Украинский геометрический сборник

выпуск 11

издательство харьковского университета

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 11

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков
1971

Выпуск посвящен вопросам геометрии в целом в евклидовых и неевклидовых пространствах различных размерностей (изгибание, строение поверхности или развертки и т. д.), вопросам геометрии обобщенных пространств, пространств с заданной фундаментальной группой и другим.

Адрес редакционной коллегии:

Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

2—2—3

ХАРЬКОВСКАЯ ТИПООФСЕТНАЯ ФАБРИКА «КОММУНИСТ»

ВЫРАЖЕНИЕ СТЕПЕНИ НОРМАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ НЕЧЕТНОМЕРНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА ЧЕРЕЗ РИМАНОВ ТЕНЗОР

Ю. А. Аминов

(Харьков)

В работе Аллендорфера и Вейля [1] показано, что для замкнутого четномерного риманова пространства M^{2p} с характеристикой Эйлера — Пуанкаре χ имеет место следующее обобщение формулы Гаусса — Бонне:

$$(-1)^p \frac{\chi \omega^{2p}}{2} = \int\limits_{M^{2p}} \psi(x) \sqrt{g}\, dx, \tag{1}$$

где x — точка M^{2p}, ω^{2p} — объем единичной $2p$-мерной сферы S^{2p}, $\sqrt{g}dx$ — элемент объема поверхности, $g = \det \| g_{ij} \|$ — детерминант матрицы коэффициентов первой квадратичной формы,

$$\psi(x) = \frac{\varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_{2p}} \varepsilon^{\nu_1 \ldots \nu_{2p}}}{2^p (2p)! g} \cdot R_{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} \ldots R_{\mu_{2p-1} \mu_{2p} \nu_{2p-1} \nu_{2p}}. \tag{2}$$

Простое доказательство этой формулы дано в работе Черна [2].

Если замкнутое риманово пространство M^{2p} является гиперповерхностью евклидова пространства, то поле нормалей определяет отображение f: $M^{2p} \to S^{2p}$, и степень этого отображения по теореме Хопфа равна половине характеристики Эйлера — Пуанкаре. Таким образом, для четномерного пространства M^{2p} формула выражает в этом случае степень нормального отображения через интеграл от внутренней величины. Мы будем рассматривать нечетномерную замкнутую ориентируемую гиперповерхность M^{2p+1} в евклидовом пространстве E^{2p+2} и найдем выражение для степени нормального отображения f: $M^{2p+1} \to S^{2p+1}$, обозначая ее через N, с помощью интеграла по M^{2p+1} от выражения, определяемого через риманов тензор и коэффициенты метрического тензора. Ответ следующий. Рассмотрим выражения, подобные (2), но без деления на g:

$$\psi_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} 2^{-p} (2p!)^{-1} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{\alpha-1} \mu_{\alpha+1} \dots \mu_{2p+1}} \cdot \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_{\beta-1} \nu_{\beta+1} \dots \nu_{2p+1}} \times \\ \times R_{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} \dots R_{\mu_{2p} \mu_{2p+1} \nu_{2p} \nu_{2p+1}}, \tag{3}$$

где индексы $(\mu_1 \dots \mu_{\alpha-1} \mu_{\alpha+1} \dots \mu_{2p+1})$ принимают все значения от 1 до $2p+1$, кроме α, а индексы ν_i принимают все значения от 1 до $2p+1$, кроме β. При этом символы Кронекера $\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{\alpha-1} \mu_{\alpha+1} \dots \mu_{2p+1}}$ и $\varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_{\beta-1} \nu_{\beta+1} \dots \nu_{2p+1}}$ равны 1 или -1, если соответствующая подстановка, например,

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \dots \mu_{\alpha-1} & \mu_{\alpha+1} & \dots \mu_{2p+1} \\ 1 \dots \alpha - 1 & \alpha + 1 & \dots 2p+1 \end{pmatrix},$$

является четной или нечетной. Тогда имеет место

Теорема: *степень нормального отображения N определяется следующей формулой:*

$$N\omega^{2p+1} = \int\limits_{M^{2p+1}} \pm \frac{\sqrt[2p]{\det \| \psi_{\alpha\beta} \|}}{g} \, dV, \tag{4}$$

где dV — элемент объема M^{2p+1}.

Особенно простой вид формула (4) имеет для трехмерной гиперповерхности M^3 в евклидовом пространстве E^4:

$$N\omega^3 = \int\limits_{M^3} \pm \sqrt{\begin{vmatrix} R_{2323} R_{1332} R_{1223} \\ R_{2331} R_{1313} R_{2113} \\ R_{3221} R_{3112} R_{1212} \end{vmatrix}} \frac{dV}{g}. \tag{5}$$

Заметим, что подкоренное выражение в правой части формулы (4) определяется внутренней геометрией поверхности M^{2p+1}. Так как степень нормального отображения не меняется при гомотопии M^{2p+1}, не выводящей поверхность из E^{2p+2}, то правая часть (4) также не меняется при таких деформациях, т. е. эта величина является относительным инвариантом. Однако, она не является топологическим инвариантом, как это имеет место для правой части (1) четномерных пространств. Так, если M^{2p+1} гомеоморфно сфере S^{2p+1}, то для любого нечетного числа $2p+1$, не равного 1, 3 и 7, из работ Милнора [3] и Кервера [4] следует, что степень нормального отображения N может быть произвольным нечетным числом, но не может быть четным. Если $2p+1=3$, то число N, как показано в работе Милнора [3], может быть произвольным целым числом. Из работ [3] и [5] следует, что S^7 можно погрузить в E^8 с любой степенью нормального отображения.

Заметим еще, что знак $+$ или $-$ перед корнем в правой части формулы (4), вообще говоря, не определяется локальной внутренней геометрией поверхности даже после выбора определенной ориентации.

Докажем (4). Пусть $g_{ij}du^i du^j$ и $L_{ij}du^i du^j$ — первая и вторая квадратичные формы поверхности M^{2p+1}. Для определения экстремальных значений нормальной кривизны

$$\lambda = \frac{L_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j},$$

как обычно имеем уравнение

$$\det \| L_{ij} - \lambda g_{ij} \| = 0.$$

Следовательно, для произведения всех экстремальных значений нормальной кривизны λ_i имеем выражение

$$\lambda_1 \ldots \lambda_{2p+1} = \frac{\det \| L_{ij} \|}{\det \| g_{ij} \|}.$$

Якобиан отображения f равен произведению всех экстремальных нормальных кривизн $\lambda_1 \ldots \lambda_{2p+1}$. Так как образ M^{2p+1} при отображении f покрывает единичную сферу S^{2p+1} некоторое целое число раз, то интеграл от якобиана отображения f по всему M^{2p+1} равен $\omega^{2p+1}N$:

$$\omega^{2p+1}N = \int\limits_{M^{2p+1}} \lambda_1 \ldots \lambda_{2p+1} dV = \int\limits_{M^{2p+1}} \frac{\det \| L_{ij} \|}{\det \| g_{ij} \|} dV. \tag{6}$$

Найдем теперь выражение $\det \| L_{ij} \|$ через тензор Римана. Пусть в некоторой точке x поверхности $\det \| L_{ij} \| \neq 0$. Матрицу, обратную к матрице $\| L_{ij} \|$, обозначим через $\| A_{\alpha\beta} \|$. Ее элементы представляют собой алгебраические дополнения элементов матрицы $\| L_{ij} \|$, деленные на $\det \| L_{ij} \|$. Покажем, что алгебраическое дополнение матрицы $\| L_{ij} \|$ к элементу $L_{\alpha\beta}$ равно выражению $\psi_{\alpha\beta}$ (3). Обозначим его пока через $\Theta_{\alpha\beta}$. Каждое алгебраическое дополнение $\Theta_{\alpha\beta}$ есть матрица четной размерности $2p$. Используя теорему Лапласа для двумерных миноров и их дополнений, найдем, что $\Theta_{\alpha\beta}$ представится в виде

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} 2^{-p} (2p!)^{-1} \varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_{\alpha-1} \mu_{\alpha+1} \ldots \mu_{2p+1}} \times \\ \times \varepsilon^{\nu_1 \ldots \nu_{\beta-1} \nu_{\beta+1} \ldots \nu_{2p+1}} \cdot (L_{\mu_1\nu_1} L_{\mu_2\nu_2} - L_{\mu_1\nu_2} L_{\mu_2\nu_1}) \times \\ \times \ldots (L_{\mu_{2p}\nu_{2p}} L_{\mu_{2p+1}\nu_{2p+1}} - L_{\mu_{2p}\nu_{2p+1}} L_{\mu_{2p+1}\nu_{2p}}), \end{aligned}$$

причем в этом выражении индексы μ_i и ν_j принимают все значения от 1 до $2p+1$, кроме α и β соответственно. Так как выполнены условия интегрируемости, то выражения в скобках можно заменить через тензор Римана:

$$R_{i_1 i_2 j_1 j_2} = L_{i_1 j_1} L_{i_2 j_2} - L_{i_1 j_2} L_{i_2 j_1}.$$

Поэтому действительно $\Theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}$. Для элементов матрицы $\| A_{\alpha\beta} \|$ имеем

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\psi_{\alpha\beta}}{\det \| L_{ij} \|}.$$

Так как определитель матрицы $\| A_{\alpha\beta} \|$ равен $\frac{1}{\det \| L_{ij} \|}$, а порядок этой матрицы $(2p+1)$, то мы получим

$$\det \| A_{\alpha\beta} \| = \frac{1}{\det \| L_{ij} \|} = \frac{\det \| \psi_{\alpha\beta} \|}{(\det \| L_{ij} \|)^{2p+1}}. \tag{7}$$

Отсюда находим

$$\det \| L_{ij} \| = \pm \sqrt[2p]{\det \| \psi_{\alpha\beta} \|}.$$

Подставив это выражение в (6), получим доказываемую формулу (4). Из формулы (7) вытекает следствие: *для погружения риманова пространства M^{2p+1} в евклидово E^{2p+2} необходимо*:

$$\det \| \psi_{\alpha\beta} \| \geqslant 0.$$

Рассмотрим теперь поверхность M^n с краем. Пусть поверхность задана в виде $x_{n+1} = \Phi(x_1, \dots x_n)$ над некоторой областью G евклидова пространства $(x_1, \dots, x_n)$. Мы выразим интеграл от Гаусс — Кронекеровской кривизны K по объему V поверхности M^n через интеграл по границе ∂G от величины, определяемой производными функции Φ. Легко найти, что

$$K = \det \| \Phi_{x_i x_j} \| (1 + |\operatorname{grad} \Phi|^2)^{-\frac{n+2}{2}}.$$

Элемент объема поверхности

$$dV = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} \Phi|^2}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Поэтому можем записать

$$\int_{M^n} K dV = \int_G \frac{\det \| \Phi_{x_i x_j} \| dx_1 \dots dx_n}{(1 + |\operatorname{grad} \Phi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{8}$$

Через $B_{\alpha\beta}$ обозначим алгебраические дополнения элементов матрицы $\| \Phi_{x_i x_j} \|$. Легко показать, что

$$\sum_{j=1}^{n} B_{j\beta x_j} = 0, \ \beta = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Для простоты покажем это при $\beta = 1$. Возьмем столбец a:

$$a = \begin{pmatrix} \Phi_{x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_{x_n} \end{pmatrix}.$$

Его производные по x_i будем обозначать через a_i. Тогда, очевидно, B_{j1} можем записать в виде определителя:

$$B_{j1} = (-1)^{j+1} [a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots a_n].$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} B_{j1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\gamma=1,\, \gamma \neq j}^{n} (-1)^{j+1} [a_1, \dots, a_{\gamma j}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n]. \tag{10}$$

При суммировании индексы j и γ примут один раз значение $j = \alpha$, $\gamma = \beta$, $\alpha > \beta$ и один раз $j = \beta$, $\gamma = \alpha$. Соответственно этому в сумму войдут два члена:

$$(-1)^{\alpha+1} [a_1, \dots, a_{\beta-1}, a_{\beta\alpha}, a_{\beta+1}, \dots a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1}, \dots a_n],$$
$$(-1)^{\beta+1} [a_1, \dots, a_{\beta-1}, a_{\beta+1}, \dots, a_{\alpha-1}, a_{\alpha\beta}, a_{\alpha+1}, \dots a_n].$$

Заметим, что $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Поэтому первый определитель получается из второго $(\alpha - \beta - 1)$ перестановками. После перестановок знак перед вторым членом будет равен $(-1)^{\alpha}$, поэтому оба члена взаимно уничтожаются и вся сумма (9) равна нулю. Заметим, что

$$\sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}\Phi_{x_j x_\beta} = \begin{cases} \det \|\Phi_{x_i x_j}\| & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{11}$$

Через l обозначим вектор, i-я компонента которого равна

$$\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} \Phi_{x_\alpha} B_{\alpha i}}{\left(1+\Phi_{x_n}^2\right)\left(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где $B_{\alpha i}$ — алгебраические дополнения элементов матрицы $\|\Phi_{x_i x_j}\|$. Дивергенция l в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$\operatorname{div} l = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} \Phi_{x_\alpha} B_{\alpha i}}{\left(1+\Phi_{x_n}^2\right)\left(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1}\left(\Phi_{x_\alpha x_i} B_{\alpha i} + \Phi_{x_\alpha} B_{\alpha i x_i}\right)}{\left(1+\Phi_{x_n}^2\right)\left(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} 2\Phi_{x_\alpha}\Phi_{x_n}\Phi_{x_n x_i} B_{\alpha i}}{\left(1+\Phi_{x_n}^2\right)^2\left(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} -$$

$$- \frac{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1}\Phi_{x_\alpha} B_{\alpha i}\right)\left(\sum\limits_{\beta=1}^{n}\Phi_{x_\beta}\Phi_{x_\beta x_i}\right)}{\left(1+\Phi_{x_n}^2\right)\left(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Используя (9) и (11), найдем, что числитель первой дроби равен $(n-1)\det\|\Phi_{x_i x_j}\|$, вторая дробь равна нулю и числитель третьей дроби — $(n-1)\left(\Phi_{x_1}^2 + \ldots + \Phi_{x_{n-1}}^2\right)\det\|\Phi_{x_i x_j}\|$.

Следовательно,

$$\operatorname{div} l = \frac{(n-1)\det\|\Phi_{x_i x_j}\|}{\left(1+\Phi_{x_n}^2\right)\left(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} -$$

$$- \frac{(n-1)\left(|\operatorname{grad}\Phi|^2 - \Phi_{x_n}^2\right)\det\|\Phi_{x_i x_j}\|}{\left(1+\Phi_{x_n}^2\right)\left(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(n-1)\det\|\Phi_{x_i x_j}\|}{\left(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Отсюда с помощью (8) находим следующее *выражение интегральной полной кривизны через интеграл по границе*:

$$\int\limits_{M^n} K dV = \frac{1}{(n-1)} \int\limits_{\partial G} (l dS),$$

где dS — элемент площади поверхности ∂G, l — вектор, выраженный в (12). Заметим, что подынтегральное выражение в правой части не определяется инвариантным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. B. Allendorfer and A. Weil. The Gauss — Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. Trans. Amer. Math. Soc., v. 53, 1943, 101—129.

2. S. S. Chern. A simple intrinsic proof of the Gauss — Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. Ann of Math., 45, 1944, 747—752.

3. J. Milnor. On the immersion of n — manifolds in $(n+1)$ — space. Comm. Math. Helvetici, 30, 1956, № 4, 275—284.

4. M. Kervaire. Non parallelizability of the n — sphere for $n > 7$. Proc. Mat. Acad. Sci. USA, 44, 1958, 280—283.

5. S. Smale. The classification of immersions of spheres in euclidean spaces. Ann. of Math., 69, (2), 1959, 327—344.

Поступила 14 декабря 1970 г.

ОДНО НЕРАВЕНСТВО НА КРИВИЗНЫ КУСКА ТРЕХМЕРНОЙ СЕДЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$

Ю. А. Аминов

(Харьков)

Эта работа является продолжением работы [2]. Мы рассматриваем трехмерную поверхность $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, заданную над областью фиксированных размеров, и устанавливаем для нее аналог теоремы Н. В. Ефимова из работы [1], который формулируется следующим образом:

Теорема. *Пусть в евклидовом пространстве* $E^4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *над кубом* V *в пространстве* $E^3 = (x_1, x_2, x_3)$ *задана трехмерная седловая поверхность* $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, *главные кривизны которой* λ_i *удовлетворяют условиям*: а) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \leqslant -K_0 < 0$; б) $0 < \lambda_1 \leqslant S_0$, $0 < \lambda_2 \leqslant S_0$, *где* K_0 *и* S_0 — *положительные постоянные*; в) *двумерная поверхность в* E^3, *составленная из отрезков, соединяющих центр куба* V *с его ребрами, ни в одной точке не является характеристической по отношению к проекциям на* E^3 *асимптотических конусов поверхности* $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$. *Тогда сторона куба* a *ограничена*:

$$a \leqslant C\sqrt{\frac{S_0}{K_0}}, \tag{1}$$

где C — *абсолютная постоянная.*

В доказательстве используем формулу (22) из работы [2], которая в частном случае трехмерной поверхности может быть записана в виде

$$6\int\limits_{V(t)} \det\|\Phi_{x_ix_j}\|\,dV = -\frac{d}{dt}\Big\{\int\limits_{x_3=t}(\Phi_{x_1x_1}\Phi^2_{x_2} - 2\Phi_{x_1x_2}\Phi_{x_1}\Phi_{x_2} + \Phi_{x_2x_2}\Phi^2_{x_1})\,dx_1dx_2 + \dots\Big\} + \Big[2\int\limits_{x_2=x_3=t}(\Phi_{x_1x_1}\Phi^2_s - 2\Phi_{x_1s}\Phi_{x_1}\Phi_s + \Phi_{ss}\Phi^2_{x_1})\,dx_1 + \dots\Big], \tag{2}$$

где $V(t)$ — семейство концентрических кубов в E^3 с ребром $2t$ и под знаком производной $\frac{d}{dt}$ в фигурных скобках точками заменены интегралы, подобные выписанному, по всем остальным граням куба. В квадратных скобках справа $s = (x_2 + x_3)/\sqrt{2}$ и точками заменены интегралы, подобные выписанному, по остальным ребрам.

Для поверхности $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ первая и вторая квадратичные формы имеют вид

$$\mathrm{I} = \sum_{i,j=1}^{3}(\Phi_{x_i}\Phi_{x_j} + \delta_{ij})\,dx_idx_j, \quad \mathrm{II} = \Big(\sum_{i,j=1}^{3}\Phi_{x_ix_j}dx_idx_j\Big)(1 + |\operatorname{grad}\Phi|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Будем рассматривать направления в пространстве E^3. По условию б) нормальная кривизна в направлении, лежащем внутри спроектированного асимптотического конуса, отрицательна, а в направлении, лежащем вне его, положительна. Выполнения этого условия всегда можно добиться выбором направления нормали к поверхности. Пусть Δ — треугольник с вершиной в центре куба и с противоположной стороной — ребром куба. Для определенности будем считать, что это ребро $x_2 = t$, $x_3 = t$. По условию в) треугольник Δ не пересекается с внутренностью проекции на E^3 асимптотического конуса, взятого в точке поверхности, расположенной над $P \in \Delta$. Направление $dx_1 = \mu\Phi_3$, $ds = -\mu\Phi_{x_1}$, $dx_2 = dx_3$ лежит в плоскости Δ, поэтому нормальная кривизна поверхности в этом направлении положительна. Она дается выражением

$$\frac{\Phi_{x_1x_1}\Phi_s^2 - 2\Phi_{x_1s}\Phi_{x_1}\Phi_s + \Phi_{ss}\Phi_{x_1}^2}{\left(\Phi_{x_1}^2 + \Phi_s^2\right)\sqrt{1 + |\operatorname{grad}\Phi|^2}} \geqslant 0. \tag{3}$$

Заметим, что на самом деле вместо условия в) достаточно потребовать, чтобы вектор $[\nu \operatorname{grad}\Phi]$, где ν — нормаль к Δ, не лежал внутри спроектированного асимптотического конуса.

Нормальная кривизна поверхности в направлении $dx_1 = \mu\Phi_{x_2}$, $dx_2 = -\mu\Phi_{x_1}$, $dx_3 = 0$ равна выражению, стоящему в левой части (4), которое ограничено сверху числом S_0, так как по условию б) вообще все нормальные кривизны поверхности ограничены сверху числом S_0:

$$\frac{\Phi_{x_1x_1}\Phi_{x_2}^2 - 2\Phi_{x_1x_2}\Phi_{x_1}\Phi_{x_2} + \Phi_{x_2x_2}\Phi_{x_1}^2}{\left(\Phi_{x_1}^2 + \Phi_{x_2}^2\right)\sqrt{1 + |\operatorname{grad}\Phi|^2}} \leqslant S_0. \tag{4}$$

Гаусс — Кронекерова кривизна поверхности равна

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{\det\|\Phi_{x_ix_j}\|}{(1 + |\operatorname{grad}\Phi|^2)^{\frac{5}{2}}} \leqslant -K_0 < 0. \tag{5}$$

Так как в силу оценок вида (3) выражение в квадратных скобках в формуле (2) положительно, то интегрируя эту формулу по t от 0 до t, получим, что сумма интегралов, стоящая в фигурных скобках в формуле (2), положительна. Введем функцию

$$f(t) = \int_0^t \Big\{ \int\limits_{x_3=t} (\Phi_{x_1x_1}\Phi_{x_2}^2 - 2\Phi_{x_1x_2}\Phi_{x_1}\Phi_{x_2} + \Phi_{x_2x_2}\Phi_{x_1}^2 + S_0)\, dx_1dx_2 + \ldots \Big\}\, dt.$$

В силу предыдущего замечания $f(t) \geqslant S_0 8t^3$. Из неравенства (4) следует

$$f(t) \leqslant 2S_0 \int_0^t \Big\{ \int\limits_{x_3=t} (1 + |\operatorname{grad}\Phi|^2)^{\frac{3}{2}}\, dx_1dx_2 + \ldots \Big\}\, dt =$$

$$= 2S_0 \int\limits_{V(t)} (1 + |\operatorname{grad}\Phi|^2)^{\frac{3}{2}} dV \leqslant 2S_0 \left(\int\limits_{V(t)} (1 + |\operatorname{grad}\Phi|^2)^{\frac{5}{2}} dV \right)^{\frac{3}{5}} (2t)^{\frac{6}{5}}. \tag{6}$$

Из формулы (2), неравенств (5) и (6) находим

$$f''' \geqslant -6 \int\limits_{V(t)} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 (1 + |\operatorname{grad}\Phi|^2)^{\frac{5}{2}} dV \geqslant \frac{6K_0\,[f(t)]^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{11}{3}} S_0^{\frac{5}{3}} t^2}.$$

Так же как в § 7 [2], мы получаем систему неравенств для функции $f(t)$ и ее производных в том частном случае, когда $n = m = 3$. Исследование этой системы, проведенное в [2], показывает, что интервал существования регулярной функции $f(t)$ ограничен: $t \leqslant C_1 \sqrt{\frac{S_0}{K_0}}$, где C_1 — постоянная. В качестве постоянной C, входящей в неравенство (1), можно взять число 8.

Замечание. Если сферический образ поверхности $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ имеет кратность покрытия не более N, а Гаусс — Кронекерова кривизна по модулю больше K_0, то легко установить, что сторона куба a, над которым может существовать такая регулярная поверхность, оценивается сверху через N и K_0:

$$a \leqslant \sqrt[3]{\frac{\omega_3 N}{2K_0}},$$

где ω_3 — объем 3 — сферы.

В самом деле, если dV — элемент объема в E^3, dV' — элемент объема поверхности, то эта оценка вытекает из неравенств

$$a^3 K_0 \leqslant \int_V |\lambda_1\lambda_2\lambda_3|\, dV \leqslant \int_{V'} |\lambda_1\lambda_2\lambda_3|\, dV' \leqslant N\frac{\omega_3}{2}.$$

Однако кратность покрытия сферического образа может быть сколь угодно большой, хотя область определения функции Φ фиксирована. Это видно на примере поверхности $\Phi(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1}\cos 4kx_2 + f(x_3)$, где k — целое число, $f'' \neq 0$, $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{\pi}{2}$, Гаусс — Кронекерова кривизна такой поверхности отлична от нуля, а кратность покрытия сферического образа равна k и может быть сделана сколь угодно большой. Поэтому естественно получение оценки сверху для размеров области существования регулярной поверхности, не зависящей от кратности сферического образа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны. ДАН СССР, 93, № 4 (1953), 609—611.

2. Ю. А. Аминов. n-Мерные аналоги интегральной формулы С. Н. Бернштейна. «Матем. сб.», 75 (117), № 3, 1968, 375—399.

Поступила 28 сентября 1970 г.

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

К. М. Белов

(Москва)

Рассмотрим произвольную регулярную поверхность F_1 и подвергнем ее непрерывному изгибанию. Пусть F_2 — регулярная поверхность, полученная в результате изгибания, а $\underset{1}{b}_{ij}$ и $\underset{2}{b}_{ij}$ — коэффициенты вторых квадратичных форм поверхностей F_1 и F_2. Ориентируя поверхность F_1 произвольным образом, на поверхности F_2 выберем ориентацию, индуцируемую на ней непрерывным изгибанием поверхности F_1. Положим $\beta_{ij} = \underset{1}{b}_{ij} - \underset{2}{b}_{ij}$. Сеть, определяемая на поверхности F_1 тензором β_{ij}, называется характеристической сетью изгибания, а линии этой сети — характеристиками изгибания [1]. В направлении характеристик и только в этих направлениях нормальные кривизны поверхностей F_1 и F_2 в соответствующих по изометрии точках одинаковы.

Легко заметить, что различные свойства характеристической сети определяют свойства изгибания поверхностей и что, наоборот, свойства изгибания так или иначе отражаются в свойствах характеристической сети. Поэтому при исследовании изгибаний поверхности важно изучение свойств сети характеристик изгибания. Этому и посвящена данная работа.

1. Первый инвариант тензора β_{ij}

$$\mathrm{H} = (g, \beta), \tag{1}$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение метрического тензора поверхности g_{ij} и тензора β_{ij} [5], называется средним изгибом поверхности F_1 в данной точке, а второй инвариант

$$\mathrm{K} = (\beta, \beta)$$

— гауссовым изгибом. Инвариант

$$\mathrm{E} = \sqrt{\mathrm{H}^2 - \mathrm{K}} \tag{2}$$

называется изгибом поверхности в данной точке. Точка, в которой изгиб равен нулю, называется особой точкой изгибания. Особыми точками изгибания являются, например, точки конгруэнтности поверхностей F_1 и F_2. Однако можно построить примеры изгибаний, особые точки которых не являются точками конгруэнтности.

Изгибание называется гиперболическим в данной точке, если в этой точке гауссов изгиб $\mathrm{K} < 0$, параболическим, если в ней $\mathrm{K} = 0$, и эллиптическим, если $\mathrm{K} > 0$. Если условие $\mathrm{K} < 0$ ($\mathrm{K} = 0$, $\mathrm{K} > 0$) выполняется во всех точках поверхности, мы будем говорить, что изгибание является гиперболическим (параболическим, эллиптическим).

Очевидно, в случае гиперболического изгибания сеть характеристик — вещественная невырожденная. Особыми точками вещественной невырожденной сети характеристик являются особые точки изгибания, которыми в данном случае могут быть лишь точки конгруэнтности. Последнее следует из соотношения (2).

В случае параболического изгибания сеть характеристик является вещественной вырожденной сетью (дважды взятое однопараметрическое семейство линий), в случае эллиптического изгибания — мнимой.

Примеры. 1. Любое изгибание поверхности положительной кривизны — гиперболическое всюду, за исключением конечного множества точек конгруэнтности, лежащих внутри поверхности [1], и множества меры нуль точек конгруэнтности на границе [6].

2. Изгибание поверхности с сохранением средней кривизны — гиперболическое всюду, за исключением конечного множества точек конгруэнтности, лежащих внутри поверхности, и множества меры нуль точек конгруэнтности на границе. Действительно, ввиду соотношения (1) в этом случае $\mathrm{H}=0$ и из формулы (2) следует, что $\mathrm{K}\leqslant 0$. Остальное следует из результатов работы [7].

3. Изгибания линейчатых поверхностей в линейчатые, при которых образующие искривляются,— гиперболические [3], [9].

4. Изгибание развертывающейся поверхности с сохранением образующих — параболическое [3], [9]. В частности, параболическим является любое изгибание плоскости или бесконечного замкнутого цилиндра (Вилкицкий).

5. Изгибание поверхности отрицательной кривизны с сохранением сети линий кривизны — эллиптическое [9].

2. Пусть L_1 гладкая линия на поверхности F_1, а L_2 — соответствующая ей по изометрии линия на поверхности F_2. Обозначим буквами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ кручения линий L_1 и L_2 в соответствующих по изометрии точках. Разность $\varkappa=\varkappa_1-\varkappa_2$ называется скручиванием линии L_1 при данном изгибании поверхности F_1 в поверхность F_2.

Теорема 1. *Скручивание характеристики изгибания*

$$\varkappa=\pm\sqrt{-\mathrm{K}}, \tag{3}$$

где K — *гауссов изгиб поверхности.*

Для доказательства воспользуемся выражением второго инварианта произвольной сети (u, v) с тензором φ_{ij} через инварианты этой сети:

$$b_\varphi(u)=\varphi_{ij}u^iu^j,\qquad b_\varphi(v)=\varphi_{ij}v^iv^j,$$

$$a_\varphi(u)=\varphi_{ij}u^i\widetilde{u^j},\qquad a_\varphi(v)=\varphi_{ij}v^i\widetilde{v^j},$$

где $\widetilde{u^i}$ и $\widetilde{v^i}$ — векторы, дополнительные для u^i и v^i [8]. Это выражение имеет вид [8, стр. 289]

$$K(\varphi)=b_\varphi(u)\,b_\varphi(v)+a_\varphi(v)\,a_\varphi(v)+[b_\varphi(u)\,a_\varphi(v)-b_\varphi(v)\,a_\varphi(u)]\operatorname{ctg}\omega,$$

где ω — сетевой угол. В применении к характеристической сети эта формула ввиду $b_\beta(u)=b_\beta(v)=0$ становится такой:

$$\mathrm{K}=a_\beta(u)\,a_\beta(v).$$

Но

$$\varphi_{ij}u^iv^j=b_\varphi(u)\cos\omega+a_\varphi(u)\sin\omega=b_\varphi(v)\cos\omega-a_\varphi(v)\sin\omega,$$

см. [8, стр. 288], что в применении к характеристической сети дает соотношение $a_\beta(u)=-a_\beta(v)$. Имеем далее

$$a_\beta(u)=\beta_{ij}u^i\widetilde{u^j}=\underset{1}{b_{ij}}u^i\widetilde{u^j}-\underset{2}{b_{ij}}u^i\widetilde{u^j}=a_1-a_2,$$

где a_1 и a_2 — геодезические кручения поверхностей F_1 и F_2 в направлении характеристики. Поэтому

$$(a_1 - a_2)^2 = -K. \tag{4}$$

Обозначим буквой θ_1 угол между нормалью к поверхности F_1 и главной нормалью линии L_1 в некоторой точке. Аналогично определим угол θ_2 для поверхности F_2. Из соотношений Форсайта

$$\varkappa_1 = a_1 + \frac{d\theta_1}{ds} \text{ и } \varkappa_2 = a_2 + \frac{d\theta_2}{ds}$$

следует, что

$$\varkappa_1 - \varkappa_2 = a_1 - a_2 + \frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{ds}.$$

Так как характеристики L_1 и L_2 имеют равные кривизны и нормальные кривизны поверхностей F_1 и F_2 вдоль них также одинаковы, то $\varkappa_1 - \varkappa_2 = a_1 - a_2$ и ввиду (4) теорема 1 доказана.

Отметим некоторые следствия.

Следствие 1. *Скручивания двух характеристик изгибания, проходящих через данную точку, равны по величине и противоположны по знаку.* В случае изгибания поверхности положительной кривизны этот факт был замечен Кон-Фоссеном [1, стр. 63].

Следствие 2. *В случае параболического изгибания скручивание характеристики равно нулю.* В самом деле, при выводе формулы (3) нигде не предполагается, что гауссов изгиб поверхности отличен от нуля.

Следствие 3. *Скручивание характеристики изгибания может изменять знак лишь в параболических точках изгибания.* В частности, при изгибании поверхности положительной кривизны — лишь в точках конгруэнтности.

3. Рассмотрим вопрос о возникновении замкнутых характеристик при изгибании $F_1 \to F_2$. Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. *При эллиптическом (параболическом, гиперболическом) изгибании односвязной поверхности на ней не возникает замкнутых гладких характеристик изгибания.*

Действительно, если изгибание эллиптическое, то сеть характеристик является мнимой и теорема верна.

Если изгибание $F_1 \to F_2$ параболическое, то поверхности F_1 и F_2 линейчатые и изгибание происходит с сохранением образующих [9]. Нетрудно убедиться в том, что параболическое изгибание части линейчатой поверхности, состоящей из образующих, пересекающих характеристику, тривиально. В самом деле, пусть линия L_1 является характеристикой параболического изгибания линейчатой поверхности F_1 и пусть линия L_2 поверхности F_2 соответствует линии L_1 по изометрии. Так как нормальные кривизны поверхностей F_1 и F_2 вдоль характеристики совпадают, то равны и кривизны линий L_1 и L_2. Из соотношения (3) следует, что совпадают и кручения этих линий в соответствующих по изометрии точках. Стало быть, линии L_1 и L_2 конгруэнтны, откуда следует, что конгруэнтны и части поверхностей F_1 и F_2, состоящие из образующих, пересекающих линии L_1 и L_2. Из этого рассуждения следует, что характеристиками параболического изгибания $F_1 \to F_2$ могут быть лишь прямолинейные образующие поверхностей и, стало быть, замкнутыми они быть не могут.

Предположив далее в случае гиперболического изгибания существование на поверхности замкнутой характеристики, легко убедиться в том, что внутри характеристики должна содержаться хотя бы одна особая точка сети характеристик изгибания. Однако это невозможно ввиду предположения, так как при гиперболическом изгибании $K < 0$.

Следствие. *При любом нетривиальном изгибании линейчатой поверхности в линейчатую на ней не возникает замкнутых гладких характеристик.* В самом деле, если изгибание линейчатой поверхности в линейчатую не является параболическим, то оно гиперболическое всюду [9].

Замечание. В случае параболического (эллиптического) изгибания поверхности предположение об односвязности поверхности в теореме 2 можно снять.

4. Назовем изгибание поверхности простым, если это изгибание либо не имеет особых точек, либо особые точки изгибания, расположенные внутри поверхности, изолированы. Конечно, существуют поверхности, допускающие непростые изгибания. С другой стороны, всякое изгибание поверхности положительной кривизны является простым (см. пример 1 п. 1). Изгибания, указанные в примерах 2, 3, 4 и 5 п. I, также являются простыми.

Распространим теорему 2 на случай произвольных простых изгибаний. При этом мы оставим в стороне случай эллиптического изгибания поверхности, как тривиальный, и случай параболического изгибания поверхности. В последнем случае особая точка изгибания, если она существует, не может быть изолированной.

Теорема 3. *Если изгибание поверхности гиперболическое всюду, за исключением изолированных особых точек изгибания, то на поверхности не существует замкнутых гладких характеристик, содержащих внутри односвязную часть поверхности.*

Отметим сначала некоторые следствия этой теоремы.

Следствие 1. *Если поверхность имеет положительную кривизну, то при ее изгибании не возникает гладких замкнутых характеристик, содержащих внутри односвязную часть поверхности.* Это означает, например, что односвязная поверхность положительной кривизны не допускает изгибаний, если фиксировать кривизну края [2]. В этом случае край поверхности будет замкнутой характеристикой изгибания.

Следствие 2. *При изгибании поверхности с сохранением средней кривизны на ней не возникает замкнутых гладких характеристик, содержащих внутри односвязную часть поверхности.*

Теорема 3 является следствием утверждения, которое мы сформулируем в виде леммы. Назовем индексом особой точки семейства линий на поверхности деленное на π изменение угла, который образуют линии семейства с некоторым фиксированным направлением при обходе особой точки в положительном направлении по замкнутой гладкой кривой, не содержащей внутри других особых точек.

Лемма. *Индекс изолированной особой точки семейства характеристик изгибания отрицателен.*

Предполагая утверждение леммы справедливым (ее мы докажем в следующем параграфе), приведем доказательство теоремы 3. Пусть γ — замкнутая гладкая характеристика изгибания, содержащая внутри односвязную часть поверхности. Рассмотрим два случая: *1)* на γ нет особых точек изгибания; *2)* на γ есть особые точки изгибания.

Случай 1. Так как γ является замкнутой характеристикой изгибания, внутри γ должны содержаться особые точки поля характеристических направлений (направлений характеристик изгибания). Так как они изолированы, их алгебраическое число (сумма индексов) существует и равно двум. Однако это противоречит тому, что индекс каждой особой точки отрицателен.

Случай 2. Пусть на замкнутой характеристике γ содержится одна особая точка изгибания — точка M. Рассмотрим достаточно малую окрестность $U(M)$ этой точки, не содержащую других особых точек изгибания. Рассмотрим семейство характеристик, которому принадлежит кривая γ, и пусть Γ — дуга без контакта, расположенная в окрестности $U(M)$ и проходящая через точку M. Пусть точка P принадлежит Γ и пусть $\tilde{\gamma}(P)$ — характеристика изгибания, проходящая через точку P. Если точка P достаточно близка к точке M, то, двигаясь по характеристике $\tilde{\gamma}(P)$ от точки P в ту или иную сторону, мы еще раз встретим дугу Γ. Пусть Q — точка встречи. Продолжая движение по характеристике $\tilde{\gamma}(P)$, отметим следующую точку встречи с дугой Γ — пусть это будет точка R. Обозначим буквой G область, заключенную между двумя витками характеристики $\tilde{\gamma}(P)$ и ограниченную дугой PQR. Так как изгибание простое, всегда можно выбрать точку P столь близкой к точке M, чтобы в области G не содержалось особых точек изгибания [10]. Из общей теории динамических систем (применимость этой теории к случаю изгибания поверхностей нетрудно обосновать) следует, что через точку Q всегда можно провести цикл без контакта L, целиком лежащий в области G [10]. Это означает, что вращение поля характеристических направлений на кривой L положительно и, стало быть, внутри кривой L должны содержаться особые точки изгибания, сумма индексов которых относительно любого из семейств сети характеристик положительна. Мы снова приходим к противоречию с утверждением леммы.

