в противном случае три сравнения системы H_n, относящиеся к граням $S_1 \cup S_2$, S_3 (без x_1), S_4 (без x_2), были бы зависимыми. По теореме Хивуда [7] для такого решения сумма номеров вершин грани S_3 (без x_1) и грани S_4 (без x_2) не кратна трем. Полагая тогда x_1, x_2 таковыми, чтобы сумма номеров вершин граней S_3 и S_4 многогранника P' была кратна трем, получаем по теореме Хивуда решение системы H_{n+1}. Теорема доказана.

По теореме Хивуда, если S_1 и S_2 — смежные грани примитивного многогранника P, необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы политригонализации (следствие леммы 2) принимает вид

$$\prod_{k=3}^{s} (1 - u_k^2) \equiv 1 \pmod 3. \qquad (11)$$

Степень многочлена (11) равна $2(s-2)$, что равно числу вершин (неизвестных) примитивного многогранника.

Назовем диагональю грани отрезок, соединяющий произвольные две вершины этой грани. Совокупность попарно непересекающихся диагоналей, взятых по одной из каждой грани, отличной от S_1 и S_2, будем называть полным набором диагоналей. В полном наборе $s-2$ диагонали.

Теорема 5. *Если число полных наборов диагоналей примитивного выпуклого многогранника P не кратно трем, то проблема политригонализации для P разрешима.*

Доказательство следует из того, что старший коэффициент в многочлене (11) не равен нулю.

Условие теоремы 5 выполняется не для каждого многогранника. Так, для шестиугольной призмы число полных наборов диагоналей равно 57 (исключенными считаются основание и боковая грань).

В заключение докажем одну теорему о разложении многочленов вида (11) на множители.

Пусть P — примитивный выпуклый многогранник, C — цикл на нем, S_i ($i = 1, 2, \ldots k$) — грани, расположенные внутри C. Для того чтобы эти грани S_i были политригональными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 - u_i^2\right) \equiv 1 \pmod 3. \qquad (12)$$

По теореме 1, если свободной вершине с номером x_j сопоставить подстановку u^{x_j}, а остальным вершинам C — подстановку w^{x_p}, где x_p — номер вершины, имеем

$$\varphi(C) = e. \tag{13}$$

В (13) входят только номера вершин, лежащих на цикле C. По лемме 3 § 2 существует многочлен f от неизвестных, соответствующих вершинам C, который принимает значение 1 для каждого решения уравнения (13) и значение 0 во всех остальных случаях. По той же лемме существует многочлен g от неизвестных, соответствующих вершинам, расположенным внутри C, который равен 1 одновременно с многочленом f только для каждого решения уравнения (12).

Теорема 6. *Если $S_i\,(i = 1,\ 2,\ \ldots\ k)$ — грани примитивного выпуклого многогранника P, расположенные внутри цикла C, и u_i — сумма номеров их вершин, то*

$$\prod_{i=1}^{k} (1 - u_i^2) \equiv f \cdot g \pmod 3,$$

где многочлен f зависит только от номеров вершин цикла C,

ЛИТЕРАТУРА

1. G. C. Shephard Twenty problems on convex polyhedra, Part I. «Math. Gaz.» 1968, **52**, № 380, 136—147.
2. P. J. Heawood. Map — colour theorem. Quart J. Math., 24 (1890), 322—338.
3. H. Hadwiger. «Ungelöste Probleme Nr 17», Elemente der Matematik, **12** (1957), 61—62.
4. P. J. Heawood. On the four — colour map teorem. Quart. J. Math., **29** (1897), 270—285.
5. Benneton Gaston. Sur le probléme des quatre couleurs, ≤ C. r. Acad. sci. ≥ **266** (1968), № 17, A 862—A 863.
6. Л. А. Люстерник. Выпуклые фигуры и многогранники. Гостехтеоретиздат, М., 1956, стр. 93—108.
7. P. J. Heawood Failures in congruences connected with the four — colour map theorem. Proc. London Math. Soc. **40** (2) (1936), 189—202.

Поступила 26 апреля 1971 г.

О ПРИМЕНЕНИИ ГРУПП С ЦЕНТРОМ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОМБИНАТОРНЫХ СВОЙСТВ ПРИМИТИВНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

А. И. Медяник

Харьков

В предыдущей статье [1] знакопеременная группа четвертой степени была применена к исследованию комбинаторных свойств примитивных выпуклых многогранников. Свое начало это направление исследований берет в работах Хивуда [2], [3], [4], посвященных известной проблеме четырех красок. Недавно Моцкин [5] с помощью группы кватернионов двадцать четвертого порядка решил проблему Эберхарда [6] о четности числа граней политригонального * примитивного многогранника.

Пусть G — группа с центром. Центром группы называется подмножество ее элементов, перестановочных со всеми элементами группы. Центр группы является ее абелевой подгруппой. Пусть u и w — образующие группы G, связанные соотношениями

$$u^3 = w^3 = e, \tag{1}$$

где e — единица группы.

Пусть P — примитивный политригональный выпуклый многогранник, C — цикл на нем. Обозначим P_1 один из многогранников с краем C. Отнесем свободным * вершинам P_1 элемент u группы G, а остальным вершинам C — w. Если γ_i — элемент, соответствующий вершине v_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ цикла C (вершины C занумерованы в порядке обхода), то циклу C соответствует элемент $\varphi(C) = \prod\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$. В дальнейшем будет рассматриваться только случай, когда

$$\varphi(C) = \varepsilon, \tag{2}$$

где ε — элемент центра группы. В этом случае справедлива

Лемма. *Если* $\varphi(C) = \varepsilon$, то $\varphi(C)$ *не зависит от того, какую вершину цикла C считать начальной.*

Действительно, из $\prod\limits_{i=1}^{n} \gamma_i = \varepsilon$ следует

$$e = \varepsilon^{-1} \prod_{i=1}^{n} \gamma_i = \left(\prod_{i=k+1}^{n} \gamma_i\right) \varepsilon^{-1} \left(\prod_{i=1}^{k} \gamma_i\right) = \varepsilon^{-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \gamma_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} \gamma_i\right).$$

Следовательно, $\left(\prod\limits_{i=k+1}^{n} \gamma_i\right)\left(\prod\limits_{i=1}^{k} \gamma_i\right) = \varepsilon$. Лемма доказана.

Пусть C_1 — простое расширение цикла C. Целью настоящей статьи является нахождение всех минимальных групп с центром, для которых

$$\varphi(C_1) = \alpha\varphi(C), \tag{3}$$

где α — фиксированный элемент центра группы G.

Если грань S, расположенная между циклами C_1 и C, имеет $3k$ вершин, m из которых принадлежат C, то из (3) следует

$$wu^{3k-m}w = \alpha u w^{m-2} u. \tag{4}$$

---

* Определения этого и других понятий см. в [1].

Различными среди равенств (4) являются лишь следующие три

$$w^2 = \alpha uwu, \quad wuw = \alpha u^2, \quad wu^2w = \alpha uw^2u. \tag{5}$$

Из равенств (1) и (5) находим

$$uwuw = wuwu = \alpha = \alpha^{-1}. \tag{6}$$

Значит,

$$\alpha^2 = e. \tag{7}$$

Элементы u, w связаны также соотношениями

$$u^2w^2 = \alpha wu, \quad w^2u^2 = \alpha uw. \tag{8}$$

Равенства (1—8) дают возможность найти все элементы минимальной группы с образующими α, u, w (очевидно, элемент центра ε в (2) является степенью α). В общем случае группа G состоит из следующих 24 элементов

$$e, u, u^2, w, w^2, uw, wu, uw^2, u^2w, wu^2, w^2u, wu^2w, \tag{9}$$

$$\alpha, \alpha u, \alpha u^2, \alpha w, \alpha w^2, \alpha uw, \alpha wu, \alpha uw^2, \alpha u^2w, \alpha wu^2, \alpha w^2u, \alpha wu^2w.$$

Возможны три случая.

1. $\alpha \neq e$. Все элементы (9) различны. Обозначим эту группу G_{24}. Она изоморфна рассмотренной в работе Моцкина [5] группе, порожденной кватернионами $\gamma_1 = \frac{1}{2}(-1 - i + j + k)$ и $\gamma_2 = \gamma_1 - j$. Изоморфизм порождается соответствием между элементами u и γ_1, w и γ_2. Центр группы состоит из e, α.

2. $\alpha = e$, $uw \neq e$. В этом случае G состоит из первых двенадцати элементов (9). Обозначим эту группу G_{12}. Она изоморфна знакопеременной группе A_4 и, как будет доказано ниже, группе, фактически рассмотренной Хивудом в [4]. Изоморфизм порождается соответствием между u и подстановкой (234), w и подстановкой (123). Центр группы состоит из единственного элемента e.

3. $uw = e$. G состоит из трех элементов e, u, w. Обозначим ее G_3. Она изоморфна группе (по сложению) классов вычетов по модулю три. G_3 была применена Хивудом в работах [2], [3]. Центр группы — e.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если G — минимальная группа с центром, образующие которой u и w связаны соотношениями $u^3 = w^3 = e$ и удовлетворяют уравнениям* (2) и (3), *то G изоморфна одной из трех групп G_{24}, G_{12}, G_3.*

Группа G_{12} является факторгруппой группы G_{24} по ее центру, а G_3 — факторгруппой G_{12} по ее клейновской подгруппе (e, uw, wu, uw^2u).

В работе [4] Хивуд фактически рассмотрел группу H следующих двенадцати элементов: 00, 1, 2, 0, 11, 22, 12, 21, 01, 10, 02, 20. Произведением двух элементов группы H называется такой ее элемент, который получается из исходных путем следующей редукции:

а) число 1 можно вычеркнуть и добавить по 2 к двум смежным с ним числам;

б) число 2 можно вычеркнуть и добавить по 1 к двум смежным с ним числам;

в) число 0 можно вычеркнуть и два соседние с ним числа заменить их суммой.

Заметим, что здесь под суммой двух чисел понимается сумма их классов вычетов по модулю три, т. е. числа 0, 1, 2 — это элементы группы H. Единицей группы H является пара 00. Пример: $12 \cdot 21 = 1221 = (122)1 = 201 = 0$.

Теорема 2. *Группа H изоморфна знакопеременной группе A_4.* Действительно, изоморфизм порождается соответствием образующих этих групп 1 и u, 2 и w.

Пусть P — политригональный примитивный выпуклый многогранник, C — цикл на нем, v_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — циклическая последовательность вершин C, не являющихся свободными. Пусть c_i — участок с концами v_i и v_{i+1} $(v_{k+1} = v_1)$ h_i — класс вычетов по модулю три числа вершин c_i. Следуя Хивуду [4], отнесем циклу C элемент группы H, равный $\psi(C) = h_1, h_2, \ldots, h_k$.

Теорема 3. *$\psi(C)$ является единичным элементом группы H.*

Действительно, по теореме 1 из [1] $\varphi(C) = e$. Используя равенство [4] из [1] получаем

$$\varphi(C) = \prod_{i=1}^{k} (uwu^{h_i}wu) = e,$$

но

$$uwu^{h_i}wu = \begin{cases} uw^2u, & \text{если } h_i = 0 \\ u, & \text{если } h_i = 1. \\ w, & \text{если } h_i = 2 \end{cases}$$

Из этих равенств и теоремы 2 следует утверждение теоремы.

Из теорем 2 и 3 вытекает, что группы H и A_4 не только изоморфны, но и играют в проведенных исследованиях одну и ту же роль.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Медяник. О некоторых комбинаторных свойствах примитивных выпуклых многогранников. См. статью в настоящем сборнике.

2. P. J. Heawood. Map—colour theorem. Quart. J. Math.. 24 (1890), 322—338.

3. P. J. Heawood. On the four—colour map theorem. Quart. J. Math., 29 (1897), 270—285.

4. P. J. Heawood. Failures in congruences connected with the four—colour map theorem, Proc. London Math. Soc., 40 (2) (1936), 189—202.

5. T. S. Motzkin. The evenness of the number of edges of a convex polyhedron. Proc. Nat. Acad. Sci USA, 52 (1964) № 1, 44—45.

6. V. Eberhard. Zur Morphologie der Polyeder. Leipzig, 1891.

Поступила 13 февраля 1971 г.

О СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЯХ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ V_3^2 в P_3

М. Р. Роговой

Харьков

1. Воспользуемся установившимся термином «распределение» и рассмотрим в проективном пространстве P_3 распределение с образующим элементом (M_0, μ), где M_0 — точка пространства, μ — инцидентная этой точке плоскость. Отнесем это распределение к реперу 1-го порядка $R(M_0, M_1, M_2, M_3)$ (точки M_1 и M_2 принадлежат плоскости μ):

$$dM_i = \omega_i^k M_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3); \tag{1}$$

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k], \quad (i, j, k = 0, 1, 2, 3); \tag{2}$$

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega_0^j, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Рассматриваемое распределение определяет неголономное многообразие V_3^2 в P_3 — это множество интегральных кривых уравнения

$$\omega_0^3 = 0, \tag{4}$$

условие полной интегрируемости которого не выполнено

$$\Gamma_{12}^3 \neq \Gamma_{21}^3. \tag{5}$$

2. В статье [3] был построен канонический репер многообразия V_3^2 в P_3. В этом репере прямые M_0M_1 и M_0M_2 совпадают с асимптотическими направлениями V_3^2, а прямая M_1M_2 соответствует прямой M_0M_3 в соответствии Бомпиани. Прямая M_0M_3 определяется с помощью конусов Бомпиани K_1 и K_2.

Конус Бомпиани $K_1 (K_2)$ образован прямыми $M_0M_0^*$ пространства P_3, обладающими тем свойством, что асимптотическая касательная $M_0^*M_1^* \, (M_1^*M_2^*)$ в бесконечно близкой к M_0 точке M_0^* пересекает асимптотическую касательную $M_0M_1 \, (M_0M_2)$.

Прямая M_0, M_3 — это прямая пересечения полярной плоскости для M_0M_1 относительно K_2 с полярной плоскостью для M_0M_2 относительно K_1; она принята за проективную нормаль многообразия V_3^2.

Если отнести многообразие V_3^2 к каноническому реперу, то выполняются следующие условия [3]:

$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^1 = 0. \tag{6}$$

3. Имеет место следующая теорема, принадлежащая Бомпиани [2].

Теорема. *В окрестности 2-го порядка точки M_0 множество кривых многообразия V_3^2, инцидентных точке M_0, расположено на голономной поверхности.*

В самом деле, окрестность 2-го порядка точки M_0 многообразия V_3^2 определяется дифференциалами

$$dM_0 = \omega_0^k M_k, \tag{7}$$
$$d^2M_0 = (d\omega_0^k + \Gamma_{ij}^k \omega_0^i \omega_0^j) M_k + \Gamma_{ij}^3 \omega_0^i \omega_0^j M_3, \qquad (i,\ j = 1,\ 2;\ k = 0,\ 1,\ 2).$$

Пусть τ — параметр, определяющий положение точки M на некоторой произвольной кривой многообразия V_3^2; тогда в бесконечно малой окрестности точки M_0 имеет место следующее разложение:

$$M = M_0 + \frac{dM_0}{d\tau}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2M_0}{d\tau^2}\tau^2 + \ldots;$$

или, в силу (7), полагая $\omega_0^k = \lambda_k \tau$, $d\omega_0^k = \mu_k \tau^2$ (λ_k и μ_k — константы),

$$M = M_0 + \lambda_k M_k + \frac{1}{2}(\mu_k + \Gamma_{ij}^k \lambda_i \lambda_j)\tau^2 M_k + \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^3 \lambda_i \lambda_j \tau^2 M_3 + \ldots,$$
$$(i,\ j = 1,\ 2;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Если t, x, y, z — однородные проективные координаты точки M относительно репера, $M = tM_0 + xM_1 + yM_2 + zM_3$, получим параметрические уравнения рассматриваемой кривой многообразия V_3^2 в виде

$$t = 1 + \lambda_0 \tau + \frac{1}{2}(\mu_0 + \Gamma_{ij}^0 \lambda_i \lambda_j)\tau^2 + \ldots,$$
$$x = \lambda_1 \tau + \frac{1}{2}(\mu_1 + \Gamma_{ij}^1 \lambda_i \lambda_j)\tau^2 + \ldots,$$
$$y = \lambda_2 \tau + \frac{1}{2}(\mu_2 + \Gamma_{ij}^2 \lambda_i \lambda_j)\tau^2 + \ldots,$$
$$z = \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^3 \lambda_i \lambda_j \tau^2 + \ldots .$$

Нетрудно проверить, что эта кривая с точностью до бесконечно малых 2-го порядка включительно, расположена на поверхности

$$zt = \frac{1}{2}(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)\, xy.$$

Таким образом, теорема доказана.

4. Выделим из множества кривых многообразия V_3^2, инцидентных точке M_0, однопараметрическое семейство кривых. Это семейство кривых образует голономную поверхность и, как следует из теоремы (пункт 3), она содержит окрестности 2-го порядка всех кривых многообразия V_3^2, инцидентных точке M_0. Дадим следующее

Определение. Поверхность, образованная однопараметрическим семейством кривых многообразия V_3^2, инцидентных точке M_0, назовем *соприкасающейся поверхностью многообразия* V_3^2, *со-*

ответствующей точке M_0, а точку M_0 будем называть *точкой прикосновения* этой поверхности с многообразием V_3^2.

Соприкасающиеся поверхности для многообразия V_3^2 в евклидовом пространстве, образованные геодезическими линиями многообразия, рассматривал еще Роджерс. Соприкасающиеся геодезические многомерные поверхности для V_n^m изучал В. В. Вагнер. Однако на свойство кривых многообразия V_3^2, изложенное в теореме (пункт 3), впервые обратил внимание Е. Бомпиани.

5. Определим проективно-геодезические линии многообразия V_3^2, инцидентные данной точке M_0.

Проективно-геодезические линии многообразия V_3^2 — это кривые, принадлежащие многообразию V_3^2 и обладающие тем свойством, что в каждой точке кривой соприкасающаяся плоскость проходит через проективную нормаль многообразия V_3^2 в этой точке. Так как соприкасающаяся плоскость какой-нибудь линии $\overset{1}{\omega_0} : \overset{2}{\omega_0}$ многообразия V_3^2 определяется точками M_0, $M_0 + dM_0$, $M_0 + dM_0 + \frac{1}{2} d^2M_0$, то уравнение проективно-геодезической линии выразится условием, что эти три точки и точка M_3 лежат в одной плоскости

$$(M_0 dM_0 d^2M_0 M_3) = 0. \tag{8}$$

Подставляя в (8) dM_0 и d^2M_0 из (7) и принимая во внимание (6), получаем уравнение проективно-геодезических линий многообразия V_3^2

$$\begin{aligned} \omega_0^1 d\omega_0^2 - \omega_0^2 d\omega_0^1 + \Gamma_{11}^1 (\omega_0^1)^3 + (\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1)(\omega_0^1)^2 \omega_0^2 + \\ + (\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1)\, \omega_0^1 (\omega_0^2)^2 - \Gamma_{22}^1 (\omega_0^2)^3 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

6. Обозначим

$$\omega_0^1 : \omega_0^2 = \lambda, \quad \omega_0^2 = d\tau; \tag{10}$$

тогда уравнение (9) запишется так

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \Gamma_{11}^2 \lambda^3 + (\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1)\lambda^2 + (\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1)\lambda - \Gamma_{22}^1. \tag{11}$$

Через точку M_0 в каждом направлении, определяемом отношением λ, проходит одна проективно-геодезическая линия. Это однопараметрическое семейство проективно-геодезических линий образует соприкасающуюся поверхность S_2 многообразия V_3^2, инвариантно связанную с многообразием V_3^2.

7. Пусть x, y, z, t — однородные проективные координаты точки M относительно канонического репера:

$$M = tM_0 + xM_1 + yM_2 + zM_3. \tag{12}$$

Составим параметрические уравнения инвариантно связанной с многообразием V_3^2 соприкасающейся поверхности S_2 относительно параметров λ и τ.