Если на характеристике γ содержится несколько особых точек изгибания, рассуждения совершенно аналогичны. Теорема 3 доказана.

5. Доказательство леммы, сформулированной в 4, проводится так же, как это делается в работе [11] при доказательстве аналогичного утверждения для поверхностей положительной кривизны.

Пусть $\bar{r}_1(u, v)$ и $\bar{r}_2(u, v)$ — радиусы-векторы поверхностей F_1 и F_2. Рассмотрим срединную поверхность F с радиусом-вектором $\bar{r}(u, v)$, определяемым соотношением $\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)$. Как показано в работе [11], поверхность F регулярна в окрестности некоторой точки $\bar{r}(u_0, v_0)$, если поверхности F_1 и F_2 находятся в общем положении: эти поверхности касаются в точке $\bar{r}_1(u_0, v_0)$ и соответствующие по изометрии направления на них совпадают. Путем подходящего перемещения поверхности F_2 этого всегда можно добиться. Предполагая, что поверхности F_1 и F_2 находятся в общем положении, так же как и в работе [11] доказывается, что в достаточно малой окрестности точки (u_0, v_0) 1) единичный нормальный вектор $\bar{m}$ срединной поверхности F образует с единичными нормальными векторами $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ поверхностей F_1 и F_2 одинаковый угол $\alpha \neq \neq \frac{\pi}{2}$, и 2) коэффициенты b_{ij} второй квадратичной формы поверхности F и коэффициенты $\underset{1}{b}_{ij}$ и $\underset{2}{b}_{ij}$ вторых квадратичных форм поверхностей F_1 и F_2 связаны соотношением

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(\underset{1}{b}_{ij} + \underset{2}{b}_{ij}) \cos \alpha.$$

Следовательно, уравнение сети асимптотических линий поверхности F выглядит так: $(\underset{1}{b}_{ij} + \underset{2}{b}_{ij}) du^i du^j = 0$ (здесь $u^1 = u$, $u^2 = v$). Сравнивая это уравнение с уравнением сети характеристик изгибания $(\underset{1}{b}_{ij} - \underset{2}{b}_{ij}) \times$

$\times du^i du^j = 0$, мы видим, что одно уравнение переходит в другое, если изменить ориентацию поверхности F_2 на противоположную. Это означает, что в случае гиперболического изгибания $F_1 \to F_2$ и противоположной ориентации поверхности F_2 поверхность F имеет вещественную сеть асимптотических и ее кривизна неположительна. Особым точкам изгибания на поверхности F соответствуют в этом случае точки уплощения. Так как изгибание простое, эти точки изолированы и их индексы относительно семейства асимптотических линий поверхности F совпадают с индексами особых точек изгибания относительно семейства характеристик изгибания $F_1 \to F_2$. Для завершения доказательства леммы осталось сослаться на работу [12], в которой показано, что индекс изолированной точки уплощения поверхности неположительной кривизны относительно семейства асимптотических линий равен $-2s < 0$, где s — порядок седла.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Кон-Фоссен. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. Физматгиз, М., 1959.

2. В. Т. Фоменко. Об изгибании и однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем. ДАН СССР, т. 149, № 2, 1962, 283—285.

3. К. М. Белов. Параболические изгибания поверхностей. Тезисы докладов IV Всесоюзн. межвузовск. конф. Тбилиси, 1969, 13—14.

4. К. М. Белов. Определение поверхности средним и гауссовым изгибами. «Изв. вузов, Математика», № 3 (82), 1969, 16—20.

5. Я. С. Дубнов. Тензорные характеристики некоторых классов поверхностей и принадлежащих им сетей. Труды сем. по вект. и тенз. анализу, вып. 4, 1937, 197—202.

6. К. М. Белов. Некоторые замечания о неизгибаемости поверхностей. ДАН СССР, т. 131, № 3, 1960, 475—477.

7. К. М. Белов. Изгибание поверхностей с сохранением средней кривизны. «Сиб. матем. ж.», т. IX, № 1, 1968, 194—198.

8. В. И. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия. Физматгиз, М., 1963.

9. К. М. Белов. Об изгибаниях линейчатой поверхности. «Сиб. матем. ж», т. XI, № 2, 1970, 464—467.

10. А. А. Андронов и др. Качественная теория динамических систем. Изд-во «Наука», М., 1966.

11. H. Hopf und H. Samelson. Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Flächen. Math. Z., 43, 1938, 749—766.

12. H. Schilt. Über die isolirten Nullstellungen der Flächen-Krümmung und einige Verbiegbarssätze. Compos. Math, v. S, N 2, 1937, 239—283.

Поступила 13 декабря 1970 г.

МНОЖЕСТВО РАЗРЕЗА РАЗВЕРТКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Ю. А. Волков, Е. Г. Подгорнова

(Ленинград)

1. Как известно, множество разреза риманова пространства относительно некоторой точки A определяется следующим образом: из точки A проводятся геодезические во всех направлениях и на каждой из них берется максимальный отрезок AB, на котором эта геодезическая остается кратчайшей; множество концов B упомянутых отрезков и есть множество разреза относительно A. Это понятие введено еще Пуанкаре и строение множества разреза в двумерном случае детально исследовано в работе [1]. (Ссылки на более поздние исследования можно найти в [2], стр. 294).

В настоящей работе исследуется строение множества разреза полных многогранных метрик (разверток) положительной кривизны, заданных на сфере или на плоскости.

В этих предположениях удается получить более полные результаты, чем в римановом случае. В частности, строится некоторое специальное разбиение рассматриваемой развертки на выпуклые многоугольники, подходящие к точке A.

Аналогично множеству разреза относительно точки можно определить множество разреза относительно некоторого множества. Результаты настоящей работы почти дословно переносятся на случай множества разреза относительно границы гомеоморфной кругу развертки положительной кривизны с границей неотрицательного поворота.

В более общей ситуации вопрос о строении этого множества или тесно связанный с ним вопрос о строении кривых, эквидистантных относительно границы, так или иначе затрагивается в некоторых работах, посвященных выводу неравенств изопериметрического типа [4, 5 и 6].

2. Всюду, где не оговорено противное, мы придерживаемся терминологии, принятой в [3]. Сформулируем полученные результаты.

Пусть P — гомеоморфная сфере развертка положительной кривизны, A — произвольная ее точка и Γ_A — множество разреза относительно точки A, т. е. множество конечных точек B всех максимальных кратчайших AB. Мы покажем, что справедливо следующее:

1. Множество Γ_A в (малой круговой) окрестности каждой своей точки B состоит из конечного числа отрезков геодезических, выходящих из B.

Назовем вершинами множества разреза Γ_A те точки B, из которых исходят два отрезка кратчайших, не составляющих одной геодезической, и те точки, из которых исходят один или более двух отрезков.

Таким образом, Γ_A естественно становится графом.

2. Γ_A — дерево, т. е. связный граф без циклов.

3. Ребра Γ_A — кратчайшие.

4. Степень каждой вершины Γ_A равна числу кратчайших, соединяющих эту вершину с точкой A (при этом концевые вершины графа — обязательно истинные вершины развертки). Каждая внутренняя точка любого ребра Γ_A соединима с A ровно двумя кратчайшими.

5. Ребра Γ_A разбивают окрестность каждой неконцевой вершины на секторы с углами, меньшими π; окрестность концевой вершины A_i разбивается на секторы с углами $< \pi$ ребром Γ_A, подходящим к этой вершине и кратчайшей AA_i.

6. Кратчайшие AA_i, идущие в концевые вершины графа Γ_A, разбивают полный угол при точке A на секторы с углами $< \pi$.

Пусть P — гомеоморфная плоскости развертка положительной кривизны (с конечным числом истинных вершин), A — произвольная ее точка и Γ_A — множество разреза относительно A.

Геодезические лучи, исходящие из точки A, заполняют конечное число замкнутых (бесконечных) секторов S_i, не содержащих точек Γ_A. Не исключено, что некоторые из S_i вырождаются в лучи. Обозначим через Q_k связные компоненты множества $P \setminus \bigcup_i S_i$*. Любая геодезическая, исходящая из точки A внутрь любого из множеств Q_k, уже не является лучом и потому содержит точку множества разреза Γ_A.

Обозначим через $\Gamma_A^{(k)}$ часть множества Γ_A, лежащую в Q_k.

Для каждого из $\Gamma_A^{(k)}$ справедливы утверждения 1—5. При этом число вершин графа $\Gamma_A^{(k)}$ конечно, а одно из его ребер — геодезический луч.

---

* Конечность числа секторов S_i следует из конечности числа множеств Q_i, число последних конечно, так как каждое из Q_i содержит истинную вершину.

Аналог утверждения 6 можно сформулировать следующим образом:

6'. Пусть U_i — секторы, на которые малая круговая окрестность точки A разбивается последовательными кратчайшими AA_i, идущими в концевые вершины A_i графа Γ_A.

Углы каждого из тех секторов U_i, которые не содержат отрезков, исходящих из A геодезических лучей, $< \pi$. Углы же тех из секторов U_i, которые содержат отрезки геодезических лучей, становятся меньше π после удаления секторов, заполняемых геодезическими лучами.

Поскольку все истинные вершины развертки P (кроме, может быть, точки A) лежат на множестве разреза Γ_A, естественно ожидать, что существует разбиение развертки P на плоские многоугольники с вершинами в вершинах множества Γ_A и точке A. Одно из таких разбиений (каноническая триангуляция) может быть получено следующим образом.

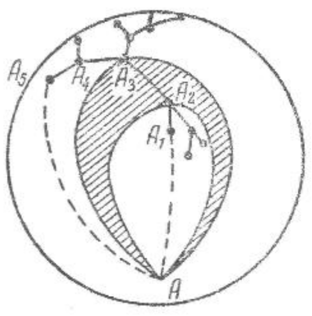

Рис. 1.

Пусть BC — ребро Γ_A, проведем из точки A все кратчайшие, которые оканчиваются во внутренних точках ребра BC. Достаточно ясно, и будет позже доказано, что проведенные кратчайшие заполняют два треугольника (изометричных плоским равным треугольникам) — $(ABC)_1$ и $(ABC)_2$. Эти треугольники склеены по ребру BC и имеют общую противолежащую BC вершину — точку A (рис. 1).

Очевидно, что в компактном случае замыкания всех таких треугольников исчерпывают развертку.

Аналогичное разбиение можно строить и для развертки гомеоморфной плоскости, при этом бесконечному ребру будет соответствовать пара равных бесконечных треугольников. Однако для того чтобы получить разбиение всей развертки в бесконечном случае, к замыканиям всех таких треугольников необходимо причислить еще и секторы S_i, заполняемые геодезическими лучами, исходящими из A.

Опишем еще одно разбиение развертки на многоугольники.

Пусть γ_i — кратчайшие, соединяющие A с концевыми вершинами графа Γ_A, пронумерованные в том порядке, в каком они встречаются при монотонном обходе границы малой круговой окрестности U точки A. Обозначим через U_i секторы, на которые последовательные кратчайшие γ_i разбивают U, а через P_i — множество точек развертки, заполняемое максимальными кратчайшими, исходящими из точки A в сектор U_i. Множества P_i составляют всю развертку (и в компактном, и в бесконечном случае).

Ясно, что это разбиение можно получить укрупнением канонического, а именно, каждый P_i составлен из тех треугольников канонического разбиения, которые подходят к точке A в секторе U_i. (В бесконечном случае в состав P_i входит и сектор S_i).

Для множеств P_i справедливо следующее.

7. Если P — развертка положительной кривизны, гомеоморфная сфере, то каждое из множеств P_i изометрично плоскому выпуклому многоугольнику.

7'. Если P — развертка положительной кривизны, гомеоморфная плоскости, то те из множеств P_i, которые ограничены, изометричны плоским выпуклым многоугольникам.

Неограниченные P_i имеют следующее строение: прежде всего, в состав P_i входит один из бесконечных секторов S_i, заполненных геодезическими лучами, исходящими из A. Если из P_i вырезать сектор S_i и произвести склеивание «берегов» выреза, то оставшаяся часть $P_i(P_i^*)$ изометрична плоскому выпуклому многоугольнику, бесконечные стороны которого параллельны.

Конус K, получающийся склеиванием секторов S_i, естественно называть внутренним предельным конусом развертки P. Разбиение этого конуса на секторы S_i зависит от выбора вершины A. Однако кривизна этого конуса оказывается не зависящей от A и равной полной кривизне развертки P.

3. Мы будем применять элементарные свойства кратчайших в развертках положительной кривизны, приведенные в [3], без детальных ссылок. Напомним лишь некоторые из них.

1. Предел сходящейся последовательности кратчайших есть кратчайшая.

2. У каждой кратчайшей есть окрестность, допускающая разворачивание на плоскость. При этом сама кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок, а для разворачивания окрестностей конечных точек кратчайших, если они являются истинными вершинами, делаются соответствующие разрезы.

3. В каждом двуугольнике есть истинная вершина развертки, соединимая единственной кратчайшей с выбранной вершиной двуугольника.

Кратчайшую AB будем называть максимальной кратчайшей с концом B, если она не может быть продолжена в виде кратчайшей за точку B. Приведем некоторые свойства максимальных кратчайших, непосредственно вытекающих из определения и упомянутых выше свойств.

1. Кратчайшая AB (с концом в B) максимальна тогда и только тогда, когда либо B — истинная вершина, либо B соединима с A кратчайшей, отличной от AB.

Для доказательства этих утверждений заметим прежде всего, что если конец B кратчайшей AB не есть истинная вершина и AB — единственная кратчайшая с концами A и B, то продолжение AC этой кратчайшей в виде геодезической за точку B возможно, и геодезическая AC (при достаточной малости продолжения) будет кратчайшей. В самом деле, фиксируем некоторую окрестность U кратчайшей AB и развернем ее на плоскость. Кроме геодезической AC введем в рассмотрение и кратчайшую AC. Если кратчайшая AC лежит в окрестности U, то она совпадает с геодезической AC, поскольку обе они разворачиваются в один и тот же прямолинейный отрезок плоскости. Если же сколь угодно близко к B есть точки C, для которых кратчайшая AC выходит из U, то из таких кратчайших можно было бы выбрать последовательность, сходящуюся к кратчайшей, соединяющей A с B и отличной от исходной кратчайшей, что противоречит единственности кратчайшей AB.

Обратно, если B — истинная вершина или B соединима с A по крайней мере двумя кратчайшими, то максимальность (любой из кратчайших) AB очевидна.

2. Предел AB сходящейся последовательности максимальных кратчайших AB_n (B_n — концы) — максимальная кратчайшая.

В самом деле, если бы существовала кратчайшая AC, содержащая точку B внутри себя, то кратчайшая AB была бы единственной кратчайшей с концами A и B, а точка B не была бы истинной вершиной. С другой стороны, каждая из точек B_n (за вычетом не более чем конечного числа) соединима с A хотя бы двумя кратчайшими. Из этих кратчайших только одна лежит в наперед фиксированной окрестности кратчайшей AC (при B_n, достаточно близкой к B), что очевидно после разворачивания этой окрестности на плоскость. Поэтому из всевозможных кратчайших AB_n можно выбрать подпоследовательности, сходящиеся к двум различным кратчайшим, соединяющим A и B, что и приводит к противоречию.

4. 1. Выясним строение множества разреза Γ_A вблизи произвольной его точки B. Пусть $\gamma_{i(i=1,\dots,n)}$ — все кратчайшие, соединяющие точки A и B. Возьмем малую круговую окрестность U_B точки B и обозначим через $U_{i(i=1,\dots,n)}$ те секторы, на которые эта окрестность разбивается кратчайшими γ_i (U_i между γ_{i-1} и γ_i (рис. 2), $\gamma_0 \equiv \gamma_n$). Не исключается тот случай, когда существует только одна кратчайшая γ.

В каждом из секторов U_i проведем из точки B «биссектрису», т. е. геодезическую λ_i, делящую пополам угол этого сектора (рис. 2). Биссектрисы λ_i разбивают окрестность U_B на секторы V_i (V_i содержит γ_i). Отметим сразу же, что если к точке B подходит более двух кратчайших, то угол каждого из секторов $V_i < \pi$. Это неравенство следует из того, что сектор V_i состоит из «половинок» секторов U_{i-1} и U_i, а сумма углов U_{i-1} и U_i меньше полного угла вокруг B, т. е. меньше 2π.

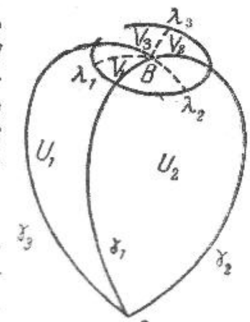

Рис. 2.

Если к B подходят две кратчайшие и B — настоящая вершина, то предыдущее рассуждение сохраняет силу. Если же B не настоящая вершина, то биссектрисы λ_1 и λ_2 служат продолжением одна другой и углы секторов V_1, V_2 равны π.

Если же B соединима с A единственной кратчайшей γ, то есть всего одна биссектриса λ и каждый из секторов, ограниченных γ и λ, составляет половину полного угла при B. Поскольку в этом случае B настоящая вершина, то эти углы $<\pi$.

Докажем теперь, что если окрестность U_B достаточно мала, то часть множества Γ_A, лежащая в этой окрестности, состоит из всех точек биссектрис λ_i, лежащих в U_B. При этом каждая точка каждой из биссектрис λ_i, отличная от B, соединима с A ровно двумя кратчайшими. Для доказательства возьмем для каждой из кратчайших γ_i некоторую ее открытую окрестность G_i, допускающую разворачивание на плоскость, и развернем на плоскость объединение этих окрестностей (рис. 3). При этом разворачивание осуществляется следующим образом. Сначала разворачивается на плоскость некоторая окрестность точки B, содержащаяся в каждой из G_i (если B — настоящая вершина, то предварительно делается разрез по некоторой геодезической, исходящей из точки B). После этого разворачивается каждая из окрестностей G_i. Разумеется, при этом точка A (и близкие к ней) отобразится в несколько различных точек плоскости $\tilde{A}_{i(i=1,\dots,n)}$.

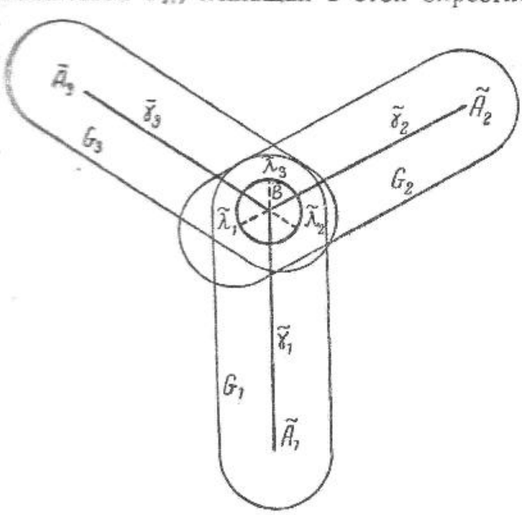

Рис. 3.

Выберем теперь U_b так, чтобы любая кратчайшая AC, соединяющая произвольную точку $C \in U_B$ с A, целиком проходила в одной из окрестностей G_i. При разворачивании на плоскость такая кратчайшая перейдет в прямолинейный отрезок $\widetilde{C}\widetilde{A}_i$, соединяющий образ точки C с одним из образов $\widetilde{A}_i$ точки A. Таким образом, исследование кратчайших, соединяющих точки окрестности U_B с точкой A, сводится к планиметрической задаче об отрезках, соединяющих точки образа этой окрестности с образами $\widetilde{A}_i$ точки A. Решение этой простой планиметрической задачи очевидно и приводит к сформулированному выше результату.

2. Установленный выше результат естественным образом позволяет превратить Γ_A в граф. Для развертки, гомеоморфной сфере, множество Γ_A очевидно компактно и потому из только что доказанной леммы о локальном строении следует конечность числа вершин и ребер графа Γ_A.

Для некомпактной развертки из той же леммы следует лишь, что число вершин и ребер графа Γ_A не более чем счетно. Позднее (в 6) мы докажем конечность числа вершин и ребер множества Γ_A такой развертки в предположении конечности числа ее истинных вершин.

Обратимся теперь к исследованию топологического строения графа Γ_A.

Пусть P — развертка, гомеоморфная сфере, и S_A — геодезическая окружность малого радиуса с центром в A. Определим отображение $f: S_A \to \Gamma_A$, сопоставляя каждой точке $C \in S_A$ конечную точку B максимальной кратчайшей, являющейся продолжением кратчайшей AC. Непрерывность отображения f легко следует из того, что предел последовательности максимальных кратчайших есть максимальная кратчайшая. Из непрерывности, в свою очередь, следует, что Γ_A связно и замкнуто. Любая точка дополнения $P \diagdown \Gamma_A$ соединима с A кратчайшей, не задевающей Γ_A, иными словами, $P \diagdown \Gamma_A$ «звездно» относительно точки A и тем самым связно. Далее, отсюда следует, что граф Γ_A не содержит циклов, т. е. Γ_A — дерево.

Если P — развертка, гомеоморфная плоскости, то предыдущие рассуждения видоизменяются следующим образом: на окружности S_A появляются замкнутые множества тех точек, в направлении которых из A исходят геодезические лучи. Дополнительное открытое множество распадается на открытые дуги γ_i. Геодезические лучи, исходящие из A, заполняют в развертке P некоторые «плоские» секторы, а остальная часть развертки распадается на «бесконечные двуугольники» Q_i, заполняемые максимальными кратчайшими, проходящими через точки дуг γ_i. На каждой из дуг γ_i определим, как и прежде, отображение $f_i: \gamma_i \to \Gamma_A^{(i)}$. Как и прежде, устанавливается, что образы $f_i(\gamma_i) \equiv \Gamma_A^{(i)}$ связны, не содержат циклов и потому каждый из них есть дерево.

Далее, каждое из множеств $\Gamma_A^{(i)}$ не ограничено, так как вблизи геодезических лучей, ограничивающих Q_i, есть точки, сколь угодно далекие от A.

Заметим еще, что из возможности соединить каждую точку множества $Q_i \diagdown \Gamma_A^{(i)}$ с точкой A кратчайшей, не задевающей Γ_A, уже следует, что у $\Gamma_A^{(i)}$ может быть только «один уход» на бесконечность. В предположении конечности числа истинных вершин развертки более точное утверждение о строении $\Gamma_A^{(i)}$ будет доказано в 6.

3. Опишем теперь триангуляцию (мы назовем ее канонической) развертки P, естественным образом порождаемую множеством разреза Γ_A.

Пусть BC — некоторое ребро графа Γ_A. По доказанному в 4 BC есть геодезическая, каждая внутренняя точка D которой соединима с A ровно двумя кратчайшими. При непрерывном движении точки D по BC каждая из кратчайших AD меняется непрерывно, так как точка D, в которой непрерывность нарушается, очевидно оказывается вершиной графа Γ_A. При этом кратчайшие AD заполняют в развертке два треугольника $T_1 \equiv (ABC)_1$ и $T_2 \equiv (ABC)_2$, которые очевидным образом можно развернуть в равные плоские треугольники $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_2$.

Совокупность пар треугольников, порожденных описанным выше образом всеми ребрами множества разреза Γ_A, и составляет нужную нам триангуляцию.

У развертки, гомеоморфной сфере, эта триангуляция очевидно содержит конечное число пар треугольников. Столь же очевидно, что в развертке, гомеоморфной плоскости, число треугольников канонической триангуляции не более, чем счетно. Впоследствии мы докажем, что в развертке с конечным числом вершин число треугольников конечно.

В (бесконечной) развертке множество Γ_A, очевидно, не ограничено и может содержать ребра бесконечной длины. Впоследствии мы докажем, что при конечности числа вершин такие ребра обязательно есть. Если в множестве разреза развертки неотрицательной кривизны найдется хоть одно бесконечно продолжимое (по длине) в обе стороны ребро, то треугольники, зачерчиваемые геодезическими, соединяющими точки этого ребра с A, очевидно, изометричны (двум равным) плоским полосам, ограниченным параллельными прямыми. Легко видеть, что вся развертка исчерпывается этими «треугольниками», так как сумма их углов при точке A уже достигла 2π. Следовательно, сама развертка есть цилиндр. Таким образом, в развертках, гомеоморфных плоскости, бесконечные ребра могут быть только геодезическими лучами. Каждому такому лучу будет соответствовать пара вырожденных бесконечных треугольников, изометричных плоской фигуре, ограниченной конечным отрезком (образ кратчайшей, идущей из A в начало луча) и двумя параллельными одинаково направленными лучами. Мы будем называть эту фигуру треугольником с одной бесконечно удаленной (б. у.) вершиной.

Бесконечная развертка не исчерпывается треугольниками, порожденными ребрами множества разреза, поскольку в состав этих треугольников попадают только максимальные кратчайшие конечной длины. Кроме них из точки A исходят геодезические лучи, заполняющие некоторое число «плоских» замкнутых секторов с вершиной в точке A.

Таким образом, бесконечная развертка может быть разбита на треугольники (парные, конечные или с одной б. у. вершиной), соответствующие ребрам множества разреза и секторы (треугольники с двумя б. у. вершинами), соответствующие частям развертки, заполняемым геодезическими лучами, исходящими из A.

5. Переходим к доказательству утверждений, сформулированных в 2. Справедливость утверждений 1, 4, 5 непосредственно вытекает из доказанной в пункте *1* предыдущего параграфа леммы о локальном строении графа Γ_A, а утверждения 2 — из пункта 2 того же параграфа.

Для доказательства утверждения 6 заметим прежде всего, что по доказанному в пункте 3 параграфа 4 треугольники канонической триангуляции, соответствующие одному и тому же ребру множества разреза, подходят к вершине A секторами равной величины.

В развертке, гомеоморфной сфере, упомянутые пары секторов заполняют всю окрестность точки A. Если некоторый (ограниченный кратчайшими) сектор U с вершиной в A содержит не более одного представителя каждой пары, то полный угол сектора U не превосходит π. Это очевидным образом следует из того, что разбиваемый описанным выше образом на пары равных секторов полный угол при вершине A не превосходит 2π.

Ограничиваясь по-прежнему развертками, гомеоморфными сфере, соединим концевые вершины A_i графа Γ_A кратчайшими с точкой A и пронумеруем их в том порядке, в каком они встречаются при обходе вокруг точки A. Секторы U_i, ограниченные соседними кратчайшими AA_i и AA_{i+1}, содержат не более одного представителя из каждой пары секторов описанного ранее разбиения. В самом деле, если бы для некоторого ребра BC оба треугольника — $(ABC)_1$ и $(ABC)_2$ — подходили к A в секторе U_i, то один из двуугольников, на которые развертка распадается после удаления треугольников $(ABC)_1$ и $(ABC)_2$, тоже подходит к A внутри сектора U_i. Поскольку во всяком двуугольнике есть истинная вершина развертки, соединимая с точкой A единственной кратчайшей, т. е. концевая вершина Γ_A, то в двуугольнике, подходящем к A внутри сектора U_i, оказалась бы одна из кратчайших AA_k, что невозможно. Таким образом, утверждение 6 доказано. Для доказательства 7 заметим, что множество P_i, заполняемое максимальными кратчайшими, выходящими из A в сектор U_i, очевидным образом складывается из треугольников канонической триангуляции и тем самым изометрично плоскому многоугольнику, звездному относительно (обреза) вершины A.

Выпуклость углов этого многоугольника составляет содержание доказанных уже утверждений 5 и 6.

В доказательстве утверждения 6′ для разверток гомеоморфных плоскости появляются два отличия от изложенного выше: первое состоит в том, что некоторые ребра графа Γ_A бесконечны (геодезические лучи) и вместе с тем появляются бесконечные треугольники. Однако легко видеть, что проведенное выше рассуждение сохраняет силу. Второе отличие состоит в том, что часть полного угла вокруг вершины A заполняется подходящими к ней геодезическими лучами, в частности, сектор U_i, ограниченный соседними кратчайшими, идущими в концевые вершины Γ_A, может содержать сектор S_i, заполненный геодезическими лучами (и притом только один*). Поэтому проведенное выше рассуждение доказывает только, что не превосходит π угол сектора $U_i \setminus S_i$.

Для доказательства утверждения 3 рассмотрим пару треугольников T_1, T_2 канонической триангуляции, соответствующих ребру BC множества Γ_A. Очевидно BC является кратчайшей в развертке, состоящей из треугольников $T_1 \equiv (ABC)_1$, $T_2 \equiv (ABC)_2$, склеенных по $(AB)_1$ и $(AB)_2$ и по $(AC)_1$ и $(AC)_2$. Предположим теперь, что в развертке P есть кривая γ, соединяющая точки B и C, более короткая, чем ребро BC. Мы приведем это предположение к противоречию следующим образом. Каждый отрезок этой кривой, идущий вне треугольников T_1, T_2 (т. е. по двуугольникам δ_1 и δ_2, дополняющим T_1 и T_2 до полной развертки P), заменим более коротким отрезком одной из сторон этих треугольников. При этом замена будет произведена так, что после удаления из развертки двуугольников δ_1, δ_2 и склеивания $(AB)_1$ с $(AB)_2$ и $(AC)_1$ с $(AC)_2$ отрезки кривой γ, лежащие внутри T_1 и T_2 и упомянутые выше отрезки сторон склеиваются в кривую $\tilde{\gamma}$. При этом $\tilde{\gamma}$ окажется короче BC (так как по построению $\tilde{\gamma}$ не длиннее γ, а γ короче BC), что невозможно.

---

* Легко видеть, что между любыми двумя секторами S_i к A подходит одна из кратчайших AA_i.

Нужная нам замена отрезков кривой γ осуществляется так. Если отрезок начинается и кончается на одной и той же стороне, то он, очевидно, не короче отрезка стороны с теми же концами. Пусть теперь точка «выхода» D_1 лежит, например, на стороне $(AB)_1$, а точка «входа» D_2 — на стороне $(AB)_2$, и пусть D_2^* — точка кратчайшей $(AB)_1$, такая, что длина $|AD_2^*|$ отрезка AD_2^* этой кратчайшей равна длине $|AD_2|$ отрезка AD_2 кратчайшей $(AB)_2$. Заменим отрезок D_1D_2 кривой γ отрезком $D_1D_2^*$ кратчайшей $(AB)_1$.

Длина $L(D_1D_2)$ отрезка D_1D_2 кривой γ не менее длины кратчайшей D_1D_2, а эта последняя по неравенству треугольника не менее, чем $||AD_1|-|AD_2||$, где $|AD_1|$, $|AD_2|$ — длины отрезков соответствующих кратчайших. Далее,

$$||AD_1|-|AD_2||=||AD_1|-|AD_2^*||=|D_1D_2^*|$$

и, следовательно,

$$L(D_1D_2)\geqslant|D_1D_2^*|.$$

Проведенное рассуждение доказывает также, что любой отрезок бесконечного ребра Γ_A (если такое есть) — кратчайшая.

6. 1. Чтобы выяснить строение канонической триангуляции гомеоморфной плоскости развертки с конечным числом истинных вершин, исследуем более детально строение «далеких» частей компонент множества разреза такой развертки.

Напомним, что $\Gamma_A^{(i)}$ есть часть множества разреза, лежащая в связной компоненте Q_i открытого множества, получающегося удалением из развертки P секторов, заполняемых геодезическими лучами, исходящими из вершины A.

Если на любом из деревьев $\Gamma_A^{(i)}$ взять достаточно далекую точку B, то справедливо следующее:

1) B соединима с A ровно двумя кратчайшими и двуугольник δ, ограниченный этими кратчайшими, содержит внутри себя все истинные вершины развертки, лежащие в Q_i;

2) двуугольник δ содержит все вершины графа $\Gamma_A^{(i)}$;

3) часть множества $\Gamma_A^{(i)}$, лежащая вне двуугольника δ, — геодезический луч с началом в B.

Легко видеть, что если некоторая точка B обладает перечисленными свойствами, то таковы же и все более далекие точки. Поэтому достаточно доказать более слабое утверждение — существование точки B, обладающей перечисленными свойствами.

Возьмем последовательность точек $B_n\in\Gamma_A^{(i)}$, уходящую в бесконечность. Малым сдвигом можно добиться того, чтобы каждая из B_n соединялась с A ровно двумя кратчайшими $(AB_n)_1$ и $(AB_n)_2$. Выберем подпоследовательности точек B_n так, чтобы сходились обе подпоследовательности кратчайших $(AB_n)_1$ и $(AB_n)_2$. (Точнее говоря, подпоследовательность выбирается так, чтобы сходились направления, в которых кратчайшие исходят из точки A).

Пределами выделенных подпоследовательностей $(AB_n)_1$ и $(AB_n)_2$ будут некоторые геодезические лучи l_1 и l_2. Поскольку внутрь области Q_i из точки A не исходят геодезические лучи, l_1 и l_2 обязательно совпадут с лучами, ограничивающими Q_i. При этом не может случиться, чтобы и $(AB_n)_1$, и $(AB_n)_2$ сходились к одному и тому же граничному лучу. В самом деле, внутри двуугольника δ_n, ограниченного $(AB_n)_1$ и $(AB_n)_2$, всегда есть истинная вершина развертки, и сходимость $(AB_n)_1$ и $(AB_n)_2$

к одному и тому же ограничивающему Q_i лучу повлекла бы наличие бесконечного числа истинных вершин.

Из сказанного выше уже следует, что для достаточно большого n двуугольник δ_n будет содержать любой заранее фиксированный конечный набор точек из Q_i, в частности, все истинные вершины развертки.

Возьмем такой двуугольник, обозначим его вершину через B, а сам двуугольник через δ_B. Малым сдвигом можно добиться того, чтобы B была соединима с A ровно двумя кратчайшими. Все истинные вершины ($\in Q_i$) лежат в δ_B по построению. Докажем утверждение 2). Пусть C — вершина графа $\Gamma_A^{(i)}$, лежащая вне двуугольника δ_B. Так как C не истинная вершина (вне δ_B их нет), то C — точка ветвления и, значит, существуют, по крайней мере, три кратчайших, соединяющих C с A и два неналегающих двуугольника, ограниченных этими кратчайшими. Хотя бы один из этих двуугольников не пересекается с δ_B и, следовательно, содержит истинную вершину, не лежащую в δ_B, что невозможно.

Для доказательства утверждения 3) заметим, что ввиду отсутствия вершин $\Gamma_A^{(i)}$ вне δ_B, ребро $\Gamma_A^{(i)}$, выходящее из δ_B в точке B, бесконечно продолжаемо. Далее, пусть точка $C \in \Gamma_A^{(i)}$ и лежит вне δ_B. Тогда C соединима с A, по крайней мере, двумя кратчайшими, ограничивающими двуугольник δ_c. Этот двуугольник не может лежать вне δ_B, так как тогда он содержал бы истинную вершину, не лежащую в δ_B. Поэтому δ_B лежит внутри δ_c, а так как исходящее из B ребро $\Gamma_A^{(i)}$ бесконечно и не может выйти из δ_c через сторону, то оно проходит через точку C, что и требовалось доказать.

Сделаем еще несколько замечаний.

Замечание 1.

В предыдущих построениях удобно было брать в качестве B внутреннюю точку некоторого ребра Γ_A. Построив двуугольник δ_B, обладающий нужными свойствами, мы можем двигать B по содержащему ее ребру внутрь двуугольника δ_B, одновременно сжимая δ_B. Это сжатие можно продолжать до тех пор, пока мы не придем в некоторую вершину графа $\Gamma_A^{(i)}$. Таким образом, можно утверждать, что существует вершина графа $\Gamma_A^{(i)}$, обладающая всеми нужными свойствами.

Замечание 2.

Докажем теперь, что угол θ_i «двуугольника» Q_i при вершине A равен полной кривизне Ω_i множества Q_i: $\theta_i = \Omega_i$. Выберем (как и в предыдущем замечании) далекую точку C на бесконечном ребре l_B множества $\Gamma_A^{(i)}$ и рассмотрим двуугольник δ_c (с вершинами A и C). При удалении C в бесконечность угол этого двуугольника при вершине A, очевидно, стремится к углу θ_i, угол же при вершине C стремится к 0, так как он равен сумме углов треугольников $(ABC)_1$ и $(ABC)_2$ при вершине C, удаляющейся в бесконечность. В то же время сумма углов двуугольника δ_c равна, как известно, его кривизне, совпадающей с кривизной Ω_i, поскольку вне δ_c в Q_i истинных вершин нет. Отсюда, очевидно, и следует, что $\theta_i = \Omega_i$.

2. Докажем теперь утверждение 7′, 2.

Напомним, что через P_i обозначалось множество точек развертки, заполняемое максимальными кратчайшими, исходящими из точки A, между двумя последовательными кратчайшими γ_i, γ_{i+1}, идущими в концевые вершины Γ_A. Строение тех из P_i, которые ограничены, исследуется так же, как и для компактных разверток. Поэтому рассмотрим одно из неограниченных P_i; то, что P_i содержит сектор (S_i), заполненный геодезическими лучами, следует из неограниченности. Двух таких секторов

P_i содержать не может, так как между ними, а тем самым между γ_i и γ_{i+1} к точке A подходила бы кратчайшая, идущая в концевую вершину Γ_A, что невозможно. К границам сектора S_i примыкают два треугольника канонической триангуляции с бесконечно удаленной вершиной. При выкладывании их на плоскость и склеивании по «берегам» сектора S_i получается бесконечный четырехугольник с двумя параллельными бесконечными сторонами. Все остальные треугольники канонической триангуляции, входящие в P_i, конечны и при выкладывании на плоскость могут быть подклеены к упомянутому четырехугольнику. Выпуклость полученного многоугольника следует из доказанных ранее утверждений 5 и 6.