С этой целью вычисляем по формулам (1) и (3) при условиях (4), (6), (10)

$$\frac{dM_0}{d\tau} = (\Gamma_{01}^0\lambda + \Gamma_{02}^0) M_0 + \lambda M_1 + M_2,$$

$$\frac{dM_1}{d\tau} = (\Gamma_{11}^0\lambda + \Gamma_{12}^0) M_0 + (\Gamma_{11}^1\lambda + \Gamma_{12}^1) M_1 + \Gamma_{11}^2\lambda M_2 + \Gamma_{12}^3 M_3,$$

$$\frac{dM_2}{d\tau} = (\Gamma_{21}^1\lambda + \Gamma_{22}^0) M_0 + \Gamma_{22}^1 M_1 + (\Gamma_{21}^2\lambda + \Gamma_{22}^2) M_2 + \Gamma_{21}^3\lambda M_3, \tag{13}$$

$$\frac{dM_3}{d\tau} = (\Gamma_{31}^0\lambda + \Gamma_{32}^0) M_0 + (\Gamma_{31}^1\lambda + \Gamma_{32}^1) M_1 + (\Gamma_{31}^2\lambda + \Gamma_{32}^2) M_2 + (\Gamma_{31}^3\lambda + \Gamma_{32}^3) M_3.$$

Воспользовавшись (13), находим

$$\frac{d^2M_0}{d\tau^2} = \alpha_0 M_0 + \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3,$$
$$\frac{d^3M_0}{d\tau^2} = \beta_0 M_0 + \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3, \tag{14}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{d}{d\tau}(\Gamma_{01}^0\lambda + \Gamma_{02}^0) + (\Gamma_{01}^0\lambda + \Gamma_{02}^0)^2 + \lambda(\Gamma_{11}^0\lambda + \Gamma_{12}^0) + (\Gamma_{21}^0\lambda + \Gamma_{22}^0),$$
$$\alpha_1 = \frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda(\Gamma_{01}^0\lambda + \Gamma_{02}^0) + \lambda(\Gamma_{11}^1\lambda + \Gamma_{12}^1) + \Gamma_{22}^1,$$
$$\alpha_2 = \Gamma_{01}^0\lambda + \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{11}^2\lambda^2 + (\Gamma_{21}^2\lambda + \Gamma_{22}^2), \tag{15}$$
$$\alpha_3 = (\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3)\lambda;$$

$$\beta_0 = \frac{d\alpha_0}{d\tau} + \alpha_0(\Gamma_{01}^0\lambda + \Gamma_{02}^0) + \alpha_1(\Gamma_{11}^0\lambda + \Gamma_{12}^0) + \alpha_2(\Gamma_{21}^0\lambda + \Gamma_{22}^0) + \alpha_3(\Gamma_{31}^0\lambda + \Gamma_{32}^0),$$
$$\beta_1 = \frac{d\alpha_1}{d\tau} + \alpha_0\lambda + \alpha_1(\Gamma_{11}^1\lambda + \Gamma_{12}^1) + \alpha_2\Gamma_{22}^1 + \alpha_3(\Gamma_{31}^2\lambda + \Gamma_{32}^1), \tag{16}$$
$$\beta_2 = \frac{d\alpha_2}{d\tau} + \alpha_0 + \alpha_1\Gamma_{11}^2\lambda + \alpha_2(\Gamma_{21}^2\lambda + \Gamma_{22}^2) + \alpha_3(\Gamma_{31}^1\lambda + \Gamma_{32}^2),$$
$$\beta_3 = \frac{d\alpha_3}{d\tau} + \alpha_1\Gamma_{12}^3 + \alpha_2\Gamma_{21}^1\lambda + \alpha_3(\Gamma_{31}^3\lambda + \Gamma_{32}^3).$$

Подставим в (14) выражение для $\frac{d\lambda}{d\tau}$ из (11) и тогда α_k и β_k будут представлены в виде многочленов относительно λ

$$\alpha_0 = a_0\lambda^4 + b_0\lambda^3 + c_0\lambda^2 + d_0\lambda + e_0,$$
$$\alpha_1 = b_1\lambda^3 + c_1\lambda^2 + d_1\lambda + e_1,$$
$$\alpha_2 = c_2\lambda^2 + d_2\lambda + e_2, \tag{17}$$
$$\alpha_3 = d_3\lambda;$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= A_0\lambda^6 + B_0\lambda^5 + C_0\lambda^4 + D_0\lambda^3 + E_0\lambda^2 + F_0\lambda + G_0,\\
\beta_1 &= B_1\lambda^5 + C_1\lambda^4 + D_1\lambda^3 + E_1\lambda^2 + F_1\lambda + G_1,\\
\beta_2 &= C_2\lambda^4 + D_2\lambda^3 + E_2\lambda^2 + F_2\lambda + G_2,\\
\beta_3 &= D_3\lambda^3 + E_3\lambda^2 + F_3\lambda + G_3.
\end{aligned} \tag{18}$$

В окрестности точки M_0 для точки M, лежащей на проективно-геодезической линии (λ) имеет место следующее разложение:

$$M = M_0 + \frac{dM_0}{d\tau}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2M_0}{d\tau^2} + \frac{1}{6}\frac{d^3M_0}{d\tau^3} + \dots, \tag{19}$$

откуда, принимая во внимание (13) и (14), находим

$$\begin{aligned}
t &= 1 + (\Gamma^0_{01}\lambda + \Gamma^0_{02})\tau + \frac{1}{2}\alpha_0\tau^2 + \frac{1}{6}\beta_0\tau^3 + \dots,\\
x &= \lambda\tau + \frac{1}{2}\alpha_1\tau^2 + \frac{1}{6}\beta_1\tau^3 + \dots,\\
y &= \tau + \frac{1}{2}\alpha_2\tau^2 + \frac{1}{6}\beta_2\tau^3 + \dots,\\
z &= \frac{1}{2}(\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21})\lambda\tau^2 + \frac{1}{6}\beta_3\tau^3 + \dots,
\end{aligned} \tag{20}$$

Если неоднородные координаты $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ снова обозначить через x, y, z получим

$$\begin{aligned}
x &= \lambda\tau + \frac{1}{2}(b_1\lambda^3 + c_1\lambda^2 + d_1\lambda + e_1)\tau^2 - (\Gamma^0_{01}\lambda + \Gamma^0_{02})\lambda\tau^2 + \dots,\\
y &= \tau + \frac{1}{2}(c_2\lambda^2 + d_2\lambda + e_2)\tau^2 - (\Gamma^0_{01}\lambda + \Gamma^0_{02})\tau^2 + \dots,\\
z &= \frac{1}{2}(\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21})\lambda\tau^2 + \frac{1}{6}(D_3\lambda^3 + E_3\lambda^2 + F_3\lambda + G_3)\tau^3 -\\
&\quad - \frac{1}{2}(\Gamma^0_{01}\lambda + \Gamma^0_{02})(\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21})\lambda\tau^3 + \dots .
\end{aligned} \tag{21}$$

(для координат x и y ограничиваемся членами, содержащими τ^2).

Это и есть параметрические уравнения соприкасающейся поверхности S_2, инвариантно связанной с многообразием V^2_3.

Коэффициенты, содержащиеся в (21), имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
&b_1 = c_2 = \Gamma^2_{11},\quad c_1 = d_2 = \Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{21},\quad d_1 = e_2 = \Gamma^0_{02} + \Gamma^2_{22},\\
&e_1 = 0;\quad D_3 = 2\Gamma^2_{11}(\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21}),\\
&E_3 = (\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21})_1 + (\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21})(\Gamma^0_{01} + 2\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{11}),\\
&F_3 = (\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21})_2 + (\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21})(\Gamma^0_{02} + 2\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{12}),\\
&G_3 = -\Gamma^1_{22}(\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21}).
\end{aligned} \tag{22}$$

8. В окрестности точки M_0 уравнение поверхности в неоднородных координатах x, y, z относительно канонического репера многообразия V_3^2 можно написать в виде ряда

$$z = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} x^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} x^2 y + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} xy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} y^3\right) + \ldots . \quad (23)$$

Подставляя x, y, z из (21) и сравнивая выражения при одинаковых степенях τ, а затем при одинаковых степенях λ, определим частные производные в разложении (23)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right);\\
\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= -\Gamma_{11}^2\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right), \qquad (24)\\
\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{1}{3}\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right)_1 + \frac{1}{3}\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right)\left(\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2\right),\\
\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= \frac{1}{3}\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right)_2 + \frac{1}{3}\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right)\left(\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2\right),\\
\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= -\Gamma_{22}^1\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right).
\end{aligned}$$

Из уравнений структуры (2) находим

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma_{12}^3\right)_1 + \Gamma_{12}^3\left(\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2\right) &= 0,\\
\left(\Gamma_{21}^3\right)_2 + \Gamma_{21}^3\left(\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2\right) &= 0; \qquad (25)
\end{aligned}$$

и формулы (24) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right);\\
\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= -\Gamma_{11}^2\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right), \qquad (26)\\
\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{1}{3}\Gamma_{12}^3\left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3}\right)_1,\\
\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= \frac{1}{3}\Gamma_{21}^3\left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3}\right)_2,\\
\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= -\Gamma_{22}^1\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right).
\end{aligned}$$

(Здесь используется обозначение $d\Gamma = (\Gamma)_1\,\omega_0^1 + (\Gamma)_2\,\omega_0^2 + (\Gamma)_3\,\omega_0^3$).

Уравнение поверхности S_2 (23) приобретает вид

$$\begin{aligned}
z = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right) xy - \frac{1}{6}\Bigg[&\left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right)\Gamma_{11}^2 x^3 - \Gamma_{12}^3\left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3}\right)_1 x^2 y -\\
&- \Gamma_{21}^3\left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3}\right)_2 xy^2 + \left(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^3\right)\Gamma_{22}^1 y^3\Bigg] + \ldots . \qquad (27)
\end{aligned}$$

9. Все проективно-дифференциальные образы поверхности (27) можно рассматривать как проективно-инвариантные образы неголономного многообразия V_3^2.

Например, уравнение пучка поверхностей Дарбу запишется так:

$$\frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}^3+\Gamma_{21}^3\right)xy-z+\frac{1}{6}\Gamma_{12}^3\left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3}\right)_1 xz+$$
$$+\frac{1}{6}\Gamma_{21}^3\left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3}\right)_2 yz+\nu z^2=0. \qquad (28)$$

Можно также построить канонический пучок прямых, направления Дарбу и Сегре и др.

В случае полной интегрируемости уравнения (4), когда выполнено условие $\Gamma_{12}^3=\Gamma_{21}^3$, мы получаем проективно-инвариантные образы для обычной поверхности. Так, например, в этом случае

$$\left(\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3}\right)_1=\left(\frac{\Gamma_{21}^3}{\Gamma_{12}^3}\right)_2=0,$$

и уравнение (28) переходит в уравнение пучка Дарбу для голономной поверхности [1]

$$\frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}^3+\Gamma_{21}^3\right)xy-z+\nu z^2=0. \qquad (29)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Проективно-дифференциальная геометрия. М.—Л., 1937.
2. E. Bompiani. Sulle Varieta anolonome. Rend. dei Lincei, v. XXVII, F, 6, 1938.
3. М. Р. Роговой. К проективно-дифференциальной геометрии неголономных поверхностей в трехмерном пространстве. «Укр. матем. ж.», том. II. № 2, 1950 102—116.

Поступила 12 апреля 1971 г.

О ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ НА КОНФОРМНО-ПЛОСКИЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Д. И. Розенфельд, Е. З. Горбатый

Одесса

Из работ Н. С. Синюкова [1], [2] и Г. И. Кручковича [3] следует, что некоторые конформно-плоские римановы пространства V_n, а именно — субпроективные пространства В. Ф. Кагана основного типа и конформно-плоские L_n^2 [2] с непостоянной скалярной кривизной допускают нетривиальное геодезическое отображение (н. г. о.).

Однако указанные пространства не исчерпывают всего класса конформно-плоских V_n, поэтому возникла задача определения всех конформно-плоских V_n, допускающих н. г. о., и геодезически соответствующих им пространств $\overline{V}_n$.

В работе [4] сообщается об условиях, необходимых для геодезического соответствия некоторого $\overline{V}_n$ конформно-плоскому V_n, и доказано, что два конформно-плоских пространства V_n и $\overline{V}_n (n > > 3)$ могут находиться в нетривиальном геодезическом соответствии только в том случае, если они являются субпроективными пространствами основного типа.

Задачу геодезического отображения конформно-плоских V_n рассматривал также В. И. Ващук [5].

В настоящей работе, являющейся продолжением [4], получены в инвариантной тензорной форме необходимые и достаточные условия, при которых конформно-плоское V_n $(n > 2)$ допускает н. г. о. на некоторое $\overline{V}_n$. Показано, что, если конформно-плоское V_n допускает н. г. о. на некоторое $\overline{V}_n$, то либо V_n и $\overline{V}_n$—субпроективные пространства основного типа, либо V_n есть несимметрическое конформно-плоское L_n^2, а $\overline{V}_n$—некоторая гиперповерхность пространства постоянной кривизны. При этом $\overline{V}_n$ является пространством первого класса только тогда, если конформно-плоское L_n^2 и $\overline{V}_n$ могут быть получены с помощью Г-преобразования [2] из пространств постоянной кривизны. Наконец, найдена метрика конформно-плоских L_n^2 в специальной системе координат и выделены среди них субпроективные пространства. Из [4] и полученных здесь результатов вытекает, что конформно-плоские V_n составляют незамкнутый относительно геодезических отображений класс римановых пространств.

Как и в [4], рассмотрение ведётся без ограничений на сигнатуру пространств.

§ 1. Необходимые и достаточные условия для конформно-плоских V_n, допускающих н. г. о. на некоторые $\overline{V}_n$

Если конформно-плоское V_n $(n > 2)$ с метрическим тензором g_{ij} допускает н. г. о., определяемое градиентом ψ_{ij}, на некоторое риманово пространство $\overline{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$, то, как показано в [4], в общих по отображению координатах имеют место соотношения

$$\frac{1}{n-2}\bar{g}_{i\alpha}R^{\alpha}_{j} = \frac{r}{n} A_{ij} + \frac{s}{n}\bar{g}_{ij} + \frac{t}{n(n-2)} g_{ij}; \tag{1}$$

$$A_{ij} + \frac{s}{n} g_{ij} = \lambda\left(\bar{g}_{ij} - \frac{r}{n} g_{ij}\right), \tag{2}$$

где R_{ij} — тензор Риччи V_n; $\lambda = \lambda(x^1, \ldots, x^n)$; $R_i^k = R_{i\alpha} g^{\alpha k}$;

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2} R_{ij} - \frac{R g_{ij}}{(n-1)(n-2)} + \psi_{ij}; \quad \psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j; \tag{3}$$

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}; \quad r = \bar{g}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}; \quad s = -A_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}; \quad t = \bar{g}_{\alpha\beta} R_\gamma^\beta g^{\alpha\gamma}.$$

Запятая в $\psi_{i,j}$ (и в дальнейшем в аналогичных случаях) — знак ковариантной производной в V_n.

Заменим в (1) A_{ij} на основании (2), затем полученное равенство умножим на $\bar{g}^{kl}$ и просуммируем по i, после чего опустим индекс k с помощью тензора g_{ij}. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{n-2} R_{ij} = \sigma g_{ij} + \mu \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \tag{4}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{n}(\lambda r + s); \quad \mu = \frac{t}{n(n-2)} - \frac{1}{n^2} r(\lambda r + s).$$

Поднятие индексов i, j в (4) с помощью g^{ij} приводит к соотношению

$$\frac{1}{n-2} R^{ij} = \sigma g^{ij} + \mu \bar{g}^{ij}, \tag{4'}$$

из которого ясно, что при н. г. о. $\mu = 0$ в том и только в том случае, если $R_{ij} = \frac{1}{n} R g_{ij}$, т. е. конформно-плоское V_n эйнштейново и, следовательно, является пространством постоянной кривизны. Поэтому в дальнейшем будем предполагать $\mu \neq 0$.

Ковариантное дифференцирование относительно g_{ij} соотношений (4), использование тождества $\bar{g}_{i\alpha} \bar{g}^{\alpha j} = \delta_i^j$ и уравнений геодезического отображения

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_j \bar{g}_{ik} + \psi_i \bar{g}_{ik} \tag{5}$$

приводим к следующим уравнениям:

$$R_{ij,k} = u_k R_{ij} + v_k g_{ij} + w_j g_{ik} + w_i g_{jk}, \tag{6}$$

где

$$u_k = \frac{\mu_k}{\mu} - 2\psi_k; \; v_k = (n-2)(\sigma_k - \sigma u_k); \; w_k = -(n-2)\mu \varphi_\alpha \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\beta k} \neq 0; \tag{6'}$$

$$\mu_k = \frac{\partial \mu}{\partial x^k}; \quad \sigma_k = \frac{\partial \sigma}{\partial x^k}.$$

Из (6) следует

$$w_k = \frac{1}{2}(R_k - R u_k - n v_k); \quad R_k = \frac{\partial R}{\partial x^k}.$$

Очевидно, u_k — градиентный вектор, а так как

$$e^{-u} v_k = (n-2) e^{-u} (\sigma_k - \sigma u_k) = (n-2)(e^{-u}\sigma)_{,k},$$

то $e^{-u} v_k$ — тоже градиент.

Таким образом, если конформно-плоское V_n непостоянной кривизны допускает н. г. о. на некоторое $\overline{V}_n$, то в V_n существует решение системы уравнений (6) относительно градиентных векторов u_k, $e^{-u}v_k$.

Покажем, что верно и обратное. Умножим (6) на e^{-u} и обозначим

$$\tilde{v}_k = e^{-u}v_k; \quad \tilde{w}_k = e^{-u}w_k; \quad r_{ij} = e^{-u}R_{ij}.$$

Тогда (6) принимает вид

$$r_{ij,\,k} = \tilde{v}_k g_{ij} + \tilde{w}_j g_{ik} + \tilde{w}_i g_{jk}.$$

Если далее обозначим

$$\overset{\vee}{g}_{ij} = r_{ij} - \tilde{v} g_{ij} + c g_{ij},$$

где $\tilde{v}$ — функция, градиент которой v_k; $c = \text{const} \neq 0$, то будем иметь

$$\overset{\vee}{g}_{ij,\,k} = \tilde{w}_j g_{ik} + \tilde{w}_i g_{jk}, \tag{7}$$

причем $\tilde{w}_i \neq 0$ — градиентный вектор. А существование решений $\overset{\vee}{g}_{ij} \left(= \overset{\vee}{g}_{ji}\right)$ системы уравнений (7) есть необходимое и достаточное условие того, что V_n допускает н. г. о. (Н. С. Синюков [2], [6]). Тем самым получена

Теорема 1. *Для того чтобы конформно-плоское V_n $(n > 2)$ непостоянной кривизны допускало н. г. о. на некоторое $\overline{V}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в V_n существовало решение системы уравнений (6) относительно градиентных векторов u_k, $e^{-u}V_k$.*

Обратим внимание на два обстоятельства в доказательстве теоремы 1.

Конформно-плоские V_n $(n > 2)$ характеризуются условиями [7]

$$R_{hijk} = \frac{1}{n-2}\left(g_{hk}R_{ij} - g_{hj}R_{ik} + g_{ij}R_{hk} - g_{ik}R_{hj}\right) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}\right), \tag{8}$$

$$R_{ij,\,k} - R_{ik,\,j} = \frac{1}{2(n-1)}\left(R_k g_{ij} - R_j g_{ik}\right), \tag{9}$$

где $R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ — скалярная кривизна, $R_k = \dfrac{\partial R}{\partial x^k}$.

При доказательстве необходимости в теореме 1 было использовано только условие (8). Этим условием характеризуются также все трехмерные римановы пространства V_3. Поэтому теорема 1 применима и к ним.

Как известно, классификация геодезически соответствующих V_3 с произвольными метриками и их канонические формы были даны в работе А. З. Петрова [8]. Полученная здесь теорема 1 устанавливает инвариантный тензорный (не носящий, однако, внутреннего характера) признак этих V_3.

Пространства, определяемые уравнениями несколько более общего вида, чем (6), исследовал В. С. Собчук [12] в предположении, что их метрика положительно определенная. При доказательстве теоремы 1, как и во всей нашей работе, мы ведем рассмотрения для пространств с метрикой произвольной сигнатуры.

§ 2. О конформно-плоских пространствах V_n, допускающих н. г. о. и геодезически соответствующих им пространствах $\overline{V}_n$

Теорема 2. *Если конформно-плоское V_n $(n > 2)$ допускает н. г. о. на некоторое $\overline{V}_n$, то либо V_n и $\overline{V}_n$ — субпроективные пространства основного типа, либо V_n есть конформно-плоское L_n^2 с непостоянной скалярной кривизной, а $\overline{V}_n$ — некоторая гиперповерхность пространства постоянной кривизны.*

Доказательство. По теореме 1 для конформно-плоского V_n, допускающего н. г. о., система уравнений (6), (6′) совместна.

Пусть сначала в (6) $u_k \neq 0$. На основании (3) представим (2) в следующей форме:

$$\psi_{i,j} = \psi_i\psi_j + \left[\frac{R}{(n-1)(n-2)} - \frac{\lambda r + s}{n}\right] g_{ij} - \frac{R_{ij}}{n-2} + \lambda \overline{g}_{ij}. \qquad (10)$$

Вследствие (5), (8) и (9) условия интегрируемости системы (10) имеют вид

$$\lambda_k \overline{g}_{ij} - \lambda_j \overline{g}_{ik} = \Phi_k g_{ij} - \Phi_j g_{ik}, \qquad (11)$$

где

$$\lambda_k = \frac{\partial\lambda}{\partial x^k}; \quad \Phi_k = \frac{1}{n-2}\psi_\alpha R_k^\alpha - \frac{\lambda r + s}{n}\psi_k + \frac{(\lambda r + s)_{,k}}{n} - \frac{R_k}{2(n-1)(n-2)}. \qquad (11)$$

Так как условие $u_k \neq 0$ равносильно условию $\lambda_k \neq 0$ [4], то из (11) следует

$$\overline{g}_{ij} = a g_{ij} + b\lambda_i\lambda_j,$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$ — инварианты.

Применяя полученные в [4] результаты, заключаем, что V_n и $\overline{V}_n$ — субпроективные пространства основного случая.

Пусть теперь $u_k = 0$. Тогда из (6), (6′) имеем

$$R_{ij,k} = N_1 R_k g_{ij} + N_2 R_j g_{ik} + N_2 R_i g_{ik}, \qquad (12)$$

где

$$R_k \neq 0; \quad N_1 = \frac{(n-2)}{(n-1)(n+2)}; \quad N_2 = \frac{n}{2(n-1)(n+2)}. \qquad (12')$$

Римановы пространства с тензорной характеристикой (12) появились в [2], где обозначены L_n^2 и доказано, что при условии $R_k \neq \neq 0$ каждое L_n^2 допускает н. г. о.

Поскольку $u_k = \lambda_k = 0$, то в рассматриваемом случае соотношение (9) из [4] записывается так

$$\overline{R}_{hijk} = C_1 (\overline{g}_{hk}\overline{g}_{ij} - \overline{g}_{hj}\overline{g}_{ik}) + C_2 e^{2\psi} (g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}), \tag{13}$$

где C_1, $C_2 \neq 0$ — постоянные.

Если обозначить $\omega_{ij} = \sqrt{|C_2|}\, e^{\psi} g_{ij}$ и принять во внимание уравнения геодезического отображения

$$g_{ij|k} = -(2\psi_k g_{ij} + \psi_j g_{ik} + \psi_i g_{jk}),$$

где | — знак ковариантной производной в $\overline{V}_n$, то получим

$$\omega_{ij|k} = \omega_{ik|j}. \tag{14}$$

Условия (13) и (14) необходимы и достаточны для того, чтобы $\overline{V}_n$ было гиперповерхностью пространства постоянной кривизны C_1 [7].

При условии $u_k = 0$ из (6′) и (12′)

$$\mu = C_2 e^{2\psi}; \quad \sigma = \frac{1}{n-2} N_1 R + c$$

и (4′) принимает вид

$$C_2 e^{2\psi} \overline{g}^{ij} = R^{ij} - (N_1 R + c)\, g^{ij}. \tag{4″}$$

В [2] получены достаточные условия, при которых некоторое $\overline{V}_n$ допускает н. г. о. на произвольное L_n^2, если $R_k \neq 0$. Для случая конформно-плоского L_n^2 соотношение (4″) устанавливает связь между метриками L_n^2 и гиперповерхностью $\overline{V}_n$ пространства постоянной кривизны и показывает, что указанные условия являются также и необходимыми. Теорема доказана.

Основываясь на понятиях и результатах статьи Н. С. Синюкова [2], докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы конформно-плоское L_n^2 допускало н. г. о. на некоторое $\overline{V}_n$ первого класса, необходимо и достаточно, чтобы эти пространства могли быть получены с помощью* Г-*преобразования из пространств постоянной кривизны.*

Доказательство. *Необходимость.* Если конформно-плоскому L_n^2 ($R_k \neq 0$) геодезически соответствует некоторое $\overline{V}_n$ первого класса, то по теореме 2 имеет место (13), где $C_1 = 0$ и в (10) $\lambda = C_1 = 0$ (см. соотношение (9) в [4]), т. е. (10) запишется в виде

$$R_{ij} + (n-2)\psi_{ij} + f_1 g_{ij} = 0, \tag{15}$$

где

$$f_1 = -(n-2)\left[\frac{R}{(n-1)(n-2)} - \frac{\lambda r + S}{n}\right].$$

Так как ранг тензора ω_{ij} максимальный ($n > 2$), то ω_{ij} определяется из (13) с точностью до знака (см. [7], стр. 241).

Применяя Г-преобразование к конформно-плоскому L_n^2, g_{ij} и $\overline{V}_n$ первого класса, получаем конформно-плоское пространство $\hat{V}_n$, $\hat{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}$.

Вследствие конформности $\hat{V}_n$ и L_n^2 имеем [7], используя (15),

$$\hat{R}_{ij} = f_2 \hat{g}_{ij},$$

$$f_2 = (\Delta_2\psi + (n-2)\Delta_1\psi)\, e^{-2\psi} - f_1; \quad \Delta_2\psi = g^{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}; \quad \Delta_1\psi = g^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta,$$

откуда следует, что $\overset{\vee}{V}_n$ и $\hat{V}_n$ — пространства постоянной кривизны.

Учитывая инволютивный характер Г-преобразования, заключаем, что применение его к $\overset{\vee}{V}_n$ и $\hat{V}_n$ постоянной кривизны приведет к конформно-плоскому L_n^2 и $\overline{V}_n$ первого класса.

Достаточность. Применим Г-преобразование к пространствам V_n и $\overline{V}_n$ постоянной кривизны. Тогда по определению получим $\hat{V}_n$, которое есть L_n^1, и $\hat{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}$. Поэтому

$$\hat{R}_{ij} = (n-2)\overset{\wedge}{\psi}_{ij} + f_3 \hat{g}_{ij}; \quad f_3 = e^{-2\psi}\left(\frac{R}{n} + \Delta_2\psi + (n-2)\Delta_1\psi\right),$$

где $\overset{\wedge}{\psi}_{ij} = \psi_{i\wedge j} + \psi_i\psi_j$, $\wedge$ — знак ковариантной производной в $\hat{V}_n$. Если далее поменяем местами $\hat{V}_n$ и $\overset{\vee}{V}_n$, а также обозначения, то найдем

$$R_{ij} + (n-2)\psi_{ij} - f_3 g_{ij} = 0.$$

Сравнение этого соотношения с (10) показывает, что при н. г. о. $\lambda = C_1 = 0$ и, следовательно, как легко усмотреть из (13) и (14), $\overline{V}_n$ — пространство первого класса.

§ 3. Метрика конформно-плоских L_n^2

Как известно [7], метрика конформно-плоского V_n может быть приведена к виду

$$g_{ij} = e^{2\varphi} \dot{g}_{ij}, \tag{16}$$

где $\dot{g}_{ij}$ — метрический тензор плоского V_n; $\varphi = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$, и имеют место соотношения

$$\Gamma_{ij}^k = \dot{\Gamma}_{ij}^k + \delta_i^k\varphi_j + \delta_j^k\varphi_i - \varphi^k \dot{g}_{ij}, \tag{17}$$

$$R_{ij} = (n-2)\dot{\varphi}_{ij} + f\dot{g}_{ij}, \tag{18}$$

где $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$; ${}^{\circ}$ — знак ковариантной производной в $\dot{V}_n$;

$$\dot{\varphi}_{ij} = \varphi_{i0j} - \varphi_i \varphi_j; \quad f = \Delta_2 \dot{\varphi} + (n-2)\, \Delta_1 \dot{\varphi};$$

$$\Delta_2 \dot{\varphi} = \dot{g}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha 0 \beta}; \quad \Delta_1 \dot{\varphi} = \dot{g}^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta; \quad \varphi^k = \varphi_\alpha \dot{g}^{\alpha k}.$$

Для нахождения метрики конформно-плоских L_n^2 воспользуемся (12), (17), (18) и тождеством

$$(e^{-2\varphi})_{0ijk} = 2e^{-2\varphi} (-\varphi_{0ijk} + 2\varphi_{i0k}\varphi_j + 2\varphi_{j0k}\varphi_i + 2\varphi_{i0j}\varphi_k - 4\varphi_i\varphi_j\varphi_k)$$

и обозначим $F = e^{-2\varphi}$, тогда

$$F_{0ijk} = l_k \dot{g}_{ij} + m_j \dot{g}_{ik} + m_i \dot{g}_{jk}, \tag{19}$$

где

$$l_k = -\frac{2F}{n-2} (N_2 R_k + 2f\varphi_k - f_k);$$

$$m_k = -\frac{2F}{n-2} (N_2 R_k + f\varphi_k - \varphi^\alpha R_{\alpha k}); \quad f_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Нетрудно установить, что $l_k = m_k$ — градиент, и поэтому (19) можно представить в виде

$$F_{0ijk} = l_k \dot{g}_{ij} + l_j \dot{g}_{ik} + l_i \dot{g}_{jk}. \tag{20}$$

Очевидно, система уравнений (20) совпадает с системой (22) статьи П. А. Широкова «Симметрические конформно-евклидовы пространства» [10], в которой получено общее решение системы уравнений в аффинной (в частности, ортонормированной) системе координат. Это решение в ортонормированной системе координат можно привести к виду

$$F = a\, (a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta)^2 + b_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + b_\alpha x^\alpha + d, \tag{21}$$

где a, a_{ij}, b_{ij}, b_i, d — постоянные, $a_{ij} = 0\ (i \neq j)$, $a_{ii} = l_i = \pm 1$.

Вследствие (17), (18) конформно-плоское V_n (16), для которого имеет место (20) или (21), есть в то же время пространство L_n^2, т. к. в нем выполняются (12).

П. А. Широков выделил из (16), (21) симметрические конформно-плоские пространства. Из (8), (12) и определения симметрических пространств ясно, что конформно-плоское L_n^2 является симметрическим в том и только в том случае, если $R_k = 0$. Поскольку симметрические V_n непостоянной кривизны не допускают н. г. о. [11], то рассматриваем только несимметрические конформно-плоские L_n^2.

Выделим теперь среди несимметрических конформно-плоских L_n^2 субпроективные пространства основного типа.

Как показал П. А. Широков [10], не нарушая общности, можно считать $a \neq 0$ в (21). Кроме того из [9] следует, что для субпроективных V_n основного типа $\Delta_2\dot{\varphi}$ необходимо является функцией от φ. Но тогда $\Delta_2\mathring{F}$ — функция от F. Далее обозначим $X = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ и вычислим $\Delta_2\dot{F}$ из (21)

$$F_i = 4aXe_ix^i + 2b_{i\alpha}x^\alpha + b_i,$$
$$F_{ii} = 8ax^{i^2} + 4ae_iX + 2b_{ii}$$

(здесь по i суммирования нет),

$$\Delta_2\mathring{F} = \sum_{i=1}^{n} e_iF_{ij} = 8aX + 4naX + 2\sum_{i=1} e_ib_{ii} = AX + B,$$

где

$$A = 4(n+2)a; \quad B = 2\sum_{i=1}^{n} e_ib_{ii}.$$

Таким образом, $F = F(X)$, или согласно (21)

$$F = A_1X^2 + A_2X + A_3,$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные.

Из [9] следует также, что найденный вид F является достаточным для того, чтобы несимметрическое конформно-плоское L_n^2 было субпроективным V_n основного типа. Значит, все прочие несимметрические конформно-плоские L_n^2 не являются субпроективными. Этим L_n^2 будут геодезически соответствовать пространства $\bar{V}_n$, отличные от субпроективных, и, следовательно [4], не конформно-плоские. Тем самым доказана

Теорема 4. *Конформно-плоские V_n $(n > 2)$ составляют незамкнутый относительно геодезических отображений класс римановых пространств.*

В заключение, пользуясь возможностью, выражаем искреннюю благодарность Н. С. Синюкову за постоянное внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Синюков. Эквидистантные римановы пространства. Научный ежегодник Одесск. ун-та, 1957, 133—135.

2. Н. С. Синюков. Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими. ДАН СССР, т. 137, № 6, 1961, 1312—1314.

3. Г. И. Кручкович. Геодезическое соответствие полуприводимых римановых пространств. ДАН СССР, т. 152, № 1, 1963, 43—45.

4. Д. И. Розенфельд. Геодезическое соответствие конформно-плоских римановых пространств. «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6. Изд-во Харьковск. ун-та, 1968, 139—146.

5. В. И. Ващук. О римановых пространствах, которые проективны и конформны друг другу. 3-я межвузовская научная конференция по проблемам геометрии. Тезисы докладов. Изд-во Казанск. ун-та, 1967, 31—32.
6. Н. С. Синюков. К теории геодезического отображения римановых пространств. ДАН СССР, т. 169, № 4, 1966, 770—772.
7. Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ., М., 1948.
8. А. З. Петров. О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики. Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 109, кн. 4, 1949, 7—36.
9. Г. И. Кручкович. О пространствах В. Ф. Кагана. Приложение к книге В. Ф. Кагана «Субпроективные пространства». Физматгиз, М., 1961, 163—198.
10. П. А. Широков. Избранные работы по геометрии. Изд-во Казанск. ун-та, 1966, 366—382.
11. Н. С. Синюков. О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства. ДАН СССР т. 98, № 1, 1954, 21—23.
12. В. С. Собчук. О римановых пространствах, допускающих обобщенно рекуррентный симметрический тензор второго порядка. ДАН СССР, т. 185, № 6, 1969, 1247—1250.

Поступила 22 января 1971 г.

ОБ УСЛОВИЯХ ГАУССА — КОДАЦЦИ ДЛЯ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА

Ю. С. Слободян

Харьков

В настоящей заметке получены условия Гаусса — Кодацци для вполне геодезических гиперповерхностей n-мерного финслерова пространства.

Для поверхности риманова пространства существует единственная вторая квадратичная форма.

Условия Гаусса — Кодацци для вполне геодезических поверхностей риманова пространства имеют очень простой вид, так как коэффициенты второй основной формы для них тождественно обращаются в нуль.

В финслеровых же пространствах невозможно построить связность, а следовательно, тензор кривизны, вторую форму, которая обладала бы такими же свойствами, как и объект связности, тензор Римана, вторая форма в римановых пространствах. Существуют самые разнообразные представления о геометрических объектах в геометрии Финслера. Свойства связности, кривизны риманова пространства оказываются разделенными между многими связностями, кривизнами геометрии Финслера.

1. Уравнения Гаусса — Кодацци для гиперповерхности n-мерного финслерова пространства F_n в связности Бервальда выведены в работе [5].

Пусть пространство F_n отнесено к координатам x^i, $(n-1)$-мерная поверхность — к координатам u^α, метрический тензор пространства обозначим g_{ij}, поверхности — $g_{\alpha\beta}$. Метрические тензоры пространства и поверхности связаны следующим образом:

$$g_{\alpha\beta}=g_{ij}B^{ij}_{\alpha\beta},\quad i,\ j,\ \ldots=1,\ \ldots,\ n\quad \alpha,\ \beta,\ \ldots=1,\ \ldots,\ n-1,$$

где

$$B^{ij}_{\alpha\beta}=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}.$$

Пусть нормаль к поверхности n^i удовлетворяет соотношениям

$$g_{ij}(x,\ x)\,n^in^j=1,$$

$$B^j_\alpha n_j=B^\alpha_j n^j=0,$$

$$g_{ij}n^j=n_i.$$

Тензоры

$$C_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\quad \text{и}\quad C_{ijk}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

связаны следующим образом [1, гл. V]:

$$C_{\alpha\beta\gamma}=C_{ijk}B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Умножив на $g^{\alpha\delta}$, получим

$$C^\delta_{\beta\gamma}=g^{\alpha\delta}C_{ijk}B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma},$$

но [1, гл. V]

$$g^{\alpha\delta}B^i_\alpha=g^{il}B^\delta_l.$$

и, таким образом, имеем

$$C^\delta_{\beta\gamma}=C^l_{jk}B^{jk}_{\alpha\beta}B^\delta_l.$$

Продифференцируем ковариантно левую и правую часть этого равенства относительно связности Картана, составленной для метрики поверхности

$$C^\delta_{\beta\gamma|\sigma}=\left(C^l_{jk}B^{jk}_{\alpha\beta}B^\delta_l\right)_{|\sigma}.$$

Умножим это тождество на u^σ

$$C^\delta_{\beta\gamma|\sigma}u^\sigma=\left(C^l_{jk|\sigma}B^{jk}_{\alpha\beta}B^\delta_l+C^l_{jk}B^j_{\alpha\sigma}B^k_\beta B^\delta_l+\right.$$

$$\left.+C^l_{jk}B^j_\alpha B^k_{\beta\sigma}B^\delta_l+C^l_{jk}B^{jk}_{\alpha\beta}B^\delta_{l|\sigma}\right)u^\sigma.$$

Для вполне геодезических поверхностей имеет место тождество [2]

$$B^i_{\alpha|\beta}u^\alpha=B^i_{\alpha\beta}u^\alpha=0,$$

поэтому можно записать

$$C^\delta_{\beta\gamma|\sigma}u^\delta=C^l_{jk|r}x^rB^{jk}_{\alpha\beta}B^\delta_l+C^l_{jk}B^{jk}_{\alpha\beta}B^\delta_{l|\sigma}u^\sigma.$$

Докажем, что последний член этого равенства равен нулю. Действительно

$$B^{\delta}_{l|\sigma}u^{\sigma} = (g^{\delta\mu}B^{l}_{\mu}g_{il})_{|\sigma}u^{\sigma},$$

или

$$B^{\delta}_{l|\sigma}u^{\sigma} = g^{\delta\mu}_{|\sigma}u^{\sigma}B^{l}_{\mu} + g^{\sigma\mu}B^{l}_{\mu}g_{il\,\sigma}u^{\sigma}. \tag{*}$$

Учитывая

$$g_{il|\sigma} = C_{ilk|m}x^{m}B^{k}_{\sigma}u^{\sigma},$$

а также однородность тензора C_{ilk}, легко видеть, что второй член равенства (*) равен нулю. В силу того, что $g_{\delta\mu|\sigma} = 0$, в нуль обращается и первый член правой части равенства (*).

Таким образом, мы доказали тождество

$$C^{\delta}_{\beta\gamma|\sigma}u^{\sigma} = C^{l}_{jk|r}x^{r}B^{jk}_{\alpha\beta}B^{\delta}_{l}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы гиперповерхность n-мерного финслерова пространства была вполне геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ковариантная производная вектора, касательного к поверхности в связности Бервальда, обращалась в нуль.*

Доказательство. Известно, что каварианткая производная вектора B^{i}_{α} в связности Бервальда имеет для вполне геодезических поверхностей следующий вид [5]:

$$B^{l}_{\alpha(\beta)} = n^{l}\Omega_{\alpha\beta} - B^{l}_{\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\alpha\beta|\sigma}u^{\sigma} + C^{l}_{jk|r}x^{r}B^{jk}_{\alpha\beta}. \tag{**}$$

Для того чтобы поверхность была вполне геодезической, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты второй основной формы $\Omega_{\alpha\beta}$ удовлетворяли системе

$$\Omega_{\alpha\beta} = -n_{l}C^{l}_{jk|l}x^{l}B^{jk}_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Подставляя их в соотношение (**), получим

$$B^{l}_{\alpha|\beta} = n^{l}n_{j}C^{j}_{kl|r}x^{r}B^{kl}_{\alpha\beta} - B^{l}_{\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\alpha\beta|\sigma}u^{\sigma} + C^{l}_{jk|r}x^{r}B^{jk}_{\alpha\beta}.$$

Используя доказанное выше тождество,

$$C^{\varepsilon}_{\alpha\beta|\sigma}u^{\sigma} = C^{l}_{jk|r}x^{r}B^{jk}_{\alpha\beta}B^{\varepsilon}_{l},$$

а также

$$B^{\varepsilon}_{i}B^{l}_{\varepsilon} = \delta^{l}_{i} - n^{l}n_{i},$$

получим

$$B^{l}_{\alpha(\beta)} = n^{l}n_{j}C^{j}_{kl|r}x^{r}B^{kl}_{\alpha\beta} - (\delta^{l}_{l} - n^{l}n_{l})\,C^{l}_{jk|r}x^{r}B^{jk}_{\alpha\beta} + C^{l}_{jk|r}B^{jk}_{\alpha\beta},$$

или

$$B^{l}_{\alpha(\beta)} = 0.$$

Обратно, пусть

$$B^{l}_{\alpha(\beta)} = 0. \tag{2}$$

Тогда, используя (*), (**), получим

$$0 = n^l \Omega_{\alpha\beta} + n^l n_l C^l_{jk|r} x^r B^{jk}_{\alpha\beta}.$$

Умножая это соотношение на n_l, суммируя, получим, что вторая форма имеет вид (1).

Теорема, таким образом, доказана.

Найдем вид условий Гаусса — Кодацци для вполне геодезических гиперповерхностей в связности Бервальда. Сначала найдем вид условий Гаусса.