Опираясь на замечание 3, подсчитаем полную кривизну Ω_k внутреннего предельного конуса K развертки P. По определению

$$\Omega_k = 2\pi - \sum_i \varphi_i, \tag{1}$$

где φ_i — углы секторов S_i. С другой стороны, для полной кривизны Ω развертки P имеем

$$\Omega = \Sigma\, \Omega_i + \omega_A, \tag{2}$$

где Ω_i — кривизны множеств Q_i, а ω_A — кривизна вершины A. Далее,

$$\omega_A = 2\pi - \Sigma\, \varphi_i - \Sigma\, \theta_i, \tag{3}$$

где θ_i — углы секторов Q_i при вершине A. Наконец, по доказанному в замечании 3,

$$\theta_i = \Omega_i. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (2), мы и получим, что $\Omega = 2\pi - \Sigma\, \varphi_i$, что вместе с (1) дает $\Omega = \Omega_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. B. Myers. Connections Between Differential Geometry and Topology. Duke Math. J., v. 1, n. 3, p. 376—391, 1935 (I. Simply Connected Surfaces); v. 2, n. 1, p. 95—103, 1936 (II. Closed Surfaces).

2. Р. Бишоп, Р. Криттенден. Геометрия многообразий. М., «Мир», 1967.

3. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. М. — Л., Гостехиздат, 1950.

4. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. Изопериметрическая задача при ограничении ширины области на поверхности. Труды мат. института АН СССР, том 76, 1965, стр. 81—88.

5. В. К. Ионин. Об изопериметрических и некоторых других неравенствах для многообразия ограниченной кривизны. «Сиб. мат. ж.», том 10, № 2, 1969, стр. 329—343.

6. P. Hartman. Geodesic Parallel Coordinates in the Large. Amer. J. Math., 86, 1964, 705—727.

Поступила 7 декабря 1970 г.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ В E^4 С СИММЕТРИЕЙ ПРАВИЛЬНЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ СИМПЛЕКСА И 600-ГРАННИКА

В. Ф. Игнатенко

(Полтава)

А. С. Лейбин

(Харьков)

В статье рассматриваются алгебраические трехмерные поверхности F_n в четырехмерном евклидовом пространстве E^4, имеющие симметрию правильных четырехмерных симплекса* и шестисотгранника. В обоих случаях устанавливается минимум порядка поверхности и в случае симметрии симплекса — общий вид уравнения поверхности.

1°. Пусть в m-мерном пространстве E^m задана некоторая конечная группа G симметрий пространства. Ее неподвижную точку (какую-либо, если она не одна) примем за начало координат.

Пусть $L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — однородные многочлены, каждый из которых инвариантен относительно группы G и все они независимы. Эти многочлены Л. Лекорню назвал «элементами симметрии» данной группы [4]. Э. Гурса [2] и Л. Лекорню [4] доказали, что если степени n_i этих многочленов минимальны при наложенных на многочлены условиях инвариантности и независимости, то любую алгебраическую поверхность, инвариантную относительно G, можно задать уравнением

$$\varphi(L_1, L_2, \ldots, L_m) = 0, \tag{1}$$

где φ — некоторый многочлен относительно $L_1, L_2, \ldots, L_m$.

Так как сфера с центром в начале координат имеет симметрию любой конечной группы, то в качестве одного из элементов симметрии — назовем его «сферическим» и снабдим последним номером m — можно взять функцию

$$L_m = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

и, следовательно, $n_m = 2$. В работе [4] Лекорню доказал также, что сумма степеней остальных элементов симметрии удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=1}^{m-1} n_j \geqslant N(G) + m - 2, \tag{2}$$

где $N(G)$ — число всех плоскостей симметрии группы G. Равенство в (2) свидетельствует о том, что найденные степени n_j минимальны. Заметим, что вообще элементы симметрии, даже минимальные, определяются неоднозначно.

* В статье [1], п. 10°, сказано, что Э. Гурса в работе [2] рассматривал поверхности F_n с симметрией правильного симплекса в E^m при $m > 3$. Авторы [1] опирались на довольно подробное изложение работы [2] в статье В. Ф. Мейера [3], где симметрии правильного тетраэдра и куба в E^3 названы, соответственно, симметриями типа I и II. Многомерным пространствам в [3] уделена всего одна фраза: «Затем результаты, полученные для поверхностей с симметриями типов I и II, переносятся на пространство S_n, в частности на S_4» $(S_m \equiv E^m$ в наших обозначениях$)$, из которой естественно заключить, что симметрия I в E^m $(m > 3)$ есть симметрия симплекса. На самом же деле Э. Гурса назвал в [2] «поверхностями с симметрией тетраэдра» поверхности пространства E^m, все плоскости симметрии которых могут быть заданы уравнениями $x_i \pm x_j = 0$ $(i, j = 1, \ldots, m;\ i < j)$. При $m > 3$ эти плоскости определяют одну из подгрупп симметрий m-мерного куба и не являются (все) плоскостями симметрии симплекса.

Доказательства этих утверждений в работах [2] и [4] даны для трехмерного пространства ($m = 3$), но они без существенных изменений переносятся на случай любого m.

2°. Вершинной фигурой правильного четырехмерного симплекса является правильный тетраэдр. В E^3 плоскости симметрии правильного тетраэдра можно задать уравнениями:

$$x_i \pm x_j = 0, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3;\ i < j. \tag{3}$$

Группа G^6 (индекс 6 указывает число инвариантных плоскостей группы) правильного тетраэдра имеет элементы симметрии минимальных степеней, кроме сферического, такие [2, 4]:

$$L_1^6 = x_1x_2x_3; \quad L_2^6 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2.$$

Вершинная фигура правильного четырехмерного 600-гранника есть правильный икосаэдр. В E^3 плоскости симметрии икосаэдра могут быть заданы уравнениями

$$x_i = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3;$$
$$x_i \pm \lambda x_j \pm \mu x_k = 0, \quad i,\ j,\ k = (1,\ 2,\ 3), \tag{4}$$

где $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\mu = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; запись $i,\ j,\ k = (1,\ 2,\ 3)$ означает, что i, j, k все различны и принимают значения 1, 2, 3 в порядке каждой из их циклических перестановок: (1, 2, 3), (2, 3, 1) и (3, 1, 2).

Элементы симметрии группы икосаэдра G^{15} с инвариантными плоскостями (4) могут быть записаны так:

$$L_1^{15} = \prod_{i,\ j=(1,\ 2,\ 3)} (x_i^2 - \lambda^2 x_j^2);$$
$$L_2^{15} = \prod_{i,\ j=(1,2,3)} (x_i^2 - \lambda^4 x_j^2) \cdot \sum_{\alpha,\ \beta,\ \gamma=(1,\ 2,\ 3)} (x_\alpha^4 - 2x_\beta^2 x_\gamma^2);$$

здесь запись $i,\ j = (1,\ 2,\ 3)$ означает, что i, j пробегают циклически все пары значений: 1, 2; 2, 3; 3, 1.

3°. Зададим в E^4 правильный 4-симплекс вершинами

$$\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-1,\ -1,\ 1,\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-1,\ 1,\ -1,\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\right),\ \left(1,\ -1,\ -1,\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\right),$$
$$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Уравнения его граней

$$\begin{gathered} 5(x_1 + x_2 - x_3) + \sqrt{5}x_4 = 4, \\ 5(x_1 - x_2 + x_3) + \sqrt{5}x_4 = 4, \\ 5(-x_1 + x_2 + x_3) + \sqrt{5}x_4 = 4, \\ 5(-x_1 - x_2 - x_3) + \sqrt{5}x_4 = 4, \\ -\sqrt{5}x_4 = 1; \end{gathered} \tag{5}$$

уравнения его плоскостей симметрии (их 10)

$$\begin{gathered} x_i \pm x_j = 0, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3; \quad i < j, \\ x_1 + x_2 - x_3 + \sqrt{5}x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + \sqrt{5}x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{5}x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + \sqrt{5}x_4 = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Его группу симметрий обозначим через G^{10}, инвариантные относительно G^{10} поверхности — через F_n^{10}, элементы симметрии этой группы — через L_1^{10}, L_2^{10}, L_3^{10}, L_4 (последний — сферический, общий для всех конечных групп в E^4, поэтому он без индекса, указывающего группу).

Теорема 1. *Поверхности F_n^{10} существуют при любом $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Прежде всего найдем поверхность F_3^{10}. Пусть K_3^{10} — ее асимптотический конус; он, очевидно, имеет те же плоскости симметрии (6), что и F_3^{10}. Плоскость $x_4 = 0$ пересекает K_3^{10} по двумерному конусу, группа симметрий которого совпадает с группой симметрий сечения этой плоскостью симплекса — вершинного тетраэдра; плоскости симметрии этого тетраэдра в E^4 имеют уравнения (3). Отсюда следует, что уравнение конуса K_3^{10} имеет вид

$$x_1x_2x_3 + x_4\,[a\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + bx_4^2] = 0.$$

Легко проверить, что при $a = -b = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ конус K_3^{10} инвариантен относительно заданной группы G^{10}. Следовательно,

$$L_1^{10} \equiv x_1x_2x_3 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\,x_4\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)$$

есть элемент симметрии 3-го порядка группы G^{10}, и

$$L_1^{10} = c \tag{7}$$

есть искомая поверхность F_3^{10}. При $c = -\dfrac{8}{75}$ уравнение (7) можно получить, складывая возведенные в куб нормированные уравнения (5).

Складывая четвертые степени левых частей нормированных уравнений (6) и отбрасывая члены, составляющие $(L_4)^2$, получим

$$L_2^{10} \equiv 2x_4^4 + 5\,(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) - x_4^2\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 6\sqrt{5}x_1x_2x_3x_4,$$

и $L_2^{10} = c$ — пример поверхности F_4^{10}. Примеры поверхностей F_n^{10} при любом $n \geqslant 3$ можно задать уравнениями:

$$\begin{aligned} F_{2p+3}^{10}&:\ L_1^{10}\cdot(L_4)^p + c = 0,\\ F_{2p+4}^{10}&:\ L_2^{10}\cdot(L_4)^p + c = 0, \end{aligned} \qquad (p \geqslant 0).$$

Теорема доказана.

4°. Перемножив левые части нормированных уравнений (5), получим элемент симметрии 5-го порядка группы G^{10}:

$$L_3^{10} \equiv x_4\,[25\,(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + x_4^4 - 50\,(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) - 10x_4^2\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 80\sqrt{5}x_1x_2x_3x_4];$$

уравнение $L_3^{10} = c$ задает пример поверхности F_5^{10}, отличной от указанной в п. 3°.

Нетрудно видеть, что функции, найденные в пп. 2° и 3°, вместе с $L_4 = \sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2$, независимы; кроме того, для них выполняется равенство (2). Поэтому любая алгебраическая поверхность F_n^{10} может быть задана уравнением (1), в данном случае

$$\varphi\,(L_1^{10},\ L_2^{10},\ L_3^{10},\ L_4) = 0.$$

5°. Все 120 вершин правильного 600-гранника в E^4 могут быть заданы следующим образом [5]. Пусть $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\mu = \lambda + 1, \zeta = \lambda + 2$. Тогда 8 вершин имеют одну координату $x_i = \pm 2\eta$, остальные координаты — нули; 16 вершин такие: $(\pm\mu, \pm\mu, \pm\mu, \pm\mu)$. Остальные 96 вершин распадаются на 4 группы по 24 вершины, координаты которых такие:

если $x_1 = \zeta$, то $x_2, x_3, x_4 = (0, -\mu, 1)$;
если $x_2 = \zeta$, то $x_1, x_4, x_3 = (0, -\mu, 1)$;
если $x_3 = \zeta$, то $x_1, x_2, x_4 = (0, -\mu, 1)$;
если $x_4 = \zeta$, то $x_1, x_3, x_2 = (0, -\mu, 1)$,

где смысл скобок тот же, что и в (4) п. 2°.

При этом уравнения плоскостей симметрии 600-гранника (их 60) записываются так:

$$
\begin{gathered}
x_i = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4; \\
x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0; \\
x_l \pm \lambda x_j \pm \mu x_k = 0;
\end{gathered} \tag{8}
$$

$$i,\ j,\ k = (1,\ 2,\ 3), = (1,\ 3,\ 4), = (1,\ 4,\ 2), = (2,\ 4,\ 3).$$

Группу симметрий пространства E^4 с инвариантными плоскостями (8) — группу симметрий 600-гранника — обозначим через G^{60}, а инвариантную поверхность — F_n^{60}.

Теорема 2. *Поверхности F_n^{60}, не распадающиеся на совокупность сфер, существуют* только *при четном* $n = 10 + 2p$, где p любое натуральное; *минимальный порядок такой поверхности* $\min O(F_n^{60}) = 12$.

Доказательство. Так как поверхность F_{12}^{60} существует (см. [1], п. 11°, там же доказано, что порядок $O(F_n^{60})$ всегда четен и не меньше 6), то при отыскании $\min O(F_n^{60})$ можно считать $n \leqslant 12$. Пусть K_n^{60} есть асимптотический конус поверхности F_n^{60}; очевидно, он инвариантен относительно G^{60}, т. е. имеет плоскости симметрии (8). Каждая из плоскостей $x_i = h$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ пересекает при подходящем значении h заданный 600-гранник по вершинной фигуре — правильному икосаэдру, а плоскость $x_i = 0$ пересекает конус K_n^{60} — по 2-конусу с той же симметрией, что и у вершинного икосаэдра. Порядок этого 2-конуса равен n, так как если бы он был меньше n, то секущая плоскость $x_i = 0$ была бы 3-асимптотической для 3-конуса K_n^{60}; отражая ее в плоскостях (8), мы получили бы, что K_n^{60} имеет больше двенадцати 3-асимптотических направлений ([6], п. 1°), что невозможно при $n \leqslant 12$.

Обозначим 2-конус, лежащий в плоскости $x_i = 0$, через $K_{n,i}^{15}$. Плоскости симметрии каждого из них те же, что и у соответствующего вершинного икосаэдра; уравнения этих плоскостей для $K_{n,4}^{15}$ в E^4 имеют вид (4), для остальных трех — аналогичный.

Рассмотрим интересующие нас значения порядка n: $6 \leqslant n \leqslant 12$.

1. Пусть $n = 6$. Уравнения $K_{6,4}^{15}$ и $K_{6,3}^{15}$ можно записать так:

$$
K_{6,4}^{15}: \begin{array}{l} x_4 = 0, \\ L_1^{15}(x_1,\ x_2,\ x_3) + a_0 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 = 0; \end{array}
$$

$$
K_{6,3}^{15}: \begin{array}{l} x_3 = 0, \\ L_1^{15}(x_1,\ x_4,\ x_2) + b_0 (x_1^2 + x_2^2 + x_4^2)^3 = 0. \end{array}
$$

Поэтому уравнение K_6^{60} можно записать в любом из следующих видов:

$$L_1^{15}(x_1, x_2, x_3) + a_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 + \\ + x_4^2 \sum_{k=0}^{2} a_{k+1} x_4^{2k} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{2-k} = 0;$$

$$L_1^{15}(x_1, x_4, x_2) + b_0(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2)^3 + \\ + x_3^2 \sum_{k=0}^{2} b_{k+1} x_3^{2k} (x_1^2 + x_2^2 + x_4^2)^{2-k} = 0.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты этих уравнений при $x_1^4x_2^2$ и при $x_1^2x_2^4$, получим несовместную систему уравнений для a_0 и b_0:

$$a_0 - b_0 = -\frac{\lambda^2(1+\lambda^2)}{3}, \quad \left(\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$a_0 - b_0 = \frac{\lambda^2(1+\lambda^2)}{3}.$$

Следовательно, $n \neq 6$, т. е. F_6^{60} не существует.

2. Пусть $n = 8$. Уравнения $K_{8,4}^{15}$ и $K_{8,3}^{15}$ должны иметь вид:

$$K_{8,4}^{15}: \quad \begin{array}{l} x_4 = 0, \\ L_1^{15}(x_1, x_2, x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^4 = 0; \end{array}$$

$$K_{8,3}^{15}: \quad \begin{array}{l} x_3 = 0, \\ L_1^{15}(x_1, x_4, x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) + b_0(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2)^4 = 0. \end{array}$$

Для конуса K_8^{60} снова получаем два равносильных уравнения

$$L_1^{15}(x_1, x_2, x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a_1x_4^2) + a_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^4 + \\ + x_4^2 \sum_{k=0}^{3} a_{k+2} x_4^{2k} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3-k} = 0;$$

$$L_1^{15}(x_1, x_4, x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + b_1x_3^2) + b_0(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2)^4 + \\ + x_3^2 \sum_{k=0}^{3} b_{k+2} x_3^{2k} (x_1^2 + x_2^2 + x_4^2)^{3-k} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты этих уравнений при $x_1^6x_2^2$ и при $x_1^2x_2^6$, получаем несовместную систему уравнений для a_0 и b_0:

$$a_0 - b_0 = -\frac{\lambda^2(1+\lambda^2)}{4}, \quad \left(\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$a_0 - b_0 = \frac{\lambda^2(1+\lambda^2)}{4},$$

откуда следует, что F_8^{60} не существует.

3. Пусть $n = 10$. Уравнение $K_{10,4}^{15}$ будет таким:

$$L_2^{15}(x_1, x_2, x_3) + a_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 L_1^{15}(x_1, x_2, x_3) + \\ + a_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^5 = 0, \qquad x_4 = 0;$$

уравнение $K_{10,3}^{15}$ получается такой же заменой переменных, как и в случаях 1 и 2. Для K_{10}^{60} получаем снова два эквивалентных уравнения, из которых выпишем только одно:

$$L_2^{15}(x_1, x_2, x_3) + a_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 L_1^{15}(x_1, x_2, x_3) +$$

$$+ a_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^5 + x_4^2 \Big\{ [a_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_3 x_4^2]\, L_1^{15} (x_1, x_2, x_3) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{4} a_{k+4} x_4^{2k} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{4-k} \Big\} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты обоих уравнений при произведениях $x_1^2x_2^8$ и $x_1^8x_2^2$, затем при $x_1^6x_2^4$ и $x_1^4x_2^6$, получаем систему для a_0, b_0, a_1, b_1:

$$\lambda^2 (a_0 + \lambda^2 b_0) + 5 (b_1 - a_1) = -\lambda^2 (1 + \lambda^2),$$
$$\lambda^2 (\lambda^2 a_0 + b_0) - 5 (b_1 - a_1) = -\lambda^2 (1 + \lambda^2),$$
$$\lambda^2 [(\lambda^2 - 2) a_0 - (2\lambda^2 - 1) b_0] + 10 (a_1 - b_1) = -3\lambda^2 (1 + \lambda^2),$$
$$\lambda^2 [(2\lambda^2 - 1) a_0 - (\lambda^2 - 2) b_0] + 10 (a_1 - b_1) = 3\lambda^2 (1 + \lambda^2),$$

откуда легко исключаются a_1 и b_1; в результате получаем для коэффициентов a_0 и b_0 несовместную систему:

$$a_0 + b_0 = -2,$$
$$a_0 + b_0 = 6\lambda^2, \quad \left(\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right).$$

Отсюда следует, что и при $n = 10$ поверхность F_{10}^{60} не существует.

Как уже было сказано, поверхность F_{12}^{60} существует [1]; чтобы получить F_n^{60} при любом четном $n = 2p > 12$, достаточно к левой части уравнения F_{12}^{60} прибавить любую линейную комбинацию степеней L_4 с неравными нулю коэффициентом при $(L_4)^p$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях ортогональной симметрии поверхностей пространства E^m. Укр. геом. сб., вып. 8, 1970, Изд-во ХГУ, стр. 38—48.
2. E. Goursat. Étude des surfaces qui admettent tous, les, plans de symétrie d'un polyèdre régulier. Ann. de l'Ecole Norm., (3), IV, 1887 стр. 159—260.
3. W. Fr. Meyer. Spezielle algebraischen Flächen. Enz. d. math. Wiss., Bd. III, T. II, Leipzig, 1931.
4. L. Lecornu. Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. Acta Math., 10, 1887, стр. 201—280.
5. P. H. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie, часть II, Leipzig, 1905.
6. В. Ф. Игнатенко. О гиперплоскостях ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей. Укр. геом. сб., вып. 5—6, 1968, Изд. ХГУ, стр. 78—84.

Поступила 16 октября 1970 г.

К ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ГЛАВНЫХ ДИАМЕТРАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА E^m

В. Ф. Игнатенко

(Полтава)

Пусть в евклидовом m-мерном пространстве E^m введена декартова система координат и задана $(m-1)$-мерная алгебраическая поверхность F_n порядка n. Диаметральной плоскостью поверхности F_n, сопряженной направлению $u=\{u_1, \ldots, u_m\}$, называется полярная плоскость бесконечно удаленной точки этого направления относительно F_n; если направление u не является асимптотическим для поверхности, то диаметральную плоскость можно рассматривать как геометрическое место центров средних расстояний точек пересечения с F_n прямых направления u. Направление u и сопряженная ему диаметральная плоскость называются главными, если они ортогональны друг другу.

1°. **Теорема.** *Пусть множество главных диаметральных плоскостей поверхности F_n конечно и ее асимптотический конус распадается на h компонент порядка r_k кратности $s_k < n$, $\sum_{k=1}^{h} r_k s_k = n$. Тогда число N ее главных диаметральных плоскостей удовлетворяет условию*

$$N \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{h} r_k - 1 \right)^{m-i}.$$

Доказательство. Пусть уравнение поверхности F_n имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n} \varphi_j = 0,$$

где φ_j — однородные формы степени j относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$ — координат радиус-вектора x.

Тогда уравнение диаметральной плоскости поверхности F_n, сопряженной направлению u, запишется так:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right)_{x=u} x_i + (\varphi_{n-1})_{x=u} = 0.$$

Положим

$$\varphi_n = \prod_{k=1}^{h} \psi_{r_k}^{s_k},$$

где $\psi_{r_k}^{s_k}$ — однородные формы относительно $x_1, \ldots, x_m$ степени r_k и кратности $s_k < n$.

При этом

$$\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right)_{x=u} = \chi_i \left(\prod_{k=1}^{h} \psi_{r_k}^{s_k - 1} \right)_{x=u},$$

где

$$\chi_i = \sum_{k=1}^{h} \left[s_k \left(\frac{\partial \psi_{r_k}}{\partial x_i} \right) \prod_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{h} \psi_{r_{k'}} \right]_{x=u}.$$

Пусть $n_0 = \sum_{k=1}^{h} r_k - 1 = \deg \chi_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Если диаметральная плоскость поверхности F_n является главной, то

$$\frac{\chi_1}{u_1} = \ldots = \frac{\chi_m}{u_m} = \sigma, \tag{1}$$

где σ — коэффициент пропорциональности. Положим $\sigma = v^{n_0 - 1}$, считая $n_0 > 1$. Тогда равенства (1) определяют, соответственно, следующие системы уравнений относительно переменных $u_1, \ldots, u_m$ и $u_1, \ldots, u_m, v$:

$$\chi_1 u_j - u_1 \chi_j = 0 \quad (j = 2, \ldots, m), \tag{2}$$

$$\chi_i - v^{n_0 - 1} u_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

По теореме 1 работы [1, стр. 169] при четном n_0 система (2) имеет вещественное ненулевое решение, пусть $(u_1^0, \ldots, u_m^0)$. При этом F_n имеет вещественную главную диаметральную плоскость, сопряженную $u_0 = \{u_1^0, \ldots, u_m^0\}$, если u_0 не определяет асимптотическое направление поверхности F_n. При нечетном n_0 система (3) также имеет вещественное ненулевое решение, пусть $(u_1^1, \ldots, u_m^1, v^1)$; этому решению соответствует вещественная главная диаметральная плоскость F_n, если числа $u_1^1, \ldots, u_m^1$ одновременно не равны нулю, а направление $\{u_1^1, \ldots, u_m^1\}$ не является асимптотическим для F_n.

Поверхность F_n без вещественных главных диаметральных плоскостей существует. Такую $F_n (n > 2)$ в E^2, например, при вещественном $a \neq 0$ определяет уравнение

$$x_1 \left(x_1^{n-1} + \sqrt{-1}\, a x_1^{n-2} + x_2\right) = c. \tag{4}$$

Введем переменные $x_i' = \frac{u_i}{v}$ $(i = 1, \ldots, m)$; систему (3) запишем в таком виде:

$$\chi_i' - x_i' = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Система (5) имеет в общем n_0^m решений, одно из которых нулевое. Следовательно, число N всех главных диаметральных плоскостей поверхности F_n удовлетворяет условию

$$N \leqslant \widetilde{N} = \frac{n_0^m - 1}{n_0 - 1} = \sum_{i=1}^{m} n_0^{m-i}. \tag{6}$$

Если $n_0 = 1$, то $\widetilde{N} = m$ [2]. При $n = n_0 + 1$ оценка (6) приводится в [3]; для случая $m = 3$ она получена в работе [4] как результат исследования системы вида (2).

2°. Пусть α есть плоскость ортогональной симметрии поверхности F_n. Тогда α является главной диаметральной плоскостью F_n только в том случае, когда направление ее нормали не является асимптотическим для F_n (см. [5, п. 18°]).

Отсюда вытекает

Следствие. *Если множество плоскостей ортогональной симметрии поверхности F_n конечно, то число N' тех из них, направления нормалей к которым не являются асимптотическими для F_n, удовлетворяют условию*

$$0 \leqslant N' \leqslant \widetilde{N}.$$

3°. Обозначим соответственно через $\{D(F_n)\}$, $\{S(F_n)\}$ множество всех главных диаметральных плоскостей и всех плоскостей ортогональной симметрии поверхности F_n; эти множества считаем конечными. Положим $\{S_0(F_n)\} \equiv \{D(F_n)\} \cap \{S(F_n)\}$, $\{D_0(F_n)\} \equiv \{D(F_n)\} - \{S_0(F_n)\}$; множество $\{D_0(F_n)\}$ имеет группу симметрий F_n. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $\{D(F_n)\}$ составляют вещественные плоскости; поверхность (4), в частности, показывает, что возможен случай $\{D(F_n)\} \equiv \varnothing$, при этом и множество $\{S(F_n)\} \equiv \varnothing$. Если $a, c = 0$ и n нечетно, то $\{S(F_n)\} \equiv \varnothing$; оно состоит из плоскости $x_1 = 0$ — компоненты поверхности. Поверхность, для которой $\{D(F_n)\} \neq \varnothing$ и $\{S(F_n)\} \neq \varnothing$, определяет, например, такое уравнение:

$$x_1 x_2 x_3 = c \neq 0.$$

Это поверхность F_3^6 [6], п. 2°; ее группа симметрий изоморфна тетраэдрической группе A_4. Плоскости симметрии F_3^5 задаются уравнениями

$$x_i \pm x_j = 0 \ \ (i, j = 1, 2, 3;\ i < j). \tag{7}$$

Нормаль каждой из них параллельна одной из координатных плоскостей, которые являются 2-асимптотическими плоскостями поверхности

F_3^6 (см. 7, п. 1°). Поэтому $\{S_0(F_3^6)\} \equiv \varnothing$. Уравнения диаметральных плоскостей поверхности F_3^6, сопряженных векторам $\{1, \pm 1, \pm 1\}$, имеют вид

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0. \qquad (8)$$

Следовательно, плоскости (8) входят в $\{D_0(F_3^6)\}$. Пусть β — еще одна плоскость $\{D_0(F_3^6)\}$. Отражение β относительно плоскостей (7) дает больше двух новых плоскостей этого множества; значит, F_3^6 имеет больше 7 главных диаметральных плоскостей, что противоречит оценке (6). Таким образом, $\{D(F_3^6)\} \equiv \{D_0(F_3^6)\}$ состоит из плоскостей (8); $N < \tilde{N}$. Отметим, что множество $\{D(F_3^6)\}$ можно найти также, исходя из решений системы (2), составленной для F_3^6.

4°. Приведем примеры поверхностей, для которых $N = \tilde{N}$. Такие поверхности, очевидно, есть среди F_2; при $n > 2$, $h = 1$, $s_1 = p$ (см. п. 1°) этому условию удовлетворяет F_{2p}, определяемая уравнением

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2\right)^p + \sum_{j=0}^{2p-1} \varphi_j = 0.$$

Случаю $n = h > 2$, $s_k = 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ отвечает такая F_n в E^2:

$$\prod_{l=0}^{n-1} (\lambda_l x_1 - \mu_l x_2) = c \neq 0,$$

где

$$\frac{\lambda_l}{\mu_l} = \operatorname{tg} \frac{l\pi}{n}.$$

Множество $\{D(F_n)\}$ $(\equiv \{S(F_n)\})$ ее главных диаметральных плоскостей задают уравнения

$$\lambda_l' x_1 - \mu_l' x_2 = 0,$$

где

$$\frac{\lambda_l'}{\mu_l'} = \operatorname{tg} \frac{(2l+1)\pi}{2n} \quad (l = 0, \ldots, n-1).$$

Пусть $m = 3$, $n = 4$, $h = s_1 = 1$. Уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^4 - 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i<j}}^{3} x_i^2 x_j^2 = c$$

определяет поверхность F_4^9 [6], п. 2°, с центром 0; группа симметрий F_4^9 изоморфна октаэдрической группе S_4. Множество $\{S(F_4^9)\}$ состоит из координатных плоскостей и плоскостей (7). Аналогично п. 3° убеждаемся, что $\{S(F_4^9)\} \equiv \{S_0(F_4^9)\}$, а множество $\{D_0(F_4^9)\}$ составляют плоскости (8). Таким образом, $\{D(F_4^9)\}$ имеет $\tilde{N} = 13$ плоскостей.

5°. Укажем еще на обобщение одного утверждения в работе [4]: *Для того чтобы все диаметральные плоскости поверхности F_n были вполне параллельны, необходимо и достаточно, чтобы ее асимптотический конус был n-кратной плоскостью.*

Доказательство этого утверждения не отличается от того, которое для случая $m = 3$ имеется в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. «Усп. матем. наук», т. 25, вып. 6, 1969, стр. 3—184.
2. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства. Изд-во «Наука». М., 1966.

3. В. Ф. Игнатенко. К теории главных диаметральных гиперплоскостей алгебраических гиперповерхностей. Третья Прибалт. геом. конференция (тезисы докладов), Паланга, 1968, стр. 69—70.
4. B. A. Rosina. Sulla teoria diametrale delle superficie algebriche. Bull. Soc. roy. Sci. Liège, 1962, 31, N 3, 4, стр. 146—167.
5. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в E^m. «Укр. геом. сб.», вып. 7, 1970, стр. 40—55.
6. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях симметрии алгебраических поверхностей пространства E^3. «Укр. геом. сб.», вып. 10, 1971, стр. 34—40.
7. В. Ф. Игнатенко. О гиперплоскостях ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей. «Укр. геом. сб.», вып. 5—6, 1968, стр. 78—84.

Поступила 7 декабря 1970 г.

ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ КАК ТЕОРИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н. И. Кованцов

(Киев)

1. Предварительные определения и формулы

Мы прибегаем к термину «неголономный» всякий раз, когда имеем дело с не вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений при заданных независимых переменных (голономных переменных). Искомые переменные системы есть переменные *неголономные*.

Голономные и неголономные переменные вместе составляют *смешанные* переменные, теория таких переменных обстоятельно разработана Г. Георгиу [1, 2, 3, 4].

Внешний дифференциал от обычного дифференциала голономного переменного равен нулю, внешний дифференциал от «обычного дифференциала» неголономного переменного отличен от нуля. Суть дела в том, что «обычный дифференциал» неголономного переменного таковым в действительности не является — это некоторая линейная форма, в коэффициенты которой входят как голономные, так и неголономные переменные, а под знак дифференциала — только голономные переменные. Внешний дифференциал от «дифференциала» неголономного переменного есть как раз внешний дифференциал от такой формы.

Если дана пфаффова форма от смешанных переменных, то внешний дифференциал ее зависит от того, какие именно переменные приняты за голономные и какие — за неголономные. Последнее утверждение докажем. Пусть

$$a_i^h dx^i = 0, \quad h = 1, \ldots, r, \quad i = 1, \ldots, n + r \tag{1}$$

— система r независимых уравнений Пфаффа. Коэффициенты a_i^h — дифференцируемые функции от $x^1, \ldots, x^{n+r}$. Пусть

$$\omega = a_i dx^i$$

— некоторая форма Пфаффа. a_i — также дифференцируемые функции от переменных $x^1, \ldots, x^{n+r}$. Пусть для определенности $x^{i_1}, \ldots, x^{i_r}$ — неголономные переменные, остальные n переменных $x^{j_1}, \ldots, x^{j_n}$ — голономные. В таком случае $|a_\alpha^h| \neq 0$, $\alpha = i_1, \ldots, i_r$, в противном случае из уравнений (1) можно было бы исключить дифференциалы dx^α. ($i_1, \ldots, i_r$ — какие-то не совпадающие между собою числа из интервалов $1, \ldots, n + r$). Мы получили бы соотношения между *независимыми* дифференциалами голономных переменных, что невозможно.

3*

Продифференцируем уравнения (1) внешним образом:

$$[da^h_i dx^i] + a^h_\alpha D dx^\alpha = 0.$$

Отсюда

$$D dx^\alpha = -a'^\alpha_h [da^h_i dx^i], \tag{2}$$

где функции a'^α_h определяются уравнениями

$$a'^\alpha_h a^h_\beta = \delta^\alpha_\beta, \ \alpha, \beta = i_1, \ldots, i_r.$$

Продифференцируем теперь внешним образом форму ω:

$$D\omega = [da_i dx^i] + a_\alpha D dx^\alpha.$$

Подставим сюда вместо Ddx^α их значения из (2):

$$D\omega = [da_i dx^i] - a_\alpha a'^\alpha_h [da^h_i dx^i].$$

Последнее выражение *зависит* от того, в каких пределах меняется α, т. е. от того, какие переменные приняты за голономные и какие за неголономные.

Каждая нормальная конгруэнция K_n представляет собой совокупность прямых, ортогональных к некоторому однопараметрическому семейству голономных поверхностей Σ. Все свойства конгруэнции K_n могут быть выражены в терминах, связанных с поверхностями Σ. Например, развертывающиеся поверхности конгруэнции соответствуют линиям кривизны поверхностей, расстояния от какой-либо поверхности Σ до фокусов конгруэнции есть главные радиусы кривизны этой поверхности и т. д. Теория нормальных конгруэнций специально не развивалась именно потому, что она дословно повторяет метрическую теорию голономных поверхностей.

Теория общих конгруэнций в метрическом (евклидовом) пространстве изучена обстоятельно, причем вне связи с теорией поверхностей. Между тем оказывается, что первая так же дословно повторяет вторую, как это имеет место в случае нормальных конгруэнций, если только поверхности теперь считать неголономными. *Каждая конгруэнция в трехмерном евклидовом пространстве может быть рассматриваема как нормальная, при условии, однако, что ортогональные к ее лучам поверхности в общем случае являются неголономными.*

Всякая *конкретная* конгруэнция в E_3 (трехмерном евклидовом пространстве) с точностью до положения может быть задана системой линейных форм

$$\omega^i = \lambda^i_\alpha du^\alpha, \ \omega^j_i = \lambda^j_{i\alpha} du^\alpha,$$

$$i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, \ \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2.$$

Здесь λ^i_α, $\lambda^j_{i\alpha}$ — дифференцируемые функции от u^1, u^2, удовлетворяющие условию

$$\lambda^j_{i\alpha} + \lambda^i_{j\alpha} = 0, \tag{3}$$

следовательно, формы ω^j_i удовлетворяют тождеству

$$\omega^j_i + \omega^i_j = 0. \tag{4}$$

Кроме того, функции λ^i_α, $\lambda^j_{i\alpha}$ подчинены следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^i_\alpha}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \lambda^i_\beta}{\partial u^\alpha} &= \lambda^j_\beta \lambda^i_{j\alpha} - \lambda^j_\alpha \lambda^i_{j\beta}, \\ \frac{\partial \lambda^j_{i\alpha}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \lambda^j_{i\beta}}{\partial u^\alpha} &= \lambda^k_{i\beta} \lambda^j_{k\alpha} - \lambda^k_{i\alpha} \lambda^j_{k\beta}, \end{aligned} \tag{5}$$

равносильным таким уравнениям структуры:

$$D\omega^i = [\omega^j\omega_j^i],$$
$$D\omega_i^j = [\omega_i^k\omega_k^j]. \tag{6}$$

Условия (6) обеспечивают полную интегрируемость системы векторных дифференциальных уравнений в E_3:

$$dA = \omega^i e_i,$$
$$de_i = \omega_i^j e_j. \tag{7}$$

Выбрав какой-нибудь начальный ортонормированный репер $A^\circ \overset{\circ}{e}_i$, мы после интегрирования системы (7) получаем

$$A = A(u^1, u^2),$$
$$e_i = e_i(u^1, u^2). \tag{8}$$

Условия (4) обеспечивают то, что трехгранник e_i при всех значениях u^1, u^2 является ортонормированным.

Уравнения (8) определяют поверхность

$$A = A(u^1, u^2)$$

вместе с сопровождающим трехгранником

$$e_i = e_i(u^1, u^2).$$

Каждая прямая, проходящая через точку A и параллельная любому из векторов e_i, описывает некоторую конгруэнцию. Остановив внимание на одной из прямых, например, на той, которая параллельна вектору e_3, мы получаем конгруэнцию, свойства которой при желании можем изучать. Это будет конгруэнция вместе с присоединенным к каждому ее лучу репером Ae_i. Хоть репер играет по отношению к конгруэнции случайную роль, мы можем найти все, какие пожелаем, инвариантные величины и геометрические образы — фокусы, граничные точки, центр луча и т. д.