Известно [5], что

$$B^l_{\alpha(\beta)(\gamma)} - B^l_{\alpha(\gamma)(\beta)} = - B^l_\varepsilon H^\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} H^l_{hkj} +$$
$$+ \frac{\partial G^l_{hk}}{\partial x^l} B^h_\alpha \left(B^k_\beta B^l_{\varepsilon\gamma} - B^k_\gamma B^l_{\varepsilon(\beta)} \right) u^\varepsilon.$$

Учитывая условие (2), получим

$$B^l_\varepsilon H^\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} H^l_{hkj},$$

или, умножая обе части равенства на B^δ_i,

$$H^\delta_{\alpha\beta\gamma} = B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} B^\delta_i g^{il} H_{lhkj},$$

т. е.

$$H_{\delta\alpha\beta\gamma} = H_{lhkj} B^{lhkj}_{\delta\alpha\beta\gamma}. \qquad (3)$$

Из этого равенства следует

Теорема 2. *Кривизна пространства для тензора кривизны Бервальда в некоторой точке M по площадке, касательной к вполне геодезической поверхности F, совпадает с кривизной поверхности F в этой точке.*

Как показано в работе [5], кривизна пространства для тензора кривизны Бервальда совпадает с кривизной пространства для тензора кривизны Рунда, построенного относительно внутренней связности.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Кривизна пространства в точке M относительно внутренней связности Рунда совпадает с соответствующей кривизной вполне геодезической гиперповерхности.*

Найдем вид условий Кодацци для вполне геодезических гиперповерхностей.

Для этого найдем ковариантную производную в связности Бервальда от вектора n^l вдоль вполне геодезической поверхности.

Известно, что

$$n^l_{(\gamma)} = - \Omega_{\alpha\gamma} g^{\alpha\varepsilon} B^l_\varepsilon + n^h C^l_{hk|r} x^r B^k_\gamma.$$

Подставляя значение Ω, получим

$$n^l_{(\gamma)} = n_r C^r_{jk|l} x^l B^i_\varepsilon g^{\alpha\varepsilon} + h^h C^l_{hk|r} x^r B^k_\gamma,$$

или

$$n^l_{(\gamma)} = 2n^r C^l_{rk|l} x^l B^k_\gamma - n^r C_{rjk|l} x^l n^j n_p g^{lp} B^k_\gamma.$$

Откуда

$$n_l n^l_{(\gamma)} = n^r n_l C^l_{rk|l} x^l B^k_\gamma.$$

Нам понадобится также вид ковариантной производной второй квадратичной формы.

Так как $B^l_{\alpha(\beta)} = 0$, то $B^l_{\alpha(\beta)(\gamma)} = 0$, и тогда

$$-n^l \Omega_{\alpha\beta(\gamma)} + B^l_\varepsilon C^\varepsilon_{\alpha\beta|\sigma(\gamma)} u^\sigma = n^l_{(\gamma)} \Omega_{\alpha\beta} + C^l_{hk|r(\gamma)} x^r B^{hjk}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Умножая это тождество на n_l, получим

$$-\Omega_{\alpha\beta(\gamma)} = n^r n_i C^l_{rk|l} x_l B^k_\gamma n_j C^j_{ps|t} x^t B^{ps}_{\alpha\beta} +$$

$$+ n_l C^l_{hk|r(j)} x^r B^{hjk}_{\alpha\gamma\beta}.$$

С другой стороны.

$$\Omega_{\alpha\beta(\gamma)} = n_{l(\gamma)} C^l_{jk|l} x^l B^{jk}_{\alpha\beta} + n_l C^l_{hk|r} x^r_{(j)} B^{hjk}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Для произвольных поверхностей условия Кодацци имеют вид [5]

$$2\Omega_{\alpha[\beta\gamma]} = n_l B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} H^l_{hkj} - 2n_l Q^l_{\alpha[\beta\gamma]},$$

здесь

$$Q^l_{\alpha\beta\gamma} = n^l_{(\gamma)} \Omega_{\alpha\beta} + n^r B^{khj}_{\beta\alpha\gamma} C^l_{hk|r(j)} + \ldots,$$

где пропущены некоторые члены, обращающиеся в нуль в случае вполне геодезических поверхностей. Подставляя в эти условия найденные выше формулы, нетрудно убедиться, что

$$0 = n_l B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} H^l_{hkj}. \tag{4}$$

Таким образом, для связности Бервальда условия Гаусса — Кодацци имеют тот же вид, что и в римановой геометрии. Иначе обстоит дело в случае связности Картана. Действительно, подставляя найденное значение второй формы в условия Гаусса для произвольной поверхности для связности Картана [5] получим

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = K_{ijhk} B^{ijhk}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + n_i n_j C^i_{kl|s} x^s C^j_{pr|t} x^t B^{kplr}_{\alpha\beta[\gamma\varepsilon]}. \tag{5}$$

Эту же формулу можно получить и непосредственно, использовав связь между тензорами кривизны Бервальда и Картана [1, гл. IV].

Аналогично выводятся условия Кодацци

$$B^{jkh}_{\alpha\beta\gamma} n^i \left(K_{ijkh} + C_{imk|r} C^m_{jh|s} x^r x^s - \right. \tag{6}$$

$$\left. - C_{imh|r} C^m_{jk|s} x^r x^s + C_{ijk|r|h} x^r - A_{ijh|r|k} x^r\right) = 0.$$

Известно, что [5] для вполне геодезических гиперповерхностей

$$n^l_{|\gamma} = -\Omega_{\alpha\gamma} g^{\alpha\varepsilon} B^l_\varepsilon.$$

Откуда

$$n^{i}_{|\gamma} B^{\varepsilon}_{i} = -\Omega_{\alpha\gamma} g^{\alpha\varepsilon}$$

или

$$\Omega_{\alpha\gamma} = -g_{\alpha\varepsilon} B^{\varepsilon}_{i} n^{i}_{|\gamma}.$$

Окончательно имеем

$$\Omega_{\alpha\gamma} = -g_{ij} n^{i}_{|k} B^{kj}_{\gamma\alpha}.$$

Продифференцируем это тождество ковариантно относительно второй связности Картана [4], получим

$$\Omega_{\alpha\gamma;\,\beta} = -g_{ij} n^{i}_{|k;\,p} B^{pkj}_{\beta\gamma\alpha} - g_{ij} n^{i}_{k} B^{k}_{\gamma;\,\beta} B^{j}_{\alpha} - g_{ij} n^{i}_{|k} B^{k}_{\gamma} B^{j}_{\alpha;\,\beta}.$$

Аналогично [4] вторую форму поверхности для второй связности Картана можно записать в виде

$$\omega_{\alpha\beta} = -g_{ij} n^{i}_{;\,p} B^{pj}_{\beta\alpha}.$$

Продифференцировав это равенство ковариантно относительно первой связности Картана, получим

$$\omega_{\alpha\beta|\gamma} = -g_{ij} n^{i}_{;\,p|k} B^{pkj}_{\beta\gamma\alpha} - g_{ij} n^{i}_{;\,p} B^{p}_{\beta|\gamma} B^{j}_{\alpha} - g_{ij} n^{i}_{;\,p} B^{p}_{\beta} B^{j}_{\alpha|\gamma}.$$

Вычислим разность

$$\Omega_{\alpha\gamma;\,\beta} - \omega_{\alpha\beta|\gamma} = g_{ij}\left(n^{i}_{|k;\,p} - n^{i}_{;\,p|k}\right) B^{pkj}_{\beta\gamma\alpha} -$$

$$- g_{ij}\left(-n^{i}_{;\,p} B^{p}_{\beta|\gamma} + n^{i}_{|k} B^{k}_{\gamma;\,\beta}\right) B^{j}_{\alpha}) - g_{ij}\left(n^{i}_{|\gamma} B^{j}_{\alpha;\beta} - n^{i}_{;\beta} B^{j}_{\alpha|\gamma}\right).$$

С учетом выражений для

$$n^{i}_{|\gamma},\quad n^{i}_{;\,\beta},\quad B^{j}_{\alpha;\,\beta},\quad B^{j}_{\alpha|\beta}$$

последняя строчка обращается в нуль.

Учитывая формулу (1.28) [1], первую строчку правой части равенства можно преобразовать так

$$\Omega_{\alpha\gamma;\,\beta} - \omega_{\alpha\beta|\gamma} = -g_{ij} P^{i}_{lpk} n^{l} B^{pkj}_{\beta\gamma\alpha} + (n^{i}_{;\,s} \delta^{s}_{l} A^{l}_{pk|r} l^{r} +$$

$$+ n^{i}_{s} \delta^{s}_{l} A^{l}_{pk}) g_{ij} B^{jpk}_{\alpha\beta\gamma} - g_{ij}\left(n^{i}_{|s} n^{s} n_{l} A^{l}_{pk} B^{pk}_{\gamma\beta} + n^{i}_{;\,r} n^{r} n_{l} C^{l}_{pk|s} x^{s} B^{pk}_{\beta\gamma}\right) B^{j}_{\alpha}.$$

Или

$$\Omega_{\alpha\gamma;\,\beta} - \omega_{\alpha\beta|\gamma} = P_{jlpk} n^{l} B^{pkj}_{\beta\gamma\alpha} +$$

$$+ g_{ij} n^{i}_{|\delta} B^{\delta}_{l} A^{l}_{pk} B^{jpk}_{\alpha\beta\gamma} + g_{ij} n^{i}_{;\,\delta} B^{\delta}_{l} A^{l}_{pk|r} x^{r} B^{pkj}_{\beta\gamma\alpha}.$$

Учитывая выражения для $n^{i}_{|\gamma}$ и $n^{i}_{;\,\gamma}$, получим

$$\Omega_{\alpha\gamma;\,\beta} - \omega_{\alpha\beta|\gamma} = P_{ijkl} n^{i} B^{jkl}_{\alpha\gamma\delta} - \left(\Omega_{\alpha\delta} A^{l}_{pk} + \omega_{\alpha\delta} A^{l}_{pk|r} x^{r}\right) B^{\delta}_{l} B^{pk}_{\beta\gamma}.$$

Запишем следующее выражение для $\omega_{\alpha\beta}$ [4]:

$$\omega_{\alpha\beta} = -g_{ij} n^{i}_{;\,\beta} B^{j}_{\alpha}.$$

Имеем

$$\omega_{\alpha\beta|\gamma} = -g_{ij} n^{i}_{;\,\beta|\gamma} B^{j}_{\alpha}.$$

Аналогично

$$\omega_{\alpha\gamma|\beta} = -g_{ij} n^i_{;\ \gamma|\beta} B^j_\alpha.$$

Вычитая, получим

$$\omega_{\alpha\beta|\gamma} - \omega_{\alpha\gamma|\beta} = -g_{ij} \left(n^i_{;\ \beta|\gamma} - n^i_{;\ \gamma|\beta}\right) B^j_\alpha.$$

Прибавим и вычтем в скобках выражение $n^i_{|\gamma;\ \beta}$, получим

$$\omega_{\alpha\beta|\gamma} - \omega_{\alpha\gamma|\beta} = -g_{ij} \left[\left(n^i_{;\ \beta|\gamma} - n^i_{|\gamma;\ \beta}\right) + \left(n^i_{|\gamma;\ \beta} - n^i_{;\ \gamma|\beta}\right)\right] B^j_\alpha.$$

Обозначив

$$-g_{ij}\left[n^i_{;\ \beta|\gamma} - n^i_{|\gamma;\ \beta}\right] B^j_\alpha = I_{\beta\gamma\alpha},$$

получим

$$\omega_{\alpha\beta|\gamma} - \omega_{\alpha\gamma|\beta} = I_{\beta\gamma\alpha} - g_{ij}\left(n^i_{|\gamma;\ \beta} - n^i_{;\ \gamma|\beta}\right) B^j_\alpha.$$

Заменяя

$$n^i_{|\gamma} = -\Omega_{\gamma\alpha} g^{\varepsilon\alpha} B^i_\varepsilon, \quad n^i_{;\ \gamma} = -\omega_{\alpha\gamma} g^{\alpha\varepsilon} B^i_\varepsilon,$$

получим

$$\omega_{\alpha\gamma|\beta} - \omega_{\alpha\beta;\gamma} = I_{\beta\gamma\alpha} + \Omega_{\gamma\alpha;\ \beta} - \omega_{\gamma\alpha|\beta}.$$

Окончательно имеем

$$\omega_{\alpha\beta|\gamma} = I_{\beta\gamma\alpha} + \Omega_{\gamma\alpha;\ \beta}. \tag{7}$$

С другой стороны запишем

$$\Omega_{\alpha\beta;\ \gamma} = -g_{ij} n^i_{|\beta;\ \gamma} B^j_\alpha.$$

Меняя местами индексы β и γ и вычитая, получим

$$\Omega_{\alpha\beta;\ \gamma} - \Omega_{\alpha\gamma;\ \beta} = -g_{ij}\left[n^i_{|\beta;\ \gamma} - n^i_{|\gamma;\ \beta}\right] B^j_\alpha.$$

Прибавим и вычтем в скобках $n^i_{;\ \gamma|\beta}$

$$\Omega_{\alpha\beta;\ \gamma} - \Omega_{\alpha\gamma;\ \beta} = -g_{ij}\left(-n^i_{;\ \gamma|\beta} + n^i_{\beta;\ \gamma}\right) B^j_\alpha - g_{ij}\left(n^i_{;\ \gamma|\beta} - n^i_{|\gamma;\ \beta}\right) B^j_\alpha.$$

Вспоминая выражение для $n^i_{;\ \gamma}$ и для $n^i_{|\gamma}$,

$$\Omega_{\alpha\beta;\ \gamma} - \Omega_{\alpha\gamma;\ \beta} = I_{\gamma\beta\alpha} + \omega_{\alpha\gamma|\beta} - \Omega_{\alpha\gamma;\beta}$$

или

$$\Omega_{\alpha\beta;\ \gamma} - \omega_{\alpha\gamma|\beta} = -I_{\gamma\beta\alpha}.$$

Таким образом доказано, что разность ковариантных производных, вычисленная для вторых форм поверхности относительно первой и второй связности Картана, сводится к единственному соотношению (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Rund. The differential geometry of Finsler space Springer-Verlag, Berlin, 1959.

2. H. Rund. The intrinsic and induced curvature tensor of subspaces of a Finsler space, Tensor (N. S.) 16 (1965), 294—312.

3. Brown Gillian. Study of tensors which characterize a hypersurface of a Finsler space. Canad Journal of mathem. (1968), № 20, стр. 1025—1031.
4. R. S. Sinha. Generalisation of Gauss-Codazzi equations for the first of Cartans curvature tensors in a hypersurface of a Finsler space. Tensor (N. S. 19 (1968), 275—281.
5. R. S. Sinha. Generalisation of Gauss-Codazzi equations for Berwalds curvature tensor... Tensor, N. S. (1969), № 20, 13—18.
6. Слободян Ю. С. Некоторые свойства вполне геодезических поверхностей финслерова пространства. «Укр. геометр. сб.», вып. 10, 1971, 65—71.

Поступила 17 мая 1971 г.

НЕИЗГИБАЕМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Е. П. Сенькин

Харьков

Проблемы однозначной определенности и жесткости замкнутых выпуклых поверхностей трехмерного пространства решены А. В. Погореловым [1], [2].

В настоящей работе аналогичный результат устанавливается для гиперповерхностей n-мерного евклидова пространства.

Сначала вопрос об однозначной определенности и жесткости решается для замкнутых выпуклых гиперповерхностей, затем этот результат используется для доказательства локальной однозначной определенности и жесткости.

Теорема 1. *Изометричные замкнутые выпуклые гиперповерхности равны.*

Теорема 2. *Замкнутая выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности $n-1$ — жесткая. Если она содержит плоские области, то жесткая вне плоских областей.*

Теорема 3. *Пусть F_1 — выпуклая гиперповерхность и P_1 — точка ее строгой выпуклости. Пусть F_2 — выпуклая гиперповерхность, изометричная F_1, и P_2 — точка, соответствующая по изометрии P_1. Тогда достаточно малые окрестности точек P_1 и P_2 — конгруентны.*

Теорема 4. *Выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности $n-1$, жесткая в окрестности каждой своей точки строгой выпуклости. Если она содержит плоские области, то жесткая вне плоских областей.*

§ 1. Леммы

Лемма 1. *Пусть P_1 — выпуклая кривая на двумерной полусфере, звездно расположенная относительно точки S_1 и обращенная выпуклостью от нее. P_2 — изометричная ей кривая, звездно* *расположенная относительно точки S_2. Пусть A_1, B_1 — концы кривой P_1; A_2, B_2 — концы кривой P_2, причем*

$$O_1A_1 = O_2A_2, \quad O_1B_1 = O_2B_2.$$

на P_2 будем обозначать также через x. Тогда из неравенства

$$S_1x \leqslant S_2x$$

Обозначим через x — точку кривой P_1, соответствующую ей точку следует, что угол между отрезками S_1A_1 и S_1B_1 со стороны кривой не меньше угла между отрезками S_2A_2 и S_2B_2, причем равенство имеет место лишь тогда, когда

$$S_1x = S_2x$$

и кривые конгруентны.

Докажем лемму 1.

Среди всех кривых P_2, удовлетворяющих условиям леммы, рассмотрим ту, у которой угол $A_2S_2B_2$ максимальный.

Максимум будем искать в более широком классе кривых: допускается, что угол $A_2S_2B_2$ может быть больше 2π.

Докажем, что реализующая максимум кривая P равна P_1.

Если P не равна P_1, то на P найдется точка x_2, для которой

$$S_2x_2 > S_1x_1,$$

где $x_1 \in P_1$ и соответствует x_2 по изометрии.

Возьмем малую дугу y_2z_2, содержащую точку x_2. Если она не является геодезической, то можем ее распрямить, раздвигая отрезки S_2y_2, S_2z_2 и оставляя части кривой P за этими отрезками без изменения.

Распрямление можно сделать столь малым, что для точек дуги y_2z_2 все расстояния от S_2 останутся больше расстояний от S_1 до соответствующих точек на P_1. Но при этом угол $A_2S_2B_2$ увеличится, что противоречит максимальности кривой P.

Если дуга y_2z_2 является геодезической, то будем двигаться от x_2 вправо и влево.

В конце концов, мы или найдем дугу, удовлетворяющую нужным свойствам, или получим геодезическую дугу M_2N_2, для которой

$$S_2M_2 = S_1M_1, \quad S_2N_2 = S_1N_1,$$

где M_1, $N_1 \in P_1$ и соответствуют по изометрии M_2, N_2.

Но тогда дуга M_1N_1 должна быть тоже геодезической. Это следует из выпуклости и того, что расстояния от S_1 до точек дуги M_1N_1 не больше расстояний от S_2 до соответствующих точек дуги M_2N_2.

В результате все эти расстояния должны быть равны, чего не может быть.

Значит $P = P_1$. Следовательно, для кривых P_2, имеющих хотя бы одну точку x_2, для которой

$$S_2x_2 > S_1x_1,$$

угол $A_1S_1B_1$ больше угла $A_2S_2B_2$.

Лемма 2. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные замкнутые выпуклые гиперповерхности на n-мерной сфере. Пусть Q_1 и Q_2 — точки внутри F_1 и F_2 соответственно,* а *x_1 и x_2 — точки на F_1* и *F_2, соответствующие по изометрии.*

Тогда из неравенства

$$Q_1x_1 \leqslant Q_2x_2$$

следует, что гиперповерхности равны.

Доказательство.

Проведем через точку Q_2 произвольную геодезическую l_2. Точки пересечения ее с поверхностью F_2 обозначим через x_2, y_2. Пусть x_1, y_1 — точки на F_1, соответствующие по изометрии точкам x_2, y_2.

Через точки Q_1, x_1, y_1 проведем двумерную сферу. Она пересечет поверхность F_1 по некоторой кривой L_1. Кривую на F_2, соответствующую по изометрии кривой L_1, обозначим через L_2.

Соединим все точки кривой L_2 геодезическими с точкой Q_2. Получим некоторый конус k_2 с вершиной Q_2.

Очевидно полный угол этого конуса при точке Q_2 не меньше 2π, так как через Q_2 проходит геодезическая.

В силу условий леммы для любых соответствующих по изометрии точек $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$ имеет место неравенство

$$Q_1x_1 \leqslant Q_2x_2,$$

причем можно считать, что хотя бы для одной пары точек имеет место равенство.

В противном случае этого можно добиться, двигая точку Q_2 по геодезической l_2 к одному из концов.

Пусть x_1^0 и x_2^0 точки на L_1 и L_2, для которых

$$Q_1x_1^0 = Q_2x_2^0.$$

Разрежем конус k_2 и соответствующий ему конус k_1 (с углом 2π) по геодезическим $Q_1x_1^0$ и $Q_2x_2^0$.

Конус k_2 после разрезывания развернем на двумерную сферу. Если угол при вершине Q_2 больше 2π, то в окрестности точки Q_2 разворачивание будет с перекрыванием.

Кривая L_2 перейдет в некоторую плоскую кривую $\overset{*}{L_2}$, звездную относительно точки Q_2, считая, конечно, окрестность точки многолистной.

Кривые L_1 и $\overset{*}{L_2}$ вместе с точками Q_1 и Q_2 удовлетворяют условиям леммы 1. Поэтому, если хотя бы для одной пары точек x_1, x_2 имеет место неравенство

$$Q_1x_1 < Q_2x_2,$$

то угол при вершине Q_2 должен быть меньше 2π, чего не может быть.

Учитывая произвольность геодезической l_2 заключаем, что

$$Q_1 x_1 = Q_2 x_2$$

для всех $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$. Отсюда следует, что F_1 и F_2 равны.

Пусть F — выпуклая гиперповерхность. Будем говорить, что гиперповерхность F видна из точки Q изнутри, если она обращена выпуклостью от точки Q и каждый луч, идущий из Q в точку гиперповерхности, пересекает ее лишь в одной точке (лучи, идущие в точки границы, могут скользить по поверхности).

Лемма 3. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые гиперповерхности, видные из точек Q_1 и Q_2 изнутри.*

Пусть L_1 и L_2 — границы гиперповерхностей F_1 и F_2 (если гиперповерхности замкнутые, то будем считать, что границы сводятся к соответствующим по изометрии точкам Q_1 и Q_2).

Пусть существуют гиперплоскости P_1 и P_2, проходящие через точки Q_1 и Q_2, такие, что гиперповерхности F_1 и F_2 лежат относительно P_1 и P_2 в одном полупространстве.

Тогда если расстояния от точек Q_1 и Q_2 до соответствующих по изометрии точек границ L_1 и L_2 равны, то гиперповерхности либо равны, либо могут быть приведены в такое расположение, что будут выполнены следующие условия:

а) *некоторые соответствующие по изометрии точки $x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$ совпадут;*

б) *расстояния от некоторой точки Q пространства до точек x_1 и x_2 будут равны.*

в) *окрестности точек x_1 и x_2 из точки Q будут видны изнутри;*

г) *в окрестности точек x_1 и x_2 для любых соответствующих по изометрии точек $x \in F_1$, $x \in F_2$ будет иметь место неравенство*

$$r_1(x) < r_2(x),$$

где $r_1(x)$ и $r_2(x)$ соответственно расстояния от точки Q до точек $x \in F_1$, $x \in F_2$ и соответствующих по изометрии.

Докажем лемму 3.

Пусть F_1 и F_2 — гиперповерхности, удовлетворяющие условиям леммы.

Рассмотрим расстояние $r_2(x)$ от точки Q_2 до точки $x \in F_2$. Расстояние от точки Q_1 до точки, соответствующей точке x по изометрии, обозначим через $r_1(x)$.

Возможны следующие два случая:

1) $r_1(x) = r_2(x)$ для всех $x \in F_2$;

2) на F_2 найдется множество G, на котором $r_1(x) > r_2(x)$, или $r_1(x) < r_2(x)$. Если имеет место первый случай, то гиперповерхности равны.

Действительно, проведем через две произвольные точки x_1 и y_1 гиперповерхности F_1 двумерную плоскость, проходящую через точку Q_1. В сечении получим плоскую выпуклую кривую, отрезок которой между точками x_1 и y_1, не содержащий точки Q_1, обозначим через γ_1, изометричную ей кривую на поверхности F_2 — через γ_2.

Развернем конус, проектирующий кривую γ_2 из точки Q_2, на плоскость. Кривая γ_2 перейдет в плоскую кривую $\bar{\gamma}_2$, равную γ_1.

Расстояние между концами кривой $\bar{\gamma}_2$ не меньше расстояния между концами кривой γ_2.

Следовательно, расстояние между концами кривой γ_1 не меньше расстояния между концами кривой γ_2.

Поменяв ролями поверхности F_1 и F_2, приходим к обратному заключению.

Следовательно, расстояния между любыми соответствующими по изометрии точками гиперповерхностей F_1 и F_2 равны, но тогда равны и поверхности.

Рассмотрим второй случай. Для определенности будем считать, что на G имеет место неравенство

$$r_1(x) > r_2(x).$$

На границе G будет

$$r_1(x) = r_2(x).$$

Проведем через Q_2 опорную гиперплоскость P_2.

Пусть L — луч, перпендикулярный к P_2 и направленный в полупространство, где нет гиперповерхности F_2.

Будем двигать точку Q_2 по лучу L. Тогда все расстояния $r_2(x)$ будут увеличиваться и потому область G будет сжиматься.

В начальный момент область G видна изнутри из точки Q_2.

Пусть M_2 — замкнутое множество, содержащее G, на котором

$$r_1(x) \geqslant r_2(x).$$

Покажем, что как только точка Q_2, сдвигается по лучу L, так ни в какой точке x_2 множества M_2 луч Q_2x не будет касаться поверхности F_2 и потому множество M_2 будет постоянно видно изнутри из точки Q_2.

Для доказательства представим себе, что точка Q_2 сдвинулась по лучу L из положения Q_2' в положение Q_2''.

Так как при этом расстояния $r_2(x)$ возрастают, то множество M_2 сжимается.

Множество M_2'', соответствующее положению точки Q_2'', содержится внутри множества M_2', соответствующего положению точки Q_2'.

Предполагая, что M_2' видно всюду изнутри, кроме, может быть, точек, для которых лучи из Q_2' пересекают его границу, покажем, что M_2'' видно из Q_2'' всюду изнутри.

Пусть x_2 — произвольная точка множества M_2'', так что

$$Q_1x_1 \geqslant Q_2x_2. \tag{1}$$

Рассмотрим в точке x_2 касательный конус. Нужно доказать, что он не пересекает отрезок $Q_2'Q_2''$.

Для этого достаточно доказать, что если он пересекает луч L за точкой Q_2' в некоторой точке B, то точка B лежит за точкой Q_2''.

Проведем через точки Q_2'', Q_2', x_2 двумерную плоскость. В пересечении ее с гиперповерхностью F_2 получим дугу x_2A_2, касающуюся отрезка x_2B и идущую до ближайшей к x_2 точки A_2, которая лежит на границе множества M_2'. В связи с тем, что A_2 лежит на границе множества M_2',

$$Q_2'A_2 = Q_1A_1. \tag{2}$$

Так как гиперповерхность F_2 выпуклая и по предположению M_2^1 видно изнутри из точки Q_2', кроме, может быть, точек, лучи в которые пересекают границу, то дуга x_2A_2 будет выпуклой, обращенной выпуклостью от точки Q_2'. Вместе с отрезком $Q_2'A_2$ она образует выпуклую кривую $Q_2'A_2x_2$. (Если сама точка Q_2' лежит на границе гиперповерхности, то возможно, что $Q_2' = A_2$ и отрезок $Q_2'A_2$ сводится к точке).

Пусть A_1x_1 — линия на гиперповерхности F_1, отвечающая по изометрии дуге A_2x_2, так что

$$\text{дл. } (\overset{\frown}{A_1x_1}) = \text{дл. } (\overset{\frown}{A_2x_2}). \tag{3}$$

Поскольку

$$Q_2'A_2 = Q_1A_1,$$

то

$$\text{дл. } (Q_2'A_2x_2) = \text{дл. } (Q_1A_1x_1). \tag{4}$$

Покажем, что точка Q_2' не может лежать на касательной x_2B.

Предположим противное. Тогда точка A_2 также должна лежать на x_2B и

$$\text{дл. } (Q_2'A_2x_2) = Q_2'x_2.$$

Так как $x_2 \in M_2''$, то

$$Q_1x_1 \geqslant Q_2'x_2.$$

Но

$$\text{дл. } (Q_1A_1x_1) \geqslant Q_1x_1 \geqslant Q_2'x_2 = \text{дл. } (Q_2'A_2x_2).$$

В силу (4) заключаем, что

$$Q_1x_1 = Q_2'x_2$$

Но тогда

$$Q_2''x_2 \leqslant Q_1x_1 = Q_2'x_2,$$

чего не может быть, так как в треугольнике $Q_2''x_2Q_2^{\bullet}$ угол при вершине Q_2' — тупой.

Проведем через Q_2' прямую, перпендикулярную к лучу L. Пусть C — точка пересечения этой прямой с касательной x_2B. Очевидно,

$$Q_2'C < BC, \tag{5}$$

причем дл. $Q_2'C \neq 0$, так как по доказанному точка Q_2' не лежит на касательной x_2B.

Поскольку линия $Q_2'A_2x_2$ выпуклая, то

$$\text{дл. } (Q_2'C + Cx_2) \geqslant \text{дл. } (Q_2'A_2x_2). \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что

$$Bx_2 = \text{дл. } BC + \text{дл. } Cx_2 > \text{дл. } (Q_2'A_2x_2),$$

а отсюда в силу (4) имеем

$$Bx_2 > \text{дл. } (Q_1A_1x_1) \geqslant Q_1x_1 \geqslant Q_2''x_2.$$

Неравенство

$$Bx_2 \geqslant Q_2''x_2$$

как раз и означает, что точка B лежит на луче L за точкой Q_2''.

Так как при смещении точки Q_2 по лучу L расстояния $r_2(x)$ растут, то в некоторый момент окажется, что область, где

$$r_1(x) > r_2(x)$$

исчезнет. Это положение точки Q_2 обозначим через $Q_2^{\bullet}$.

В этот момент на некотором множестве M будет

$$r_1(x) = r_2(x),$$

а всюду вне его

$$r_1(x) < r_2(x).$$

Так как замкнутое множество M видно изнутри из Q_2°, то и некоторая содержащая его окрестность видна изнутри из Q_2°.

Точки множества M будем называть точками вложения, а точку Q_2° будем называть полюсом.

Сдвинем точку Q_2 из начального положения по лучу L достаточно мало в положение Q_2'.

Через точку Q_2' будет проходить бесконечно много гиперплоскостей, относительно которых гиперповерхность F_2 будет лежать по одну сторону.

Теперь можно двигать точку Q_2 из положения Q_2' по целому конусу направлений.

Для каждого направления существует единственный полюс и некоторое множество точек вложения, соответствующих этому полюсу.

Множество полюсов образует некоторую гиперповерхность σ. Поверхность σ обладает тем свойством, что каждой ее точки можно с одной стороны коснуться шаром конечного радиуса, т. е. через каждую точку σ проходит шар конечного радиуса, так что остальные точки σ лежат вне или на границе этого шара.

Действительно, пусть Q_2 — некоторый полюс, а x_2 — одна из точек вложения, соответствующих этому полюсу.

Тогда

$$Q_2x_2 = Q_1x_1.$$

Пусть Q_2' произвольный полюс, отличный от Q_2. Тогда

$$Q_2'x_2 \geqslant Q_1x_1,$$

Значит

$$Q_2'x_2 \geqslant Q_2x_2.$$

Отсюда следует, что все полюса лежат вне или на поверхности шара радиуса Q_2x_2 с центром в точке x_2.

Из этого свойства поверхности σ вытекает, что на ней есть гладкие точки [3].

Каждому гладкому полюсу Q_2 соответствует лишь одна точка вложения.

Действительно, предположим противное: пусть полюсу Q_2 соответствуют по крайней мере две точки вложения x_2 и x_2'.

Тогда поверхность σ должна лежать вне шара радиуса Q_2x_2 с центром в x_2 и вне шара радиуса Q_2x_2' с центром в x_2', но тогда точка Q_2 не является гладкой.

Пусть x_2 точка на F_2, соответствующая гладкому полюсу Q_2. Соответствующую по изометрии точку на F_1 обозначим через x_1.

Совместим теперь движением отрезки Q_1x_1 и Q_2x_2 так, чтобы совпали точки x_1, x_2 и Q_1, Q_2. Если обозначить через Q общее положение точек Q_1 и Q_2, то относительно точки Q будут выполнены все условия леммы.

Основная лемма А. В. Погорелова [2]. *Пусть F — выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей и заданная уравнением*

$$z = z(x, y).$$

Обозначим через $\zeta(x, y)$ — составляющую по оси z ее изгибающего поля.

Тогда поверхность Φ, задаваемая уравнением

$$z = \zeta(x, y),$$

является поверхностью неположительной кривизны

Если поверхность F содержит плоские области, то Φ имеет неположительную кривизну на множестве тех точек, которым при проектировании прямыми, параллельными оси z, соответствуют точки, лежащие вне плоских областей.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть F_1 и F_2 — выпуклые замкнутые изометричные гиперповерхности.

Если они не равны, то согласно лемме 3 они могут быть приведены в такое расположение, при котором будут выполнены условия: некоторые соответствующие по изометрии точки на F_1 и F_2 совпадут в некоторой точке x_0; расстояния от некоторой точки пространства Q до всех соответствующих по изометрии точек $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ в окрестности точки x_0 удовлетворяют неравенству

$$Qx_1 \leqslant Qx_2;$$

некоторые окрестности точки x_0 на F_1 и F_2 видны изнутри из точки Q.

Пусть точка x_0 является конической точкой поверхностей F_1 и F_2, а K_1 и K_2 — касательные конусы в ней.

Поместим в точку x_0 центр единичной гиперсферы. В пересечении конусов K_1 и K_2 с гиперсферой получим замкнутые изометричные выпуклые гиперповерхности P_1 и P_2 на гиперсфере.

Обозначим через Q_0 точку пересечения гиперсферы с отрезком Qx_0.

Пусть $x_1 \in P_1$ и $x_2 \in P_2$ соответствующие по изометрии точки. Рассмотрим расстояния по гиперсфере Q_0x_1 и Q_0x_2.

Величина этих расстояний зависит от плоских углов между образующими конусов K_1 и K_2 и отрезком Qx_0.

Так как в окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$Qx_1 < Qx_2,$$

то углы, образованные отрезком Qx_0 с соответствующими образующими конусов K_1 и K_2, у конуса K_1 не больше, чем у конуса K_2.

Следовательно, расстояния на гиперсфере удовлетворяют неравенству

$$Q_0x_1 \leqslant Q_0x_2.$$

Но тогда поверхности P_1 и P_2 на гиперсфере удовлетворяют условиям леммы 2, если за точки Q_1 и Q_2 взять точку Q_0.

Следовательно, P_1 и P_2 совпадают, но тогда и конусы K_1 и K_2 совпадают. Если точка x_0 является не конической, то касательные конусы K_1 и K_2 содержат «ребра» различного числа измерений.

Возьмем прямую l_1 на касательном конусе K_1, в силу неравенства $Q_1x_1 < Q_2x_2$ ей будет соответствовать прямая l_2 на конусе K_2.

Поворотом гиперповерхности F_2 вокруг отрезка $Q''x_0$ совместим соответствующие направления на K_1 и K_2, если точка коническая, и соответствующие полупрямые прямых l_1 и l_2, если точка x_0 ребристая.

Рассмотрим гиперповерхность Φ с радиусом-вектором

$$\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2),$$

где $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ — радиусы-векторы, идущие в соответствующие по изометрии точки гиперповерхностей F_1 и F_2.

Поверхность Φ в окрестности точки x_0 будет выпуклой, что для случая двумерных поверхностей доказано в работе А. В. Погорелова [1]. Идея доказательства проста, но ввиду наличия на поверхности конических и ребристых точек оно довольно громоздко. В случае n-мерного пространства вопрос еще более усложняется. Поэтому в настоящей статье выпуклость поверхности Φ, а следовательно, и теорема 1 будут доказаны при условии гладкости гиперповерхностей F_1 и F_2.

Предположим, что в некоторой соответствующей точке x^* на F_1, близкой к x_0, происходит нарушение локальной выпуклости поверхности Φ.

Пусть P_1 и P_2 — касательные гиперплоскости в точках x^* на F_1 и F_2. Обозначим через $\bar{n}$ внутреннюю нормаль к гиперплоскости $P_1 + P_2$.

Соединим точку y^*, близкую к x^*, кратчайшей γ на F_1. Пусть $\bar{r}_1(s)$ — радиус-вектор точки кратчайшей γ, а $\bar{r}_2(s)$ — радиус-вектор соответствующей точки на F_2. Применяя теорему Либермана о выпуклости геодезической к кратчайшей γ и соответствующей кратчайшей на F_2, получим

$$\frac{d}{ds}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\,\bar{n} \geqslant 0$$

для всех точек кратчайшей γ. Отсюда следует, что для всех точек y^*, близких x^*, будем иметь

$$[\bar{r}_1(y^*) - \bar{r}_1(x^*) + \bar{r}_2(y^*) - \bar{r}_2(x^*)]\,\bar{n} \geqslant 0.$$

А это значит, что в точке x^* имеет место локальная выпуклость, что противоречит предположению.

Рассмотрим на гиперповерхности Φ векторное поле

$$\bar{\tau} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2.$$

Оно удовлетворяет условию Липшица и почти везде $d\bar{r}d\bar{\tau} = 0$. Для выпуклых гиперповерхностей имеет место теорема А. Д. Александрова: поле $\bar{\tau}$ является изгибающим полем общей выпуклой поверхности тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию Липшица в любой компактной области на поверхности и почти везде удовлетворяет уравнению

$$d\bar{r}d\bar{\tau} = 0.$$

Доказательство этой теоремы переносится на n-мерный случай без существенных изменений и приводится в конце статьи.

Выберем в точке x_0 на Φ два независимых направления и проведем трехмерную плоскость P так, чтобы она содержала эти направления и отрезок Ox_0.

В сечении с гиперповерхностью Φ получим двумерную выпуклую поверхность σ. Разложим векторное поле $\bar{\tau}$ на составляющие, одна из которых $\bar{\tau}'$ лежит в трехмерной плоскости P, а остальные перпендикулярные к ней. Очевидно, поле $\bar{\tau}'$ будет изгибающим полем σ в трехмерной плоскости P.

Введем декартову систему координат в плоскости P, взяв за ось z отрезок Qx_0, а за плоскость xy — плоскость, перпендикулярную к Qx_0 в точке Q.

Подвергнем σ проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Поле $\bar{\tau}'$ подвергнем преобразованию

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{z}.$$

Полученное поле $\bar{\tau}_1'$ будет изгибающим преобразованной поверхности σ'.

Радиальная составляющая поля $\bar{\tau}_1'$ равна

$$\frac{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{|\bar{r}_1 + \bar{r}_2|} = \frac{\bar{r}_1^2 - \bar{r}_2^2}{|\bar{r}_1 + \bar{r}_2|}.$$

Составляющая поля $\bar{\tau}_1'$ по оси z

$$\zeta' = \frac{\bar{r}_1^2 - \bar{r}_2^2}{z}.$$

Так как в точке x_0 имеет место равенство

$$r_1(x_0) = r_2(x_0),$$

а в окрестности точки x_0 неравенство

$$r_1(x) < r_2(x),$$

то $\zeta' = 0$ в точке x_0 и $\zeta' < 0$ в окрестности точки x_0.

Следовательно, составляющая поля $\bar{\tau}_1'$ по оси z' поверхности σ' имеет точку строгой выпуклости, что противоречит основной лемме А. В. Погорелова.

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пусть F — замкнутая выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности $n-1$, и $\bar{\tau}$ — изгибающее поле поверхности F.

Возьмем на F некоторую точку Q и рассмотрим расстояния в пространстве $r(x)$ от точки Q до точки x на гиперповерхности F.

Рассмотрим радиальные составляющие $\dot{r}$ поля τ, где точка означает дифференцирование по времени.

Возможны два случая

1. $\dot{r}(x)=0$ для всех $x \in F$.

2. На F найдется множество G, на котором или $\dot{r}<0$, или $\dot{r}>0$.

В первом случае гиперповерхность F — жесткая.

Рассмотрим второй случай.

Будем считать для определенности, что на G выполняется неравенство $\dot{r}>0$.

На границе G должно быть $\dot{r}=0$.

Присоединяя к изгибающему полю $\bar{\tau}$ подходящий параллельный перенос в направлении, перпендикулярном к опорной гиперплоскости P в точке Q, легко добиться того, что радиальная составляющая $\dot{r}$ при полученном таким образом изгибании будет всюду $\leqslant 0$ и хотя бы в одной точке — $\dot{r}=0$.

В самом деле, пусть $\bar{a}$ — вектор переноса, направленный к плоскости P. Радиальные его составляющие во всех точках отрицательны.

Поэтому можно подобрать $\bar{a}$ так, что радиальные составляющие $\dot{r}$ векторов $\dot{\bar{r}}+\bar{a}$ будут всюду $\leqslant 0$, хотя где-нибудь внутри $\dot{r}=0$.

Пусть N множество точек, где $\dot{r}=0$ x_0 точка множества N, так что $\dot{r}(x_0)=0$,

Выберем в точке x_0 два независимых направления и проведем трехмерную плоскость P, содержащую эти направления и отрезок Qx_0.

В сечении с гиперповерхностью F получим двухмерную поверхность σ.