Если мы имеем дело с *общей* теорией конгруэнций в E_3, то все функции λ_α^i, $\lambda_{i\alpha}^j$ должны рассматриваться как *неизвестные* функции, подчиненные условиям (3), (5). Всякая фиксация сопровождающего репера, равно как и всякий конкретный выбор конгруэнции, накладывает на эти функции дополнительные конечные или дифференциальные соотношения. Эти соотношения имеют инвариантный смысл, какими бы они ни были. Суть этого утверждения заключается в следующем. Как бы ни был выбран сопровождающий репер, его положение в каком-нибудь «заведомо инвариантном» репере (например, репере, связанном с развертывающимися поверхностями, с центральной поверхностью, с фокусами и т. д.) может быть задано с помощью *вполне определенных* функций. Зная эти функции, мы можем построить такой репер для какой угодно конгруэнции, а это означает, что репер *инвариантно* связан с конгруэнцией. Пусть

$$\bar{A} = A + te_3$$

— некоторая точка на луче конгруэнции. В репере $\bar{A}e_i$ имеем следующие формы:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= \omega^1 + t\omega_3^1, \\ \bar{\omega}^2 &= \omega^2 + t\omega_3^2, \\ \bar{\omega}^3 &= \omega^3 + dt, \\ \bar{\omega}_3^1 &= \omega_3^1, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\overline{\omega}_3^2 = \omega_3^2,$$
$$\overline{\omega}_1^2 = \omega_1^2.$$

Точка $\overline{A}$ описывает поверхность, ортогональную к лучам конгруэнции, если

$$\overline{\omega}^3 = \omega^3 + dt = 0. \tag{10}$$

Это уравнение в общем случае не вполне интегрируемо, а потому поверхность Σ_t, им определяемая, является неголономной. В уравнении (10) t — неголономное переменное, u^1, u^2 — голономные. Репер Ae_i — также неголономный. Точнее, неголономной является поверхность, описываемая его началом, что же касается векторов e_i, то они по-прежнему удовлетворяют вполне интегрируемой системе уравнений, стоящей во второй строчке (7).

В репере $\overline{A}e_i$ уравнения (7) принимают вид:

$$d\overline{A} = \overline{\omega}^1 e_1 + \overline{\omega}^2 e_2,$$
$$de_i = \omega_i^j e_j.$$

Вместо уравнений (6) теперь имеем

$$D\overline{\omega}^i = [\overline{\omega}^j \omega_j^i], \quad (\overline{\omega}^3 = 0)$$
$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j].$$

Теперь, как и в случае нормальной конгруэнции, имеем полное тождество между теориями произвольной конгруэнции K и неголономной поверхности Σ, определяемой уравнением (10).

Продифференцируем внешним образом уравнение (10). В соответствии с тем, что говорилось выше, дифференциал формы $\overline{\omega}^3$, стоящей в левой части не вполне интегрируемого уравнения, равен нулю:

$$0 = D\omega^3 + D(dt) = [\omega^1 \omega_1^3] + [\omega^2 \omega_2^3] + D(dt). \tag{11}$$

Но

$$D(dt) = -D\omega^3 = -D(\lambda_\alpha^3 du^\alpha) = B[du^1 du^2], \tag{12}$$

где

$$B = \frac{\partial \lambda_1^3}{\partial u^2} - \frac{\partial \lambda_2^3}{\partial u^1}.$$

Будем предполагать, что формы ω_1^3, ω_2^3 линейно независимы, следовательно, конгруэнция — не цилиндрическая. Тогда

$$du^\alpha = H_1^\alpha \omega_1^3 + H_2^\alpha \omega_2^3.$$

H_β^α — функции от u^1, u^2. Равенство (12) примет вид

$$D(dt) = 2A[\omega_1^3 \omega_2^3],$$

где

$$2A = B(H_1^1 H_2^2 - H_2^1 H_1^2).$$

Внесем это в (11), после чего представим это равенство в виде

$$[\omega^1 - A\omega_2^3, \omega_1^3] + [\omega^2 + A\omega_1^3, \omega_2^3] = 0.$$

Воспользовавшись леммой Картана, получаем

$$\omega^1 = a\omega_1^3 + (b + A)\omega_2^3,$$
$$\omega^2 = (b - A)\omega_1^3 + c\omega_2^3. \tag{13}$$

a, b, c — некоторые функции от u^1, u^2. Запишем эти равенства в формах $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$:

$$\begin{aligned} \overline{\omega}^1 &= (a-t)\,\omega_1^3 + (b+A)\,\omega_2^3, \\ \overline{\omega}^2 &= (b-A)\,\omega_1^3 + (c-t)\,\omega_2^3. \end{aligned} \tag{14}$$

t — неголономная переменная, определяемая дифференциальным уравнением (10).

Запишем три основных инвариантных квадратичных формы неголономной поверхности (10):

$$\begin{aligned} \varphi_1 = ds^2 = \left(\overline{\omega}^1\right)^2 + \left(\overline{\omega}^2\right)^2 = \left[(a-t)^2 + (b-A)^2\right]\left(\omega_1^3\right)^2 + \left[(b-A)^2 + \right. \\ \left. + (c-t)^2\right]\left(\omega_2^3\right)^2 + 2\left[(a-t)(b+A) + (c-t)(b-A)\right]\omega_1^3\omega_2^3, \\ \varphi_2 = -d\bar{A}\,de_3 = -\overline{\omega}^1\omega_3^1 - \overline{\omega}^2\omega_3^2 = (a-t)\left(\omega_1^3\right)^2 + 2b\omega_1^3\omega_2^3 + (c-t)\left(\omega_2^3\right)^2, \\ \varphi_3 = de_3^2 = d\theta^2 = \left(\omega_3^1\right)^2 + \left(\omega_3^2\right)^2. \end{aligned} \tag{15}$$

s — длина дуги кривой на поверхности, $d\theta$ — дифференциал угла между нормалями к поверхности. Отметим, что для неголономной поверхности — это просто термин, взятый из теории голономных поверхностей и соответствующий инвариантной форме φ_3.

Инвариант

$$k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$$

есть кривизна нормального сечения поверхности, соответствующего направлению $\omega_1^3 : \omega_2^3$. Инвариант

$$k_\gamma = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

в теории поверхностей, как правило, не рассматривается. Назовем этот инвариант *угловой кривизной* поверхности в заданном направлении. Для такой кривизны могут быть найдены экстремальные значения (главные угловые кривизны), а соответственно этому — *полная угловая кривизна* как произведение главных угловых кривизн и *средняя угловая кривизна* как полусумма главных угловых кривизн. Направления, соответствующие главным угловым кривизнам, назовем *главными угловыми направлениями*, а огибаемые ими линии — *угловыми линиями кривизны*. Позднее будут выведены формулы, определяющие угловые кривизны (полную и среднюю).

2. Параллельное рассмотрение теорий конгруэнций и неголономных поверхностей

Для всякого понятия теории конгруэнций можно найти соответствующее понятие теории неголономных поверхностей, и наоборот. В некоторых случаях такой параллелизм имеет место между известными одновременно в обеих теориях понятиями, в других случаях аналог какого-либо понятия в одной теории еще не рассматривался в другой. Мы рассмотрим лишь некоторые примеры, воспользовавшись в качестве источника монографией С. П. Финикова [5].

2.1. Стрикционная точка линейчатой поверхности конгруэнции. Стрикционная точка линейчатой поверхности конгруэнции, т. е. поверхности, определяемой отношением линейных форм $\omega_1^3 : \omega_2^3$, в репере Ae_i имеет абсциссу

$$r = \frac{a\left(\omega_1^3\right)^2 + 2b\omega_1^3\omega_2^3 + c\left(\omega_2^3\right)^2}{\left(\omega_1^3\right)^2 + \left(\omega_2^3\right)^2}$$

[5, гл. 2, (23)]. В репере $\overline{A}e_i$ эта абсцисса будет определяться уже формулой

$$r_t = \frac{(a-t)\left(\omega_1^3\right)^2 + 2b\omega_1^3\omega_2^3 + (c-t)\left(\omega_2^3\right)^2}{\left(\omega_1^3\right)^2 + \left(\omega_2^3\right)^2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}. \tag{16}$$

Таким образом, *расстояние стрикционной точки линейчатой поверхности конгруэнции в направлении* $\omega_1^3 : \omega_2^3$ *от неголономной поверхности* Σ *равно угловой кривизне* Σ_t, *соответствующей этому направлению.*

2.2. Граничные точки луча конгруэнции. Граничные точки луча в репере Ae_i определяются квадратным уравнением

$$r^2 - (a+c)\,r + ac - b^2 = 0$$

[5, гл. 2, (25)]. В репере $\overline{A}e_i$ это уравнение принимает вид

$$r_t^2 - (a+c-2t)\,r_t + (a-t)(c-t) - b^2 = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) определяет экстремали абсцисс r_t, следовательно, *расстояния граничных точек от поверхности* Σ_t *равны главным угловым кривизнам этой поверхности.*

2.3. Центр луча конгруэнции. Центр луча определяется как середина отрезка, концами которого являются граничные точки. Его абсцисса в репере $\overline{A}e_i$ определяется равенством [5, гл. 2, (26)]

$$r_0 = \frac{a+c-2t}{2}.$$

Но это, в соответствии с нашим соглашением, сделанным в п. 1, есть средняя угловая кривизна поверхности Σ_t. Таким образом, *расстояние центра луча конгруэнции от поверхности* Σ_t *есть средняя угловая кривизна этой поверхности.*

2.4. Главные поверхности конгруэнции. Главные поверхности конгруэнции как в репере Ae_i, так и в репере $\overline{A}e_i$ определяются квадратным дифференциальным уравнением

$$b\left(\left(\omega_1^3\right)^2 - \left(\omega_2^3\right)^2\right) + (c-a)\,\omega_1^3\omega_2^3 = 0.$$

[5, гл. 2, (27)]. Это — линейчатые поверхности, стрикционные точки которых совпадают с граничными точками. Но это значит, что *главные поверхности конгруэнции пересекают каждую неголономную поверхность* Σ_t *по ее угловым линиям кривизны.*

2.5. Развертывающиеся поверхности конгруэнции. Развертывающиеся поверхности конгруэнции в репере $\overline{A}e_i$ определяются квадратным дифференциальным уравнением

$$\frac{\overline{\omega}^1}{\omega_1^3} = \frac{\overline{\omega}^2}{\omega_2^3}, \tag{18}$$

или

$$(b-A)\left(\omega_1^3\right)^2 + (c-a)\,\omega_1^3\omega_2^3 - (b+A)\left(\omega_2^3\right)^2 = 0 \tag{19}$$

[5, гл. 2, (30)]. Видим, что это уравнение не зависит от выбора поверхности Σ_t и оказывается точно таким же и в репере Ae_i. Уравнение (18) показывает, что

$$d\overline{A} \parallel de_3,$$

следовательно, оно определяет на поверхности Σ_t так называемые *главные направления 2-го рода*, см. [6]. Таким образом, *развертывающиеся поверхности конгруэнции пересекают каждую из неголономных поверхностей* Σ_t *по ее линиям кривизны 2-го рода.*

2.6. Фокусы. Если обозначить величину отношения (18) через ρ_t, то мы получим пару равенств

$$\overline{\omega}^1 - \rho_t \omega_1^3 = 0,$$
$$\overline{\omega}^2 - \rho_t \omega_2^3 = 0,$$

или

$$(a - t - \rho_t)\,\omega_1^3 + (b + A)\,\omega_2^3 = 0,$$
$$(b - A)\,\omega_1^3 + (c - t - \rho_t)\,\omega_2^3 = 0.$$

Исключая из этих равенств ρ_t, приходим к уже известному уравнению (19), определяющему развертывающиеся поверхности — линии кривизны 2-го рода. Если же исключить ω_1^3, ω_2^3, то приходим к квадратному уравнению, определяющему фокусы конгруэнции

$$\rho_t^2 - (a + c - 2t)\,\rho_t + (a - t)(c - t) - (b^2 - A^2) = 0. \tag{20}$$

С другой стороны, применительно к теории неголономных поверхностей уравнение (20) определяет *главные радиусы кривизны 2-го рода*. Таким образом, *расстояния фокусов конгруэнции от неголономной поверхности Σ_t равны главным радиусам кривизны 2-го рода.*

Средняя кривизна 2-го рода, определяемая как полусумма главных кривизн 2-го рода, совпадает со средней угловой кривизной. Это находит свое выражение в том известном в метрической теории конгруэнций факте, что середина отрезка между фокусами совпадает с серединой отрезка между граничными точками.

2.7. Асимптотические направления и асимптотические линии неголономной поверхности. *Асимптотическими линиями* неголономной поверхности Σ_t называются линии, вдоль которых вторая квадратичная форма φ_2 обращается в нуль:

$$\varphi_2 = (a - t)\,(\omega_1^3)^2 + 2b\omega_1^3\omega_2^3 + (c - t)\,(\omega_2^3)^2 = 0.$$

Направления, касательные к этим линиям, есть *асимптотические направления*. Асимптотическим линиям неголономной поверхности соответствуют инвариантные линейчатые поверхности, которые следует назвать асимптотическими и которым можно дать геометрическое определение. Каждая пара асимптотических линейчатых поверхностей соответствует определенной неголономной поверхности. Именно из формулы (16), видно, что для таких линейчатых поверхностей и только для них $\eta = 0$. Следовательно, асимптотические линейчатые поверхности конгруэнции, соответствующие данной неголономной поверхности Σ_t, есть те, у которых стрикционные линии совпадают с асимптотическими линиями поверхности Σ_t.

Подобные линейчатые поверхности конгруэнции ранее в литературе не рассматривались.

2.8. Формула Эйлера. *Формула* (в репере $\overline{A}e_i$)

$$r_t = r_{1t}\cos^2\alpha + r_{2t}\sin^2\alpha$$

[[illegible], гл. I, (23)], *представляющая абсциссу стрикционной точки через абсциссы граничных точек, есть не что иное, как формула Эйлера, дающая распределение угловых кривизн на неголономной поверхности Σ_t.*

2.9. Параболические конгруэнции. Параболическая конгруэнция характеризуется совпадением фокусов, а потому и линий кривизны 2-го рода на неголономной поверхности Σ_t. На такой поверхности главные радиусы кривизны 2-го рода равны друг другу, поэтому естественно назвать ее *неголономной сферой 2-го рода*. Таким образом, *каж-*

дая параболическая конгруэнция является совокупностью нормалей к некоторой неголономной сфере 2-го рода. Для такой конгруэнции выполняется равенство

$$(a-c)^2+4(b^2-A^2)=0.$$

В случае обычной нормальной конгруэнции $A=0$. Тогда в действительной области получаем

$$a=c,\ b=0,$$

а это характеризует обычную сферу.

2.10. Изотропные конгруэнции. Изотропные конгруэнции характеризуются пропорциональностью второй φ_2 и третьей φ_3 квадратичных форм (стрикционные точки на луче являются совпадающими). Неголономные поверхности, характеризуемые такой пропорциональностью, естественно назвать *неголономными угловыми сферами.* Таким образом, *каждая изотропная конгруэнция есть совокупность нормалей к неголономной угловой сфере.*

2.11. Конгруэнции W. Все рассмотренные выше понятия относились к первой дифференциальной окрестности луча конгруэнции. Понятие конгруэнции W связано уже со второй дифференциальной окрестностью.

Продифференцируем внешним образом уравнения (13) (можно было бы продифференцировать уравнения (14); результат, если учесть равенства (9) и (10), был бы одним и тем же):

$$[da-2b\omega_1^2+\omega^3,\ \omega_1^3]+[d(b+A)+(a-c)\omega_1^2,\ \omega_2^3]=0,$$

$$[d(b-A)+(a-c)\omega_1^2,\ \omega_1^3]+[dc+2b\omega_1^2+\omega^3,\ \omega_2^3]=0.$$

Используя равенства (9), мы с помощью леммы Картана получим

$$d(a-t)-2b\omega_1^2=\alpha\omega_1^3+\beta\omega_2^3,$$

$$d(b+A)+(a-c)\omega_1^2=\beta\omega_1^3+\gamma\omega_2^3,$$

$$d(b-A)+(a-c)\omega_1^2=\gamma'\omega_1^3+\beta'\omega_2^3,$$

$$d(c-t)+2b\omega_1^2=\beta'\omega_1^3+\alpha'\omega_2^3.$$

Выбором сопровождающего репера можно обратить коэффициент $b-A$ в нуль:

$$b-A=0.$$

Тогда из уравнения (20) находим абсциссы фокусов

$$\rho_1=a-t,\ \rho_2=c-t. \tag{21}$$

Для произвольной точки

$$M=\bar{A}+\rho e_3$$

мы имеем

$$dM=(\bar{\omega}^1+\rho\omega_3^1)\,e_1+(\bar{\omega}^2+\rho\omega_3^2)\,e_2+d\rho e_3=$$
$$=[(a-t-\rho)\,e_1+\sigma_1 e_3]\,\omega_1^3+[(b+A)\,e_1+(c-t-\rho)\,e_2+\sigma_2 e_3]\,\omega_2^3,$$

где положено

$$d\rho=\sigma_1\omega_1^3+\sigma_2\omega_2^3.$$

Перемножая векторно коэффициенты при ω_1^3, ω_2^3, получим вектор нормали к поверхности, описываемой точкой M:

$$N=(a-t-\rho)(c-t-\rho)\,e_3-\sigma_2(a-t-\rho)\,e_2+$$
$$+\sigma_1(b+A)\,e_2-\sigma_1(c-t-\rho)\,e_1.$$

Для фокальных поверхностей имеем (после умножения векторов нормали на подходящие множители)

$$N_1 = 2be_2 - (c - a)\,e_1, \qquad (22)$$
$$N_2 = e_2.$$

Отбросили случай $\sigma_2(c-a) - 2\sigma_1 b = 0$. При этом $N_2 = 0$, следовательно, 2-я фокальная поверхность вырождается в кривую. Мы отбрасываем также случай $a = c$. Здесь оба фокуса совпадают между собою, конгруэнция — параболическая. Ортогональные к ней неголономные поверхности мы назвали ранее неголономными сферами 2-го рода. Поскольку в этом случае

$$\varphi_1 = (a-t)\,[(a-t)\,(\omega_1^3)^2 + 4b\omega_1^3\omega_2^3 + (a-t)\,(\omega_2^3)^2],$$
$$\varphi_2 = (a-t)\,(\omega_1^3)^2 + 2b\omega_1^3\omega_2^3 + (a-t)\,(\omega_2^3)^2,$$

см. (15), п. I, то формы φ_1 и φ_2 не пропорциональны одна другой. При пропорциональности неголономные поверхности естественно было бы назвать *неголономными сферами 1-го рода*. Таким образом, неголономные сферы 2-го рода не есть в то же время неголономные сферы 1-го рода. Неголономные сферы обоих родов совпадают между собой тогда и только тогда, когда $b = 0$, т. е. когда конгруэнция является нормальной.

Дифференцируя (22), будем иметь

$$dN_1 = \left[\left(\alpha - \beta' + \frac{2b\gamma'}{a-c}\right)e_1 + \beta e_2 + (a-c)\,e_3\right]\omega_1^3 +$$
$$+ \left[\left(\beta - \alpha' + \frac{2b\beta'}{a-c}\right)e_1 + \gamma e_2 + 2be_3\right]\omega_2^3,$$
$$dN_2 = \frac{\gamma'}{c-a}\,e_1\omega_1^3 + \left(\frac{\beta'}{c-a}\,e_1 + e_3\right)\omega_2^3.$$

Дифференцируя (21), получим

$$d\rho_1 = d\,(a-t) = 2b\,\frac{1}{a-c}\,(\gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^3) + \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3 =$$
$$= \left(\frac{2b\gamma'}{a-c} + \alpha\right)\omega_1^3 + \left(\frac{2b\beta'}{a-c} + \beta\right)\omega_2^3,$$
$$d\rho_2 = d\,(c-t) = -2b\,\frac{1}{a-c}\,(\gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^3) + \beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^3 =$$
$$= \left(-\frac{2b\gamma'}{a-c} + \beta'\right)\omega_1^3 + \left(-\frac{2b\beta'}{a-c} + \alpha'\right)\omega_2^3.$$

Для первого фокуса M_1 имеем

$$\sigma_1' = \frac{2b\gamma'}{a-c} + \alpha,\ \ \sigma_2' = \frac{2b\beta'}{a-c} + \beta, \qquad (23)$$

для второго M_2

$$\sigma_1'' = -\frac{2b\gamma'}{a-c} + \beta',\ \ \sigma_2'' = -\frac{2b\beta'}{a-c} + \alpha'. \qquad (24)$$

Отсюда

$$dM_1 = \left(\frac{2b\gamma'}{a-c} + \alpha\right)e_3\omega_1^3 + \left[2be_1 + (c-a)\,e_2 + \left(\frac{2b\beta'}{a-c} + \beta\right)e_3\right]\omega_2^3,$$
$$dM_2 = \left[(a-c)\,e_1 + \left(-\frac{2b\gamma'}{a-c} + \beta'\right)e_3\right]\omega_1^3 + \left[2be_1 + \left(-\frac{2b\beta'}{a-c} + \alpha'\right)e_3\right]\omega_2^3.$$

Асимптотические линии на фокальных поверхностях есть линии, у которых соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности. Следовательно, уравнения асимптотических имеют соответственно вид:

$$-dM_1dN_1 = [2b\gamma' + \alpha(a-c)](\omega_1^3)^2 + 4b\left(\frac{2b\gamma'}{a-c} + \alpha\right)\omega_1^3\omega_2^3 +$$
$$+\left[-2b\alpha' + \gamma(c-a) + 4b\left(\frac{2b\beta'}{a-c} + \beta\right)\right](\omega_2^3)^2 = 0,$$
$$-dM_2dN_2 = -\gamma'(\omega_1^3)^2 - \frac{4b\gamma'}{a-c}\omega_1^3\omega_2^3 + \left(-\frac{4b\beta'}{a-c} + \alpha'\right)(\omega_2^3)^2 = 0.$$

Если рассматриваемая конгруэнция есть конгруэнция W, то последние уравнения должны совпадать друг с другом, а потому

$$\frac{2b\gamma' + \alpha(a-c)}{-\gamma'} = \frac{4b\left(\frac{2b\gamma'}{a-c} + \alpha\right)}{-\frac{4b\gamma'}{a-c}} = \frac{4b\left(\frac{2b\beta'}{a-c} + \beta\right) + \gamma(c-a) - 2b\alpha'}{-\frac{4b\beta'}{a-c} + \alpha'},$$

или

$$(a-c)(\alpha\alpha' - \gamma\gamma') + 4b(\beta\gamma' - \alpha\beta') = 0. \qquad (25)$$

Известно, что нормальная конгруэнция является конгруэнцией W тогда и только тогда, когда ортогональные к ее лучам поверхности есть поверхности Вейнгартена, т. е. поверхности, которые характеризуются наличием функциональной зависимости между главными радиусами кривизны. Назовем *неголономными поверхностями Вейнгартена 2-го рода* неголономные поверхности, у которых главные радиусы кривизны 2-го рода имеют пропорциональные друг другу неголономные дифференциалы, т. е.

$$\sigma_1'\sigma_2'' - \sigma_1''\sigma_2' = 0.$$

Внося сюда значения σ_1', σ_1'', σ_2', σ_2'' из (23) и (24), получим

$$(a-c)(\alpha\alpha' - \beta\beta') + 2b(\alpha'\gamma' - \alpha\beta' + \beta\gamma' - \beta'^2) = 0. \qquad (26)$$

Равенство (26) в общем случае не совпадает с равенством (25). Следовательно, конгруэнции W не образованы нормалями к неголономным поверхностям Вейнгартена 2-го рода. Вместе с тем равенством (26) выделяется некоторый инвариантно-геометрический класс конгруэнций, в некотором роде равноправный с конгруэнциями W и являющийся определенным обобщением последних. Как и конгруэнциям W, можно дать в принципе бесконечное множество определений конгруэнциям этого класса. Это можно было бы сделать в терминах, используемых в теории конгруэнций. Можно же сделать это и так, как мы, выведя уравнения (26), т. е. введя в рассмотрение неголономные поверхности, ортогональные к лучам конгруэнции. Такие поверхности определяются конгруэнциями и потому могут рассматриваться как элементы теории конгруэнций, притом именно конгруэнций голономных, которые мы сейчас рассматриваем.

Если назвать *неголономной поверхностью Вейнгартена 1-го рода* неголономную поверхность, у которой неголономные дифференциалы радиусов кривизны 1-го рода пропорциональны друг другу, то, как можно было бы показать, конгруэнция W в общем случае не образована нормалями и к таким поверхностям. Голономные конгруэнции, образованные нормалями к неголономным поверхностям Вейнгартена 1-го рода, образуют новый класс конгруэнций, который можно рассматривать как новое обобщение класса конгруэнций W. Обычные конгруэнции W являются ортогональными к неголономным поверхностям (их дифференциальное уравнение есть (25)), которые не являются неголономными поверхностями Вейнгартена ни 1-го, ни 2-го рода.

3. Неголономные конгруэнции

Мы видели выше, что всякую голономную конгруэнцию можно рассматривать как нормальную, при этом ортогональные к ее лучам поверхности в общем случае являются неголономными. Обратное места не имеет — не всегда конгруэнция, ортогональная к неголономной поверхности, является голономной. Например, пусть мы имеем систему линейных форм ω^i, $\omega_i^j = -\omega_j^i$ как функций от u^1, u^2 и их дифференциалов, причем $\omega^3 \equiv 0$. Пусть эти формы не удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства, т. е. по крайней мере одно из уравнений

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^k \omega_k^i], \\ D\omega_i^j &= [\omega_i^k \omega_k^j] \end{aligned} \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$$

не выполнено. В таком случае система уравнений

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i e_i \\ de_i &= \omega_i^j e_j \end{aligned} \quad \omega^3 = 0 \tag{27}$$

в E_3 является не вполне интегрируемой. В этом случае точка A описывает неголономную поверхность, а вектор e_3 — ортогональную к ней конгруэнцию. Пусть

$$\overline{A} = A + te_3 \tag{28}$$

— некоторая точка на луче. Допустим, что эта точка описывает голономную поверхность, следовательно, справа в (28) стоит некоторая вектор-функция аргументов u^1, u^2. Вектор e_3 также должен быть вектор-функцией тех же аргументов, если мы хотим, чтобы уравнения (27) определяли голономную конгруэнцию. t — неголономная функция (иначе точка A описывала бы тоже голономную поверхность). Вектор $d\overline{A}$ должен выражаться только через дифференциалы du^1, du^2:

$$d\overline{A} = \left(\omega^1 + t\omega_3^1\right) e_1 + \left(\omega^2 + t\omega_3^2\right) e_2 + dte_3.$$

Это, однако, невозможно, так как переменное t через u^1, u^2 выраженным быть не может. Следовательно, нормали к рассматриваемой неголономной поверхности не могут образовывать голономной конгруэнции.

Однако и на неголономные конгруэнции, определяемые уравнениями (27), могут быть распространены предложения, сформулированные в предыдущем пункте. При этом может и не быть выполненным уравнение $\omega^3 = 0$. Вектор e_3 в этом случае не будет перпендикулярным к неголономной поверхности, описываемой точкой A. Однако если составить не вполне интегрируемое уравнение

$$\omega^3 + dt = 0,$$

то и в этом случае получим неголономную поверхность, ортогональную к лучам неголономной же конгруэнции.

Линейные формы ω^i, $\omega_i^j = -\omega_j^i$ могут зависеть от трех переменных u^1, u^2, u^3, связанных некоторым не вполне интегрируемым уравнением Пфаффа:

$$du^3 = \lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2, \tag{29}$$

где λ_1, λ_2 — функции от u^1, u^2, u^3. Если бы последнее уравнение было интегрируемым, то мы могли бы выразить u^3 через u^1, u^2 и тогда свели бы все к предыдущему случаю.

Уравнение (29) должно быть присоединено к уравнениям (27):

$$dA = \omega^i e_i,$$
$$de_i = \omega_i^j e_j, \tag{30}$$
$$du^3 = \lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2.$$

Система (30) не вполне интегрируема. Точка A в общем случае не описывает поверхности (голономной). Будем предполагать, что конгруэнция описана прямой, проходящей через точку A и параллельной вектору e_3. В этом случае формы ω^i, $\omega_i^j = -\omega_j^i$, $\lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2$ могут быть такими, что конгруэнция будет голономной и на каждом ее луче точка может быть выбрана так, что поверхность, ею описываемая, будет тоже голономной. Действительно, пусть, например,

$$\omega^1 = \overline{\omega}^1 + u^3\omega_3^1,$$
$$\omega^2 = \overline{\omega}^2 + u^3\omega_3^2,$$
$$\omega^3 = \lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2.$$

Здесь $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$, ω_3^1, ω_3^2, ω_1^2 зависят только от u^1, u^2, причем

$$D\overline{\omega}^i = [\overline{\omega}^k\omega_k^i],\ D\omega_i^j = [\omega_i^k\omega_k^j],$$

коэффициенты λ_1, λ_2 зависят также лишь от u^1, u^2. Беря точку

$$\overline{A} = A - u^3 e_3,$$

мы сведем уравнения (30) к таким:

$$d\overline{A} = \overline{\omega}^1 e_1 + \overline{\omega}^2 e_2,$$
$$de_i = \omega_i^j e_j^{*}. \qquad \overline{\omega}^3 = 0.$$
$$du^3 = \lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2.$$

Хоть последнее уравнение и не вполне интегрируемо — векторные уравнения образуют вполне интегрируемую систему, при этом их правые части зависят только от переменных u^1, u^2. Проинтегрировав систему, получим поверхность, описанную точкой $\overline{A}$, и образованную ею нормальную конгруэнцию. Таким образом, поверхность, описываемая точкой A, неголономна, но ассоциированная ей конгруэнция лучей, параллельных вектору e_3, голономна и даже нормальна.

Переменные u^1, u^2, u^3 могут быть, в частности, прямоугольными декартовыми координатами точки в E_3, а репер $e_1e_2e_3$ — неподвижным. Тогда уравнения (30) принимают вид:

$$dA = du^i e_i,$$
$$de_i = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{31}$$
$$du^3 = \lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2.$$

Здесь первое векторное уравнение $dA = du^i e_i$ сводится к трем координатным:

$$du^1 = du^1,$$
$$du^2 = du^2,$$
$$du^3 = \lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2.$$

Достаточно поэтому ограничиться одним последним уравнением (31):

$$du^3 = \lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2. \tag{32}$$

В этом случае мы имеем корреляцию в E_3 — каждой точке пространства соответствует определенная плоскость — касательная плоскость неголономной поверхности. Нормали к поверхности (32) определяют в общем случае неголономную конгруэнцию. Конгруэнция может быть, в частности, и голономной. Это будет в том случае, когда в каждом семействе параллельных между собой плоскостей соответствующие им в корреляции точки лежат на одной прямой.

Уравнением (32) неголономную поверхность задавал Д. М. Синцов [6]. Это — частный случай задания. Здесь переменные u^1, u^2, u^3 могут подвергаться только ортогональным преобразованиям. Общим заданием неголономной поверхности и, если угодно, неголономной конгруэнции является задание с помощью системы (30), когда переменные u^i подвергаются *самым общим* невырожденным преобразованиям:

$$u^i = u^i(u^{1'},\ u^{2'},\ u^{3'}),\ \left|\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\right| \neq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Vranceanu. Sur les esépace, non holonomes; sur le calcul différentiel absolu pour les varietés non holonomes. Comptes rendus. 1926, v. 183, 852, 1083.
2. А. В. Гохман. Дифференциальная геометрия и классическая динамика точки. «Труды геометрического семинара», т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1966.
3. Н. И. Кованцов. Два предложения о граничных точках и фокусах неголономной конгруэнции. «Успехи математических наук», т. 10, в. 1 (63), 1955.
4. Gh. Th. Gheorghiu. Sur les courbes géodésiques d'un calcul absolu mixte, Analele ştiinţifice ale universitatii «Al. J. Cuza» din Jasi (seria nouă), sectiunea 1, a. Matematica, Tomul XI в, An. 1965.
5. С. П. Фиников. Теория конгруэнций. Изд-во ГИТТЛ. М. — Л., 1950.
6. Д. М. Синцов. О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Наук. зап. н. д. матем. каф. Укр., т. III, 1928.

Поступила 16 октября 1970 г.

ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПУТЕЙ

А. Т. Кондратьев

(Пенза)

Рассмотрим пространства, в которых пути определяются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i(x^j, \dot{x}^k) = 0, \quad \dot{x}^k = \frac{dx^k}{dt}, \tag{1}$$

$$i,\ j,\ k = \overline{1,\ n}$$

где Γ^i — полиномы m степени относительно $\dot{x}^k$:

$$\Gamma^i = A^i + A^i_k\dot{x}^k + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k + A^i_{jke}\dot{x}^j\dot{x}^k\dot{x}^e + \ldots + A^i_{j_1 j_2 \ldots j_m}\dot{x}^{j_1}\dot{x}^{j_2}\ldots\dot{x}^{j_m}. \tag{2}$$

Коэффициенты $A^i \ldots, \Gamma^i_{jk}$ — функции только от x^i, симметричные относительно нижних индексов. Если левую часть (1) считать вектором, то при переходе к другой системе координат получим

$$\Gamma^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\Gamma^k - \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}\dot{x}^j\dot{x}^k. \tag{3}$$

Учитывая, что Γ^i имеют вид (2), находим, что функции A^i, A^i_k, $A^i_{jek}, \ldots, A^i_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ являются тензорами соответствующей валентности, а Γ^i_{jk} — коэффициентами аффинной связности пространства.

Бесконечно малое преобразование пространства называется аффинным движением, если оно любой путь переводит снова в путь с сохранением аффинности параметра. Уравнения

$$\begin{aligned} &LA^i = 0 && LA^i_{jke} = 0, \\ &LA^i_k = 0, && \ldots \\ &L\Gamma^i_{jk} = 0, && LA^i_{j_1 j_2 \ldots j_m} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

выражают необходимое и достаточное условие того, что вектор, вдоль которого взята лиева производная L, является вектором аффинного движения.

Функции Γ^i_{jk} позволяют построить по известным правилам тензор кривизны и ввести ковариантное дифференцирование.

В дальнейшем ограничимся случаем $i = 2$, $m = 3$ и найдем пространства $A_2(x, \dot{x})$, допускающие группы аффинных движений, полагая

$$x^1 = x, \quad x^2 = y.$$

1. Пространства $A_2(x, \dot{x})$ с интранзитивными группами движений

Пусть пространство допускает группу $G_1 = \{p\}$, тогда из (4) следует, что функции $A^i \ldots, \Gamma^i_{jk}$, определяющие пространство, не зависят от x. Поэтому наиболее общие пространства, допускающие группу движений G_1, определяются в некоторой системе координат функциями Γ^i, не зависящими от переменной x.

Известно, что структура групп G_2 может быть приведена к одному из типов:

$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_2) = X_1.$$

Выпишем соответствующие операторы

1. p, q
2. p, yp
3. $e^{-y}p$, q
4. p, xp

Второй и четвертый случаи реализуют интранзитивную группу, а интегрирование уравнений (4) приводит соответственно к пространствам:

$$\begin{gathered} A^1 = a(y), \;\; A^1_2 = b(y), \;\; A^1_{122} = c(y), \;\; A^1_{222} = d(y) \\ A^2_{222} = 3c(y), \;\; \Gamma^1_{12} = e(y), \;\; \Gamma^1_{22} = f(y), \;\; \Gamma^2_{22} = 2e(y), \\ G_2 = \{p, yp\}, \end{gathered} \tag{5}$$

a, b, c, d, e, f — произвольные функции y.

$$\begin{gathered} A^2 = a(y), \;\; A^1_1 = b(y), \;\; A^2_2 = c(y), \\ A^1_{122} = d(y), \;\; A^2_{222} = e(y), \\ \Gamma^1_{12} = f(y), \;\; \Gamma^2_{22} = g(y), \;\; G_2 = \{p, xp\}. \end{gathered} \tag{6}$$

В пространствах (5), (6) не выписаны равные нулю функции $A^i \ldots$, Γ^i_{jk}. Это мы будем делать и дальше.

Известно, что существует девять типов вещественных неизоморфных структур групп G_3.

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\ (X_iX_j)=0, && ij=1,\ 2,\ 3. && \\
&\text{II.}\ (X_1X_2)=0, && (X_2X_3)=X_1, && (X_1X_3)=0,\\
&\text{III.}\ (X_1X_2)=0, && (X_2X_3)=0, && (X_1X_3)=X_1,\\
&\text{IV.}\ (X_1X_2)=0, && (X_2X_3)=X_1+X_2, && (X_1X_3)=X_1,\\
&\text{V.}\ (X_1X_2)=0, && (X_2X_3)=X_2, && (X_1X_3)=X_1,\\
&\text{VI.}\ (X_1X_2)=0, && (X_2X_3)=\rho X_2, && (X_1X_3)=X_1,\ \rho\neq 0,1,\\
&\text{VII.}\ (X_1X_2)=0, && (X_2X_3)=\rho X_2-X_1, && (X_1X_3)=X_2,\ \rho^2<4,\\
&\text{VIII.}\ (X_1X_2)=X_1, && (X_2X_3)=X_3, && (X_1X_3)=2X_2,\\
&\text{IX.}\ (X_1X_2)=X_3, && (X_2X_3)=X_1, && (X_1X_3)=-X_2.
\end{aligned}$$

Так как мы находим интранзитивные группы аффинных движений в двумерном пространстве, то они имеют одномерные орбиты. Исходя из этих условий, находим, что из всех девяти типов трехчленных групп только группа типа V является искомой

$$X_1=p,\ X_2=yp,\ \ X_3=xp,$$

а соответствующее пространство определяется функциями

$$\begin{aligned}
&A^1_{122}=a(y),\ A^2_{222}=3a(y),\\
&\Gamma^1_{12}=b(y),\quad \Gamma^2_{22}=2b(y).
\end{aligned}\tag{7}$$

Таким образом, существует лишь одна трехчленная интранзитивная группа аффинных движений в пространстве $A_2(x,\ \dot{x})$.

2. Пространства A_2, допускающие транзитивные группы аффинных движений

При рассмотрении групп G_2 мы оставили первый и третий случаи. Интеграция системы уравнений (4) приводит к следующим пространствам:

$$A^i\ldots,\ \Gamma^i_{jk}=\text{const.}\quad G_2=\{p,\ q\}.\tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&A^1=b-ax,\ A^2=a,\ A^2_{111}=\alpha,\\
&A^2_{112}=\alpha x+\beta,\ A^1_{111}=-\alpha x+\gamma,\\
&A^2_{122}=\alpha x^2+2\beta x+\delta,\\
&A^1_{112}=-\alpha x^2+(\gamma-\beta)x+\sigma,\\
&A^2_{222}=\alpha x^3+3\beta x^2+3\delta x+\tau,\\
&A^1_{122}=-\alpha x^3+(\gamma-2\beta)x^2+(2\sigma-\delta)x+\nu,\\
&A^1_{222}=-\alpha x^4+(\gamma-3\beta)x^3+3(\sigma-\delta)x^2+(3\nu-\tau)x+\rho,\\
&\Gamma^1_{11}=-Ax+D,\qquad \Gamma^2_{11}=A,\\
&\Gamma^1_{12}=-Ax^2+(D-B)x+E,\ \ \Gamma^2_{12}=Ax+B,\\
&\Gamma^1_{22}=-Ax^3+(D-2B)x^2+(2E-C-1)x+F,\\
&\Gamma^2_{22}=Ax^2+2Bx+C,\\
&G_2=\{e^{-y}p,\ q\},\ a,\ b,\ \alpha,\ \beta,\ldots,A,\ B,\ G-\text{const.}
\end{aligned}\tag{9}$$

Перейдем к нахождению трехчленных транзитивных групп аффинных движений и соответствующих им пространств.