Разложим вектор $\bar{\tau}$ на составляющие, одна из которых $\bar{\tau}'$ лежит в трехмерной плоскости P, а остальные перпендикулярны к ней.

Поле $\bar{\tau}'$ будет изгибающим полем σ в трехмерной плоскости P.

Введем декартову систему координат в плоскости P, взяв за ось Z отрезок Qx_0, а за плоскость xy — плоскость, перпендикулярную к Qx_0 в точке Q.

Подвергнем поверхность σ проективному преобразованию $x' = \frac{x}{z}$, $y' = \frac{y}{z}$, $z' = \frac{1}{z}$, а поле τ'

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{z}.$$

Полученное поле $\bar{\tau}_1'$ будет изгибающим для преобразованной поверхности σ.

Радиальная составляющая поля $\bar{\tau}'$ равна $\frac{\dot{\bar{r}}\bar{r}}{|\bar{r}|}$.

Так как $\dot{r}$ в точке x_0 равна нулю, то $\dot{r}$ внутри поверхности σ на некотором множестве обращается в нуль, а вне этого множества $\dot{r} < 0$.

Но тогда составляющая ζ' по оси z поля $\bar{\tau}_1'$ должна иметь точку строгой выпуклости

$$\zeta' = \frac{\dot{\bar{r}}\bar{r}}{z}.$$

Через точку x_0 на F может проходить ребро размерности $n-2$ и ниже. Если одно из направлений, через которые проходит плоскость P, взять перпендикулярным к ребру, то точка x_0 на σ, а следовательно, и на σ' не будет лежать в двумерной плоской области. Но это противоречит основной лемме А. В. Погорелова.

Покажем теперь, что если гиперповерхность содержит $n-1$-мерные плоские области, то она жесткая вне их. Доказательство будем вести по индукции. Двумерная замкнутая выпуклая поверхность в трехмерном пространстве жесткая вне плоских областей по теореме А. В. Погорелова.

Предположим, что $n-2$-мерная замкнутая выпуклая поверхность $n-1$-мерного пространства жесткая вне $n-2$-мерных плоских областей, и покажем, что $n-1$-мерная поверхность n-мерного пространства жесткая вне $n-1$-мерных областей.

Пусть F — замкнутая выпуклая гиперповерхность с плоскими областями. Возьмем две точки x и y, не принадлежащие плоским областям. Проведем через них гиперплоскость P так, чтобы она пересекала $n-2$-мерные ребра в точках x, y, если они существуют. В сечении получим $n-2$-мерную замкнутую выпуклую поверхность σ, причем точки x и y не будут лежать в $n-2$-мерных плоских областях. Разложим поле $\bar{\tau}$ на составляющую $\bar{\tau}'$, лежащую в P, и τ_0 — перпендикулярную к ней, которая не влияет на изменение расстояния $r(x, y)$. В силу предположения σ — жесткая в плоскости P вне $n-2$-мерных плоских областей. Следовательно, расстояния между любыми парами точек x, y на F, не принадлежащими плоским областям, стационарны. А это значит, что F — жесткая вне плоских областей.

§ 4. Доказательство теорем 3 и 4

Докажем теорему 4.

Пусть F — выпуклая гиперповерхность и P точка ее строгой выпуклости. Нужно показать, что F — жесткая вне плоских областей в окрестности точки P.

Отрежем плоскостью Q, параллельной опорной плоскости в точке P, от F достаточно малую шапочку ω. В сечении получим n —2-мерную поверхность F', которая в Q будет жесткой вне плоских областей.

Следовательно, расстояния $r(x, y)$ между любыми парами точек на F', не принадлежащими плоским областям, будут стационарны.

Пусть хотя бы одна из точек (x, y) лежит в плоской области на F'. Если она принадлежит также плоской области α и на F, то изменением изгибающего поля на α можем сделать расстояние $r(x, y)$ стационарным.

В противном случае повернем плоскость Q достаточно мало так, чтобы она пересекла плоские области на F', в которых лежат точки x и y, и содержала точки x и y.

В сечении получим поверхность F'', на которой точки x и y уже не будут принадлежать n —2-мерным плоским областям.

Так как F'' — жесткая вне плоских областей, то расстояние $r(x, y)$ будет стационарным.

Шапочка ω вместе с плоскостью основания образуют замкнутую выпуклую гиперповерхность, которая будет жесткой вне плоских областей. Следовательно, и шапочка ω — жесткая вне плоских областей.

Докажем теорему 3 для гладких выпуклых гиперповерхностей.

Пусть F_1 и F_2 — выпуклые гладкие изометричные гиперповерхности;

P_1 — точка строгой выпуклости гиперповерхности F_1, а P_2 — соответствующая ей по изометрии точка на F_2.

Совместим точки P_1 и P_2 и соответствующие по изометрии направления в касательных гиперплоскостях в точках P_1 и P_2.

Рассмотрим гиперповерхность, задаваемую радиусом-вектором

$$\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2).$$

Она, как доказано ранее, будет выпуклой и поле

$$\bar{\tau} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$$

будет ее изгибающим полем.

Обозначим совмещенное положение точек P_1 и P_2 через P.

Сместим опорную гиперплоскость в точке P параллельно так, чтобы она отрезала от поверхности Φ шапочку ω.

Шапочка ω будет жесткой вне плоских областей, т. е. поле $\bar{\tau}$ тривиально вне плоских областей. Плоские области на ω могут получаться лишь как линейная комбинация плоских областей на F_1 и F_2.

Следовательно, так как области на F_1 и F_2, соответствующие ω, совпадают вне плоских областей, то они должны полностью совпадать.

§ 5. Дифференциальное свойство изгибающего поля выпуклой гиперповерхности

Для изгибающих полей выпуклой поверхности трехмерного пространства имеет место теорема А. Д. Александрова.

Чтобы векторное поле $\bar{\tau}$ на общей выпуклой поверхности F было изгибающим, необходимо и достаточно, чтобы в любой компактной области на F оно удовлетворяло условию Липшица и чтобы почти всюду

$$d\bar{r}d\bar{\tau} = 0.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для гиперповерхности n-мерного евклидова пространства.

Перенесем на случай гиперповерхности доказательство этого утверждения, данное в монографии А. В. Погорелова [2].

1. Покажем, что векторное поле $\bar{\tau}$ удовлетворяет условию Липшица в любой компактной области на гиперповерхности F.

Пусть F — выпуклая гиперповерхность и P — точка на ней, Q — точка внутри выпуклого тела, на котором лежит гиперповерхность F. Тогда достаточно малая окрестность ω точки P будет однозначно проектироваться в направлении PQ. Введем декартовы координаты

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z,$$

приняв прямую PQ за ось z.

Окрестность ω точки P может быть задана уравнением

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(x).$$

Если окрестность ω взята достаточно малой, то можно считать, что опорные гиперплоскости в точках ω образуют с гиперплоскостью $z = 0$ углы $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Пусть γ — кривая, лежащая в окрестности ω и заданная уравнениями

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ z = z(t).$$

Если эта кривая спрямляема, то и ее проекция $\bar{\gamma}$ на плоскость $z = 0$ также спрямляема.

Покажем, что и обратно из спрямляемости $\bar{\gamma}$ следует спрямляемость γ.

Выпишем в кривую γ произвольную ломаную Γ, ее проекция $\bar{\Gamma}$ будет ломаной, вписанной в $\bar{\gamma}$.

Пусть δ и $\bar{\delta}$ — длины соответствующих звеньев Γ и $\bar{\Gamma}$, а $\tilde{\delta}$ длина выпуклой кривой на поверхности, проектирующейся в отрезок $\bar{\delta}$.

Тогда

$$\bar{\delta} \leqslant \delta \leqslant \tilde{\delta}.$$

Длина кривой $\tilde{\delta}$ может быть записана в виде

$$\tilde{\delta} = \int\limits_{\bar{\delta}} \sqrt{1 + z_{\bar{\delta}}'^2 d\bar{\delta}}\,.$$

Но

$$|z_{\bar{\delta}}'| \leqslant k = \operatorname{tg} \theta.$$

Следовательно,

$$\delta \leqslant \tilde{\delta} \leqslant \sqrt{1+k^2}\,\bar{\delta}.$$

и длины ломаных Γ и $\bar{\Gamma}$ связаны соотношением

$$l_{\Gamma} \leqslant \sqrt{1+k^2}\, l_{\bar{\Gamma}}.$$

Отсюда следует, что спрямляемость $\bar{\gamma}$ влечет за собой спрямляемость γ.

Пусть область w проектируется в выпуклую область $\bar{\omega}$ на плоскости $z = 0$.

Пусть на гиперповерхности ω задана функция точки $\psi(x)$.

Можно считать, что эта функция задана в области $\bar{\omega}$ плоскости $z = 0$.

Покажем, что если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на поверхности, то функция

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

удовлетворяет условию Липшица в области $\bar{\omega}$ и обратно.

Для этого достаточно показать, что имеют место неравенства

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant C_1 \rho(x, y); \ \rho(x, y) \leqslant C_2 \rho(\bar{x}, \bar{y}),$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от выбора точек.

Существование постоянной C_1 очевидно, так как

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \rho(x, y).$$

В силу предыдущего

$$\rho(x, y) \leqslant \sqrt{1+k^2}\, \rho(\bar{x}, \bar{y}).$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы А. Д. Александрова.

Пусть $\overline{\tau}(x)$ — изгибающее поле гиперповерхности F. Рассмотрим его сначала в достаточно малой окрестности ω точки P.

Возьмем в области $\overline{\omega}$ спрямляемую кривую $\overline{\gamma}$ и спроектируем ее прямыми, параллельными оси z, на гиперповерхность. Получим кривую γ на ω.

По доказанному она будет спрямляемой. Пусть гиперповерхность F подвергается бесконечно малому изгибанию с полем $\overline{\tau}$. Кривая γ перейдет в некоторую кривую γ_t. При малых $|t|$ кривая γ_t должна быть спрямляемой.

Пусть гиперповерхность ω задается уравнением

$$z = z(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Уравнение кривой $\overline{\gamma}$ запишем в виде

$$x_1 = x_1(\alpha),\ x_2 = x_2(\alpha),\ \ldots,\ x_{n-1} = x_{n-1}(\alpha).$$

Обозначим координаты вектора $\overline{\tau}$ соответственно

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1});\ \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1});$$
$$\ldots\ \zeta = \zeta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Тогда уравнение кривой γ_t может быть записано в виде:

$$\begin{gathered}
x_1 = x_1(\alpha) + t\xi_1(x_1(\alpha), \ldots, x_{n-1}(\alpha)),\\
x_2 = x_2(\alpha) + t\xi_2(x_1(\alpha), \ldots, x_{n-1}(\alpha)),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z = z(x_1(\alpha), \ldots, x_{n-1}(\alpha)) + t\zeta(x_1(\alpha), \ldots, x_{n-1}(\alpha)).
\end{gathered}$$

Пусть $\overline{P}$ — проекция точки P на плоскость $z = 0$.

Предположим, что хотя бы одна из функций

$$\xi_i,\ \zeta\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

не удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\overline{P}$.

Пусть это будет функция ξ_1.

Опишем вокруг точки $\overline{P}$ шар единичного радиуса. Можно считать, что он содержится в окрестности $\overline{\omega}$. Внутри шара с центром в точке $\overline{P}$ и радиуса $\frac{1}{n^3}$ возьмем две точки A_n, B_n так, чтобы

$$|\xi_1(A_n) - \xi_1(B_n)| > |A_nB_n|.$$

Это можно всегда сделать, так как по условию функция ξ_1 не удовлетворяет условию Липшица ни в какой окрестности точки $\overline{P}$.

Рассмотрим ломаную $\bar{\gamma}$

$$A_1B_1A_1B_1 \ldots A_1A_2B_2A_2B_2 \ldots A_3B_3A_3B_3 \ldots$$

внутри окрестности $\bar{\omega}$.

Каждое звено этой ломаной при достаточно больших n повторяется m_n раз, причем m_n удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{n^2} \leqslant m_n |A_nB_n| \leqslant \frac{2}{n^2}.$$

Из сходимости ряда $\frac{1}{n^2}$ следует, что ломаная $\bar{\gamma}$ спрямляема.

Кривая γ на поверхности ω, которая проектируется в ломаную $\bar{\gamma}$ по доказанному выше будет спрямляемой.

Так как $\bar{\tau}$ изгибающее поле, функция

$$\xi_1 = x_1 + t\xi_1$$

вдоль кривой $\bar{\gamma}$ при достаточно малом по абсолютной величине t должна быть ограниченной вариации. Так как кривая $\bar{\gamma}$ спрямляема, то функция x_1 вдоль кривой γ также имеет ограниченную вариацию. Отсюда следует, что ξ_1 есть функция ограниченной вариации.

Но вариация функции ξ_1 на каждом звене ломаной $\bar{\gamma}$ не меньше

$$|\xi_1(A_n) - \xi_1(B_n)| > n |A_nB_n|.$$

Число звеньев m_n ломаной $\bar{\gamma}$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{n^2} \leqslant m_n |A_nB_n|.$$

Следовательно, вариация функции ξ_1 на всех звеньях ломаной $\bar{\gamma}$ больше $\frac{1}{n}$. Из расходимости ряда $\frac{1}{n}$ заключаем, что вариация функции ξ_1 вдоль ломаной $\bar{\gamma}$ бесконечна.

Таким образом, предположение, что функция ξ_1 не удовлетворяет условию Липшица ни в какой области точки $\bar{P}$ приводит к противоречию. Пусть теперь G — компактная область на гиперповерхности F и $\bar{G}$ — ее замыкание. Каждая точка $\bar{G}$ имеет окрестность, в которой изгибающее поле удовлетворяет условию Липшица. Эти окрестности образуют покрытие $\bar{G}$. Из этого покрытия можно выделить конечное покрытие.

Следовательно, изгибающее поле удовлетворяет условию Липшица в $\bar{G}$, а следовательно, и в G.

2. Покажем, что почти везде на гиперповерхности F выполняется условие

$$d\bar{r}d\bar{\tau} = 0.$$

Пусть γ — кривая в окрестности ω, которая проектируется на гиперплоскость $z=0$ в отрезок $\bar{\gamma}$, параллельный оси x_i.

При бесконечно малом изгибании она перейдет в кривую γ_t, уравнение которой будет

$$\bar{r} = \bar{r}(x_i) + t\bar{\tau}(x_i).$$

На отрезке $\bar{\gamma}$ функции $\bar{r}(x_i)$ и $\bar{\tau}(x_i)$ удовлетворяют условию Липшица. Следовательно, кривая γ_t будет спрямляемой и ее длина равна

$$l_\gamma(t) = \int\limits_{\bar{\gamma}} \left| \bar{r}'_{x_i} + t\bar{\tau}'_{x_i} \right| dx_i.$$

Из того, что функции $\bar{r}$ и $\bar{\tau}$ удовлетворяют условию Липшица следует, что производные $\bar{r}'_{x_i}$ и $\bar{\tau}'_{x_i}$ всюду, где они существуют, ограничены некоторой постоянной C. Кроме того

$$\left|\bar{r}'_{x_i}\right| \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\left|\bar{r}'_{x_i} + t\bar{\tau}'_{x_i}\right| = \sqrt{\bar{r}'^2_{x_i} + 2t\bar{r}'_{x_i}\bar{\tau}'_{x_i} + t^2\bar{\tau}'^2_{x_i}} =$$

$$= \left|\bar{r}'_{x_i}\right| + t\frac{\bar{r}'_{x_i}\bar{\tau}'_{x_i}}{\left|\bar{r}'_{x_i}\right|} + t^2R,$$

где R ограничена некоторой постоянной, зависящей только от C.

Используя это разложение, получим

$$l_\gamma(t) = l_\gamma + t\int\limits_{\bar{\gamma}} \frac{\bar{r}'_{x_i}\bar{\tau}'_{x_i}}{\left|\bar{r}'_{x_i}\right|} dx_i + 0(t^2).$$

Отсюда, в силу определения бесконечно малого изгибания, получим

$$\int\limits_{\bar{\gamma}} \frac{\bar{r}'_{x_i}\bar{\tau}'_{x_i}}{\left|\bar{r}'_{x_i}\right|} dx_i = 0.$$

Так как это равенство справедливо и для каждой дуги кривой γ, то почти всюду на γ

$$\bar{r}'_{x_i}\bar{\tau}'_{x_i} = 0.$$

А так как кривая γ может проектироваться на любую прямую области $\bar{\omega}$, параллельную оси x_i, то почти всюду в области

$$\bar{r}'_{x_i}\bar{\tau}'_{x_i} = 0.$$

Рассмотрим теперь прямую p, которая лежит в двумерной плоскости, проходящей через оси x_i и x_k и задана уравнением

$$x_i - x_k = 0.$$

Пусть γ — плоская кривая на поверхности ω, которая проектируется в отрезок $\bar{\gamma}$ на прямой p;

s — длина, измеряемая вдоль отрезка $\bar{\gamma}$.

Тогда, как и в предыдущем случае, заключаем, что почти во всех точках отрезка $\bar{\gamma}$

$$\bar{r}'_s \bar{\tau}'_s = 0.$$

Так как функции удовлетворяют условию Липшица, то они имеют почти везде полный дифференциал.

В этих точках

$$\bar{r}'_s = \bar{r}'_{x_i} \frac{dx_i}{ds} + \bar{r}'_{x_k} \frac{dx_k}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{r}'_{x_i} + \bar{r}'_{x_k}).$$

$$\bar{\tau}'_s = \bar{\tau}'_{x_i} \frac{dx_i}{ds} + \bar{\tau}'_{x_k} \frac{dx_k}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\tau}'_{x_i} + \bar{\tau}'_{x_k}).$$

Следовательно, в этих точках

$$\bar{r}'_s \bar{\tau}'_s = \frac{1}{2} \bar{r}'_{x_i} \bar{\tau}_{x_i} + \frac{1}{2} (\bar{r}'_{x_i} \bar{\tau}'_{x_k} + \bar{r}'_{x_k} \bar{\tau}'_{x_i}) + \frac{1}{2} \bar{r}'_{x_k} \bar{\tau}_{x_k}.$$

Так как кривая γ может проектироваться в отрезок любой прямой, параллельной прямой p, то почти везде в области $\bar{\omega}$

$$\bar{r}'_s \bar{\tau}'_s = 0.$$

А так как почти всюду

$$\bar{r}'_{x_i} \bar{\tau}'_{x_i} = 0,$$

то почти везде

$$\bar{r}'_{x_i} \bar{\tau}'_{x_k} + \bar{r}'_{x_k} \bar{\tau}'_{x_i} = 0.$$

В точках существования полного дифференциала

$$d\bar{r} d\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{r}'_{x_i} \bar{\tau}'_{x_i} dx_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} (\bar{r}'_{x_i} \bar{\tau}'_{x_k} + \bar{r}'_{x_k} \bar{\tau}'_{x_i}) \, dx_i dx_k.$$

Осюда следует, что почти везде в области $\bar{\omega}$, а следовательно, и в ω

$$d\bar{r} d\bar{\tau} = 0.$$

3. Пусть теперь на выпуклой гиперповерхности F задано векторное поле $\bar{\tau}$, удовлетворяющее условию Липшица в любой компактной области на поверхности, причем почти везде

$$d\bar{r} d\bar{\tau} = 0.$$

Покажем, что поле $\bar{\tau}$ является изгибающим полем поверхности F.

Для этого достаточно показать, что поле $\bar{\tau}$ является изгибающим в окрестности ω любой точки.

Возьмем в окрестности ω произвольную кривую γ. Проекцию ее на плоскость $z=0$ обозначим через $\bar{\gamma}$.

Длины кривых γ и γ_t связаны соотношением

$$l_\gamma(t) = l_\gamma + t\int\limits_{\bar{\gamma}} \frac{\bar{r}'\bar{\tau}'}{|\bar{r}'|}ds + t^2R,$$

где дифференцирование ведется по дуге кривой $\bar{\gamma}$, а R ограничено постоянной, зависящей от постоянных Липшица, $\bar{r}$, $\bar{\tau}$ и длины кривой $\bar{\gamma}$.

Впишем в кривую γ ломаную Γ с достаточно малыми звеньями.

Спроектируем ее на плоскость $z=0$ в ломаную $\bar{\Gamma}$ и в кривую $\tilde{\Gamma}$ на поверхности ω. Сколь угодно малыми смещениями вершин ломаной Γ можно добиться, что на ломаной $\bar{\Gamma}$ будет почти везде выполняться равенство

$$\bar{r}'\bar{\tau}' = 0.$$

Длина ломаной $\tilde{\Gamma}_t$ связана с длиной ломаной $\tilde{\Gamma}$ в силу

$$\bar{r}'\bar{\tau}' = 0$$

соотношением

$$l_{\tilde{\Gamma}}(t) = l_{\tilde{\Gamma}} + t^2R.$$

При

$$\Gamma \to \gamma,\ l_{\tilde{\Gamma}} \to l_\gamma.$$

А так как нижний предел длин кривых, сходящихся к данной, не меньше длины предельной кривой, то

$$l_\gamma(t) \geqslant l_\gamma + t^2R_1,$$

где R_1 ограничено некоторой постоянной.