Так как в типе I операторы X_1 и X_2 образуют подгруппу группы G_3, то их можно привести к p, yp или p, q. Первый случай приводит к тому, что все три оператора пропорциональны, что уже было рассмотрено нами ранее. Во втором случае оператор X_3 будет линейной комбинацией с постоянными коэффициентами операторов X_1 и X_2.

Из G_3 II имеем

$$X_1 = p, \quad X_2 = yp, \quad X_3 = -q.$$

Считая их операторами аффинных движений, находим:

$$\begin{gathered} A^1 = a, \ A_1^2 = b, \ A_{122}^1 = c, \\ A_{222}^1 = d, \ A_{222}^2 = 3c, \ \Gamma_{12}^1 = e, \\ \Gamma_{22}^1 = f, \ \Gamma_{22}^2 = 2e, \\ G_3 = \{p, \ yp, \ q\}, \ a, \ b, \ldots, e - \text{const}. \end{gathered} \tag{10}$$

Операторы групп типа G_3 III можно привести к виду

а) p, yp, $xp + yq$,

б) p, q, xp.

Соответствующие пространства задаются в некоторой системе координат функциями:

$$\begin{gathered} A^1 = \alpha y, \ A_2^1 = \beta, \ A_{122}^1 = \gamma y^{-2}, \\ A_{222}^1 = \delta y^{-2}, \ \Gamma_{12}^1 = \tau y^{-1}, \ \Gamma_{22}^1 = \sigma y^{-1}, \\ \Gamma_{22}^2 = 2\tau y^{-1}, \\ \alpha, \ \beta, \ldots - \text{const}. \end{gathered} \tag{11}$$

и

$$\begin{gathered} A^2 = \alpha, \ A_1^1 = \beta, \ A_2^2 = \gamma, \ A_{122}^1 = \delta, \\ A_{222}^2 = \tau, \ \Gamma_{12}^1 = \sigma, \ \Gamma_{22}^2 = \rho, \\ \alpha, \ \beta, \ldots - \text{const}. \end{gathered} \tag{12}$$

Из типа G_3 IV имеем

а) $X_1 = p$, $X_2 = yp$, $X_3 = xp - q$,

б) $X_1 = p$, $X_1 = q$, $X_3 = (x + y)\,p + yq$.

Рассматривая эти операторы как операторы аффинных движений, находим:

$$\begin{gathered} A^1 = \alpha e^{-y}, \ A_2^1 = \beta e^{-y}. \ A_{122}^1 = \gamma, \ A_{222}^1 = \delta e^{-y}. \ A_{222}^2 = 3\gamma, \ \Gamma_{12}^1 = \tau, \\ \Gamma_{22}^1 = \sigma e^{-y}, \ \Gamma_{22}^2 = 2\tau, \\ G_3 = \{p, \ yp, \ xp - q\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Во втором случае получаем пространства с нулевым тензором кривизны, которые мы здесь и в дальнейшем выписывать не будем. Транзитивное представление группы типа G_3 V определяется операторами p, q, $xp + yq$, которые приводят к пространству нулевой кривизны. Остальные два типа разрешимых групп представляются операторами:

$$\begin{gathered} 1. \ p, \ yp, \ xp + (1 - \rho)\,yq, \\ 2. \ p, \ q, \ xp + \rho yq, \ \rho \neq 0, \ 1, \\ 3. \ p, \ yp, \ xyp + (y^2 - \nu y + 1)\,q, \\ 4. \ p, \ q, \ -yp + (\nu y + x)\,q. \end{gathered} \quad \nu^2 < 4$$

Выпишем пространства ненулевой кривизны, имеем:

$$A^1 = \alpha y^{\frac{1}{1-\rho}}, \quad A_2^1 = \beta y^{\frac{\rho}{1-\rho}}, \; A_{122}^1 = \gamma y^{-2}, \; A_{222}^1 = \delta y^{\frac{3\rho-2}{1-\rho}}, \; A_{222}^2 = 3\gamma y^{-2},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \tau y^{-1}. \quad \Gamma_{22}^1 = \sigma y^{\frac{2\rho}{1-\rho}}, \; \Gamma_{22}^2 = 2\tau y^{-1}, \tag{14}$$

$$G_3 = \{p, \; yp, \; xp + (1-\rho)\, yq\}.$$

Далее

$$A^1 = \alpha R^{\frac{1}{2}} e^S, \; A_2^1 = \beta R^{-\frac{1}{2}} e^S, \; A_{122}^1 = \gamma R^{-2},$$

$$A_{222}^1 = \delta R^{-\frac{5}{2}} e^S, \; A_{222}^2 = 3\gamma R^{-2}, \; \Gamma_{12}^1 = R^{-1}(\tau - y), \quad \Gamma_{22}^1 = \sigma R^{\frac{1}{2}} e^S,$$

$$\Gamma_{22}^2 = 2R^{-1}(\tau - y), \; R = (y^2 - \nu y + 1),$$

$$S = \frac{\nu}{\sqrt{4-\nu^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2y-\nu}{\sqrt{4-\nu^2}}, \tag{15}$$

$$G_3 = \{p, \; yp, \; xyp + (y^2 - \nu y + 1)\, q\},$$

$$\alpha, \; \beta, \; \ldots - \text{const}.$$

Операторы вида

а) $e^{-y}p, \; q, \; (\sigma - x^2)\, e^y p + 2xe^y q, \; \sigma - \text{const}$

б) $(1 + \varepsilon x^2)\, p + \varepsilon xyq, \; \varepsilon xyp + (1 + \varepsilon y^2)\, q, \; xq - yp, \; \varepsilon = \pm 1$

представляют неразрешимые группы типов VIII и IX. Пространства, допускающие эти группы в качестве групп аффинных движений, определяются функциями:

$$(\sigma = 0)$$

$$A^1 = -ax, \; A^2 = a, \; A_2^1 = b, \; A_2^1 = -bx^2, \; A_1^1 = c - bx,$$

$$A_2^2 = bx + c, \; A_{111}^1 = 3\beta, \; A_{112}^2 = \beta, \; A_{112}^1 = 2\beta x,$$

$$A_{122}^2 = 2\beta x, \; A_{122}^1 = \beta x^2, \tag{16}$$

$$A_{222}^2 = 3\beta x^2, \; \Gamma_{11}^1 = -Ax, \; \Gamma_{11}^2 = A, \; \Gamma_{12}^1 = -Ax^2 + \frac{1}{2},$$

$$\Gamma_{12}^2 = Ax, \; \Gamma_{22}^1 = -Ax^3 + \frac{x}{2}, \; \Gamma_{22}^2 = Ax^2 + \frac{1}{2},$$

$$a, \; b, \; \ldots, \; A - \text{const}.$$

$$(\sigma \neq 0)$$

$$A_1^1 = c - bx, \; A_1^2 = b, \; A_2^1 = b\sigma - bx^2, \; A_2^2 = bx + c, \; \Gamma_{11}^1 = \tau x,$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\tau, \; \Gamma_{12}^1 = \tau x^2, \; \Gamma_{12}^2 = -\tau x, \; \Gamma_{22}^1 = \tau x^3 - x, \tag{17}$$

$$\Gamma_{22}^2 = -\tau x^2, \; \tau = \frac{1}{\sigma}.$$

Группа G_3 IX допускается пространством вида:

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \frac{-2x}{\varepsilon\Delta}, & \frac{-y}{\varepsilon\Delta} \\ \frac{-y}{\varepsilon\Delta}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-x}{\varepsilon\Delta} \\ \frac{-x}{\varepsilon\Delta} & \frac{-2y}{\varepsilon\Delta} \end{pmatrix},$$

$$A_1^1 = c\varepsilon xy\Delta^{-\frac{1}{2}} + \sigma, \; A_2^2 = -c\varepsilon xy\Delta^{-\frac{1}{2}} + \sigma, \; A_2^1 = -c\,(1 + \varepsilon x^2)\, \Delta^{-\frac{1}{2}},$$

$$
\begin{gathered}
A_1^2 = c\,(1 + \varepsilon y^2)\,\Delta^{-\frac{1}{2}},\ A_{111}^1 = (1 + \varepsilon y^2)\left(3a\Delta^{-2} - b\varepsilon xy\Delta^{-\frac{5}{2}}\right),\\
A_{112}^1 = -2a\varepsilon xy\Delta^{-2} + \frac{b}{3}\,\Delta^{-\frac{5}{2}}[(1 + \varepsilon x^2)(1 + \varepsilon y^2) + 2x^2y^2],\\
A_{122}^1 = (1 + \varepsilon x^2)\left(a\Delta^{-2} - b\varepsilon xy\Delta^{-\frac{5}{2}}\right),\ A_{222}^1 = b\,(1 + \varepsilon x^2)^2\Delta^{-\frac{5}{2}},\\
A_{111}^2 = -b\,(1 + \varepsilon y)^2\,\Delta^{-\frac{5}{2}},\ A_{112}^2 = (1 + \varepsilon y^2)\left(a\Delta^{-2} + b\varepsilon xy\Delta^{-\frac{5}{2}}\right),\\
A_{122}^2 = -2a\varepsilon xy\Delta^{-2} - \frac{b\Delta^{-\frac{5}{2}}}{3}[(1 + \varepsilon x^2)(1 + \varepsilon y^2) + 2x^2y^2],\\
A_{222}^2 = (1 + \varepsilon x^2)\left(3a\Delta^{-2} + b\varepsilon xy\Delta^{-\frac{5}{2}}\right),\\
\Delta = 1 + \varepsilon x^2 + \varepsilon y^2,\quad \varepsilon = \pm 1,\\
a,\ b,\ c,\ \varepsilon - \text{const}.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Наконец, найдем пространства A_2 с группами G_4. В работе [1] дана исчерпывающая классификация двумерных пространств обычной аффинной связности, которой мы существенно пользуемся. Исходя из этой классификации, находим следующие типы пространств, допускающих четырехчленные группы аффинных движений:

$$
\begin{gathered}
A_1^1 = b,\ A_2^2 = b,\ A_{111}^1 = 3c,\ A_{112}^2 = c,\\
\Gamma_{11}^1 = 2a + 1,\ \Gamma_{12}^2 = a,\\
G_4 = \{p,\ q,\ e^x q,\ yq\}.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
A_1^1 = a,\ A_2^2 = a,\ A_{111}^1 = b\,(1 + x^2)^{-2},\\
A_{112}^2 = \frac{b}{3}(1 + x^2)^{-2},\ \Gamma_{11}^1 = \frac{2\,(c - x)}{1 + x^2},\ \Gamma_{12}^2 = \frac{c - x}{1 + x^2},\\
a,\ b,\ c - \text{const},\\
G_4 = \{(1 + x^2)\,p + xyq,\ q,\ yq,\ xq\}.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Далее

$$
\begin{gathered}
A_1^1 = b,\ A_2^2 = b,\ A_{112}^2 = c,\ A_{111}^1 = 3c,\ \Gamma_{11}^1 = 2a,\ \Gamma_{12}^2 = a,\\
G_4 = \{p,\ q,\ xq,\ yq\}.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Таким образом, максимальный порядок групп аффинных движений рассматриваемых пространств с ненулевым тензором кривизны равен четырем.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Егоров. Движения в пространствах аффинной связности. Уч. зап. пед. ин-та. Казань, 1965, стр. 5—179.

2. D. D. Kosambi. Collineations in path-space. J. Jnd., Math. Soc., № 5, 1 (1934), p. 69—72.

3. Б. Л. Лаптев. Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления. Изв. физ.-матем. о-ва, 3. Казань, 1938, стр. 3—36.

Поступила 10 апреля 1970 г.

ИЗМЕРИМОСТЬ n-ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОЕКТИВНЫХ ГРУПП НА ПЛОСКОСТИ

А. В. Луценко

(Харьков)

I. Проективные группы на плоскости, зависящие от двух и более параметров, как известно [1], имеют следующие инфинитезимальные операторы:

I. Группа, зависящая от восьми параметров:

1.1. $p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x(xp+yq),\ y(xp+yq)$

II. Группы, зависящие от шести параметров:

2.1. $p,\ q,\ xp,\ yq,\ xq,\ x(xp+yq)$

2.2. $p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq$

III. Группы, зависящие от пяти параметров:

3.1. $p,\ q,\ xq,\ 2xp+yq,\ x(xp+yq)$

3.2. $p,\ q,\ xp,\ xq,\ yq$

3.3. $p,\ q,\ yp,\ xq,\ xp-yq$

IV. Группы, зависящие от четырех параметров:

4.1. $p,\ q,\ xp,\ yq$

4.2. $p,\ q,\ xq,\ xp+\gamma yq$

4.3. $p,\ q,\ xq,\ yq$

4.4. $q,\ xp,\ xq,\ yq$

4.5. $p,\ xp,\ yq,\ x(xp+yq)$.

V. Группы, зависящие от трех параметров:

5.1. $p,\ q,\ xp+yq$

5.2. $p,\ 2xp+yq,\ x(xp+yq)$

5.3. $p+yq,\ q,\ xq$

5.4. $p,\ q,\ (c+1)xp+(c-1)yq$

5.5. $q,\ xp,\ yq$

5.6. $p,\ q,\ xp+(x+y)q$

5.7. $q,\ xq,\ xp+\gamma yq$

5.8. $p,\ q,\ xq$;

5.9. $p-xq,\ q,\ xp+2yq$

5.10. $p+y(xp+yq),\ xp-yq,\ q+x(xp+yq)$

5.11. $q,\ xq,\ yq$.

VI. Группы, зависящие от двух параметров:

6.1. $p,\ q$

6.2. $xp,\ yq$

6.3. $xp,\ q$

6.4. $p+xq,\ q$

6.5. $q,\ xp+yq$

6.6. $q,\ \gamma xp+yq,\ (\gamma\neq 0;\ 1)$

6.7. $q,\ p+yq$

6.8. $q,\ xp+(x+y)q$

6.9. $q-2yp,\ 2xp+yq$

6.10. $q,\ xq$

6.11. $q,\ yq$.

В работах [2]—[4], посвященных интегральной геометрии, для пар и троек точек рассматривались вопросы существования инвариантных мер относительно проективных групп на плоскости.

В предлагаемой работе рассматривается вопрос об измеримости множеств Q, состоящих из n точек, относительно групп I—VI.

Пусть в n-мерном пространстве E точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ задана группа преобразований $x'=Ax$ с инфинитезимальными операторами

$$X_k(f)=\sum_{i=1}^{n}\xi_k^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i},\ k=1,2,\ldots,r. \tag{1}$$

На прямом произведении $E^2=E\times E$ введем преобразования

$$y'=Ty=(Ax_1,\ Ax_2),$$

где $y=(x_1,x_2)\in E^2$. Преобразования T также образуют группу, которую называют один раз расширенной группой [6]. Инфинитезимальные операторы $Y_k(f)$ расширенной группы, как легко видеть, имеют следующий вид:

$$Y_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_{1i}} + \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(x_2)\frac{\partial f}{\partial x_{2i}},$$
$$k = 1, 2, \ldots, r.$$

Аналогично определяется $n-1$ раз расширенная группа, действующая в пространстве $E^n = E \times E \times \ldots \times E$. Операторы такой группы имеют вид:

$$Y_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_{1i}} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(x_n)\frac{\partial f}{\partial x_{ni}}. \tag{2}$$

Рассматривая n-точечные множества как элементы пространства E^n, в котором действует группа (2), заключаем, что существование инвариантной меры n-точечных множеств эквивалентно измеримости группы (2).

Если r-параметрическая группа (1) действует в пространстве E, то условия инвариантности интеграла $\int M(x)\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ состоят в следующем [5]:

а) группа (1) должна быть транзитивной,

б) при $r > n$ должны выполняться соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} X_j(\lambda_{ij}) = 0, \quad i = 1, \ldots, r-n, \tag{3}$$

где

$$X_{n+i}(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} X_j(f),$$

в этом случае плотность $M(x)$ является единственным, с точностью до постоянного множителя решением системы уравнений

$$X_k(M) + M \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i^k}{\partial x_i} = 0, \tag{4}$$
$$k = 1, \ldots, r.$$

2. Группа, зависящая от восьми параметров

$$p, q, \ xp, \ xq, \ yp, \ yq, \ x(xp + yq), \ y(xp + yq).$$

Операторы $n-1$ раз расширенной группы имеют вид

$$Y_1(f) = \sum_1^n p_i; \quad Y_2(f) = \sum_1^n q_i; \quad Y_3(f) = \sum_1^n x_i p_i; \quad Y_4(f) = \sum_1^n x_i q_i;$$
$$Y_5(f) = \sum_1^n y_i p_i; \quad Y_6(f) = \sum_1^n y_i q_i; \quad Y_7(f) = \sum_1^n x_i(x_i p_i + y_i q_i); \tag{5}$$
$$Y_8(f) = \sum_1^n y_i(x_i p_i + y_i q_i).$$

При $n = 1$; 2 — множества Q не имеют меры. Действительно, в этом случае группа (5) транзитивна, однако не выполнены условия (3). При $n = 3$ множества Q измеримы, так как в этом случае выполнены условия (3). Чтобы найти плотность M в выражении для меры, составляем систему уравнений (4):

$$Y_1(M) = 0, \quad Y_2(M) = 0, \quad Y_3(M) + 3M = 0, \quad Y_4(M) = 0, \quad Y_5(M) = 0,$$
$$Y_6(M) + 3M = 0, \quad Y_7(M) + 3(x_1 + x_2 + x_3)M = 0,$$
$$Y_8(M) + 3(y_1 + y_2 + y_3)M = 0.$$

Отсюда находим

$$M = S_{1,2,3}^{-3},$$

где

$$S_{i,j,k} = (x_i - x_k)(y_j - y_k) - (x_j - x_k)(y_i - y_k).$$

Следовательно, мерой является

$$\int \frac{dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3}{S^3_{1,2,3}}, \tag{6}$$

где

$$dP_i = dx_i \wedge dy_i.$$

При $n=4$ множества Q измеримы, так как в этом случае группа (5) простотранзитивна. Интегрируя систему уравнений

$$Y_1(M) = Y_2(M) = Y_4(M) = Y_5(M) = 0, \quad Y_3(M) + 4M = 0,$$
$$Y_6(M) + 4M = 0, \quad Y_7(M) + 3(x_1 + \ldots + x_4) M = 0,$$
$$Y_8(M) + 3(y_1 + \ldots + y_4) M = 0,$$

получаем выражение для меры в виде

$$\int \frac{dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3 \wedge dP_4}{S_{1,2,3}S_{1,2,4}S_{1,3,4}S_{2,3,4}}. \tag{7}$$

При $n > 4$ множества Q не имеют инвариантной меры ввиду того, что группа (5) интранзитивна. В этом случае существуют измеримые подмножества, которые определяются абсолютными инвариантами группы. Чтобы найти последние, составляем систему уравнений

$$Y_k(f) = 0, \quad k = 1, \ldots, 8.$$

В результате интегрирования получаем абсолютные инварианты

$$\frac{l_{i,n}S_{n-3,n-2,n}}{l_{n-3,n}S_{i,n-2,n}} = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n-4$$
$$\frac{S_{n-3,n-1,n}\,(l_{k,n-1}S_{n-2,n-1,n} - l_{n-2,n-1}S_{k,n-1,n})}{S_{k,n-1,n}\,(l_{n-3,n-1}S_{n-2,n-1,n} - l_{n-2,n-1}S_{n-3,n-1,n})} = \beta_k, \tag{8}$$
$$k = 1, \ldots, n-4$$

где

$$l_{i,j} = x_i - x_j.$$

Найдем меру множеств Q, точки которых связаны соотношениями (8). В выражениях (5) переходим к новым переменным x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, α_1, α_2, $\ldots$, α_{n-4}, β_1, β_2, $\ldots$, β_{n-5}, β_{n-4} с тем, чтобы получить операторы группы, преобразования которой претерпевают точки многообразия (8). Получаем так называемую укороченную группу [6]:

$$Y_1(f) = \sum_{i=0}^{3} p_{n-i}, \quad Y_2(f) = \sum_{i=0}^{3} q_{n-i}, \; Y_3(f) = \sum_{i=0}^{3} x_{n-i}p_{n-i},$$
$$Y_4(f) = \sum_{i=0}^{3} x_{n-i}q_{n-i}, \quad Y_5(f) = \sum_{i=0}^{3} y_{n-i}p_{n-i}, \tag{9}$$
$$Y_6(f) = \sum_{i=0}^{3} y_{n-i}q_{n-i}, \quad Y_7(f) = \sum_{i=0}^{3} (x_{n-i}p_{n-i} + y_{n-i}q_{n-i})\,x_{n-i},$$
$$Y_8(f) = \sum_{i=0}^{3} y_{n-i}\,(x_{n-i}p_{n-i} + y_{n-i}q_{n-i}),$$

которая, как легко видеть, измерима. Следовательно, множества Q, выделяемые соотношениями (8), измеримы и их мера, являющаяся мерой группы (9), равна

$$\int \frac{dP_{n-3} \wedge dP_{n-2} \wedge dP_{n-1} \wedge dP_n}{S_{n-3,n-2,n-1}S_{n-3,n-2,n}S_{n-3,n-1,n}S_{n-2,n-1,n}}. \tag{10}$$

Номер группы	Значение n, для которого множества Q измеримы	Выражение для меры	Измеримые подмножества	Выражение для меры измеримых подмножеств
2.1	$n = 3$	$\int \frac{dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3}{S^3_{1,2,3}}$	$\frac{l_{i,n-1} l_{n-2,n}}{l_{i,n} l_{n-2,n-1}} = \alpha_i$ $\frac{l_{n-2,n} S_{k,n-1,n}}{l_{k,n} S_{n-2,n-1,n}} = \beta_k$ $i, k = 1, \ldots, n-3$	$\int \frac{dP_{n-2} \wedge dP_{n-1} \wedge dP_n}{S^3_{n-2,n-1,n}}$
2.2	$n = 3$	$\int \frac{dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3}{S^3_{1,2,3}}$	$S_{i,n-1,n} S^{-1}_{n-2,n-1,n} = \alpha_i$ $S_{k,n-2,n} S^{-1}_{n-2,n-1,n} = \beta_k$ $i, k = 1, \ldots, n-3$	$\int \frac{dP_{n-2} \wedge dP_{n-1} \wedge dP_n}{S^3_{n-2,n-1,n}}$
3.1	$n = 2$	$\int \frac{dP_1 \wedge dP_2}{l^3_{1,2}}$	$\frac{l_{n-2,n-1} S_{i,n-1,n}}{l_{i,n-1} S_{n-2,n-1,n}} = \alpha_i$ $\frac{l_{k,n} l_{n-1,n-2}}{l_{k,n-1} l_{n-2,n}} = \beta_k$ $i, k = 1, \ldots, n-3$ $\frac{l_{n-1,n-2} l_{n-1,n} l_{n-2,n}}{S^2_{n-2,n-1,n}} = \gamma$	$\int \frac{dx_{n-2} \wedge dP_{n-1} \wedge dP_n}{l_{n-2,n} l_{n-2,n-1} l^2_{n-1,n}}$
3.2			$l_{i,n} l^{-1}_{n-1,n} = \alpha_i$ $i = 1, \ldots, n-2$ $S_{k,n-1,n} S^{-1}_{n-2,n-1,n} = \beta_k$ $k = 1, \ldots, n-3$	$\int \frac{dy_{n-2} \wedge dP_{n-1} \wedge dP_n}{l^2_{n-1,n} (r_{n-2,n} - \alpha_{n-2} r_{n-1,n})^3}$

Продолжение табл.

Номер группы	Значение n, для которого множества Q измеримы	Выражение для меры	Измеримые подмножества	Выражение для меры измеримых подмножеств
3.3	$n=1$ $n=2$	$\int dP_1$ $\int dP_1 \wedge dP_2$	$l_{i,n} l^{-1}_{n-1,n} = \alpha_i, \ i=1, \ldots, n-2$ $S_{k,n-1,n} S^{-1}_{n-2,n-1,n} = \beta_k$ $k=1, \ldots, n-3$	$\int \frac{dy_{n-2} \wedge dP_{n-1} \wedge dP_n}{r_{n-2,n} - \alpha_{n-2} r_{n-1,n}}$
4.1	$n=2$	$\int \frac{dP_1 \wedge dP_2}{l^2_{1,2} r^2_{1,2}}$	$l_{i,n} l^{-1}_{n-1,n} = \alpha_i$ $r_{k,n} r^{-1}_{n-1,n} = \beta_k$ $i, k = 1, \ldots, n-2$	$\int \frac{dP_{n-1} \wedge dP_n}{l^2_{n-1,n} r^2_{n-1,n}}$
4.2	$n=1$ $(\gamma = -1)$ $n=2$	$\int dP_1$ $\int \frac{dP_1 \wedge dP_2}{l^{2\gamma+2}_{1,2}}$	$l^{1+\gamma}_{i,n} S^{-1}_{n-2,n-1,n} = \alpha_i$ $i=1, \ldots, n-1$ $S_{k,n-1,n} S^{-1}_{n-2,n-1,n} = \beta_k$ $k=1, \ldots, n-3$	$\int \frac{dP_{n-1} \wedge dP_n}{l^{2\gamma+2}_{n-1,n}}$
4.3			$l_{i,n} = \alpha_i, \ i=1, \ldots, n-1$ $S_{k,n-1,n} S^{-1}_{n-2,n-1,n} = \beta_k$ $k=1, \ldots, n-3$	$\int \frac{dy_{n-2} \wedge dy_{n-1} \wedge dP_n}{(\alpha_{n-1} r_{n-2,n} - \alpha_{n-2} r_{n-1,n})^3}$
4.4			$x_i x_n^{-1} = \alpha_i, \ i=1, \ldots, n-1$ $S_{k,n-1,n} S^{-1}_{n-2,n-1,n} = \beta_k$ $k=1, \ldots, n-3$	$\int \frac{dy_{n-2} \wedge dy_{n-1} \wedge dP_n}{x_n (\alpha_{n-1} r_{n-2,n} - \alpha_{n-2} r_{n-1,n} + r_{n-1,n-2})^3}$

Продолжение табл.

Номер группы	Значение n, для которого множества Q измеримы	Выражение для меры	Измеримые подмножества	Выражение для меры измеримых подмножеств
4.5	$n=2$	$\int \frac{dP_1 \wedge dP_2}{y_1 y_2 l^2_{1,2}}$	$l_{i,n} l_{n-2,n-1} l^{-1}_{n-2,n} l^{-1}_{i,n-1} = \alpha_i$ $i=1, \ldots, n-3$ $y_n y_k^{-1} l_{k,n-1} l^{-1}_{n-1,n} = \beta_k$ $k=1, \ldots, n-2$ $y_n y^{-1}_{n-1} l_{n-2,n-1} l^{-1}_{n-2,n} = \gamma$	$\int \frac{dP_{n-1} \wedge dP_n}{y_{n-1} y_n l^2_{n-1,n}}$
5.1			$l_{i,n} l^{-1}_{n-1,n} = \alpha_i$ $r_{k,n} r^{-1}_{n-1,n} = \beta_k$ $i,\ k=1, \ldots, n-2$ $l_{n-1,n} r^{-1}_{n-1,n} = \gamma$	$\int \frac{dx_{n-1} \wedge dP_n}{l^2_{n-1,n}}$
5.2	$n=1$	$\int y_1^{-3} dP_1$	$y_n y_i^{-1} l_{i,n-1} l^{-1}_{n-1,n} = \alpha_i$ $y_n y^{-1}_{n-1} l_{k,n-1} l^{-1}_{k,n} = \beta_k$ $i,\ k=1, \ldots, n-2$ $y_{n-1} y_n l_{n-1,n} = \gamma$	$\int \frac{dx_{n-1} \wedge dP_n}{y_n l^2_{n-1,n}}$
5.3	$n=1$	$\int e^{-x_1} dP_1$	$l_{i,n} = \alpha_i, \quad i=1, \ldots, n-1$ $e^{-x_n} l^{-1}_{k,n} l^{-1}_{n-1,n} S_{k,n-1,n} = \beta_k$ $k=1, \ldots, n-2$	$\int e^{-2x_n} dy_{n-1} \wedge dP_n$

Продолжение табл.

Номер группы	Значение n, для которого множества Q измеримы	Выражение для меры	Измеримые подмножества	Выражение для меры измеримых подмножеств
5.4	$n=1$ $(c=0)$	$\int dP_1$	$l_{i,n}l_{n-1,n}^{-1}=\alpha_i, \quad i, \ k=1, \ \ldots, \ n-2$ $r_{k,n}r_{n-1,n}^{-1}=\beta_k$ $l_{n-1,n}^{c-1}l_{i,n}^{c+1}(l_{i,n}r_{n-1,n})^{-c-1}=\gamma$	$\int l_{n-1,n}^{-\frac{3c+1}{c+1}}dx_{n-1}\wedge dP_n$
5.5			$x_ix_n^{-1}=\alpha_i, \quad i=1, \ \ldots, \ n-1$ $r_{k,n}r_{n-1,n}^{-1}=\beta_k, \quad k=1, \ \ldots, \ n-2$	$\int \frac{dy_{n-1}\wedge dP_n}{x_nr_{n-1,n}^2}$
5.6			$l_{i,n}l_{n-1,n}^{-1}=\alpha_i, \quad i=1, \ \ldots, \ n-2$ $l_{k,n}e^{-r_{k,n}l_{k,n}^{-1}}=\beta_k$ $k=1, \ \ldots, \ n-1$	$\int l_{n-1,n}^{-3}dx_{n-1}\wedge dP_n$
5.7	$n=1$	$\int x_1^{-\gamma-1}dP_1$	$x_n^{-\gamma-1}S_{i,n-1,n}=\alpha_i, \quad i=1, \ \ldots, \ n-2$ $x_kx_n^{-1}=\beta_k, \quad k=1, \ \ldots, \ n-1$	$\int x_n^{-2\gamma-1}dy_{n-1}\wedge dP_n$
5.8	$n=1$	$\int dP_1$	$l_{i,n}=\alpha_i, \quad i=1, \ \ldots, \ n-1$ $S_{k,n-1,n}=\beta_k, \quad k=1, \ \ldots, \ n-2$	$\int dy_{n-1}\wedge dP_n$
5.9			$l_{i,n}l_{n-1,n}^{-1}=\alpha_i, \quad i=1, \ \ldots, \ n-2$ $l_{k,n}^2(x_kl_{k,n}+r_{k,n})^{-1}=\beta_k$ $k=1, \ \ldots, \ n-1$	$\int l_{n-1,n}^{-4}dx_{n-1}\wedge dP_n$

Продолжение табл.

Номер группы	Значение n, для которого множества Q измеримы	Выражение для меры	Измеримые подмножества	Выражение для меры измеримых подмножеств
5.10	$n=1$	$\int t_{1,1}^{-3}dP_1$	$(1+x_iy_n+y_ix_n)(t_{i,i}t_{n,n})^{-1}=\alpha_i$ $i=1,\ \ldots,\ n-1$ $\frac{y_{n-1}\left[(r_{n,k}+y_kt_{n,n})^2-y_n^2t_{k,k}^2\right]t_{n-1,n-1}}{y_k\left[(r_{n,n-1}+y_{n-1}t_{n,n})^2-y_n^2t_{n-1,n-1}^2\right]t_{k,k}}=\beta_k$ $k=1,\ \ldots,\ n-2$	$\int\frac{y_ny_{n-1}^{-2}t_{n,n}^{-2}dy_{n-1}\wedge dP_n}{\varphi^2+\alpha_{n-1}^2-1-\alpha_{n-1}\sqrt{\varphi^2+\alpha_{n-1}^2-1}}$ $\varphi=(y_{n-1}t_{n,n})^{-1}r_{n-1,n}$
5.11			$x_i=\alpha_i,\quad i=1,\ \ldots,\ n$ $S_{k,n-1,n}S_{n-2,n-1,n}^{-1}=\beta_k$ $k=1,\ \ldots,\ n-3$	$\int S_{n-2,n-1,n}^{-3}dy_{n-2}\wedge dy_{n-1}\wedge dy_n$
6.1	$n=1$	$\int dP_1$	$l_{i,n}=\alpha_i$ $r_{k,n}=\beta_k$ $\quad i,\ k=1,\ \ldots,\ n-1$	$\int dP_n$
6.2	$n=1$	$\int(x_1y_1)^{-1}dP_1$	$x_ix_n^{-1}=\alpha_i$ $y_ky_n^{-1}=\beta_k$ $\quad i,\ k=1,\ \ldots,\ n-1$	$\int(x_ny_n)^{-1}dP_n$
6.3	$n=1$	$\int x_1^{-1}dP_1$	$x_ix_n^{-1}=\alpha_i$ $r_{k,n}=\beta_k$ $\quad i,\ k=1,\ \ldots,\ n-1$	$\int x_n^{-1}dP_n$
6.4	$n=1$	$\int dP_1$	$l_{i,n}=\alpha_i$ $r_{k,n}-x_kl_{k,n}=\beta_k$ $\quad i,\ k=1,\ \ldots,\ n-1$	$\int dP_n$

Продолжение табл.

Номер группы	Значение n, для которого множества Q измеримы	Выражение для меры	Измеримые подмножества	Выражение для меры измеримых подмножеств
6.5	$n = 1$	$\int x_1^{-2} dP_1$	$x_i x_n^{-1} = \alpha_i \quad i = 1, \ldots, n-1$ $r_{k,n} r_{n-1,n}^{-1} = \beta_k \quad k = 1, \ldots, n-2$ $x_n r_{n-1,n}^{-1} = \gamma$	$\int x_n^{-2} dP_n$
6.6	$n = 1$	$\int x_1^{-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} dP_1$	$x_i x_n^{-1} = \alpha_i \quad i = 1, \ldots, n-1$ $r_{k,n} r_{n-1,n}^{-1} = \beta_k \quad k = 1, 2, \ldots, n-2$ $x_n r_{n-1,n}^{-1} = \delta$	$\int x_n^{-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} dP_n$
6.7	$n = 1$	$\int e^{-x_1} dP_1$	$x_i x_n^{-1} = \alpha_i \quad i = 1, \ldots, n-1$ $r_{k,n} r_{n-1,n}^{-1} = \beta_k \quad k = 1, \ldots, n-2$ $x_n r_{n-1,n}^{-1} = \gamma$	$\int e^{-x_n} dP_n$
6.8	$n = 1$	$\int x_1^{-2} dP_1$	$x_i x_n^{-1} = \alpha_i$ $x_n^{-1} e^{r_{k,n}^{-1} r_{k,n}} = \beta_k \quad i, k = 1, \ldots, n-1$	$\int x_n^{-2} dP_n$

Продолжение табл.

Номер группы	Значение n, для которого множества Q измеримы	Выражение для меры	Измеримые подмножества	Выражение для меры измеримых подмножеств
6.9	$n=1$	$\int (x_1 + y_1^2)^{-\frac{3}{2}} dP_1$	$\frac{x_l + y_l^2}{x_n + y_n^2} = \alpha_l, \quad l = 1, \ldots, n-1$ $r_{k,n} r_{n-1,n}^{-1} = \beta_k \quad k = 1, \ldots, n-2$ $(x_n + y_n^2) r_{n-1,n}^{-2} = \gamma$	$\int (x_n + y_n^2)^{-\frac{3}{2}} dP_n$
6.10			$x_l = \alpha_l \quad i = 1, \ldots, n$ $S_{k,n-1,n} = \beta_k \quad k = 1, \ldots, n-2$	$\int dy_{n-1} \wedge dy_n$
6.11			$x_l = \alpha_l \quad i = 1, \ldots, n$ $r_{k,n} r_{n-1,n}^{-1} = \beta_k \quad k = 1, \ldots, n-2$	$\int r_{n-1,n}^{-2} dy_{n-1} \wedge dy_n$

Таким образом, относительно группы I n-точечные множества:

а) при $n = 3; 4$ измеримы и их мера выражается соответственно интегралами (6) и (7),

б) при $n \neq 3; 4$ не имеют инвариантной меры; однако при $n > 4$ существуют измеримые подмножества, выделяемые соотношениями (8), причем мера выражается интегралом (10).

Замечание. Так как для всех групп I—VI исследования проводятся аналогично, мы ограничимся лишь формулировками результатов для остальных групп. Причем эти результаты представим в виде таблицы. В дальнейшем положено $l_{i,j} = x_i - x_j$, $r_{i,j} = y_i - y_j$, $t_{ii} = \sqrt{1 + 2x_i y_i}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Kowalewski. Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Leipzig. 1931.

2. L. Santalo. Integral geometry of the projective groups of the plane depending on more than three parameters. An. stiint. Univ. Iasi, 1965, Sec. Ia, 307—335.

3. L. Santalo. Grupos del plano respecto de los cuales los conjuntos de puntos y de rectas admiten una medida invariante. «Rev. Union mat. argent. y Asoc. fis. argent», 1967, 23, N 3.

4. А. В. Луценко, Л. М. Юртова. О мерах множеств пар на плоскости, инвариантных относительно проективных групп преобразований. «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6. Изд-во ХГУ, 1968.

5. Г. И. Дринфельд. О мере групп Ли. Зап. Харьковск. матем. о-ва, т. 21, 1949.

6. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. Гостехиздат, М.—Л., 1940.