Следовательно, при достаточно малых по абсолютной величине t будем иметь

$$t\int\limits_{\bar{\gamma}} \frac{\bar{r}'\bar{\tau}'}{|\bar{r}'|}ds + t^2(R-R_1) \leqslant 0.$$

Так как R и R_1 ограничены, то при $t \to 0$ можем сделать заключение

$$\int_{\bar{\gamma}} \frac{\bar{r}'\bar{\tau}'}{|\bar{r}'|} ds = 0.$$

Но тогда

$$l_\gamma(t) = l_\gamma + t^2 R.$$

А это и значит, что поле $\bar{\tau}$ является изгибающим.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Киев, 1952.
2. А. В. Погорелов. Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей. Изд-во Харьковск. ун-та, 1959.
3. Ю. Г. Решетняк. Об одном обобщении выпуклых поверхностей. Математ. сб., т. 40/82/:3, 1956.

Поступила 10 мая 1971 г.

ОДИН КЛАСС КОМПЛЕКСОВ ПРОЕКТИВНОГО ВРАЩЕНИЯ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. А. Солейман

Киев

В работе [1] мы рассмотрели главные поверхности произвольного линейчатого комплекса эллиптического пространства. Уравнение, определяющее такие поверхности, оказалось почти тождественным характеристическому уравнению элементарной теории поверхностей второго порядка, что дало повод назвать его характеристическим уравнением комплекса (см. [2]).

Общий комплекс соответствует тому случаю, когда характеристическое уравнение имеет три различных корня, и следовательно, такой комплекс содержит три главных поверхности. Случай, когда все три корня характеристического уравнения равны между собой, соответствует линейному комплексу, у которого, таким образом, все линейчатые поверхности являются главными. Если лишь два корня характеристического уравнения равны между собой $(s_1 = s_2 \neq s_3)$, то соответствующие комплексы по аналогии с метрической теорией поверхностей второго порядка назвали комплексами проективного вращения (см. [2], [3]). У таких комплексов кратному корню $s = s_1 = s_2$ соответствует бесконечная совокупность главных поверхностей $\{F\}$, корню s_3 — некоторая не принадлежащая к этой совокупности главная поверхность F_3.

В настоящей работе мы рассматриваем один класс комплексов проективного вращения в эллиптическом пространстве. У рассматриваемого класса комплексов центры луча гармонически разделяют двойные инфлекционные центры.

Примем за эллиптическое пространство трехмерное проективное пространство $\boldsymbol{P}_3$ с абсолютом в виде невырожденной мнимой поверхности второго порядка

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^2 = 0. \tag{1}$$

Буквой $\boldsymbol{M}$ обозначена текущая аналитическая точка абсолюта, задаваемая своими координатами в некотором неподвижном репере.

Подвижной репер эллиптического пространства состоит из четырех аналитических точек $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ (задаваемых своими координатами в неподвижном репере), удовлетворяющих условиям

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{R}^2, \quad \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_i = 0, \quad \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j = \delta_{ij}, \tag{2}$$
$$(i,\ j = 1, 2, 3)$$

$\boldsymbol{R}$ — радиус кривизны эллиптического пространства.

Деривационные уравнения эллиптического пространства имеют вид

$$d\boldsymbol{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \boldsymbol{A}_\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3). \tag{3}$$

Дифференцируя равенства (2), получаем следующие соотношения между формами ω_α^β:

$$\omega_0^0 = 0, \ \omega_i^0 = -\frac{1}{R^2}\omega^i, \ \omega_i^j = -\omega_j^i, \tag{4}$$

где

$$\omega^i = \omega_0^i.$$

В дальнейшем мы будем полагать

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}, \ \boldsymbol{R} = 1.$$

Уравнения структуры эллиптического пространства имеют вид

$$D\omega^i = \left[\omega^j \omega_j^i\right],$$
$$D\omega_j^i = \left[\omega_j^k \omega_k^i\right] - [\omega^j \omega^i]. \tag{5}$$

Если поместить вершины $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_3$ в центры луча комплекса, а соответствующие им плоскости принять за координатные плоскости $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_1$, то репер становится каноническим репером комплекса, а формы ω_α^β будут связаны следующим соотношением (см. [3]):

$$\omega_3^1 = k\omega^2. \tag{6}$$

За базисные формы комплекса будем принимать формы ω^1, ω^2, ω_3^2, тогда продолжение уравнения (6) будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
dk &= p\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2, \\
-k\omega_1^2 + \omega^3 &= \alpha\omega^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^2, \\
-\omega_1^2 + k\omega^3 &= \beta\omega^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^2.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Инфлекционные центры луча определяются уравнением (см. [1])

$$
k^2qt^4 - 2k\alpha t^3 + (2k\gamma + p)\,t^2 - 2\beta t + r = 0, \tag{8}
$$

и уравнения, определяющие главные поверхности, имеют вид

$$
\begin{aligned}
\alpha\omega^2 + q\omega^1 + (\gamma - s)\,\omega_3^2 &= 0, \\
\beta\omega^2 + (\gamma - s)\,\omega^1 + r\omega_3^2 &= 0, \\
(p + 2ks)\,\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{9}
$$

где s — корень характеристического уравнения

$$
\begin{vmatrix}
\alpha & q & \gamma - s \\
\beta & \gamma - s & r \\
p + 2ks & \alpha & \beta
\end{vmatrix} = 0. \tag{10}
$$

Ограничимся рассмотрением того класса комплексов проективного вращения, у которых центры луча гармонически разделяют двойные инфлекционные центры. В этом случае из уравнения (8) получим

$$
\alpha = \beta = 0; \quad (2k\gamma + p)^2 = 4k^2qr. \tag{a}
$$

Внося (a) в систему (7) и присоединяя к системе (7) уравнение (6), мы получаем систему уравнений, которая характеризует рассматриваемый класс комплексов

$$
\begin{aligned}
\omega_3^1 &= k\omega^2, \\
dk &= p\omega^2, \\
-k\omega_1^2 + \omega^3 &= q\omega^1 + \gamma\omega_3^2, \\
-\omega_1^2 + k\omega^3 &= \gamma\omega^1 + r\omega_3^2, \\
(2k\gamma + p)^2 &= 4k^2qr.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Из уравнения (11.3) и (11.4) мы имеем

$$
\begin{aligned}
\omega^3 &= \frac{q - k\gamma}{1 - k^2}\,\omega^1 + \frac{\gamma - kr}{1 - k^2}\,\omega_3^2, \\
\omega_1^2 &= \frac{kq - \gamma}{1 - k^2}\,\omega^1 + \frac{k\gamma - r}{1 - k^2}\,\omega_3^2.
\end{aligned} \tag{12}
$$

(Случай клиффордовых комплексов $k = \pm 1$ исключен из рассмотрения).

Продифференцировав систему (11) внешним образом, мы получим

$$
\begin{gathered}
[dp\omega^2]+\frac{p(q-r)}{1-k^2}\left[\omega^1\omega_3^2\right]=0,\\
[\Delta q\omega^1]+\left[\Delta_1\gamma\omega_3^2\right]=0,\\
\left[\Delta_2\gamma\omega^1\right]+\left[\Delta r\omega_3^2\right]=0,\\
d\left\{(2k\gamma+p)^2-4k^2qr\right\}=0,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Delta q=dq+\frac{p(kq-\gamma)-2k(q^2+\gamma^2)+2q\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\omega^2,\\
\Delta_1\gamma=d\gamma+\left\{1-k^2+\frac{p(k\gamma-r)-2k\gamma(q+r)+(1+k^2)(\gamma^2+qr)}{1-k^2}\right\}\omega^2,\\
\Delta_2\gamma=d\gamma+\left\{1-k^2+\frac{p(k\gamma-q)-2k\gamma(q+r)+(1+k^2)(\gamma^2+qr)}{1-k^2}\right\}\omega^2,\\
\Delta r=dr+\frac{p(kr-\gamma)-2k(r^2+\gamma^2)+2r\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\omega^2.
\end{gathered}
$$

Из первого равенства (13) следует, что

$$
\frac{p(q-r)}{1-k^2}=0. \tag{в}
$$

Таким образом, мы имеем два случая

1. $q=r,\ p\neq 0$,
2. $p=0;\ q\neq r$,

которые рассмотрим.

1. $q=r,\ p\neq 0$, в этом случае система уравнений (11) принимает вид

$$
\begin{gathered}
\omega_3^1=k\omega^2.\\
dk=p\omega^2,\\
-k\omega_1^2+\omega^3=q\omega^1+\gamma\omega_3^2,\\
-\omega_1^2+k\omega^3+\gamma\omega^1+p\omega_3^2,\\
(2k\gamma+p)^2=4k^2q^2.
\end{gathered}
\tag{11. 1}
$$

Продолжение этой системы будет иметь вид

$$
\begin{gathered}
[dp\omega^2]=0,\\
\left[\Delta q\omega^1\right]+\left[\Delta\gamma\omega_3^2\right]=0,\\
\left[\Delta\gamma\omega^1\right]+\left[\Delta q\omega_3^2\right]=0,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$
d\left\{2k(\pm q-\gamma)\right\}=dp, \tag{d}
$$

где

$$p = 2k(\pm q - \gamma),$$

$$\Delta q = dq + \frac{p(kq-\gamma) - 2k(q^2+\gamma^2) + 2q\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\,\omega^2,$$

$$\Delta\gamma = d\gamma + \left\{1 - k^2 + \frac{p(k\gamma - q) - 4k\gamma q + (1+k^2)(\gamma^2+q^2)}{1-k^2}\right\}\omega^2.$$

Раскрывая систему (13) по лемме Картана, мы получаем

$$dp = \lambda\omega^2$$

$$dq = -\frac{p(kq-\gamma) - 2k(q^2+\gamma^2) + 2q\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\,\omega^2 + x_1 \mathrm{w}^1 + x_2\omega_3^2, \quad (14)$$

$$d\gamma = -\left\{1 - k^2 + \frac{p(k\gamma - q) - 4kq\gamma + (1+k^2)(\gamma^2+q^2)}{1-k^2}\right\}\omega^2 + x_2\omega^1 + x_1\omega_3^2.$$

Внося значения dq, $d\gamma$ в равенство (d), получим

$$2p(\pm q - \gamma)\,\omega^2 + 2k\left[\pm\left\{-\frac{p(kq-\gamma) - 2k(q^2+\gamma^2) + 2q\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\right\} + \left\{1-k^2 + \frac{p(k\gamma - q) - 4k\gamma q + (1+k^2)(\gamma^2+q^2)}{1-k^2}\right\}\right]\mathrm{w}^2 + 2k(\pm x_1 - x_2)\,\mathrm{w}^1 + 2k(\pm x_2 - x_1)\,\omega_3^2 = \lambda\omega^2.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = x_2 = x, \ \lambda_1 = 2k\{1 - k^2 + 3(q-\gamma)^2\},$$

или

$$x_1 = -x_2 = y, \quad \lambda_2 = 2k\{1 - k^2 - (q+\gamma)^2\}.$$

Таким образом, имеем два комплекса проективного вращения.

Рассмотрим сначала комплекс, для которого

$$x_1 = x_2 = x, \quad \lambda = 2k\{1 - k^2 + 3(q-\gamma)^2\}. \quad (e)$$

В этом случае для системы (11. 1) в соответствии с общепринятыми обозначениями (см. [4]), $\bar{q} = 3$, $\bar{s}_1 = 3$, следовательно, $\bar{s}_2 = \bar{q} - \bar{s}_1 = 0$, $Q = 3$, $N = 1$. Система не в инволюции.

Учитывая (e), систему (14) приведем к виду:

$$\begin{aligned} dp &= 2k\{1 - k^2 + 3(q-\gamma)^2\}\,\omega^2, \\ dq &= \mu\omega^2 + x(\omega^1 + \omega_3^2), \\ d\gamma &= \nu\omega^2 + x(\omega^1 + \omega_3^2), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\mu = -\frac{p(kq-\gamma) - 2k(q^2+\gamma^2) + 2q\gamma(1+k^2)}{1-k^2},$$

$$\nu = -\left\{1 - k^2 + \frac{p(k\gamma - q) - 4k\gamma q + (1+k^2)(\gamma^2+q^2)}{1-k^2}\right\},$$

или

$$\mu = -2q\frac{\gamma - kq}{1+k},$$
$$\gamma = \mu - \{1 - k^2 + (q-\gamma)^2\}.$$

Легко проверить, что

$$d\nu \equiv d\mu. \quad (\mathrm{Mod}\, \omega^2).$$

Продифференцируя систему (15) внешним образом, будем иметь

$$\left[\Delta x\, \omega^1 + \omega_3^2\right] = 0,$$

где

$$\Delta x = dx + f(k, q, \gamma)\, \omega^2.$$

Раскрывая по лемме Картана, получим

$$dx = -f(k, q, \gamma)\, \omega^2 + m\left(\omega^1 + \omega_3^2\right).$$

Здесь $f(k, q, \gamma)$ — какой-то коэффициент, зависящий от указанных аргументов, m — параметр продолжения.

При этом мы имеем $\bar{q} = 1$, $\bar{s}_1 = 1$, следовательно, $\bar{s}_2 = \bar{q} - \bar{s}_1 = 0$, $Q = 1$, $N = 1$. Система (15) в инволюции. Класс комплексов существует с произволом в одну функцию одного аргумента. У такого класса комплексов главные поверхности определяются уравнениями

$$\begin{aligned} q\omega^1 + (\gamma - s)\,\omega_3^2 &= 0, \\ (\gamma - s)\,\omega^1 + q\omega_3^2 &= 0, \\ (q - \gamma + s)\,\omega^2 &= 0, \end{aligned} \tag{9.1}$$

где s — корень характеристического уравнения

$$(s - \gamma + q)^2 (s - \gamma - q) = 0.$$

Таким образом, один из корней характеристического уравнения $s = \gamma - q$ является кратным, а корень $s = \gamma + q$ — простым.

Главная поверхность F_3, соответствующая простому корню, имеет уравнения (случай $q = 0$ исключается из рассмотрения)

$$\omega^2 = 0; \quad \omega^1 - \omega_3^2 = 0. \tag{16}$$

Следовательно, F_3 является цилиндром. Кратному корню $s = \gamma - q$ соответствует бесконечная совокупность главных поверхностей $\{F\}$. При этом цилиндр (см. [1])

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^1 + \omega_3^2 = 0 \tag{17}$$

является одной из главных поверхностей $\{F\}$. Легко заметить, что дифференциальные уравнения совокупности главных поверхностей имеют вид

$$\omega^2 = h\omega_3^2, \quad \omega^1 + \omega_3^2 = 0, \tag{18}$$

где h — произвольная функция.

Для второго комплекса проективного вращения (широта класса таких комплексов — также одна функция одного аргумента)

$$x_1 = -x_2 = y, \quad \lambda = 2k\{1 - k^2 - (q + \gamma)^2\}$$

главные поверхности определяются уравнениями

$$\begin{gathered} q\omega^1 + (\gamma - s)\,\omega_3^2 = 0, \\ (\gamma - s)\,\omega^1 + q\omega_3^2 = 0, \\ (q + \gamma - s)\,\omega^2 = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

где s — корень характеристического уравнения

$$(s - \gamma - q)^2 (s - \gamma + q) = 0.$$

Таким образом, корень $s = \gamma + q$ является кратным, а корень $s = \gamma - q$ — простым.

Главная поверхность F_3', соответствующая простому корню есть цилиндр (17). Кратному корню $s = \gamma + q$ соответствует бесконечная совокупность главных поверхностей $\{F'\}$. Цилиндр (16) является одной из главных поверхностей совокупности $\{F'\}$. Дифференциальные уравнения совокупности главных поверхностей $\{F'\}$ имеют вид

$$\omega^2 = \bar{h}\omega_3^2, \quad \omega^1 - \omega_3^2 = 0.$$

Все главные поверхности $\{F\}$ принадлежат конгруэнции (голономной)

$$\omega^1 + \omega_3^2 = 0,$$

все главные поверхности $\{F'\}$ принадлежат конгруэнции (также голономной)

$$\omega^1 - \omega_3^2 = 0.$$

Легко проверить, что конгруэнция

$$\omega^2 = 0 \tag{20}$$

голономная. При $q = r$ система (12) принимает вид

$$\omega^3 - \omega_1^2 = \frac{\gamma + q}{1 + k}(\omega^1 + \omega_3^2), \quad \mathrm{w}^3 + \mathrm{w}_1^2 = \frac{q - \gamma}{1 - k}(\omega^1 - \omega_3^2). \tag{12.1}$$

Отсюда следуют теоремы.

Теорема 1. *Конгруэнция $\omega^3 = 0$ двумя способами расслаивается в однопараметрическое семейство цилиндров.*

Теорема 2. *Рассматриваемая пара комплексов проективного вращения двумя способами расслаивается в двупараметрическое семейство цилиндров. Два семейства главных поверхностей любого комплекса из этой пары состоят из цилиндров. Один из этих цилиндров принадлежит бесконечной совокупности главных поверхностей комплекса.*

Впредь мы будем говорить только об одном из комплексов пары. При $\omega^2=0$ имеем

$$dA=\omega^1 A_1+\omega^3 A_3,$$
$$dA_3=-\omega^3 A+\omega_3^2 A_2.$$

Это означает, что точки A, A_3 (центры луча) описывают фокальные поверхности σ и σ_3 конгруэнции (20).

Из равенств

$$dA_1=-\omega^1 A+\omega_1^2 A_2,$$
$$dA_2=\omega_2^1 A_1+\omega_2^3 A_3. \qquad (\omega^2=0)$$

Следует, что прямая A_1A_2 также описывает конгруэнцию, фокальными поверхностями которой являются поверхности σ_1, σ_2, описываемые точками A_1 и A_2.

Аналогично заключаем, что поверхности σ и σ_1 являются фокальными поверхностями конгруэнции, описанной лучом AA_1.

Наконец, равенства

$$dA_3=-\omega_3 A+\omega_3^2 A_2,$$
$$dA_2=\omega_2^1 A_1+\omega_2^3 A_3. \qquad (\omega^2=0)$$

Показывают, что поверхности σ_3 и σ_2 являются фокальными поверхностями конгруэнции, описанной лучом A_3A_2.

Таким образом, имеем

Теорема 3. *Четверка поверхностей σ, σ_1, σ_2, σ_3 порождает четверку конгруэнций $\{AA_1\}$, $\{A_1A_2\}$, $\{A_2A_3\}$, $\{A_3A\}$, для которых они являются фокальными поверхностями с фокусами A, A_1, A_2, A_3.*

Легко доказать следующую теорему:

Теорема 4. *Все четыре конгруэнции $\{AA_1\}$, $\{A_1A_2\}$, $\{A_2A_3\}$, $\{A_3A\}$ являются конгруэнциями W.*

Уравнение

$$\omega^1-\omega_3^2=0 \qquad (21)$$

вполне интегрируемо и определяет некоторую голономную конгруэнцию, принадлежащую рассматриваемому комплексу, как об этом было сказано выше. Точки $A+\frac{1}{\sqrt{k}}A_3$, $A-\frac{1}{\sqrt{k}}A_3$ являются фокусами этой конгруэнции. Таким образом, рассматриваемый комплекс проективного вращения расслаивается в однопараметрическое семейство таких конгруэнций.

При $\omega_3^2=\omega^1$ мы имеем

$$\omega^3=-\omega_1^2=\varkappa\omega^1,$$

где

$$\varkappa=\frac{q+\gamma}{1+k}.$$

Из равенств

$$dA = \omega^1 (A_1 + \varkappa A_3) + \omega^2 A_2, \qquad (\omega_3^2 = \omega^1)$$
$$dA_2 = -\omega^2 A + \omega^1 (\varkappa A_1 - A_3)$$

следует, что

$$d[AA_2] = \omega^1 ([A_1 + \varkappa A_3, \ A_2] + [A, \ \varkappa A_1 - A_3]),$$

а это означает, что прямая AA_2 описывает линейчатую поверхность. Эта поверхность является цилиндром. Действительно, прямые AA_2, A_1A_3 пересекают абсолют эллиптического пространства

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$$

в точках

$$M_1 = A + iA_2; \ M_2 = A - iA_2, \qquad (i = \sqrt{-1})$$
$$M_3 = A_1 + iA_3; \ M_4 = A_1 - iA_3.$$

Образующими абсолюта, проходящими, например, через точку M_1, являются прямые M_1M_3 и M_1M_4. Находим дифференцированием

$$dM_1 = dA + idA_2 = (\omega^1 + i\omega_2^1) A_1 + (\omega^3 + i\omega_2^3) A_3 - i\omega^3 (A + iA_2).$$

При $\omega_3^2 = \omega^1$ (в то же время $\omega_1^2 = -\omega^3$) мы имеем

$$dM_1 = (\omega^1 + i\omega^3)(A_1 - iA_3) - i\omega^3 M_1 = (\omega^1 + i\omega^3) M_4 - i\omega^3 M_1.$$

Это показывает, что точка M_1 перемещается по прямой M_1M_4. Утверждение доказано.