Поступила 25 декабря 1970 г.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРИМИТИВНОГО ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА С ДАННЫМИ ЧИСЛАМИ n-УГОЛЬНЫХ ГРАНЕЙ

А. И. Медяник

(Харьков)

Замкнутый выпуклый многогранник P трехмерного евклидова пространства называется примитивным, если каждая его вершина инцидентна трем ребрам. Пусть a_n — число n-угольных граней P. Тогда

$$\sum_{n \geqslant 3} (6 - n)\, a_n = 12. \tag{1}$$

Это уравнение получается из уравнения Эйлера для многогранников после замены чисел вершин, ребер и граней примитивного многогранника их выражениями через a_n $(n \geqslant 3)$.

Возникает естественный вопрос: существует ли примитивный выпуклый многогранник с данными числами n-угольных граней, удовлетворяющими (1)? Оказывается, что не всегда. Например, не существует многогранника, для которого $a_3 = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$. Кроме того, уравнение (1) не дает информации об a_6. Да это и невозможно, так как существуют различные многогранники, для которых числа a_n совпадают для всех n, кроме $n = 6$. Например, тетраэдр и многогранник, получающийся из куба отсечением четырех вершин, являющихся вершинами вписанного в куб правильного тетраэдра (для них $a_3 = 4$, но в первом случае $a_6 = 0$, а во втором — $a_6 = 6$). С другой стороны, одному набору чисел a_n может соответствовать несколько комбинаторно различных примитивных многогранников. Например, комбинаторно отличается от указанного выше многогранника, получающегося из куба, многогранник, также получающийся из куба отсечением четырех вершин, являющихся концами двух его диагоналей.

Эберхард доказал [1], что для любого набора a_n $(n \geqslant 3,\ n \neq 6)$, удовлетворяющего (1), можно найти такое a_6, что будет существовать примитивный выпуклый многогранник с указанными числами n-угольных граней. Для рассмотренного выше случая $a_3 = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$ таким является $a_6 = 3$: многогранник получается из треугольной призмы отсечением не принадлежащих одной грани двух вершин верхнего основания и одной нижнего.

Грюнбаум доказал [2] существование примитивного выпуклого многогранника с данными числами n-угольных граней a_n, удовлетворяющих (1), при условии, что $a_3 = a_4 = 0$ и $a_6 \geqslant 8$. Эта теорема показывает, что наличие в задаваемом наборе треугольных и четырехугольных граней является главной причиной в том случае, когда примитивный выпуклый многогранник не существует.

С помощью теоремы Штейница [3, 4] поставленный вопрос сводится к вопросу о нахождении условий существования абстрактного многогранника с данными числами n-угольных граней, так как по этой теореме всякий абстрактный многогранник, эйлерова характеристика которого равна 2, может быть реализован в виде некоторого выпуклого многогранника. Определение абстрактного многогранника приводим из [5], так как в [3, 4] нет компактного определения (в работах Штейница абстрактный многогранник с эйлеровой характеристикой 2 называется K-полиэдром).

Абстрактным многогранником называется (конечная) совокупность произвольных элементов, называемых вершинами, ребрами и гранями, для которых каким-то образом определено отношение инцидентности, удовлетворяющее условиям:

1. Отношение инцидентности (грани и ребра, грани и вершины, ребра и вершины) симметрично.

2. Отношение инцидентности транзитивно: если вершина A инцидентна ребру a и ребро a инцидентно грани α, то вершина A инцидентна грани α.

3. Если вершина A инцидентна грани α, то существуют два и только два ребра, инцидентных как вершине A, так и грани α.

4. Если каждая из двух заданных граней инцидентна каждой из двух вершин, то существует одно и только одно ребро, инцидентное обеим этим граням и обеим вершинам.

5а. Каждое ребро инцидентно двум и только двум вершинам.

5б. Каждое ребро инцидентно двум и только двум граням.

6а. Для любых двух вершин A и B можно так выбрать ребра $a_1, a_2, \ldots a_n$ и вершины $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, чтобы в цепочке $A, a_1, A_1, \ldots A_{n-1}, a_n, B$ каждые два соседних элемента были взаимно инцидентными; если вершины A и B инцидентны одной и той же грани α, то все вершины A_i и ребра a_i можно выбрать так, чтобы они были инцидентными той же грани α.

6б. Для любых двух граней α и β можно так выбрать ребра $a_1, a_2, \ldots a_n$ и грани $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, чтобы в цепочке $\alpha, a_1, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}, a_n, \beta$ каждые два соседних элемента были взаимно инцидентны; если грани α и β инцидентны одной и той же вершине A, то и все грани α_i и ребра a_i можно выбрать так, чтобы они были инцидентными той же вершине A.

7а. Различных вершин не менее трех.

7б. Различных граней не менее трех.

Пусть $a_n\ (n \geqslant 3)$ — набор неотрицательных чисел, удовлетворяющих (1). Если существует примитивный абстрактный многогранник P, число n-угольных граней которого равно a_n, то должна иметь решение следующая система уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{s} x_{pq} - 3 = 0, \quad (q = 1, 2, \ldots \nu) \\
&\sum_{q=1}^{\nu} x_{pq} - s_p = 0, \quad (p = 1, 2, \ldots s) \\
&\left(\sum_{q=1}^{\nu} x_{pq}x_{rq}\right)\left(\sum_{q=1}^{\nu} x_{pq}x_{rq} - 2\right) = 0 \quad (p \neq r),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $s = \sum\limits_{n \geqslant 3} a_n$ — число граней P, s_p — число вершин p-й грани, ν — число вершин P, x_{pq} — число, равное 1, если q-я вершина принадлежит p-й грани, и равное 0 в противном случае.

Действительно, первая группа уравнений — условие примитивности многогранника; p-е уравнение второй группы — условие того, что p-я грань имеет s_p вершин; третья группа уравнений — условие правильного прилегания граней: две грани либо не имеют общих вершин, либо имеют только две общие вершины.

Решение системы (2) будем называть приводимым, если оно удовлетворяет ее подсистеме, включающей все те уравнения из первой и третьей групп, которые относятся к некоторым $\bar{s} < s$ граням и $\bar{\nu} < \nu$ вершинам, т. е. системе

$$
\sum_{\bar{p}=p_1}^{p_{\bar{s}}} x_{\bar{p}\bar{q}} = 3, \quad (\bar{q} = q_1, q_2, \ldots q_{\bar{\nu}})
\tag{3}
$$

$$
\left(\sum_{\bar{q}=q_1}^{q_{\bar{\nu}}} x_{\bar{p}\bar{q}}x_{\bar{r}\bar{q}}\right)\left(\sum_{\bar{q}=1}^{q_{\bar{\nu}}} x_{\bar{p}\bar{q}}x_{\bar{r}\bar{q}} - 2\right) = 0, \quad (\bar{p}, \bar{r} = p_1, p_2, \ldots p_{\bar{s}};\ \bar{p} \neq \bar{r})
$$

Два решения $\{x^1_{pq}\}$ и $\{x^2_{pq}\}$ называются различными, если нельзя изменением нумерации граней и вершин преобразовать, например, решение $\{x^2_{pq}\}$ в решение $\{\bar{x}^2_{pq}\}$ так, чтобы $x^1_{pq} = \bar{x}^2_{pq}$.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием существования примитивного выпуклого многогранника с данными числами n-угольных граней a_n, удовлетворяющими* (1), *является существование неприводимого решения системы* (2). *Число комбинаторно различных многогранников с данными числами n-угольных граней равно числу различных неприводимых решений системы* (2).

Доказательство. Необходимость условий очевидна. Докажем достаточность их. Пусть при некотором ν существует неприводимое решение $\{x^0_{pq}\}$ системы (2). Определим систему элементов G, состоящую из s граней, ν вершин и g ребер, отношение инцидентности для которых введем следующим образом. p-я грань инцидентна q-й вершине, если $x^0_{pq} = 1$, т. е. p-я грань, согласно (2), имеет s_p вершин. Из первой группы уравнений (2) следует, что каждая вершина принадлежит трем граням. Пусть, например, вершина D инцидентна граням α, β, γ. Из третьей группы уравнений следует, что любые две из этих граней должны иметь общую вершину, отличную от D. Пусть A — общая вершина β и γ, B — α и γ, C — α и β. Будем считать, что грани β и γ имеют общее ребро AD, α и γ — общее ребро BD, а α и β — общее ребро CD. Таким образом, каждая вершина инцидентна трем ребрам, а каждое ребро инцидентно двум вершинам и двум граням, т. е. имеют место равенства

$$3\nu = 2g, \quad \sum_{n \geqslant 3} na_n = 2g. \tag{4}$$

Из (1) и (4) следует, что характеристика G равна

$$\nu + s - g = 2. \tag{5}$$

Докажем, что система G с введенным отношением инцидентности является абстрактным многогранником, т. е. удовлетворяет условиям 1—7. По построению G удовлетворяет первым пяти условиям и второй половине условия 6б. Связность G (первая часть условий 6а и 6б) следует из неприводимости решения $\{x^0_{pq}\}$. Действительно, в противном случае числа x^0_{pq}, соответствующие тем вершинам, для которых существует указанная в условии 6а цепочка с началом в вершине A, и инцидентным им граням, удовлетворяют системе уравнений (3), что противоречит неприводимости решения $\{x^0_{pq}\}$. Из (1) следует условие 7. Вторая половина условия 6а следует из (5), так как эйлерова характеристика абстрактного многогранника не может быть больше двух [4, § 30, стр. 120].

Итак, система G является абстрактным многогранником, эйлерова характеристика которого равна 2. По теореме Штейница он может быть реализован в виде некоторого выпуклого многогранника (примитивного). Теорема доказана.

В заключение укажем один способ решения системы уравнений (2). Обозначим A_q, B_p, C_{pr} левые части первой, второй и третьей групп уравнений системы (2). Нетрудно заметить, что каждое решение системы (2) является решением уравнения

$$\sum_{p,\, q,\, r} (A_q^2 + B_p^2 + C_{pr}^2) = 0, \tag{6}$$

и наоборот. Так как $x_{pq}^2 = x_{pq}$, то (6) преобразуется к виду

$$\sum_{i \geqslant 1} c_i X_i = 0, \tag{7}$$

где c_i — коэффициенты, а X_i — i-е в лексикографическом порядке произведение неизвестных x_{pq} : x_{pq} предшествует x_{lm}, если либо $p < l$, либо $p = l$, $q < m$; произведение Y предшествует произведению Z, если первые k неизвестных из $\{x_{pq}\}$ $(0 \leqslant k \leqslant s\nu)$ входят и в Y и в Z, а следующее неизвестное в Y входит, но в Z не входит. Каждое X_i принимает только два значения: 1 или 0. Пусть $\{\overline{X}_i\}$ — некоторое решение (7). Очевидно, что это решение порождает решение системы (2), если в каждое выражение $X_i = 0$ входит хотя бы одно неизвестное x_{pq}, не входящее ни в одно выражение $X_j = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Eberhard. Zur Morphologie der Polyeder, Leipzig, 1891.
2. B. Grünbaum. Some analogues of Eberhard'stheorem on convex polytopes, «Israel J. Math», 1968, 6, № 4, 398—411.
3. E. Steinitz. Polyeder und Raumeinteilungen. Enzykl. math. Wiss. Vol. 3 (Geometrie), 3AB12, 1—139 (1922).
4. E. Steinitz und H. Rademacher. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin, 1934.
5. В. Г. Ашкинузе. Многоугольники и многогранники. Энциклопедия элементарной математики, кн. IV, Физматгиз. М. 1963, 401—402.

Поступила 28 сентября 1970 г.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

А. Д. Милка

Харьков

1. В заметке устанавливаются некоторые свойства квазигеодезических линий на выпуклых поверхностях, дополняющие известные.

2. Для кратчайших на выпуклой поверхности имеет место теорема единственности [1] (теорема о неналегании кратчайших), которую можно сформулировать так: две кратчайшие равной длины, исходящие из одной точки в одном направлении, совпадают. В более общем классе кривых, включающем и кратчайшие, справедлива и теорема существования: из данной точки поверхности в любом заданном направлении можно провести квазигеодезическую [1]; при этом, однако, как показано в [2], теорема единственности не выполняется.

Множество тех направлений в точке на выпуклой поверхности, в которых идут кратчайшие, имеет полную угловую меру [1]. Дополнительное к нему множество (нулевой меры, оно может отсутствовать) содержит, следовательно, те направления, которые, можно сказать, соответствуют существенно квазигеодезическим линиям, то есть таким квазигеодезическим, которые не являются кратчайшими в начальных участках.

Исчерпывает ли указанное дополнительное множество все те направления в точке поверхности, в которых идут существенные квазигеодезические? Ответ на этот вопрос, оказывается, положительный. Именно справедливо следующее утверждение, которое удобно сформулировать как вариант теоремы единственности для квазигеодезических.

Теорема 1. *Две квазигеодезические равной длины, из которых одна — кратчайшая, исходящие из одной точки в одном направлении на выпуклой поверхности, совпадают.*

Замечание. Из теоремы 12 [2] следует, что в условиях данной теоремы кратчайшая и квазигеодезическая, кроме начальной точки, будут иметь в ее окрестности бесчисленное множество других общих точек.

Доказательство теоремы 1 основывается на одном свойстве квазигеодезических линий на выпуклых поверхностях, которое будет сформулировано позже. Это свойство, кроме теоремы 1, имеет другие следствия. В частности, с его помощью выводится некоторая оценка для отклонения квазигеодезической и кратчайшей, исходящих на поверхности из одной точки. На основании этой оценки устанавливается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\{F_n\}$ — последовательность выпуклых поверхностей, сходящихся к выпуклой поверхности F, $\{O_n \mid O_n \in F_n\}$ — последовательность точек, сходящихся к точке $O \in F$, и пусть касательные конусы к F_n в точках O_n сходятся к касательному конусу к F в точке O. Пусть γ — кратчайшая на F, исходящая из точки O в направлении τ, а γ_n — квазигеодезическая на F_n, исходящая из точки O_n в направлении τ_n. Предположим, что длины γ_n сходятся к длине γ, направления τ_n сходятся к направлению τ. Тогда квазигеодезические γ_n сходятся к кратчайшей γ.*

Можно отметить, что эта теорема получается и как следствие теоремы 1. Однако, доказательство теоремы 2, основанное на указанной оценке (как и сама оценка) распространяется и на случай выпуклых гиперповерхностей в многомерном пространстве. Точнее, для гиперповерхностей мы можем сформулировать следующее предложение: утверждение теоремы 2 справедливо, когда в условиях этой теоремы $\{F_n\}$ — последовательность выпуклых многогранников, сходящихся к выпуклой гиперповерхности F.

Определение квазигеодезических на выпуклых многогранниках — гиперповерхностях дано в [3] (там же и в [4] установлены некоторые общие внутренние и внешние геометрические свойства этих линий); аналог теоремы 2 для многомерного пространства можно рассматривать как доказательство корректности этого определения: отсюда следует возможность приближения геодезических линий на выпуклых гиперповерхностях квазигеодезическими на сходящихся к ним выпуклых многогранниках.

Условимся, что в дальнейшем все рассуждения проводятся в трехмерном евклидовом пространстве; соответствующие утверждения и доказательства очевидным образом распространяются и на случай сферического пространства или пространства Лобачевского. Для простоты мы считаем, что рассматриваемые нами поверхности полные.

3. Свойство квазигеодезической на выпуклой поверхности, — его можно назвать свойством выпуклости, — из которого вытекает теорема 1, заключается в следующем.

Введем определение.

Пусть L — спрямляемая кривая на выпуклой поверхности F, и $O \in F$ — произвольная точка, не принадлежащая L. Предположим, что в двумерной плоскости существует локально выпуклая кривая L', изометричная L, и точка $O' \notin L'$, к которой эта кривая обращена вогнутостью (L' и O', конечно, зависят от выбора точки O на F), такие, что для любых точек $X \in L$ и $X' \in L'$, соответствующих по изометрии $L \leftrightarrow L'$, расстояния OX и $O'X'$ на поверхности и на плоскости одинаковы: $OX = O'X'$. Будем говорить в таком случае, что кривая L на F обладает свойством выпуклости.

Лемма. *Квазигеодезическая линия на выпуклой поверхности обладает свойством выпуклости.*

Доказательство. Пусть F — выпуклая поверхность, и γ — квазигеодезическая на F. Линия γ разбивается на конечное число дуг, не имеющих самопересечений. Рассмотрим одну из таких дуг, — обозначим ее $\bar{L}$. Пусть $O \in F$ — точка, не принадлежащая γ. Покажем, что существуют кривая L' и точка O' в двумерной плоскости, соответствующие паре $(\bar{L}, 0)$ так же, как требуется в определении свойства выпуклости. Это достаточно показать для любого участка $L \subset \bar{L}$, полученного из $\bar{L}$ исключением малых окрестностей ее концов.

Здесь мы воспользуемся возможностью приближения квазигеодезической без самопересечений так называемыми экстремальными полигонами (см. [2], доказательство теоремы 2). Пусть ε — малое положительное число, и ω_ε — ε — окрестность на F кривой L. Пусть F_ε — выпуклая поверхность, полученная путем взятия выпуклой оболочки множества $(F/\omega_\varepsilon) \cup \bar{L}$. Кривая L на F_ε — также квазигеодезическая. При малом ε точка O принадлежит F_ε, а $\bar{L}$ разбивает окрестность $\tilde{\omega}_\varepsilon \equiv F_\varepsilon \setminus (F \setminus \omega_\varepsilon)$ квазигеодезической L на две части, полуокрестности, локально развертывающиеся на плоскость. В окрестности $\tilde{\omega}_\varepsilon$ на поверхности F_ε существуют квазигеодезические L_ε^k $(k \to \infty)$ (экстремальные полигоны $\bar{C}_k$ в [2]), обладающие следующими свойствами: а) L_ε^k соединяет концы L и разбивается на конечное число звеньев, каждое из которых принадлежит замыканию одной из указанных полуокрестностей L и имеет нулевой поворот с одной стороны в этой полуокрестности; b) между квазигеодезическими L и L_ε^k устанавливается гомеоморфизм, в котором при $k \to \infty$ соответствующие точки неограниченно равномерно сближаются; c) длины L_ε^k равномерно сходятся к длине L. Таким образом, с учетом того, что $F_\varepsilon \to F$ при $\varepsilon \to 0$, утверждение леммы для квазигеодезической $\overline{L}$ будет следовать из его справедливости для L_ε^k на F_ε.

Рассмотрим одно звено C квазигеодезической L_ε (k мы фиксируем, и индекс k опускаем, так что $L_\varepsilon \equiv L_\varepsilon^k$). Это звено — с нулевым поворотом с одной стороны на поверхности F_ε; с той же стороны к звену C примыкает участок развертывающейся поверхности. Следовательно, C приближается на F_ε геодезическими. Для геодезических на выпуклых поверхностях свойство выпуклости выполняется (см. [5], доказательство теоремы 10). Значит, этим свойством обладают и все звенья в отдельности квазигеодезической L_ε. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — звенья L_ε, взятые последовательно. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — криволинейные треугольники в двумерной плоскости, определяемые парами $(C_1', O'), (C_2', O'), \ldots, (C_n', O')$, соответствующие парам $(C_1, O), (C_2, O), \ldots, (C_n, O)$, как требуется в определении свойства выпуклости. Треугольник Δ_i составлен дугой C_i', точкой O' — вершиной, общей для всех треугольников, — и прямолинейными отрезками, — сторонами, — проведенными из O' в концы C_i'. Плоские треугольники мы расположим так, чтобы совпадали образы кратчайших на F_ε, идущих из точки O в соответствующие вершины экстремального полигона L_ε, и чтобы соседние из этих треугольников разделялись их общей стороной. Дуги C' в совокупности составят кривую, — обозначим ее L_ε', — изометричную L_ε и такую, что расстояния между точками O и $X \in L_\varepsilon$ на F_ε и точками O' и $X' \in L_\varepsilon'$ на плоскости, где X' соответствует X по изометрии $L_\varepsilon \leftrightarrow L_\varepsilon'$, одинаковы: $OX = O'X'$. Надо показать, что L_ε' — локально выпуклая кривая, обращенная вогнутостью к точке O'. Для этого достаточно убедиться, что угол со стороны точки O' между ветвями C_i', C_{i+1}' в их общей вершине, — обозначим ее X_i', — не превосходит π.

Пусть X_i — соответствующая точке X_i' вершина полигона L_ε, общая дугам C_i, C_{i+1}. Пусть OX_i^- и OX_i^+ — кратчайшие на F_ε из O в X_i, предельные для кратчайших, соединяющих O соответственно с внутренними точками дуг C_i, C_{i+1}, когда эти точки сходятся к X_i. Кратчайшие OX_i и OX_{i+1}, вообще говоря, не совпадают. Пусть ξ, η — углы в плоскости в точке X_i' между отрезком $O'X_i^i$ и дугами C_i', C_{i+1}' соответственно. Можно убедиться, что для каждого из звеньев L_ε (дуг C) выполняются утверждения теоремы 10 из [5] (для этого придется буквально повторить приведенное там доказательство). В частности, углы в точке X_i на поверхности F_ε между кратчайшей OX_i^- и дугой C_i и между кратчайшей OX_i^+ и дугой C_{i+1} равны соответственно ξ и η. Пусть $\overline{\xi}$ — угол на F_ε в точке X_i' между дугой C_i и кратчайшей OX_i^+. Так как L_ε — квазигеодезическая, то $\overline{\xi} + \eta \leqslant \pi$. По теореме 9 из [2] справедливо неравенство $\xi \leqslant \overline{\xi}$. Следовательно, $\xi + \eta \leqslant \pi$, и локальная выпуклость кривой L_ε' (вогнутость к точке O') установлена. Этим доказана справедливость леммы для квазигеодезической L на поверхности. Теперь достаточно для квазигеодезической γ на F повторить соответствующие рассуждения, проведенные для L_ε, понимая под звеньями γ дуги, не имеющие самопересечений.

Лемма доказана.

4. Пусть L — спрямляемая кривая в метрическом пространстве и O — точка вне L. Пусть X, Y — точки L, для которых $\overset{\smile}{XY} \leqslant OX + OY$ ($\overset{\smile}{XY}$ — длина дуги $\overset{\smile}{XY}$ кривой L). Тогда для каждых двух точек $X', Y' \in \overset{\smile}{XY}$ выполняется неравенство $\overset{\smile}{X'Y'} \leqslant OX' + OY'$.

Если L — локально выпуклая кривая в двумерной плоскости, видная изнутри из некоторой точки O, не принадлежащей L, и если X, Y — точки L, для которых $\overset{\smile}{XY} \leqslant OX + OY$, тогда замкнутая кривая $OX \cup \overset{\smile}{XY} \cup YO$ — выпуклая.

Эти утверждения устанавливаются просто. Отсюда и из леммы о свойстве выпуклости получаются такие выводы.

Будем обозначать γ квазигеодезическую на выпуклой поверхности F и $O \in F$ — точку, не принадлежащую квазигеодезической.

Следствие 1. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — *правильная система точек на* γ, *причем для дуги* $\overset{\smile}{X_1X_n}$, *соединяющей эти точки,* $\overset{\smile}{X_1X_n} \leqslant 0X_1 + 0X_n$ *(расстояния измеряются на поверхности). Тогда в двумерной плоскости существует замкнутая выпуклая ломаная* $0'X'_1, \ldots, X'_n$ *такая, что для соответствующих длин дуг, принадлежащих* $\overset{\smile}{X_1X_n}$, *расстояний на* F *и расстояний на плоскости выполняются равенства:* $\overset{\smile}{X_1X_2} = X'_1X'_2, \ldots, \overset{\smile}{X_{n-1}X_n} = X'_{n-1}X_n$; $0X_1 = 0'X'_1, \ldots 0X_n = 0'X'_n$.

Следствие 2*. *Пусть* A — *конечная точка квазигеодезической* γ, $X \in \gamma$ — *переменная точка, выбранная таким образом, чтобы выполнялось неравенство* $\overset{\smile}{AX} \leqslant OA + OX$. *Пусть* Δ — *треугольник в двумерной плоскости, длины сторон которого* OA, $\overset{\smile}{AX}$, OX, *и* $\alpha(X)$ — *угол в треугольнике* Δ *против стороны, равной* OX. *Тогда функция* $\alpha = \alpha(X)$ *является непрерывной невозрастающей функцией длины* $\overset{\smile}{AX}$. *Предельное значение* $\alpha(A)$ *этой функции равняется углу на поверхности в точке* A *между квазигеодезической* γ *и любой из кратчайших* OA, *являющихся пределами сходящихся последовательностей кратчайших* OX; $\alpha(A)$ *есть также угол в точке* A', *соответствующей точке* A, *между линией* γ' *и отрезком* $O'A'$ *в двумерной плоскости, которые определяются свойством выпуклости (по отношению к* O*) квазигеодезической* γ.

5. Теорема 1 теперь вытекает из следствия 2 и теоремы о неналегании кратчайших. (Заметим, что нам достаточно знать при этом наличие свойства выпуклости существенной квазигеодезической по отношению к какой-нибудь одной внутренней точке кратчайшей). Отсюда получаются еще два следствия.

Следствие 3**. *Для взаимного расположения кратчайшей* L *и квазигеодезической* γ *на выпуклой поверхности имеются лишь две возможности:* a) *множество точек* $L \cup \gamma$ *является квазигеодезической,* b) L *и* γ *пересекаются не более, чем в конечном числе точек.*

Следствие. 4. *Пусть* γ — *квазигеодезическая на выпуклой поверхности* F *и* L — *кратчайшая на этой поверхности, исходящие из одной точки. Пусть* α — *угол между* L, γ *на* F, $z(x)$ — *расстояние на поверхности между точками кривых* L, γ, *отстоящими вдоль этих кривых от*

* Ср. с теоремой об условии выпуклости [1].

** Ср. с теоремой о взаимном расположении кратчайших [1].

их общей начальной точки на величину x. Тогда справедлива оценка: $z(x) \leqslant \leqslant 2x \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Замечание. Теорема 1 может быть доказана и путем приближения исходной поверхности во внутренне геометрическом смысле в некоторой окрестности общей начальной точки квазигеодезических: метрика этой окрестности заменяется метриками с неотрицательной кривизной, полученными разрезанием окрестности по квазигеодезической линии без самопересечений, включающей как часть начальный участок существенной квазигеодезической, и вклеиваниями в разрез плоских узких прямоугольных полосок (см. [1]). Существенная квазигеодезическая в таком случае аппроксимируется геодезическими, — средними линиями прямоугольников, — в приближающих метриках. Тем самым оказывается возможным установить свойство выпуклости малого начального участка существенной квазигеодезической по отношению к «далеким» от этого участка точкам начальной дуги кратчайшей из указанной окрестности поверхности.

6. Докажем теперь теорему 2.

Известно [1], что линия $\overline{\gamma}$, предельная для квазигеодезических γ_n, на поверхности F также является квазигеодезической; длина этой линии равна длине γ (что выводится, например, из аналога теоремы Либермана для квазигеодезических, теоремы 3 в [2]). Направление $\overline{\gamma}$ в точке O, как следует из условия, что касательные конусы поверхностей F_n соответствующим образом сходятся, и теоремы 3 из [2], совпадает с τ. Из теоремы 1 тогда вытекает, что γ и $\overline{\gamma}$ совпадают, — теорема 2 доказана.

Другое доказательство. Как только что отмечено, линии γ и $\overline{\gamma}$ — равной длины и в точке O имеют общее направление. Пусть $X \in \gamma$, $\overline{X} \in \overline{\gamma}$ — внутренние точки кривых, отстоящие от точки O вдоль этих линий на одинаковом расстоянии x. Пусть $\{L_n\}$ — последовательность кратчайших L_n на F_n, подчиненная условиям: a) L_n начинается в точке O_n, b) длины L_n сходятся к x, c) если $X_n (\neq O_n)$ — конец кратчайшей L_n, то $X_n \to X$ при $n \to \infty$. Кратчайшие $\{L_n\}$ строятся просто. Пусть $\overline{X}_n \in \gamma_n$ — точка, отстоящая от точки O_n вдоль квазигеодезической γ_n на расстоянии x; Очевидно, $\overline{X}_n \to X$ при $n \to \infty$. Линии L_n при $n \to \infty$ сходятся к начальной дуге $\overset{\frown}{AX}$, кратчайшей γ. Отсюда вытекает, что при $n \to \infty$ углы α_n в точках O_n на соответствующих поверхностях F_n между L_n и γ_n стремятся к нулю. Пусть z_n — расстояние на F_n между точками X_n и $\overline{X}_n$. По следствию 4 имеем: $z_n = 2x \sin\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тем самым при $n \to \infty$ необходимо $z_n \to 0$, и по теореме о сходимости метрик [1] точки X и $\overline{X}$ совпадают. Теорема 2 доказана (это доказательство распространяется на случай многомерного пространства).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. ГИТТЛ, М. — Л., 1948.

2. А. В. Погорелов. Квазигеодезические линии на выпуклой поверхности. Матем. сб., 25 (67), 1949, стр. 275—307.

3. А. Д. Милка. Многомерные пространства с многогранной метрикой неотрицательной кривизны. II. «Укр. геометр. сб»., 7, 1969, стр. 68—77.

4. А. Д. Милка. О лемме Буземана и Феллера в сферическом и гиперболическом пространствах. «Укр. геометр. сб.», 10, 1971.

5. А. Д. Милка. О кривых с ограниченной вариацией поворота на выпуклых гиперповерхностях. «Укр. геометр. сб.», 2, 1966, стр. 59—69.

Поступила 11 января 1971 г.

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЛАСТИ В ДВУМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

А. Д. Милка

(Харьков)

В работе устанавливаются некоторые оценки для характеристик области, гомеоморфной кругу, — площади, длины границы, внутреннего радиуса, — в двумерном многообразии с ограниченной кривизной, оценки, зависящие от удельной кривизны области и удельного поворота ее границы. Основные утверждения и теоремы для рассматриваемых многообразий, которые мы используем, известны, — они содержатся в монографиях [1] и [2]. Случай регулярного, риманова многообразия (оценка сверху длины границы области) рассматривался ранее в [3]. Предлагаемые здесь результаты и соответствующие теоремы В. А. Топоногова можно представить как обобщение некоторых утверждений для выпуклых кривых в плоскости, — оценки длины кривой, площади ограничиваемой ею области, внутреннего радиуса последней, — вытекающих из теоремы В. Бляшке [4] (см. также [5, 6]) об окружностях кривизны кривой.

Напомним, что удельной кривизной области в многообразии называется отношение кривизны этого множества к его площади. Удельный поворот дуги кривой (со стороны некоторой области) определяется аналогично: отношение поворота к длине дуги. Внутренний радиус области — наибольшее из расстояний точек области до ее границы.

Рассматривая некоторое многообразие с кривизной, ограниченной числом K, мы будем пользоваться вспомогательными построениями, осуществляемыми в двумерной K-плоскости, т. е. в плоскости кривизны K: евклидовой — при $K = 0$, плоскости Лобачевского — при $K < 0$, сферической, или K-сфере — при $K > 0$. Будем обозначать $M_\varkappa$ круг в K-плоскости с геодезической кривизной граничной окружности, равной $\varkappa$ ($\varkappa > 0$ при $K \leqslant 0$ и $\varkappa \geqslant 0$ при $K > 0$). Символами $L_\varkappa$, $R_\varkappa$, $F_\varkappa$ обозначаются соответственно длина указанной окружности, ее радиус, площадь круга $M_\varkappa$. Численные выражения:

$$L_\varkappa = \frac{2\pi}{\sqrt{K+\varkappa^2}};$$

$$R_\varkappa : \begin{cases} \operatorname{sh} R_\varkappa = \dfrac{\sqrt{-K}}{\sqrt{K+\varkappa^2}} & \text{при } K < 0, \\ R_\varkappa = \varkappa^{-1} & \text{при } K = 0, \\ \sin R_\varkappa = \dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt{K+\varkappa^2}} & \text{при } K > 0; \end{cases}$$

$$F_\varkappa = \begin{matrix} 2\pi K^{-1}\left(1 - \dfrac{\varkappa}{\sqrt{K+\varkappa^2}}\right) & \text{при } K \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{\varkappa^2} & \text{при } K = 0. \end{matrix}$$

Пусть M — область в двумерном многообразии с ограниченной кривизной, гомеоморфная замкнутому кругу, граница которой γ является в этом многообразии кривой с ограниченной вариацией поворота, не содержащей особых точек и, следовательно, спрямляемой. Будем говорить, что область M принадлежит классу $M_{K,\varkappa}$ (соответственно — классу $M^{K,\varkappa}$), если удельная кривизна внутри M не меньше K (не больше K) и удельный поворот кривой γ со стороны M — не меньше $\varkappa$ (не больше $\varkappa$).

Теорема 1. *Пусть $M \in M_{K,\varkappa}$, где $\varkappa$ неотрицательно и $K + \varkappa^2 > 0$. Тогда длина L границы γ, внутренний радиус R области M и площадь F* *этой области подчиняются следующим ограничениям: $L \leqslant L_\varkappa$ и в случае равенства область M изометрична кругу $M_\varkappa$ или, — при $K > 0$, $\varkappa = 0$, — двуугольнику на K-сфере; $R \leqslant R_\varkappa$ и в случае равенства область M изометрична кругу $M_\varkappa$ или конусу-сектору этого круга с отождествленными граничными радиусами; $F \leqslant \frac{F_\varkappa L}{L_\varkappa}$ и в случае равенства область M изометрична кругу $M_\varkappa$ или конусу-сектору этого круга с отождествленными граничными радиусами. При $L < L_\varkappa$ конус, построенный из сектора круга $M_\varkappa$, определяемого дугой длины L, допускает сжатие на область M (т. е. отображение, не увеличивающее расстояний), в котором граница конуса изометрически отображается на γ.*

Доказательство. Будем представлять область M вырезанной из объемлющего многообразия по краю γ.

Рассмотрим первое утверждение теоремы.

Допустим сначала, что K положительно. Установим, что $L \leqslant 2\pi/\sqrt{K}$ и равенство достигается только для области, изометричной большому кругу или двуугольнику на K-сфере. Одновременно утверждение теоремы будет доказано в случае, когда $\varkappa = 0$.

Пусть $M+$ и $M-$ — два экземпляра области M, т. е. два многообразия с краем, изометричные этой области. Пусть M^* — замкнутое многообразие, склеенное из $M+$ и $M-$ по их границам посредством отождествления точек с общими образами на γ. Удельная кривизна M^*, как легко проверяется, не меньше K, и, следовательно, в M^* выполняется условие K-выпуклости. Поэтому (см. [7]) диаметр многообразия M^* не превосходит $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, а в случае равенства это многообразие сводится к полному конусу (с двумя вершинами), склеенному из двуугольника K-сферы. В дальнейшем считается, что диаметр многообразия M^* меньше $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, иначе утверждение об оценке длины γ проверяется совсем просто. Имея в виду это многообразие, точнее его свойства, мы будем проводить нужные нам построения непосредственно в области M, пользуясь теоремой об условии выпуклости и ее следствиями. Заметим, что однозначный образ в M^* кратчайшей в M тоже является кратчайшей. На этих основаниях из нашего предположения о диаметре M^* и теоремы 2 [7] выводится следующее утверждение: периметр любого треугольника в M меньше $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.

Построим последовательность многоугольников $\{\gamma_n\}$ в M, правильно вписанных в γ, характеризующуюся свойствами: γ_{n+1} получается из γ_n заменой каждой стороны последнего двумя новыми звеньями; длины дуг γ, стягиваемых сторонами многоугольника γ_n, при $n \to \infty$ равномерно близки к нулю. Эти многоугольники вместе с их длинами сходятся к кривой γ. Они ограничивают в M сходящиеся к M области, — назовем их областями M_n, — гомеоморфные замкнутому кругу, углы секторов у которых при их граничных вершинах, как легко проверяется, не превосходят π. Пусть O — точка, фиксированная внутри M, внутренняя (что можно принять) для областей M_n. Соединим точку O с вершинами многоугольников γ_n кратчайшими в области M. Каждая область M_n, очевидно, разбивается соответствующими кратчайшими на треугольники, сходящиеся в точке O, общей вершине, в циклическом порядке и опирающиеся на стороны многоугольника γ_n. Обозначим K_n развертку-конус, построенную по разбиению области M_n, составленную из плоских (относительно K-сферы) треугольников, ω_n — кривизну этого конуса в вершине, $\bar{\gamma}_n$ — граничную его ломаную. Заметим, что γ_n, и $\bar{\gamma}_n$ имеют равные длины. Рассмотрим последовательность $\{\bar{K}_n\}$. Кривизны ω_n и повороты ломаных $\bar{\gamma}_n$ в их вершинах (относительно соответствующего конуса) неотрицательны. Можно показать также, основываясь на теореме об условии выпуклости, что числа ω_n при $n \to \infty$ не убывают. Отсюда следует существование в $\{K_n\}$ сходящейся подпоследовательности. Пусть $\bar{K}$ — соответствующий предельный конус, ω — кривизна этого конуса в вершине и $\bar{\gamma}$ — граничная кривая; γ и $\bar{\gamma}$ имеют равные длины, ω и повороты дуг $\bar{\gamma}$ со стороны K неотрицательны, причем ω равна пределу $\{\omega_n\}$. Легко видеть, что длина $\bar{\gamma}$ не превосходит $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$. Допустим, что здесь мы имеем равенство. В этом случае конус K изометричен большому кругу или двуугольнику на K-сфере. Тогда ω и, следовательно, ω_n при любом n равны нулю, и с помощью теоремы об условии выпуклости устанавливается, что конус K и область M изометричны. Последнее исключается нашим предположением о диаметре M^*. Этим утверждение об оценке $L \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ доказано.

Теперь обратимся к общему случаю, когда K не обязательно положительное.

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда $L \geqslant L_\varkappa$ и удельная кривизна многообразия не равна тождественно K или удельный поворот γ со стороны M не равен тождественно $\varkappa$. Обозначим $M_{\varkappa'}$ круг в K-плоскости, длина которого равна L. Такой круг существует, так как при K положительном выполняется неравенство $L < \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$. Очевидно, $\varkappa' \leqslant \varkappa$. Вырежем этот круг из K-плоскости по граничной окружности и вклеим на его место многообразие M по краю γ. В результате получим многообразие с удельной кривизной, не меньшей K. Но это приводит к противоречию. Достаточно построить мелкую триангуляцию данного многообразия и от нее перейти к развертке, склеенной из плоских (относительно K-плоскости) треугольников. Существование подобной развертки невозможно (см., например, [8]).

Первое утверждение теоремы доказано.

Установим существование конуса, о котором говорится в теореме, допускающего на область M отображение сжатия.

Обозначим $K_\varkappa$ конус, построенный из сектора круга $M_\varkappa$, опирающегося на дугу с длиной L, путем отождествления граничных радиусов этого сектора. Утверждается, что конус $K_\varkappa$ и есть искомый. Для доказательства продолжим конус $K_\varkappa$ до полного конуса и обозначим $\bar{K}_\varkappa$ дополнение на этом конусе конуса $K_\varkappa$. Вырежем область $\bar{K}_\varkappa$ из полного конуса. Склеив $\bar{K}_\varkappa$ (вырезанную) с M по границам, получим многообразие с удельной кривизной, не меньшей K. Это многообразие и полный конус, построенный нами раньше, обозначим соответственно $\tilde{M}$ и $\tilde{K}_\varkappa$. Рассмотрим последовательность неограниченно измельчающихся триангуляций многообразия $\tilde{M}$ и последовательность $\{\tilde{M}_n\}$, связанных с этими триангуляциями разверток, построенных из плоских (относительно K-плоскости) треугольников, внутренние метрики которых при $n \to \infty$ сходятся к метрике $\tilde{M}$. На развертках $\tilde{M}_n$ естественным образом определяются некоторые области, условно — области приближения, метрики которых сходятся к метрике области M на $\tilde{M}$; при каждом n конус $\tilde{K}_{\varkappa}$, как легко устанавливается, допускает на развертку $\tilde{M}_n$ отображение сжатия, при котором $K_{\varkappa}$ переходит внутрь области приближения, являющееся изометрией на дополнении в $\tilde{M}_n$ к этой области. Отображение при $K \neq 0$ строится почти тем же методом, который применял Ю. Г. Решетняк в работе [9]. Здесь получается оценка $R \leqslant R_{\varkappa}$. Выбором триангуляций $\tilde{M}$ можно добиться, чтобы площади областей приближения сходились к площади M — этим устанавливается и соответствующее утверждение теоремы (правда, только неравенство) об оценке площади. Последовательность отображений $\{\tilde{K}_{\varkappa} \to \tilde{M}_n\}$ индуцирует отображение сжатия $\tilde{K}_{\varkappa} \to \tilde{M}$, сужение которого на $K_{\varkappa}$ и будет искомым: $\tilde{K}_{\varkappa} \to M$. Функция $\tilde{K} \to \tilde{M}$ определяется сначала на счетном всюду плотном множестве точек конуса $\tilde{K}_{\varkappa}$. Это проводится по последовательности отображений $\{\tilde{K} \to \tilde{M}_n\}$ с помощью процесса диагонализации. Затем эта функция продолжается на весь конус.

Нам остается проверить случай равенства $F = \frac{F_{\varkappa}}{L_{\varkappa}}$. Здесь мы воспользуемся одной теоремой, доказанной В. А. Иониным в [10]. В наших условиях эта теорема может быть сформулирована следующим образом.

Площадь F *области* M, *длина* L *границы области и кривизна* ω *внутренней ее части связаны неравенством*

$$\Delta \equiv L^2 + 2(\omega - 2\pi) F - KF^2 \geqslant 0,$$

равенство в котором возможно лишь в случае, когда M *сводится к круговому конусу с кривизной внутренности* ω.

(При $K \geqslant 0$ с помощью этой теоремы получается независимое доказательство соответствующего утверждения теоремы I об оценке площади; правда, при этом для $K > 0$ нужно дополнительно требовать, чтобы заранее выполнялось неравенство $R \leqslant R_{\varkappa}$).

Сравнивая поворот кривой γ со стороны области M и поворот границы конуса $K_{\varkappa}$ со стороны этого конуса, равный $\varkappa L$ и, применяя формулу Гаусса—Бонне, получаем

$$0 \leqslant \Delta \leqslant L^2 - 2\varkappa LF - KF^2 \equiv \Delta_{\varkappa}.$$

Полагая $F = F_{\varkappa}L/L_{\varkappa}$, мы находим, что $\Delta_{\varkappa} = 0$. Следовательно, $\Delta = 0$, и по приведенной теореме M изометрична $K_{\varkappa}$. (Было бы, наверное, интересно установить эту изометрию непосредственно, пользуясь фактом о сжатии $K_{\varkappa} \to M$. По-видимому, выполняется общее предложение для рассматриваемых многообразий, которое формулируется следующим образом: *сжатие односвязной области, сохраняющее площадь, является изометрией*).

Рассмотрим теперь случай равенства $R = R_{\varkappa}$.

Как показано, конус $K_{\varkappa}$ допускает на область M отображение сжатия, в котором граница конуса изометрически соответствует границе M. Пусть $\overline{O}$ — точка в M, имеющая своим прообразом вершину конуса. Легко устанавливается, что каждая из точек γ отстоит от точки $\overline{O}$ в M на расстоянии, равном $R_{\varkappa}$. Более того, при отображении сжатия между множеством образующих конуса и множеством кратчайших в M, соединяющих $\overline{O}$ с точками границы γ, устанавливается взаимно однозначное соответствие, которое для каждой конкретной пары «образующая-кратчайшая» является изометрией. Поэтому для любых двух кратчайших в M, исходящих из точки $\overline{O}$, угол между этими кратчайшими в этой точке не превосходит соответствующего угла между соответствующими образующими на конусе. Пусть $\tilde{K}_\varkappa$ — полный конус, а $\tilde{M}$ — полное многообразие, введенные ранее при построении отображения сжатия, и пусть $\mathrm{H}: \tilde{K}_\varkappa \to \tilde{M}$ — отображение, тождественное на $K_\varkappa$ со сжатием $K_\varkappa \to M$ и представляющее на дополнениях $K_\varkappa$ в $\tilde{K}_\varkappa$ и M в $\tilde{M}$ изометрию. Любая кратчайшая в M с началом в $\overline{O}$, идущая к границе γ, — кратчайшая и в $\tilde{M}$. Поэтому образующие $\tilde{K}_\varkappa$ имеют своими H-образами в M изометричные им кривые, лучи с началом в $\overline{O}$, кратчайшие на каждом конечном участке. Эти лучи в $\tilde{M}$ вне M ортогональны к γ. Убедимся, что каждый такой луч имеет «окрестность», ограниченную двумя другими лучами, изометричную при отображении H^{-1} соответствующему углу в $\tilde{K}_\varkappa$. Тем самым изометрия $K_\varkappa$ и M будет доказана. Действительно, из всей совокупности указанных «окрестностей» мы можем выбрать для $\tilde{M}$ конечное покрытие, — этим, очевидно, устанавливается изометрия $\tilde{K}_\varkappa$ и $\tilde{M}$, а следовательно, и изометрия $K_\varkappa$ и M. Пусть $\bar{q}$ — луч в $\tilde{M}$, исходящий из $\overline{O}$, q — соответствующая образующая $\tilde{K}_\varkappa$, $Q \in \bar{q}$ — некоторая точка, расположенная вне $\tilde{M}$. Пусть $\overline{O}^+$ и $\overline{O}^-$ — точки в $\tilde{M}$ вне M, взятые по разные стороны от q, настолько близкие к точке Q, что соединяющая их кратчайшая не пересекает M. Обозначим O вершину $K_\varkappa$, а Q^+ и Q^- — точки конуса, соответствующие точкам $\overline{Q}^+$ и $\overline{Q}^-$. Треугольники ΔOQ^+Q^- в $\tilde{K}_\varkappa$ и $\Delta \overline{O}\,\overline{Q}^+\overline{Q}^-$ в M имеют попарно равные соответствующие стороны. Соответствующие углы этих треугольников в вершинах Q также равные. По теореме об условии K-выпуклости угол при вершине O треугольника в $\tilde{K}_\varkappa$ не превосходит соответствующего угла при вершине $\overline{O}$ треугольника в $\tilde{M}$. Было, однако, показано, что между этими углами имеет место противоположное неравенство. Отсюда следует, что рассматриваемые углы равные. Учитывая тогда, что $\tilde{M}$ — кривизны, не меньшей K, заключаем, что ΔOQ^+Q^- и $\Delta\overline{O}\overline{Q}^+\overline{Q}^-$ ограничивают в соответствующих многообразиях изометричные области. Углы на $\tilde{K}_\varkappa$ и $\tilde{M}$, содержащие эти треугольники, с границами-лучами, продолжениями сторон треугольников, которые сходятся в точках O и $\overline{O}$, очевидно, и служат изометричными «окрестностями» лучей q и $\bar{q}$. Таким образом, при $\mathrm{R} = \mathrm{R}_\varkappa$ конус $K_\varkappa$ и область M изометричны.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $M \in M^{\mathrm{K},\varkappa}$, *где* $\varkappa$ *положительно,* $\varkappa^2 + \mathrm{K} > 0$ и $\mathrm{K} \leqslant 0$. *Тогда длина* L *границы* γ *области* M *удовлетворяет неравенству* $\mathrm{L} \geqslant \mathrm{L}_\varkappa$. *Равенство возможно лишь в случае, когда* M *изометрична* $M_\varkappa$.

Доказательство. Изложения во всех деталях мы приводить не будем.

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда, в частности, $\mathrm{L} < \mathrm{L}_\varkappa$. Обозначим $M_{\varkappa'}$ круг в K-плоскости с длиной границы L. Очевидно $\varkappa' > \varkappa$. Пусть P — выпуклый многоугольник (как область) с углами во всех вершинах, меньшими π, содержащий внутри себя круг $M_{\varkappa'}$. Нам понадобятся два экземпляра этого многоугольника, вырезанные из К-плоскости. Первый мы обозначим P', оставив на нём отмеченным круг $M_{\varkappa'}$, второй — P''. Вырежем из многоугольника P' круг $M_{\varkappa'}$ и вклеим на место этого круга область M (по границе γ). Получим многообразие с кривизной, не большей К, с границей — геодезическим многоугольником. Выберем произвольно внутри этого многообразия точку, соединим ее кратчайшими с вершинами граничного многоугольника и построим по полученной триангуляции многообразия развертку-конус, составленную из плоских (относительно К-плоскости) треугольников. Развертка будет обладать следующими свойствами, вытекающими из условия К-вогнутости: кривизна конуса в вершине отрицательна, углы при некоторых граничных вершинах больше соответствующих углов многоугольника P''. Продолжим этот конус до полного. Будем обозначать: исходный конус — K, построенный полный конус — $\widetilde{K}$, дополнение K в $\widetilde{K}$ — $\overline{K}$. Пусть $C_{\varkappa''}$ — окружность на конусе $\widetilde{K}$ с центром в его вершине, вершине конуса K, выбранная таким образом, чтобы она содержалась внутри $\overline{K}$. Здесь $\varkappa''$ обозначает геодезическую кривизну этой окружности со стороны области, содержащей K. Длина окружности $C_{\varkappa''}$, очевидно, больше $L_{\varkappa}$. Вырежем из $\widetilde{K}$ конус K и вклеим на его место соответствующим образом многоугольник P''. Полученная многогранная метрика содержит кривую $C_{\varkappa''}$, имеет конечное число вершин, кривизны в этих вершинах неотрицательны, а в некоторых из них — положительны. С помощью разрезаний и вклеиваний треугольников эта метрика превращается в выпуклый конус, вершина которого охватывается кривой $C_{\varkappa''}$. Тогда длина этой кривой меньше $L_{\varkappa}$, и мы приходим к противоречию.

Теорема доказана.

(По-видимому, в условиях этой теоремы имеются и оценки снизу для внутреннего радиуса области и ее площади, аналогичные соответствующим оценкам в предыдущей теореме. Сама теорема, кроме того, наверное, выполняется и в случае, когда $K \geqslant 0$; при этом необходимо потребовать, чтобы положительная часть кривизны области была меньше 2π).

В заключение заметим, что в процессе доказательства теоремы 2 было установлено следующее предложение.

Пусть ρ — *двумерная метрика, многообразие с ограниченной кривизной, с удельной кривизной, не большей* К, *где* $K \leqslant 0$, *заданная на всей К-плоскости, тождественная с метрикой этой плоскости вне некоторого круга. Тогда метрика* ρ *изометрична К-плоскости.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров и В. А. Залгаллер. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, Изд-во АН СССР, М., т. 63, 1962.
2. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М. — Л., 1948.
3. В. А. Топоногов. Оценка длины выпуклой кривой на двумерной поверхности. Сиб. матем. ж., IV, № 5 (1963), 1189—1193.
4. В. Бляшке. Круг и шар. «Наука» М., 1967.
5. H. Karcher. Umkreise und Inkreise konvexer Kurven inder sphärishen und der hyperbolischen Geometrie. Math. Ann., 177, 122—132 (1968).
6. А. Д. Милка. Об одной теореме Шура — Шмидта. Укр. геометр. сб., вып. 8. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.
7. А. Д. Милка. Метрическое строение одного класса пространств, содержащих прямые линии. Укр. геометр. сб., вып. 4. Изд-во ХГУ, 1967, стр. 43—48.

8. В. А. Залгаллер. О деформации многоугольника на сфере. Успехи матем. наук, 11, вып. 5 (71), 1956, стр. 177—178.

9. Ю. Г. Решетняк. Об одном специальном отображении конуса на многогранник. Матем. сб., 53 (95), 1961, стр. 58—76.

10. В. К. Ионин. Об изометрических и некоторых других неравенствах для многообразия ограниченной кривизны. Сиб. матем. ж., X, № 2, 1969, стр. 329—342.

Поступила 5 октября 1970 г.

ПРОБЛЕМА БОРСУКА В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

А. С. Рисслинг
(Оренбург)

В работе доказано, что всякое тело F диаметра d, расположенное в трехмерном гиперболическом пространстве ${}^1S_3$, можно разбить на четыре части диаметра, меньшего d.

В трехмерном эллиптическом пространстве S_3 это же верно для тел F диаметра $d < 60°$.

Известно (см. [1]), что в трехмерном евклидовом пространстве R_3 всякое тело F диаметра d можно целиком поместить внутри правильного октаэдра с параллельными гранями, удаленными одна от другой на расстояние d. Более того, если из центра октаэдра направить три луча в три смежные вершины октаэдра и провести три плоскости, каждая из которых перпендикулярна соответствующему лучу и удалена от центра октаэдра на расстояние $\frac{d}{2}$, то в 11-гранник, ограниченный восьмью плоскостями граней и тремя проведенными плоскостями граней («11-гранник Гэйла»), также можно будет заключить любое тело F диаметра d.

Эту конструкцию можно использовать и в случае пространств ${}^1S_3$ и S_3. При этом пространства ${}^1S_3$ и S_3 удобно представлять себе как метризованные подходящим образом области евклидова пространства R_3 (мы используем модели Клейна пространств ${}^1S_3$ и S_3, изображаемых внутренностью единичного шара пространства R_3, у которого надо еще подходящим образом отождествить граничные точки в случае модели пространства S_3); евклидовы координаты (x, y, z) в R_3 мы принимаем за координаты точки пространств ${}^1S_3$ и S_3 (при этом мы приходим к вейерштрассовым координатам в ${}^1S_3$).

Воспользуемся тем, что локально (в окрестности любой своей точки) пространства ${}^1S_3$ и S_3 не отличаются от евклидова: метрика углов в связке прямых (и плоскостей) во всех трех пространствах одинакова. Проведем через начало O введенной системы координат пространств ${}^1S_3$ и S_3 семь плоскостей, внешние единичные нормали которых имеют те же направляющие косинусы, что и нормали к граням 11-гранника Гэйла евклидова пространства R_3. К тем из этих плоскостей, которые отвечают граням правильного октаэдра пространства R_3, проведем восемь эквидистантных поверхностей параметра $\frac{d}{2}$, к трем остальным — по одной эквидистантной поверхности параметра $\frac{d}{2}$, т. е. еще 3 такие поверхности.

Полученный таким образом эквидистантный 11-гранник назовем усеченным эквидистантным октаэдром Гэйла параметра $\frac{d}{2}$.

Теорема 1. *В пространстве ${}^1S_3\,(S_3)$ всякое тело F диаметра d $\left(\text{диаметра } d \leqslant 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 70°32'\right)$ можно заключить внутри усеченного эквидистантного октаэдра параметра $\frac{d}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим неусеченный эквидистантный октаэдр $AA'BB'CC'$ параметра $\frac{d}{2}$ и его четырехгранный «эквидистантный угол» с вершиной A, ребрами AB, AB', AC, AC', осью симметрии AA' и плоскостями симметрии BAB' и CAC'.

Выберем некоторую плоскость $\alpha \perp AA'$ и обозначим прямые, в которые ортогонально проектируются ребра AB и AB', AC и AC', через l и m, проекцию точки A на α обозначим через A^*, а введенные нами координаты точки A^* — через x и y. То, что AB и AB', так же как AC и AC', проектируются в одну прямую, и то, что $l \perp m$, следует из соображений симметрии. Плоскость α примем за плоскость $z=0$ введенной в трехмерном пространстве системы координат; аппликату точки A обозначим через z.

Повернем теперь угол $ABCB'C'$ вокруг его оси симметрии AA' на величину β, где $0 \leqslant \beta \leqslant 360°$. Положение угла $ABCB'C'$, ось симметрии AA' которого перпендикулярна плоскости α, будет определяться четырьмя параметрами x, y, z, β, где $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty, 0 \leqslant \beta \leqslant 360°$.

При этом так как угол $ABCB'C'$ имеет взаимно перпендикулярные плоскости симметрии BAB' и CAC', то при повороте на угол $\beta = 90°$ этот угол совмещается с самим собой; поэтому можно ограничиться значениями $0 \leqslant \beta \leqslant 90°$.

Как обычно, будем считать, что (выпуклое) тело F касается эквидистантной поверхности $\tilde{\alpha}$, если оно имеет с поверхностью $\tilde{\alpha}$ хотя бы одну общую точку и целиком лежит по одну сторону от этой поверхности.

Пусть эквидистантный угол $ABCB'C'$ расположен так, что $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\beta=0°$. Помещаем тело F (которое можно считать выпуклым, перейдя, если нужно, к выпуклой оболочке исходного тела) в эквидистантную «чашу» $ABCB'C'$ таким образом, чтобы оно касалось трех эквидистантных граней, обозначаемых нами через α_1, α_2, α_3 (если оно при этом касается и четвертой грани α_4, то доказательство упрощается). Далее фиксируем положение тела F и начинаем двигать «чашу» $ABCB'C'$, следя при этом, чтобы было $AA' \perp \alpha$.

Угол $0 \leqslant \beta \leqslant 90°$ увеличиваем непрерывно, и по каждому значению угла β подбираем значения параметров x, y, z «чаши» таким образом, чтобы значения x, y, z, β определяли положение «чаши», «описанной» вокруг тела F в том смысле, что F касается не менее трех граней «чаши» — либо граней α_1, α_2, α_3, либо граней α_1, α_2, α_4, где α_1 и α_2 — две соседние грани.

При $\beta=0°$ тело F по условию касается граней α_1, α_2, α_3 «чаши», определяемой нулевыми значениями всех параметров. При росте угла β от $0°$ до $90°$ α_1 преобразуется в α_2, α_2 преобразуется в α_3, α_3 преобразуется в α_4, α_4 преобразуется в α_1. (Здесь мы считаем грани α_i непрерывно зависящими от параметра β). В итоге тело F коснется граней α_1, α_2, α_4 «чаши» с параметрами $(0, 0, 0, 90°)$. Так как бесконечно малому изменению аргумента β соответствует бесконечно малое изменение функций $x(\beta)$, $y(\beta)$, $z(\beta)$, то последние являются непрерывными однозначными функциями одного аргумента β.

Из условия касания тела F поверхностей α_1, α_2, α_3 следует, что при $\beta=0°$ имеем $\rho(F, \alpha_1)=0$, $\rho(F,\alpha_2)=0$, $\rho(F,\alpha_3)=0$, $\rho(F,\alpha_4)>0$, где $\rho(F,\alpha_i)$ — расстояние от тела F до поверхности α_i $(i=1, 2, 3, 4)$, т. е. $\rho(F,\alpha_i)=\min\limits_{A\in B,\, B\in\alpha_i}\rho(A,B)$.

Аналогично при $\beta=90°$ имеем $\rho(F,\alpha_1)=0$, $\rho(F,\alpha_2)=0$, $\rho(F,\alpha_4)=0$, $\rho(F,\alpha_3)>0$.

С непрерывным изменением β (в пределах $0 \leqslant \beta \leqslant 90°$) непрерывно изменяются и величины $\rho(F, \alpha_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, являющиеся непрерывными функциями одного аргумента β. При этом $\rho(F, \alpha_1) \equiv 0$ и $\rho(F, \alpha_2) \equiv 0$, так что меняются лишь величины $f_1(\beta) = \rho(F, \alpha_3)$ и $f_2(\beta) = \rho(F, \alpha_4)$.

В соответствии с теоремой о промежуточном значении непрерывной функции существует хотя бы одно значение $0 \leqslant \beta_0 \leqslant 90°$; при переходе через значение $\beta = \beta_0$ происходит переход от значений $f_1(\beta) = 0$ к значениям $f_2(\beta) = 0$. Но это возможно лишь в том случае, если $f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0) = 0$, т. е., если отвечающая параметру β_0 «чаша» касается тела F сразу четырьмя своими гранями α_1, α_2, α_3, α_4.

Достраивая в указанном положении угол $ABCB'C'$ до неусеченного эквидистантного октаэдра параметра $\frac{d}{2}$, обнаруживаем, что тело F диаметра d целиком содержится внутри неусеченного эквидистантного октаэдра параметра $\frac{d}{2}$.

Покажем теперь, что полученный из этого эквидистантного октаэдра усеченный эквидистантный октаэдр параметра $\frac{d}{2}$ также содержит внутри себя любое тело F диаметра d.

Пусть A и A' — две противоположные вершины неусеченного эквидистантного октаэдра, и две эквидистантные пирамиды с вершинами A и A' отсечены эквидистантными поверхностями параметра $\frac{d}{2}$. Если внутри пирамиды с вершиной A были точки тела F, то внутри пирамиды с вершиной A' — в соответствии с понятием диаметра d тела F — их не должно быть; и наоборот, если внутри пирамиды с вершиной A' были точки тела F, то их не может быть внутри пирамиды с вершиной A. Это вытекает из того, что расстояние от каждой внутренней точки «пирамиды A» до каждой точки «пирамиды A'» больше d; для доказательства приходится использовать то, что кратчайшее расстояние между точками двух эквидистантных поверхностей с общей базой равно сумме параметров этих поверхностей. Аналогично обстоит дело и для пар пирамид с вершинами B и B', C и C', откуда в точности как в евклидовом случае получаем возможность подобрать три «дополнительные» эквидистантные поверхности так, чтобы тело F диаметра d оказалось заключенным в усеченный эквидистантный октаэдр параметра $\frac{d}{2}$.

Заметим теперь, что в то время как в пространстве ${}^1S_3$ (как и в евклидовом пространстве R_3) усеченный эквидистантный октаэдр (соответственно — 11-гранник Гейла) существует при любом d, в S_3 такой многогранник при большом d не существует — для его существования необходимо выполнение неравенства $1 - 3\sin^2\frac{d}{2} \geqslant 0$, или (см. ниже) $d \leqslant 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 70°32'$.

Перейдем к решению проблемы Борсука в пространстве S_3, используя модель S_3 как поверхности четырехмерной единичной евклидовой сферы $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \omega^2 = 1$ с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Неусеченный эквидистантный октаэдр расположим таким образом, чтобы центр его лежал в точке O $(0, 0, 0, 1)$, а вершины принадлежали прямым $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$, где $\xi_1(1, 0, 0, 0)$, $\eta_1(0, 1, 0, 0)$, $\zeta_1(0, 0, 1, 0)$. Тогда уравнения 11 эквидистантных поверхностей, являющихся гранями усеченного эквидистантного октаэдра параметра $\frac{d}{2}$, будут иметь вид:

$$\xi = -\sin\frac{d}{2}; \quad \eta = -\sin\frac{d}{2}; \quad \zeta = -\sin\frac{d}{2};$$

$$\pm\sqrt{3}\sin\frac{d}{2}=\xi+\eta+\zeta$$
$$\pm\sqrt{3}\sin\frac{d}{2}=-\xi+\eta+\zeta$$
$$\pm\sqrt{3}\sin\frac{d}{2}=\xi-\eta+\zeta;$$
$$\pm\sqrt{3}\sin\frac{d}{2}=\xi+\eta-\zeta.$$

Координаты ξ, η, ζ, ω 15 вершин 11-гранника принимают такой вид:

$$A\,(a\sqrt{3},\,0,\,0,\,\sqrt{1-3a^2}),$$
$$B\,(0,\,a\sqrt{3},\,0,\,\sqrt{1-3a^2}),$$
$$C\,(0,\,0,\,a\sqrt{3},\,\sqrt{1-3a^2}),$$
$$A_1\,(-a,\,0,\,a(\sqrt{3}-1),\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$A_2\,(-a,\,a(\sqrt{3}-1),\,0,\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$A_3\,(-a,\,0,\,-a(\sqrt{3}-1),\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$A_4\,(-a,\,-a(\sqrt{3}-1),\,0,\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$B_1\,(a(\sqrt{3}-1),\,-a,\,0,\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$B_2\,(0,\,-a,\,a(\sqrt{3}-1),\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$B_3\,(-a(\sqrt{3}-1),\,-a,\,0,\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$B_4\,(0,\,-a,\,-a(\sqrt{3}-1),\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$C_1\,(0,\,a(\sqrt{3}-1),\,-a,\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$C_2\,(a(\sqrt{3}-1),\,0,\,-a,\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$C_3\,(0,\,-a(\sqrt{3}-1),\,-a,\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$
$$C_4\,(-a(\sqrt{3}-1),\,0,\,-a,\,\sqrt{1-(5-2\sqrt{3})\,a^2}),$$

где

$$a=\sin\frac{d}{2}.$$

Используем числа, найденные Грюнбаумом [1]:

$$A=-1;\quad B=\frac{1227-472\sqrt{3}}{1518}\cong 0{,}2698;$$
$$C=-\frac{15\sqrt{3}-10}{46}\simeq -0{,}3474;$$
$$D=\frac{31\sqrt{3}-36}{46}\simeq 0{,}3846.$$

Рассмотрим евклидовы векторы:

$$(A,\,B,\,B)\simeq(-1;\ 0{,}2698;\ 0{,}2698);$$
$$(A,\,C,\,D)\cong(-1;\ -0{,}3474;\ 0{,}3846).$$

Нормируем эти два вектора, после чего получим соответственно:

$$(-0{,}9346;\ 0{,}2521;\ 0{,}2521),$$
$$(-0{,}8881;\ -0{,}3085;\ 0{,}3416).$$

Координаты каждого из двух этих векторов принимаем соответственно за направляющие косинусы двух прямых $O\widetilde{K}_1$ и $O\widetilde{L}_1$.

Уравнение прямой $O\widetilde{K}_1$ имеет вид:

$$\xi = -0{,}9346 \sin r,$$
$$\eta = 0{,}2521 \sin r,$$
$$\zeta = 0{,}2521 \sin r,$$
$$\omega = \cos r, \ r \text{ — параметр.}$$

Уравнение прямой $O\widetilde{L}_1$ имеет вид:

$$\xi = -0{,}8881 \sin r,$$
$$\eta = -0{,}3085 \sin r,$$
$$\zeta = 0{,}3416 \sin r,$$
$$\omega = \cos r.$$

Лучи $O\widetilde{K}_1$ и $O\widetilde{L}_1$ пересекут поверхность эквидистантного многогранника соответственно в точках:

$$K_1 (-a;\ 0{,}2697a;\ 0{,}2697a;\ \sqrt{1-1{,}145a^2}),$$
$$L_1 (-a;\ -0{,}3474a;\ 0{,}3846a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}),$$

причем точка L_1 лежит на ребре эквидистантного многогранника, что не трудно подтвердить соответствующими вычислениями.

Аналогично находим:

$$L_1' (-a;\ 0{,}3846a;\ -0{,}3474a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}),$$
$$K_2 (0{,}2697a;\ -a;\ 0{,}2697a;\ \sqrt{1-1{,}145a^2}),$$
$$L_2 (0{,}3846a;\ -a;\ -0{,}3474a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}),$$
$$L_2' (-0{,}3474a;\ -a;\ 0{,}3846a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}),$$
$$K_3 (-0{,}2697a;\ 0{,}2697a;\ -a;\ \sqrt{1-1{,}145a^2}),$$
$$L_3 (-0{,}3474a;\ 0{,}3846a;\ -a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}),$$
$$L_3' (0{,}3846a;\ -0{,}3474a;\ -a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}).$$

Середины криволинейных ребер BC, CA, AB обозначим соответственно через H_1, H_2, H_3; центр эквидистантного треугольника ABC обозначим через G:

$$H_1 (0;\ 0{,}866a;\ 0{,}866a;\ \sqrt{1-1{,}5a^2}),$$
$$H_2 (0{,}866a;\ 0;\ 0{,}866a;\ \sqrt{1-1{,}5a^2}),$$
$$H_3 (0{,}866a;\ 0{,}866a;\ 0;\ \sqrt{1-1{,}5a^2}),$$
$$G (0{,}577a;\ 0{,}577a;\ 0{,}577a;\ \sqrt{1-a^2}).$$

Середины дуг A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 обозначим соответственно через I_1, I_2, I_3:

$$I_1 (-a;\ 0{,}366a;\ 0{,}366a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}),$$
$$I_2 (0{,}366a;\ -a;\ 0{,}366a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}),$$
$$I_3 (0{,}366a;\ 0{,}366a;\ -a;\ \sqrt{1-1{,}268a^2}).$$

Многогранный угол $OK_1L_1'L_3K_3L_3'L_2K_2L_2'L_1$ высекает лежащую внутри него часть 11-гранника. Оставшуюся часть 11-гранника рассекаем плоскостями OK_1H_1, OK_2H_2, OK_3H_3 на три равные между собой части.

Указанный эквидистантный 11-гранник существует лишь если $\sqrt{1-3a^2}$ вещественно, т. е. при $d \leqslant 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 70°32'$.

Однако разбиение указанного 11-гранника на четыре части, аналогичное разбиению 11-гранника Гейла в пространстве R_3, не при всех $d < 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ дает разбиение F на четыре части диаметра, меньшего d, а лишь при $d < 60°$, ибо при $d \geqslant 60°$ диаметром каждой из трех равных между собой частей 11-гранника является, соответственно, отрезок $OA = OB = OC \geqslant d$ (ибо из неравенств $OA < d$; $\cos OA > \cos d$ получаем $\sqrt{1-3a^2} > 1-2a^2$, что выполняется лишь при $d < 60°$).

Итак, в трехмерном эллиптическом пространстве S_3 всякое тело F диаметра $d < 60°$ можно разбить на четыре части, диаметр каждой из которых меньше d.

Что касается решения проблемы Борсука в пространстве ${}^1S_3$, то использование описанной конструкции приводит к выкладкам (в вейерштрассовой системе координат), которые несущественно отличаются от изложенных выше. Различие заключается лишь в замене тригонометрических функций гиперболическими. При этом в случае пространства ${}^1S_3$ усеченный эквидистантный октаэдр параметра $\frac{d}{2}$ существует при любых значениях d и разбиение его на четыре части, по аналогии с разбиением в S_3 и R_3, определяет разбиение тела F на четыре части, диаметр каждой из которых меньше d.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, Физматгиз, М., 1965, стр. 20—34.

Поступила 7 июля 1970 года.

ПРОЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕГОЛОНОМНОСТИ МНОГООБРАЗИЯ V_n^{n-1}

М. Р. Роговой

Харьков

1. Пусть V_n^{n-1} — неголономное многообразие с образующим элементом $(M_0\mu)$ в P_n, отнесенное к реперу $R(M_i)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, где μ — плоскость, инцидентная точке M_0, а $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ — точки в плоскости μ.

Уравнения инфинитезимального преобразования репера

$$dM_i = \omega_i^k M_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

формы

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega_0^j \quad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \; j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства.

Условия полной интегрируемости уравнения

$$\omega_0^n = 0 \tag{3}$$

не выполняются:

$$\Gamma_{ij}^n \neq \Gamma_{ji}^n, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1); \tag{4}$$

уравнение (3) определяет V_n^{n-1}.

В плоскости μ могут быть выделены $n-1$ инвариантных прямых, определяемых системой однородных уравнений [4]:

$$(\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n \lambda)\,\omega_0^j = 0, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5}$$

с определителем

$$\left| \Gamma^n_{ij} + \Gamma^n_{ji} \lambda \right|^{n-1}_{i,j=1} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет $n-1$ корней λ_k, которые в общем случае предполагаются различными. Если выбрать точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на этих инвариантных прямых, получаем следующие условия [4]:

$$\Gamma^n_{ij} = 0, \ (i, \ j = 1, \ 2, \ldots, \ n-1; \ i + j \neq n), \tag{7}$$

$$\lambda_k = -\frac{\Gamma^n_{k,\, n-k}}{\Gamma^n_{n-k,\, n}}, \quad (k = 1, \ 2, \ldots, \ n-1). \tag{8}$$

2. Величины λ_k — проективные инварианты. Установим их геометрический смысл, распространив известное построение Бомпиани для случая V^2_3 в P_3 [2].

С этой целью рассмотрим соответствие между одномерными направлениями

$$\omega^1_0(\delta) : \omega^2_0(\delta) : \ldots : \omega^{n-1}_0(\delta) \tag{9}$$

на V^{n-1}_n и сопряженными им $(n-2)$-направлениями

$$\Gamma^n_{n-k,\, k}\omega^{n-k}_0(\delta)\, x^k = 0, \quad (k = 1, \ 2, \ldots, \ n-1), \tag{10}$$

где x^k — координаты относительно канонического репера [5].

Это соответствие индуцирует в инвариантной двумерной плоскости $(M_0M_kM_{n-k})$ соответствие сопряженности между одномерными направлениями, которое получим, если в (9) и (10) положить все $\omega^j_0 = 0$, кроме ω^k_0 и ω^{n-k}_0, направлению

$$\omega^{n-k}_0(\delta)\, x^k - \omega^k_0(\delta)\, x^{n-k} = 0, \quad x^j = 0\, (j \neq k, \ n-k), \tag{9'}$$

соответствует сопряженное направление

$$\Gamma^n_{n-k,\, k}\omega^{n-k}_0(\delta)\, x^k + \Gamma^n_{k,\, n-k}\omega^k_0(\delta) x^{n-k} = 0, \quad x^j = 0\, (j \neq k, \ n-k), \tag{10'}$$

(по индексу k в (9′) и (10′) не суммируется).

Формулы (9′) и (10′) определяют проективное соответствие в пучке направлений V^{n-1}_n, принадлежащих двумерной плоскости $(M_0M_kM_{n-k})$. Прямые (M_0M_k) и (M_0M_{n-k}) — двойные элементы этого соответствия (это инвариантные асимптотические направления на V^{n-1}_n [4]). Абсолютный проективный инвариант этого соответствия — ангармоническое отношение пары асимптотических направлений (M_0M_k), (M_0M_{n-k}) и произвольной пары соответствующих направлений

$$\omega^k_0(\delta)\, (M_0M_k) + \omega^{n-k}_0(\delta)\, (M_0M_{n-k}), \tag{9'}$$

$$\Gamma^n_{k,\, n-k}\omega^k_0(\delta)\, (M_0M_k) + \Gamma^n_{n-k,\, k}\omega^{n-k}_0(\delta)\, (M_0M_{n-k}), \tag{10'}$$

равен

$$\lambda_k = -\frac{\Gamma^n_{k,\, n-k}}{\Gamma^n_{n-k,\, k}}. \tag{11}$$

Так как $\lambda_k \cdot \lambda_{n-k} = 1$, то имеем $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ независимых проективных инвариантов (11) при $k = 1, \ 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$; они и представляют собой проективные характеристики неголономности для V^{n-1}_n.

Для голономной гиперповерхности канонический репер исчезает и построение теряет смысл; все λ_k принимают значение -1.

3. Можно получить другие проективные характеристики неголономности, обобщив известное построение Я. П. Бланка для случая V_3^2 в P_3 [1].

С этой целью рассмотрим инвариантные асимптотические касательные (M_0M_k), (M_0M_{n-k}). Переместимся по V_n^{n-1} в бесконечно близкую к точке M_0 точку M_0^* в каком-нибудь направлении, принадлежащем двумерной плоскости $(M_0M_kM_{n-k})$. Для асимптотических касательных в точке M_0^*, с точностью до бесконечно малых 3-го порядка, имеем:

$$(M_0^*M_k^*) = (M_0M_k) + d\,(M_0M_k) + \frac{1}{2}\,d^2\,(M_0M_k) = \sum_{i<j=1}^{n} a_{ij}\,(M_iM_j), \quad (12)$$

$$(M_0^*M_{n-k}^*) = (M_0M_{n-k}) + d\,(M_0M_{n-k}) + \frac{1}{2}\,d^2\,(M_0M_{n-k}) = \sum_{i<j=1}^{n} b_{ij}\,(M_iM_j), \quad (13)$$

где интересующие нас коэффициенты a_{kn}, $a_{n-k,\,n}$, b_{kn}, $b_{n-k,\,n}$ имеют следующие значения:

$$\begin{gathered} a_{kn} = \frac{1}{2}\left(\omega_k^n\omega_0^k - \omega_{n-k}^n\omega_0^{n-k}\right), \\ a_{n-k,\,n} = \omega_k^n\omega_0^{n-k}, \\ b_{kn} = \omega_{n-k}^n\omega_0^k, \\ b_{n-k,\,n} = \frac{1}{2}\left(\omega_{n-k}^n\omega_0^{n-k} - \omega_k^n\omega_0^k\right). \end{gathered} \quad (14)$$

Пусть $A\,(x_A^1,\ x_A^2, \ldots,\ x_A^{n-1},\ 0)$ и $B\,(x_B^1,\ x_B^2, \ldots,\ x_B^{n-1},\ 0)$ — точки пересечения прямых (12) и (13) с плоскостью $\mu\,(x^n = 0)$.