Аналогично можно было бы доказать, что прямая A_1A_3 также описывает цилиндр.

Из равенств

$$dA_1 = -\omega^1 (A + \varkappa A_2) + \omega_1^3 A_3 \qquad (\omega_3^2 = \omega^1)$$
$$dA_2 = -\omega^2 A + \omega^1 (A_1 - \varkappa A_3)$$

следует, что прямая A_1A_2 описывает конгруэнцию. Точки

$$A_1 + \sqrt{k} A_2, \ A_1 - \sqrt{k} A_2$$

являются фокусами этой конгруэнции.

Аналогично прямая AA_1 описывает также конгруэнцию с фокусами

$$A + \frac{1}{\sqrt{k}} A_1, \ A - \frac{1}{\sqrt{k}} A_1.$$

Наконец, прямая A_2A_3 описывает конгруэнцию с фокусами

$$A_3 + \sqrt{k} A_2, \ A_3 - \sqrt{k} A_2.$$

Как уже говорилось, конгруэнция

$$\omega^1 + \omega_3^2 = 0 \qquad (22)$$

голономная. Рассматриваемый комплекс проективного вращения расслаивается также в однопараметрическое семейство таких конгруэнций. Точки

$$A + \frac{i}{\sqrt{k}} A_3, \ A - \frac{i}{\sqrt{k}} A_3$$

являются фокусами конгруэнции (22). Эти точки совпадают с двойными инфлекционными центрами луча AA_3.

Конгруэнция (22) расслаивается в однопараметрическое семейство цилиндров

$$\omega^1 + \omega_3^2 = 0, \ \omega^2 = 0.$$

Аналогично можно показать и в этом случае, что прямые AA_2, A_1A_3 описывают цилиндр, прямые AA_3, A_3A_2, A_2A_1, A_1A описывают конгруэнции.

Конгруэнции (21) и (22) определяют некоторую линейчатую поверхность $\omega^1 = 0$, $\omega_3^2 = 0$, которую назовем координатной поверхностью. У такой поверхности точки прикосновения совпадают с центрами луча A и A_3.

2. $p = 0$, в таком случае система уравнений (11) принимает вид

$$\begin{aligned} &\omega_3^1 = k\omega^2, \\ &dk = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} -k\omega_1^2 + \omega^3 &= q\omega^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega_1^2 + k\omega^3 &= \gamma\omega^1 + r\omega_3^2, \\ \gamma^2 &= qr. \end{aligned} \tag{f}$$

Продифференцировав эту систему внешним образом, мы получаем

$$\begin{aligned} &[\Delta q\omega^1] + [\Delta\gamma\omega_3^2] = 0, \\ &[\Delta\gamma\omega^1] + [\Delta r\omega_3^2] = 0, \\ &2\gamma d\gamma = qdr + rdq, \end{aligned} \tag{f'}$$

где

$$\Delta q = dq + \frac{2q\gamma(1+k^2) - 2k(q^2+\gamma^2)}{1-k^2}\omega^2,$$

$$\Delta\gamma = d\gamma + \left\{1 - k^2 + \frac{2\gamma^2(1+k^2) - 2k\gamma(q+r)}{1-k^2}\right\}\omega^2,$$

$$\Delta r = dr + \frac{2r\gamma(1+k^2) - 2k(r^2+\gamma^2)}{1-k^2}\omega^2.$$

Раскрывая по лемме Картана, получаем

$$dq = \frac{2k(q^2+\gamma^2) - 2q\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\omega^2 + x_1\omega^1 + x_2\omega_3^2,$$

$$d\gamma = \left\{\frac{2k\gamma(q+r) - 2\gamma^2(1+k^2)}{1-k^2} - (1-k^2)\right\}\omega^2 + x_2\omega^1 + x_3\omega_3^2,$$

$$dr = \frac{2k(r^2+\gamma^2) - 2r\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\omega^2 + x_3\omega^1 + y\omega_3^2.$$

Внося значения dq, $d\gamma$, dr в равенство (f'), получим

$$2\gamma\left\{\frac{2k\gamma(q+r) - 2\gamma^2(1+k^2)}{1-k^2} - (1-k^2)\right\}\omega^2 + 2\gamma x_2\omega^1 + 2\gamma x_3\omega_3^2 =$$

$$= q\left\{\frac{2k(r^2+\gamma^2) - 2r\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\omega^2 + x_3\omega^1 + y\omega_3^2\right\} + r\left\{x_1\omega^2 + x^2\omega_3^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2k(q^2+\gamma^2) - 2q\gamma(1+k^2)}{1-k^2}\omega^2\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma(1-k^2) = 0,$$
$$2\gamma x_2 = qx_3 + rx_1,$$
$$2\gamma x_3 = dy + rx_2.$$

Из первого равенства имеем два случая

$\mathring{\mathrm{I}}$. $\gamma = 0$, т. е. $qr = 0$.

Пусть $q = 0$ и $r \neq 0$, тогда система (23) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= k\omega^2, \\ dk &= 0, \\ -k\omega_1^2 + \omega^3 &= 0, \\ -\omega_1^2 + k\omega^3 &= r\omega_3^2. \end{aligned} \tag{23.1}$$

Продифференцировав эту систему внешним образом, мы получаем

$$(1-k^2)\left[\omega^2\omega_3^2\right] = 0,$$

$$(1-k^2)\left[\omega^2\omega^1\right] + \left[dr - \frac{2kr^2}{1-k^2}\omega^2,\ \omega_3^2\right] = 0.$$

Отсюда заключаем, что $1-k^2 = 0$. При этом система (23. 1) принимает вид

$$\omega_3^1 = \pm\omega^2,$$
$$-\omega_1^2 \pm \omega^3 = 0,$$
$$-\omega_1^2 \pm \omega^3 = r\omega_3^2.$$

Из этого следует, что $r = 0$. Следовательно, если $\gamma = 0$, то $q = 0$ и $r = 0$. Но в таком случае инфлекционные центры луча неопределены ($q = r = \alpha = \beta = \gamma = p = 0,\ 1-k^2 = 0$)

Комплекс одновременно клиффордов-линейный (см. [5]).

2. $1-k^2=0$, $\gamma\neq 0$, но это справедливо лишь для клиффордова комплекса. При этом система (23) теперь принимает вид:

$$\omega_3^1=\pm\omega^2,$$
$$-\omega_1^2\pm\omega^3=\pm(q\omega^1+\gamma\omega_3^2),$$
$$-\omega_1^2\pm\omega^3=\gamma\omega^1+r\omega_3^2,$$
$$\gamma^2=qr.$$

Отсюда следует, что

$$q=r=\pm\gamma,$$
$$\omega_3^1=\pm\omega^2,$$
$$-\omega_1^2\pm\omega^3=\gamma(\omega^1\pm\omega_3^2).$$

Таким образом, имеем два комплекса проективного вращения. Эти комплексы являются клиффордовыми [5].
У этих комплексов инфлекционные центры луча совпадают с точками

$$\boldsymbol{A}+i\boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}-i\boldsymbol{A}_3,$$

т. е. принадлежит абсолюту.

Главные поверхности комплекса $p=\alpha=\beta=0$, $q=r=\gamma$, определяются уравнениями

$$\gamma\omega^1+(\gamma-s)\,\omega_3^2=0,$$
$$(\gamma-s)\,\omega^1+\gamma\omega_3^2=0,$$
$$2ks\omega^2=0,$$

где s — корень характеристического уравнения

$$s^2(s-2\gamma)=0.$$

Таким образом, корень $s=0$ является кратным, а корень $s=2\gamma$ — простым. Главная поверхность $\boldsymbol{F}_3$, соответствующая простому корню $s=2\gamma$, есть цилиндр

$$\omega^2=0,\ \omega^1-\omega_3^2=0.$$

Кратному корню $s=0$ соответствует бесконечная совокупность главных поверхностей $\{\boldsymbol{F}\}$. Цилиндр

$$\omega^2=0,\ \omega^1+\omega_3^2=0$$

принадлежит этой совокупности.

Аналогично для комплекса $p=\alpha=\beta=0$, $q=r=-\gamma$, корень $s=0$, является кратным, а корень $s=2\gamma$ — простым. Главная поверхность F_3' этого комплекса, соответствующая простому корню $s=2\gamma$, определяется уравнениями

$$\omega^2=0,\ \omega^1+\omega_3^2=0.$$

Кратному корню $s=0$ соответствует бесконечная совокупность главных поверхностей $\{F'\}$, очевидно, что цилиндр

$$\omega^2=0,\ \omega^1-\omega_3^2=0$$

принадлежит этой совокупности.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Комплексы проективного вращения, которые характеризуются равенствами*

$$p=\alpha=\beta=0,\ q=r\pm\gamma,\ 1-k^2=0,$$

являются клиффордовыми комплексами, два семейства главных поверхностей каждого такого комплекса состоят из цилиндров. Один из этих цилиндров принадлежит бесконечной совокупности главных поверхностей комплекса.

Имеет место следующая

Теорема 6. *Комплексы с двумя двойными инфлекционными центрами на каждом луче, совпадающими с двумя центрами луча, не существуют.*

Доказательство. Пусть вершины AA_3 (центры луча) тетраэдра совпадают с двойными инфлекционными центрами. Из (8) найдем

$$q=r=\alpha=\beta=0,\ 2k\gamma+p\neq 0.$$

(мы исключаем из рассмотрения специальные комплексы, для которых $k=0$).

В этом случае система уравнений (7) и присоединенное к ней уравнение (6) принимают вид

$$\begin{aligned}&\omega_3^1=k\omega^2,\ dk=p\omega^2,\\&-k\omega_1^2+\omega^3=\gamma\omega_3^2,\\&-\omega_1^2+k\omega^3=\gamma\omega^1.\end{aligned}\tag{24}$$

Продифференцировав эту систему внешним образом, мы получим

$$\begin{aligned}&[dp\omega^2]=0,\\&[\Delta\gamma\omega_3^2]-\frac{\gamma(p+2k\gamma)}{1-k^2}[\omega^2\omega^1]=0,\\&[\Delta\gamma\omega^1]-\frac{\gamma(p+2k\gamma)}{1-k^2}[\omega^2\omega_3^2]=0,\end{aligned}\tag{25}$$

где

$$\Delta\gamma = d\gamma + \left\{1 - k^2 + \frac{k\gamma p}{1-k^2} + \frac{\gamma^2(1+k^2)}{1-k^2}\right\}\omega^2,$$

отсюда следует, что

$$\gamma(2k\gamma + p) = 0.$$

Поскольку $2k\gamma + p \neq 0$, то только $\gamma = 0$. В этом случае

$$-k\omega_1^2 + \omega^3 = 0,$$

$$-\omega_1^2 + k\omega^3 = 0.$$

Отсюда $1 - k^2 = 0$. Следовательно, $dk = 0$, т. е. $p = 0$. Но тогда $2k\gamma + p = 0$. Это невозможно. Если бы мы предположили, что

$$\omega_1^2 = 0, \; \omega^3 = 0,$$

то из равенства

$$D\omega^3 = 0$$

получили бы

$$k[\omega^1\omega^2] + [\omega^2\omega_3^2] = 0,$$

при независимых формах ω^1, ω^2 ω_3^2. Это невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Солейман. Об одном классе комплексов в эллиптическом пространстве. «Укр. геометр. сб.», вып. 10, 1971.
2. Н. И. Кованцов. Пары комплексов проективного вращения. ДАН СССР, 1955, том 100, № 5.
3. Н. И. Кованцов. Теория комплексов, Киев, 1963.
4. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана, М. — Л., 1948.
5. Н. И. Кованцов. Теория комплексов в эллиптическом пространстве. An. Ştiinţ. Univ — Jaşi, 1963, Sec I, 9 № 1.

Поступила 22 марта 1971 г.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513:517 **О поведении линий тока векторного поля в окрестности цикла.** Аминов Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 3—12.

Рассматриваются два вопроса относительно поведения линий тока единичного векторного поля $\boldsymbol{n}$ в E^3 в окрестности замкнутой линии тока L: 1) вращение полос, составленных из линий тока поля $\boldsymbol{n}$, 2) устойчивость L как замкнутой траектории уравнения $\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{n}(x)$. Вводится геометрический инвариант $\Lambda = \sqrt{(\operatorname{div}\boldsymbol{n})^2 - 4K + (\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{n})^2}$, где K — полная кривизна поля $\boldsymbol{n}$. Если $\Lambda = 0$, то бесконечно близкие к L траектории ведут себя одинаковым образом. В работе, в частности, доказывается теорема об устойчивости: если выполнено

$$\int\limits_L \operatorname{div}\boldsymbol{n}\, ds < -\int\limits_L \Lambda\, ds,$$

то L — орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл. В случае $\Lambda = 0$ на L устанавливается теорема о вращении полос.

Библиографических ссылок 4.

УДК 539.3.534.1+513 **Геометрическое исследование неустойчивости безмоментных оболочек.** Бабенко В. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 12—22.

Показано, что исследование неустойчивости безмоментного напряженного состояния оболочки на основе вариационного принципа $\boldsymbol{B}$, полученного А. В. Погореловым, можно производить без предварительного решения задачи о построении разрывных изгибающих полей, фигурирующих в принципе $\boldsymbol{B}$. В случае строго выпуклых оболочек задача об определении области значений нагрузок, при которых соответствующее напряженное безмоментное состояние оболочек устойчиво (неустойчиво) сводится к нахождению экстремума некоторого алгебраического выражения, составленного из величин, описывающих геометрию оболочки, и инвариантов тензора поля напряжения. Приведены значения верхних критических нагрузок для конкретных способов нагружения оболочек вращения.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513 **Обобщение соответствия Сегре на гиперповерхности.** Бланк Я. П., Бондина Н. Н., Маркова Л. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 22—26.

Получено бирациональное соответствие третьей степени между 2-плоскостями, инцидентными точке x гиперповерхности, и $(n-3)$-плоскостями, инцидентными ее касательной гиперплоскости ξ, обобщающее известное соответствие К. Сегре проективно-дифференциальной теории поверхностей трехмерного пространства.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513.84

Теоретико-групповая аксиоматика n-мерного флагового пространства. Болотин В. Р. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 27—35.

В статье построена теоретико-групповая аксиоматика n-мерного флагового пространства, родственная разработанным в кильской школе Ф. Бахмана для евклидовой, гиперболической и эллиптической геометрий.

Доказано, что идеальное пространство, порожденное группой, удовлетворяющей предложенной системе аксиом, является n-мерным аффинным пространством над полем характеристики $\neq 2$. Непротиворечивость аксиоматики доказывается тем, что ей удовлетворяет группа движений n-мерного флагового пространства над полем действительных чисел.

Библиографических ссылок 4.

УДК — 513

О строении гиперповерхностей с нулевой мерой Хаусдорфа сферического изображения. Борисенко А. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 36—45.

В работе доказывается ряд теорем о строении гиперповерхностей, имеющих нулевую k-мерную меру Хаусдорфа сферического изображения. Если гладкая гиперповерхность евклидового пространства E^n имеет сферическое изображение, двумерная хаусдорфова мера которого равна нулю, то через каждую точку проходит $n - 2$-мерная образующая.

Если гиперповерхность полная, то она является цилиндром с $n - 2$-мерными образующими.

Для выпуклой гиперповерхности с нулевой k-мерной мерой Хаусдорфа сферического изображения показано, что через каждую ее точку проходит $n - k$-мерная образующая.

Если двумерная мера равна нулю, то выпуклая гиперповерхность развертывается на гиперплоскость.

Библиографических ссылок 7.

УДК — 513

О геодезическом отображении эквидистантных римановых пространств и пространств первого класса. Горбатый Е. З. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 45—53.

В работе рассматривается в инвариантном виде нетривиальное геодезическое отображение (н. г. о.) эквидистантных римановых пространств V_n. Затем исследуется н. г. о. пространств V_n первого класса. Доказана следующая теорема: *Класс пространств, на которые допускают н. г. о. V_n первого класса, не выше двух.*

Библиографических ссылок 7.

УДК — 513

О разрывах первых производных метрического тензора пространства-времени в гармонической системе координат. Денисов В. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 53—56.

В работе исследованы условия соединения на гиперповерхности разрыва первых производных метрического тензора пространства — времени в гармонической системе координат.

УДК 513 **Об условиях Гаусса—Кодацци для вполне геодезических поверхностей финслерова пространства.** Слободян Ю.С. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 124—131.

В работе доказано, что кривизна финслерова пространства относительно связности Бервальда и внутренней связности Рунда по двумерной площадке, касательной к вполне геодезической гиперповерхности в некоторой точке M, совпадает с соответствующей кривизной поверхности F в точке M.

Рассмотрены также аналоги уравнений Кодацци для различных связностей Картана.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513 **Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей.** Сенькин Е. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 131—152.

Доказывается однозначная определенность и жесткость общих замкнутых выпуклых гиперповерхностей евклидова пространства, а также локальная однозначная определенность и жесткость в окрестности точек строгой выпуклости.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513 **Один класс комплексов проективного вращения в эллиптическом пространстве.** Солейман М. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 12, 1972, стр. 152—165.

Рассматриваются комплексы проективного вращения в эллиптическом пространстве, у которых центры луча гармонически разделяют его двойные инфлекционные центры. Условия гармонического разделения приводят к алгебраическим соотношениям между инвариантами второй дифференциальной окрестности, которые распадаются естественным образом на два частных случая, каждый из этих случаев детально использован вплоть до безынтегрального представления.

Библиографических ссылок 6.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В «Украинском геометрическом сборнике» публикуются работы, содержащие законченные результаты научных исследований по геометрии, преимущественно выполненные в пределах УССР.

Согласно Положению о тематических сборниках, утвержденному Советом Министров УССР 7. 1. 1964 г., статьи по объему не должны превышать 0,5 печатного листа (12 страниц машинописи); в отдельных случаях редакционной коллегии дается право помещать статьи большего объема. Согласно Положению, авторы не получают гонорара за статьи, бесплатных экземпляров сборника и оттисков статей; оттиски могут быть изготовлены по специальному заказу за счет автора.

К каждой статье необходимо приложить ее реферат объемом не более полстраницы машинописи через два интервала. К статьям аспирантов и соискателей ученых степеней редколлегия просит прилагать сведения о сроке предполагаемой защиты диссертации, к которой относится статья.

Рукопись должна быть четко напечатана на машинке в двух экземплярах через два интервала на одной стороне листа. Формулы, буквенные обозначения и символы должны быть вписаны от руки чернилами или пастой черного цвета четко, без помарок, с ясным различием в написании прописных и строчных букв и букв разных алфавитов; вписываемые строчные буквы должны быть по размеру не менее чем в полтора раза больше строчных букв машинописи, такого же размера должны быть буквы и цифры, стоящие в индексах. Все вписываемые от руки знаки нужно размещать значительно просторнее, чем в обычном письме от руки, чтобы можно было сделать их разметку для набора; для каждой строки вписываемых формул нужно отводить не менее двух-трех строк машинописного текста.

Первый экземпляр статьи должен быть размечен. Для этого сходные по написанию строчные и прописные буквы (c, g, k, p, s, u, v, w, x, y, z, ψ, θ,) подчеркиваются простым карандашом двумя короткими черточками: прописные снизу, строчные сверху. Греческие буквы обводятся красным карандашом, готические — синим, векторы подчеркиваются снизу (не сверху!) одной черточкой жирно простым карандашом. Текст, выделенный *курсивом*, подчеркивается волнистой линией простым карандашом. Иностранные слова вписываются на машинке с латинским шрифтом или четко от руки чернилами и тщательно сверяются с оригиналом.

Чертежи прилагаются только в случае необходимости, хорошего качества, выполненные тушью на кальке или на плотной чертежной бумаге. На обороте каждого чертежа указываются фамилия автора, название статьи и номер чертежа. В тексте должна быть ссылка на рисунок и указано его место пометкой на поле карандашом, обведенной рамкой.

Список литературы помещается в конце статьи строго в том порядке, в каком они впервые встречаются в тексте. Библиографические данные приводятся в следующем порядке:

для книг — инициалы и фамилия автора, полное название книги, номер тома, издательство, место и год издания;

для журнальных статей — инициалы и фамилия автора, полное название статьи, название журнала или сборника, № или название серии, № тома, № выпуска, место и год издания, страницы начала и конца статьи.

Не допускаются ссылки на неопубликованные работы и ссылки в заголовке статьи.

В конце рукописи просим сообщать полное имя и отчество, адрес автора и место его работы.