С помощью $(n-2)$-плоскостей

$$(M_0,\ M_1, \ldots,\ M_{k-1},\ M_{k+1}, \ldots,\ M_{n-k-1},\ M_{n-k+1}, \ldots,\ M_{n-1},\ A)$$

и

$$(M_0,\ M_1, \ldots,\ M_{k-1},\ M_{k+1}, \ldots,\ M_{n-k-1},\ M_{n-k+1}, \ldots,\ M_{n-1},\ B)$$

спроектируем прямые (M_0A) и (M_0B) на двумерную плоскость $(M_0M_kM_{n-k})$, получим следующие проекции:

$$\begin{gathered} x_A^k\,(M_0M_k) + x_A^{n-k}\,(M_0M_{n-k}), \\ x_B^k\,(M_0M_k) + x_B^{n-k}\,(M_0M_{n-k}). \end{gathered} \quad (15)$$

Из (12) и (13) находим

$$\begin{gathered} x_A^k = -\,a_{0k}, \\ x_A^{n-k} = -\,a_{0k}\,\frac{a_{n-k,\,n}}{a_{kn}}, \\ x_B^k = b_{0k}, \\ x_B^{n-k} = -\,b_{0k}\,\frac{b_{n-k,\,n}}{b_{k,\,n}}. \end{gathered} \quad (16)$$

Рассмотрим ангармоническое отношение четырех прямых: (M_0M_k), (M_0M_{n-k}) и двух прямых (15); оно равно

$$\Lambda_k = \frac{x_B^{n-k}}{x_B^k}\cdot\frac{x_A^k}{x_A^{n-k}} = \frac{b_{n-k,\,n}}{b_{kn}}\cdot\frac{a_{kn}}{a_{n-k,\,n}},$$

или, воспользовавшись (14),

$$\Lambda_k = -\,\frac{\left(\omega_k^n\omega_0^k - \omega_{n-k}^n\omega_0^{n-k}\right)^2}{4\omega_k^n\omega_{n-k}^n\omega_0^k\omega_0^{n-k}}. \quad (17)$$

Учитывая, что перемещение из точки M_0 в точку M_0^* происходит в направлении, принадлежащем двумерной плоскости $(M_0M_kM_{n-k})$, и принимая во внимание условия (7), имеем:

$$\omega_k^n = \Gamma_{k,\,n-k}^n \omega_0^{n-k}, \qquad \omega_{n-k}^n = \Gamma_{n-k,\,k}^n \omega_0^k \tag{18}$$

здесь по индексу k не суммируется).

Подставляя (18) в (17), получаем

$$\Lambda_k = -\frac{(\Gamma_{k,\,n-k}^n - \Gamma_{n-k,\,k}^n)^2}{4\Gamma_{k,\,n-k}^n \Gamma_{n-k,\,k}^n}. \tag{19}$$

Таким образом, величина Λ_k не зависит от выбранного в двумерной плоскости $(M_0M_kM_{n-k})$ направления перемещения из точки M_0 в точку M_0^*. Из самого построения следует, что величина Λ_k — проективный инвариант. Имеем $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ проективных инвариантов при $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Они также могут служить проективными характеристиками неголономности многообразия V_n^{n-1}; для голономной поверхности все $\Lambda_k = 0$.

Из (11) и (19) получаем следующее соотношение между проективными характеристиками неголономности Λ_k и λ_k

$$\Lambda_k = \frac{(\lambda_k + 1)^2}{4\lambda_k}. \tag{20}$$

4. Для неголономного многообразия V_3^2 в P_3 проективную характеристику неголономности, как абсолютный проективный инвариант соответствия сопряженности в пучке направлений, ввел в 1938 г. Бомпиани [2].

Эта проективная характеристика неголономности в каноническом репере приобретает вид [3]:

$$\lambda = -\frac{\Gamma_{12}^3}{\Gamma_{21}^3}. \tag{21}$$

Для голономной поверхности $\lambda = -1$ и соответствие между сопряженными направлениями в пучке касательных к поверхности становится инволюционным.

Еще раньше, в 1936 году, другую проективную характеристику неголономности поверхности получил Я. П. Бланк [1], распространив на неголономную поверхность известное построение А. Террачини: асимптотические касательные в двух бесконечно близких точках на V_3^2 встречают прямую пересечения соответствующих этим точкам плоскостей в четырех точках; ангармоническое отношение этих точек не зависит от направления перемещения по V_3^2 и равно конечной величине. Эта величина и представляет собой проективную характеристику неголономности для V_3^2; в каноническом репере она имеет следующее значение [3]:

$$\Lambda = -\frac{(\Gamma_{12}^3 - \Gamma_{21}^3)^2}{4\Gamma_{12}^3\Gamma_{21}^3}. \tag{22}$$

Для голономной поверхности $\Lambda = 0$ и рассматриваемое построение, как известно, дает проективный линейный элемент поверхности.

Из (21) и (22) следует, что между проективной характеристикой неголономности Λ, полученной Я. П. Бланком, и проективной характеристикой неголономности λ, введенной Е. Бомпиани, имеет место следующее соотношение:

$$\Lambda = \frac{(\lambda + 1)^2}{4\lambda}. \qquad (23)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк. Про геометричний зміст умови інтегрувальності пфаффового диференціального рівняння. Записки н.-д. інст. матем. й мех. та Харк. матем. т-ва, серія 4, т. XIII, вип. I, 1936, стр. 85—81.

2. E. Bompiani. Sulle varietà anolonome, Rend. dei Lincei, v. XXVII, F. 6, 1938.

3. М. Р. Роговой. К проективно-дифференциальной геометрии неголономных поверхностей в трехмерном пространстве. «Укр. матем. ж.», том II, № 2, 1950, стр. 102—116.

4. М. Р. Роговой. К проективно-дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности. «Укр. геом. сб.», вып. 8, 1970, стр. 112—120.

5. М. Р. Роговой. О сопряженных направлениях на неголономном многообразии V_n^{n-1} в P_n. «Укр. геом. сб.», вып. 10, 1971, стр. 50-65.

Поступила 13 апреля 1970 г.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АФФИННОСВЯЗНЫХ И РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. II

Н. С. Синюков

(Одесса)

Данная работа является продолжением нашей предыдущей статьи [1]. Однако здесь вводится самостоятельная нумерация параграфов, формул и теорем. При ссылке на какую-либо формулу из [1] при номере ее внизу добавляется индекс «I».

Здесь мы изучаем бесконечно малые почти геодезические преобразования третьего типа [1]: находим точную оценку сверху степени подвижности произвольного риманова пространства V_n относительно $\Pi_3(\xi)$, а также пространства первой (максимальной) и второй подвижности.

1. Бесконечно малые почти геодезические преобразования третьего типа $\Pi_3(\xi)$ римановых пространств

В этом параграфе мы исследуем вопрос о степени подвижности произвольного риманова пространства $V_n (n > 2)$ относительно бесконечно малых почти геодезических преобразований третьего типа $\Pi_3(\xi)$.

Основные уравнения $\Pi_3(\xi)$ из $(13)_{\mathrm{I}}$, $(19)_{\mathrm{I}}$ и $(20)_{\mathrm{I}}$ мы получаем в форме

$$\xi^h_{,i} = \eta^h_i, \tag{1}$$

$$\eta^h_{i,j} = -\xi^\alpha R^h_{.i\alpha j} + \varphi_i\delta^h_j + \varphi_j\delta^h_i + \psi_{ij}\mu^h, \tag{2}$$

$$\mu^h_{,i} = \rho\delta^h_i + \nu_i\mu^h. \tag{3}$$

1. Предполагая вектор μ^h неизотропным, не нарушая общности рассуждений, мы можем считать, что

$$\mu^\alpha\mu_\alpha = e\,(=\pm 1). \tag{4}$$

Уравнения (3) при этом примут вид

$$\mu^h_{,i} = \rho\,(\delta^h_i - e\mu^h\mu_i). \tag{5}$$

Условия интегрируемости (5) таковы:

$$\mu^\alpha R_{\alpha hij} = \sigma_j (g_{hi} - e\mu_h\mu_i) - \sigma_i (g_{hj} - e\mu_h\mu_j), \tag{6}$$

$$\sigma_j = \rho_j + e\rho^2\mu_j \quad (\rho_j = \rho_{,j}). \tag{7}$$

Свертывание (6) по h, i дает нам

$$\mu^\alpha R_{\alpha j} = (n-2)\,\sigma_j + e\mu^\alpha\sigma_\alpha\mu_j, \tag{8}$$

откуда в свою очередь после свертывания с μ^j находим, что

$$\mu^\alpha\mu^\beta R_{\alpha\beta} = (n-1)\mu^\alpha\sigma_\alpha. \tag{9}$$

Из (8) на основании (7) и (9) следует:

$$(n-2)\,\rho_j = \mu^\alpha R_{\alpha j} - (n-2)\,e\rho^2\mu_j - \frac{e}{n-1}\,\mu^\alpha\mu^\beta R_{\alpha\beta}\mu_j. \tag{10}$$

Введем теперь инвариант

$$f = \mu^\alpha\xi_\alpha. \tag{11}$$

Дифференцируя (11) и учитывая (5), получаем

$$f_{,j} = \rho\,(\xi_j - ef\mu_j) + \mu^\alpha\xi_{\alpha,j}. \tag{12}$$

Дальнейшее дифференцирование (12) и использование соотношений (2), (5), (6) и (10) приводит нас к следующему выражению тензора ψ_{ij} через инварианты f и ρ, векторы φ_i, ξ_j, μ_k и объекты V_n:

$$e\psi_{ik} = f_{,jk} - \rho\tilde{\eta}_{jk} + e\rho\,(\mu_j f_k + \mu_k f_j) - \rho_\alpha\xi^\alpha (g_{jk} - e\mu_j\mu_k) - \varphi_j\mu_k - \varphi_k\mu_j. \tag{13}$$

Здесь

$$\tilde{\eta}_{ij} = \eta_{ij} + \eta_{ji}, \quad \eta_{ij} = \eta^\alpha_{i}g_{\alpha j}.$$

2. Условия интегрируемости уравнений (2) вследствие (1) и (3) будут таковы:

$$T^h_{ijk} = \varphi_{ij}\delta^h_k - \varphi_{ik}\delta^h_j - \varphi_{[jk]}\delta^h_i - \mu^h\psi_{ijk}, \tag{14}$$

где T^h_{ijk} дан в $(24)_1$, а

$$\varphi_{ij} = \varphi_{i,j} - \rho\psi_{ij}, \tag{15}$$

$$\psi_{ijk} = \psi_{ij,k} - \psi_{ik,j} - e\rho\psi_{ij}\mu_k + e\rho\psi_{ik}\mu_j.$$

Таким образом, имеет место следующая

Лемма. *В римановом пространстве $V_n\,(n>2)$ при неизотропном векторе μ^h из (14) для φ_{ij} и ψ_{ijk} вытекают следующие представления:*

$$e\psi_{ijk} = -\mu_\alpha T^\alpha_{ijk} + \varphi_{ij}\mu_k - \varphi_{ik}\mu_j - \varphi_{[jk]}\mu_i,$$

$$(n-2)\,\varphi_{ij} = T^\alpha_{ij\alpha} - e\mu_\alpha\mu^\beta T^\alpha_{ij\beta} + \frac{1}{n}\Big\{-T^\alpha_{\alpha ji} + e\mu_\alpha\mu^\beta T^\alpha_{\beta ji} -$$

$$-\mu_j\,(e\mu^\beta T^\alpha_{i\beta\alpha} - \mu_\alpha\mu^\beta\mu^\gamma T^\alpha_{i\beta\gamma}) + e\mu_i\,[\mu^\beta T^\alpha_{\alpha j\beta} - e\mu_\alpha\mu^\beta\mu^\gamma T^\alpha_{\beta j\gamma} -$$

$$-\frac{e}{n-1}\,\mu_j\,(\mu^\beta\mu^\gamma T^\alpha_{\beta\gamma\alpha} - e\mu_\alpha\mu^\beta\mu^\gamma\mu^\delta T^\alpha_{\beta\gamma\delta})]\Big\}. \tag{16}$$

Доказательство этой леммы мы приводим в конце данной статьи.

Однако, как видно из $(24)_1$ и (15), мы имеем:

$$T^h_{ijk} + T^h_{ikj} \equiv 0, \quad T^h_{(ijk)} \equiv 0, \quad T^\alpha_{\alpha jk} \equiv 0,$$

$$\psi_{ijk} + \psi_{ikj} \equiv 0, \quad \psi_{(ijk)} \equiv 0.$$

Поэтому представление ψ_{ijk} и φ_{ij} из (14) на основании леммы по формулам (16) мы получим таким:

$$e\psi_{ijk} = \mu_\alpha T^\alpha_{ijk} + \varphi_{ij}\mu_k - \varphi_{ik}\mu_j - \varphi_{[jk]}\mu_i, \tag{16*}$$

$$(n-2)\,\varphi_{ij} = T^\alpha_{ij\alpha} - e\mu_\alpha\mu^\beta T^\alpha_{ij\beta} + \frac{1}{n}\,(e\mu_\alpha\mu^\beta T^\alpha_{\cdot\beta ji} -$$

$$- \mu_i\mu_\alpha\mu^\beta\mu^\gamma T^\alpha_{\cdot\beta j\gamma} - e\mu^\beta T^\alpha_{i\beta\alpha}\mu_j + \frac{-1}{n-1}\,\mu_i\mu_j\mu^\beta\mu^\gamma T^\alpha{}_{\beta\gamma\alpha}).$$

В соответствии с $(24)_1$ здесь мы имеем представление φ_{ij} и ψ_{ijk} в форме линейных однородных функций ξ^h и η^h_i с коэффициентами, зависящими от пространства V_n и вектора μ^h. Имея в виду это обстоятельство, а также (13), из (15) мы находим уравнение для φ_i

$$\varphi_{i,\,j} = \varphi_{ij} + \rho\psi_{ij}, \tag{15*}$$

которое вместе с (1) и (2) дает нам систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в разрешенной форме относительно ξ^h, η^h_i и φ_j, коэффициенты которой однозначно определяются пространством V_n, вектором μ^h, удовлетворяющим условиям (5), и инвариантом $f(x)$. Если последние заданы, то решение ее в случае существования однозначно определяется начальными значениями

$$\xi^h\big|_0,\ \eta^h_i\big|_0,\ \varphi_j\big|_0. \tag{17}$$

Однако они по необходимости должны удовлетворять возникающим из (11) и (12) условиям

$$f_{,\,j} = \rho\,(\xi_j - e\mu^\alpha\xi_\alpha\mu_j) + \mu^\alpha\xi_{\alpha,\,j}. \tag{18}$$

В результате мы приходим к теореме.

Теорема 1. *Каждое риманово пространство V_n при заданном в нем векторе μ^h, удовлетворяющем условиям* (4), (5), *допускает совокупность бесконечно малых почти геодезических преобразований $\Pi_3(\xi)$ с произволом не более одной функции $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и N_3 существенных параметров, где*

$$N_3 = n\,(n+1). \tag{19}$$

3. Не трудно обнаружить, что функциональный произвол, указанный в этой теореме, является существенным. В самом деле, пусть в пространстве V_n существует вектор μ^h, удовлетворяющий условиям (4), (5). Возьмем тогда вектор

$$\xi^h = a\mu^h \tag{20}$$

и посмотрим, при каких условиях он будет удовлетворять уравнениям (1) и (2).

Из (20) дифференцированием на основании $(\overset{*}{5})$ находим, что

$$\xi^h_{,\,i} = \eta^h_i = a_i\mu^h + a\rho\,(\delta^h_i - e\mu^h\mu_i). \tag{21}$$

Определяя отсюда дальнейшим дифференцированием $\eta^h_{i,\,j}$ и требуя, чтобы они и ξ^h, определенные по (20), удовлетворяли уравнениям (2), на основании (6) приходим к условию $\sigma_j = \Theta\mu_j$, что по (7) эквивалентно требованию

$$\rho = \rho(\mu), \tag{22}$$

поскольку μ_i — градиентен. Этого и достаточно.

Таким образом, каждое V_n, в котором существует вектор μ^h, удовлетворяющий условиям (4), (5), (22), допускает совокупность бесконечно малых почти геодезических преобразований третьего типа $\Pi_3(\xi)$, зависящую от одной произвольной функции $a(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Таковыми являются эквидистантные пространства [2].

2. Римановы пространства первой подвижности относительно бесконечно малых почти геодезических преобразований третьего типа $\Pi_3(\xi)$

Постараемся теперь выяснить вопрос о том, какие римановы пространства имеют в геометрическом отношении наибольшую подвижность относительно бесконечно малых почти геодезических преобразований третьего типа. Из уравнений (1) и (2) видно, что таковыми должны быть V_n, для которых при некоторых μ^h, φ_i и ψ_{ij} эти уравнения имеют решение, соответствующее любым начальным значениям $\xi^h|_0$, $\eta_i^h|_0$, а для этого необходимо, чтобы условия их интегрируемости выполнялись тождественно относительно ξ^h и η_i^h.

Требованием подобного рода, как и раньше, мы и выделим пространства первой подвижности.

Определение 1. *V_n называется пространством первой подвижности по отношению к бесконечно малым почти геодезическим преобразованиям $\Pi_3(\xi)$, если первые из существенных условий интегрируемости их основных уравнений (1), (2) и (3) выполняются тождественно относительно ξ^h и η_i^h (при некоторых μ^h, φ_i, ψ_{ij}).*

Условия интегрируемости уравнений (1) выполняются тождественно вследствие (2). Условия же интегрируемости уравнений (2) мы имеем в (14). Из них вытекают (16), представляющие собою на основании (15) дифференциальные уравнения для φ_i и ψ_{ij}, которые мы присоединяем к (1), (2) и (3). Соотношения же (14) после замены в них φ_{ij} и ψ_{ijk} согласно (16) будут представлять собою условия интегрируемости уравнений (2) указанной расширенной системы дифференциальных уравнений. Они и есть первые из существенных условий ее интегрируемости. Требованием тождественного их выполнения относительно ξ^h и η_i^h мы и выделяем пространства первой подвижности относительно $\Pi_3(\xi)$.

Согласно $(24)_1$ компоненты тензора T^h_{ijk} являются линейными однородными функциями от ξ^h и η_i^h

$$T^h_{ijk} = \underset{1}{T}{}^h_{ijk}(\xi) + \underset{2}{T}{}^h_{ijk}(\eta), \tag{23}$$

$$\underset{1}{T}{}^h_{ijk} = \xi^\alpha R^h_{.ijk,\alpha}, \tag{24}$$

$$\underset{2}{T}{}^h_{ijk} = \eta_i^\alpha R^h_{.\alpha jk} - \eta_\alpha^h R^\alpha_{.ijk} - \eta_k^\alpha R^h_{.i\alpha j} + \eta_j^\alpha R^h_{.i\alpha k}. \tag{25}$$

Таким же будет характер зависимости от ξ^h, η_i^h и φ_{ij}, ψ_{ijk}, которые мы получаем из (16):

$$\varphi_{ij} = \underset{1}{\varphi}_{ij}(\xi) + \underset{2}{\varphi}_{ij}(\eta), \tag{26}$$

$$\psi_{ijk} = \underset{1}{\psi}_{ijk}(\xi) + \underset{2}{\psi}_{ijk}(\eta),$$

причем $\underset{1}{\psi}_{ijk}$ и $\underset{1}{\varphi}_{ij}$ будут выражаться через $\underset{1}{T}{}^h_{ijk}$, а $\underset{2}{\psi}_{ijk}$ и $\underset{2}{\varphi}_{ij}$ — через $\underset{2}{T}{}^h_{ijk}$ по формулам (16). Требование тождественного выполнения (14) вследствие (16) относительно ξ^h и η_i^h приводит нас поэтому к условиям:

$$\underset{1}{T}{}^h_{ijk} = \underset{1}{\varphi}_{ij}\delta^h_k - \underset{1}{\varphi}_{ik}\delta^h_j - \underset{1}{\varphi}_{[jk]}\delta^h_i - \mu^h\underset{1}{\psi}_{ijk}, \tag{27}$$

$$\underset{2}{T}{}^h_{ijk} = \underset{2}{\varphi}_{ij}\delta^h_k - \underset{2}{\varphi}_{ik}\delta^h_j - \underset{2}{\varphi}_{[jk]}\delta^h_i - \mu^h\underset{2}{\psi}_{ijk}. \tag{28}$$

Первые из них должны иметь тождественный характер относительно ξ^h, а вторые — относительно η_i^h.

Рассмотрим сначала (28). Так как они должны выполняться тождественно, т. е. при любых значениях η_i^h, мы можем взять в них $\eta_i^h = \delta_i^h$. На основании (25) при этом из (28) будем иметь

$$\begin{gathered} R^h_{.ijk} = \frac{e}{n}\ \delta_i^h(\sigma_j\mu_k - \sigma_k\mu_j) - \frac{1}{n-2}\Big\{\delta_k^h\Big[\tilde{\sigma}g_{ij} - R_{ij} + \\ + \frac{n-2}{n}e\mu_j\left(\sigma_i - \tilde{\sigma}\mu_i\right)\Big] - \delta_j^h\Big[\tilde{\sigma}g_{ik} - R_{ik} + \frac{n-2}{n}e\mu_k\left(\sigma_i - \tilde{\sigma}\mu_i\right)\Big]\Big\} + \\ + e\mu^h\Big\{\Big(\sigma_k + \frac{1}{n-2}\tilde{\sigma}\mu_k\Big)g_{ij} - \Big(\sigma_j + \frac{1}{n-2}\tilde{\sigma}\mu_j\Big)g_{ik} + \\ + \frac{n-1}{n}e\mu_i(\mu_k\sigma_j - \mu_j\sigma_k) - \frac{1}{n-2}(\mu_k R_{ij} - \mu_j R_{ik})\Big\} \quad \left(\tilde{\sigma} = e\sigma_\alpha\mu^\alpha\right), \end{gathered} \tag{29}$$

если использовать также (6) и (8).

Если свернем (29) с g^{ij}, опустим h и проальтернируем по h, k, то получим $\sigma_h = \tilde{\sigma}\mu^h$ или по (7) $\rho_h = \rho'\mu^h$, а так как ρ_h и μ_h градиентны, то это значит, что

$$\rho = \rho(\mu), \ \rho_h = \rho'\mu_h, \ \rho' = \frac{d\rho}{d\mu}, \tag{30}$$

а тогда по (7)

$$\sigma_i = (\rho' + e\rho^2)\,\mu_i, \ \tilde{\sigma} = \rho' + e\rho^2 \tag{31}$$

и мы будем иметь

$$R_{hk} = ag_{hk} + b\mu_h\mu_k. \tag{32}$$

Вследствие (30), (31) и (32) условия (29) принимают вид

$$\begin{gathered} R_{hijk} = P(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + Q\,(g_{hk}\mu_i\mu_j - g_{hj}\mu_i\mu_k + \\ + g_{ij}\mu_h\mu_k - g_{ik}\mu_h\mu_j), \end{gathered} \tag{33}$$

где P и Q некоторые инварианты.

Вычислив для этого тензора Римана по (25) $\underset{2}{T}{}^h_{ijk}$, для них по (16) $\underset{2}{\varphi}{}_{ij}$ и $\underset{2}{\psi}{}_{ijk}$, а затем подставив и те и другие в (28), видим, что члены, содержащие P, исключаются, и что полученное соотношение тождественно относительно η_i^h может выполняться только при $Q \equiv 0$ $(n > 2)$. Но тогда (33) показывает, что мы имеем пространство постоянной кривизны. Для него (24) дает $\underset{1}{T}{}^h_{ijk} \equiv 0$, а значит $\underset{1}{\varphi}{}_{ij} = \underset{1}{\psi}{}_{ijk} \equiv 0$ и (27) имеют место. Следовательно, верна

Теорема 2. *Пространства V_h постоянной кривизны и только они имеют первую подвижность относительно бесконечно малых почти геодезических преобразований третьего типа* $\Pi_3(\xi)$.

2. Для того чтобы установить степень подвижности V_n постоянной кривизны относительно $\Pi_3(\xi)$, рассмотрим их основные уравнения. Так как тензор Римана теперь выражается формулой $(39)_{\mathrm{I}}$, из (10) мы имеем (30), причем

$$\rho' + e\rho^2 = -K, \tag{34}$$

а также $(41)_{\mathrm{I}}$ из $(24)_{\mathrm{I}}$. Вследствие этого условия (14) дают нам

$$\varphi_{ik} + K\tilde{\eta}_{ik} = 0, \ \psi_{ijk} = 0. \tag{35}$$

Поэтому первые из соотношений (15) приводят к

$$\rho\psi_{ik} = \varphi_{i,k} + \tilde{K}\gamma_{ik}, \tag{36}$$

причем $\varphi_{i,k} - \varphi_{k,i} \equiv 0$, т. е. φ_i — градиент.

При $\rho \neq 0$ из (36) на основании (2), (30) и (34) следует, что вторые из условий (35) выполняются тождественно. Итак, для V_n постоянной кривизны при $\rho \neq 0$ ψ_{ik} определяется по необходимости формулой (36), в которой φ_i некоторый градиентный вектор, и условия интегрируемости уравнений (2) будут тождественно выполнены.

Тем самым имеет место

Теорема 3. *Риманово пространство постоянной кривизны $V_n (n > 2)$ для каждого вектора μ^h, удовлетворяющего условиям* (5) *при $\rho \neq 0$, допускает совокупность бесконечно малых почти геодезических преобразований третьего типа $\Pi_3(\xi)$, зависящую от одной произвольной функции $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и N_3* (см. (19)) *параметров.*

Когда $\rho = 0$, из (34) следует, что $K \equiv 0$, из (36) и (35), учитывая (15), что

$$\varphi_{i,k} = 0, \quad \psi_{ij,k} - \psi_{ik,j} = 0.$$

При этих условиях система (1), (2) также будет вполне интегрируемой.

Наконец, отметим, что в пространстве постоянной кривизны K при (30) и (34), уравнения (5) вполне интегрируемы, а (4) достаточно иметь только для начальных значений, т. е. уравнения (5) имеют решение, содержащее n независимых параметров.

3. Пространства второй подвижности относительно бесконечно малых почти геодезических преобразований третьего типа $\Pi_3(\xi)$

В предыдущем параграфе мы сначала обнаружили, что пространства первой подвижности по необходимости имеют структуру (33) тензора Римана, а затем убедились в том, что для последних только при $Q \equiv 0$ фактически реализуется первая подвижность. В соответствии с этим естественно поинтересоваться степенью подвижности римановых пространств, структура тензора кривизны которых дается формулой (33). Их мы будем называть пространствами *второй подвижности.*

Из (33) для тензора Риччи пространств V_n второй подвижности мы получаем выражение

$$R_{ij} = ag_{ij} + b\mu_i\mu_j, \tag{37}$$
$$a = (n-1)P + eQ, \quad b = (n-2)Q.$$

Поэтому μ^n является собственным вектором тензора Риччи, а это на основании (7) и (8) значит, что

$$\rho = \rho(\mu), \quad \rho' + e\rho^2 = P + eQ, \quad \left(\rho' = \frac{d\rho}{d\mu}\right). \tag{38}$$

Наконец, из тождества Бианки, (33) и уравнений (5) следует, что

$$P = P(\mu), \quad Q = Q(\mu) \text{ и } P' = 2\rho Q. \tag{39}$$

Соотношения (33), (5) и (38), (39) показывают, что V_n второй подвижности являются субпроективными пространствами основного случая [3, стр. 180].

Вследствие (33), (6) и (38) условия (14) принимают вид

$$-\lambda^h(g_{ij}\mu_k - g_{ik}\mu_j) = \dot{\varphi}_{ij}\delta_k^h - \dot{\varphi}_{ik}\delta_j^h - \dot{\varphi}_{[ik]}\delta_i^h - \mu^h\dot{\psi}_{ijk}, \tag{40}$$

где мы полагаем:

$$\lambda^h = Q\left(\eta^{h}_{\cdot\,\alpha}\mu^\alpha - \rho\xi^h\right), \tag{41}$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_{ik} = \varphi_{ik} - P\tilde{\eta}_{ik} - P' g_{ik}\xi_\alpha\mu^\alpha - \rho Q\left(\xi_i\mu_k + \xi_k\mu_i\right) - \\ - Q\left(\eta_{\alpha i}\mu^\alpha\mu_k + \eta_{\alpha k}\mu^\alpha\mu_i\right) - \left(Q' - 2\rho Q e\right)\xi_\alpha\mu^\alpha\mu_i\mu_k, \tag{42}$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{ijk} = \psi_{ijk} + Q\Big[\tilde{\eta}_{ij}\mu_k - \tilde{\eta}_{ik}\mu_i + g_{ij}\eta_{\alpha k}\mu^\alpha - g_{ik}\eta_{\alpha j}\mu^\alpha + \\ + \rho\left(g_{ij}\xi_k - g_{ik}\xi_j\right) + \frac{Q' - 2\rho Q e}{Q}\xi_\alpha\mu^\alpha\left(g_{ij}\mu_k - g_{ik}\mu_j\right)\Big]. \tag{43}$$

На основании леммы в разделе I из (40) находим, что

$$\overset{\circ}{\varphi}_{ij} = \frac{1}{n}\mu_j\left(\lambda_i - e\mu_\alpha\lambda^\alpha\mu_i\right),$$

$$e\overset{\circ}{\psi}_{ijk} = \mu_\alpha\lambda^\alpha\left(g_{ij}\mu_k - g_{ik}\mu_j\right) - \frac{1}{n}\mu_i\left(\mu_k\lambda_i - \mu_j\lambda_k\right). \tag{44}$$

Поэтому свертывание (40) с g^{ij} и последующая альтернация их по h, k (после опускания h) приводит нас к условию

$$\lambda_h = e\mu_\alpha\lambda^\alpha\mu_h. \tag{45}$$

Вследствие (45) из (44) мы имеем

$$\overset{\circ}{\varphi}_{ij} \equiv 0, \quad e\overset{\circ}{\psi}_{ijk} = \mu_\alpha\lambda^\alpha\left(g_{ij}\mu_k - g_{ik}\mu_j\right) \tag{44'}$$

и (40) будут выполнены. Далее, (41) и (45) дают нам

$$\overset{h}{\eta_\alpha}\mu^\alpha - \rho\xi^h = \lambda\mu^h, \tag{46}$$

где λ инвариант и находится он отсюда

$$e\lambda = \eta_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta - \rho\xi_\alpha\mu^\alpha. \tag{47}$$

Условия же (44') в соответствии с (44) и (15) приводят нас к

$$\rho\psi_{ik} = \varphi_{i,\,k} - P\tilde{\eta}_{ik} - \xi_\alpha\mu^\alpha\left[P' g_{ik} + \left(Q' - 2\rho Q e\right)\mu_i\mu_k\right] - \\ - Q\left[\eta_{\alpha i}\mu^\alpha\mu_k + \eta_{\alpha k}\mu^\alpha\mu_i + \rho\left(\xi_i\mu_k + \xi_k\mu_i\right)\right], \tag{48}$$

$$\psi_{ij,\,k} - \psi_{ik,\,j} - e\rho\psi_{ij}\mu_k + e\rho\psi_{ik}\mu_j = Q\Big[\lambda\left(g_{ij}\mu_k - g_{ik}\mu_j\right) - \\ - \tilde{\eta}_{ij}\mu_k + \tilde{\eta}_{ik}\mu_j - g_{ij}\eta_{\alpha k}\mu^\alpha + g_{ik}\eta_{\alpha j}\mu^\alpha - \rho\left(g_{ij}\xi_k - g_{ik}\xi_j\right) - \frac{Q' - 2\rho Q e}{Q}\times \\ \times\xi_\alpha\mu^\alpha\left(g_{ij}\mu_k - g_{ik}\mu_j\right)\Big]. \tag{49}$$

Поскольку ψ_{ik} симметричен, из (48) следует, что φ_i — градиентный вектор. Когда он известен, ψ_{ik} при $\rho \neq 0$ можем считать определенными по формулам (48). Требуя, чтобы при этом имели место (49), на основании (1), (2), (5), (33), (38), (39), (46) и тождества Риччи мы приходим к условию

$$\varphi^\alpha\mu_\alpha - \rho\lambda - \left(\rho' + e\rho^2\right)\mu_\alpha\xi^\alpha = 0. \tag{50}$$

Тем самым условия интегрируемости уравнений (2), т. е. соотношения (14), при $\rho \neq 0$ приводят нас к (46), (50) и притом эквивалентно.

Положим

$$A = \varphi^\alpha\mu_\alpha - \rho\lambda - \xi^\alpha\mu_\alpha\quad\left(\rho' + e\rho^2\right),$$

$$B_h = \lambda\mu_h + \rho\xi_h - \eta_{h\alpha}\mu^\alpha,$$

где λ определяется формулой (47). Тогда вследствие (1), (2), (5) и (48) при $\rho \neq 0$ будем иметь

$$A_j = -2e\rho A\mu_j - \left(P - e\rho^2\right)B_j,$$

$$B_{h,\,i} = A\left(e\mu_h\mu_j - g_{hj}\right) - e\rho\left(\mu_h B_j - \mu_j B_h\right).$$

Это говорит о том, что продолжение условий (46) и (50) ничего нового не дает, а значит достаточно потребовать их выполнения только для начальных значений. Это налагает на $\xi^h|_0$ и $\eta^h|_0$ $(n+1)$ независимых соотношений. Следовательно, в нашем распоряжении остаются из них только

$$\widetilde{N}_3 = n^2 - 1. \tag{51}$$

Это дает нам теорему.

Теорема 4. *Пространствами V_n второй подвижности относительно $\Pi_3(\xi)$ являются субпроективные пространства основного случая. В каждом из них для вектора μ^h, удовлетворяющего условиям* (5) *при $\rho \neq 0$, существует совокупность бесконечно малых преобразований $\Pi_3(\xi)$, зависящая от одной произвольной функции $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и N_3 произвольных параметров.*

Замечание. В разделе 1 мы доказали существование представления для φ_{ij} и $\psi_{ij.k}$ в форме линейных однородных функций ξ^h и $\overset{h}{\eta_i}$ с коэффициентами, зависящими от пространства V_n и вектора μ^h. В разделе 2 было показано, что требование тождественного выполнения условий интегрируемости уравнений (2) относительно ξ^h и $\overset{h}{\eta_i}$ вследствие этого приводит к пространствам первой подвижности — пространствам постоянной кривизны. К пространствам же второй подвижности, оказывается, приводит требование существования представлений указанного характера для φ_{ij} и ψ_{ijk}, вследствие которых условия интегрируемости уравнений (2), то есть соотношения (14), проальтернированные по h и i (после опускания первого из них), выполнялись бы тождественно относительно $\overset{h}{\eta_i}$. Доказательство этого факта мы здесь не приводим, так как оно весьма громоздко.

Доказательство леммы.

Свертыванием (14) с μ_n вследствие (4) мы сразу получаем представление ψ_{ijk} в виде первого из указанных соотношений — $(16)_1$. После же суммирования в (14) по h, i мы находим, что $T^{\alpha}_{\alpha jk} = -(n+1)\varphi_{[jk]} - \mu^{\alpha}\psi_{\alpha jk}$ или, после замены здесь ψ_{ijk} по (16), что

$$n\varphi_{[jk]} = -T^{\alpha}_{\alpha jk} + e\mu_{\alpha}\mu^{\beta}T^{\alpha}_{\beta jk} - e\left(\widetilde{\varphi}_j\mu_k - \widetilde{\varphi}_k\mu_j\right). \tag{52}$$

Мы полагаем здесь и далее

$$\widetilde{\varphi}_i = \mu^{\alpha}\varphi_{\alpha i}, \quad \hat{\varphi}_i = \mu^{\alpha}\varphi_{i\alpha}, \quad \varphi^{\alpha} = \mu^{\alpha}\mu^{\beta}\varphi_{\alpha\beta}. \tag{53}$$

Свертывая же (14) по h, k и используя $(16)_1$, находим

$$(n-2)\varphi_{ij} = T^{\alpha}_{ij\alpha} - e\mu_{\alpha}\mu^{\beta}T^{\alpha}_{ij\beta} + \varphi_{[ji]} + e\left(\widetilde{\varphi}_j\mu_i - \hat{\varphi}_i\mu_j - \hat{\varphi}_j\mu_i\right). \tag{54}$$

Умножив здесь обе части на μ^i и просуммировав по i, получим

$$(n-2)\widetilde{\varphi}_j = \mu T^{\alpha}_{\beta j\alpha} - e\mu_{\alpha}\mu^{\beta}\mu^{\gamma}T^{\alpha}_{\beta j\gamma} - e\varphi\mu_j.$$

Отсюда в свою очередь свертыванием с μ^j имеем

$$(n-1)\varphi = \mu^{\beta}\mu^{\gamma}T^{\alpha}_{\beta\gamma\alpha} - e\mu_{\alpha}\mu^{\beta}\mu^{\gamma}\mu^{\delta}T^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$$

и предыдущие соотношения дают

$$(n-2)\widetilde{\varphi}_j = \mu^{\beta}T^{\alpha}_{\beta j\alpha} - e\mu_{\alpha}\mu^{\beta}\mu^{\gamma}T^{\alpha}_{\beta i\gamma} - \frac{e}{n-1}\mu_j\left(\mu^{\beta}\mu^{\gamma}T^{\alpha}_{\beta\gamma\alpha} - eg_{\alpha}\mu^{\beta}\mu^{\gamma}\mu^{\delta}T^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\right). \tag{55}$$

После свертывания (54) с μ^j оказывается, что

$$n\hat{\varphi}_i = \mu^{\beta}T^{\alpha}_{i\beta\alpha} - e\mu_{\alpha}\mu^{\beta}\mu^{\gamma}T^{\alpha}_{i\beta\gamma} + \widetilde{\varphi}_i. \tag{56}$$

Теперь видно, что на основании (55) мы имеем представление $\hat{\varphi}_l$ через тензор $T^{h}_{ij/k}$ и вектор μ^h. Подставляя его, а также (55), в (52) и (54) соответственно, мы находим представления $\varphi_{[ij]}$ и φ_{ij} указанного вида, т. е. вторую из формул (16). Таким образом, лемма доказана (при $n > 2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Синюков Н. С. Бесконечно малые почти геодезические преобразования аффинносвязных и римановых пространств I. «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 86—95.

2. Синюков Н. С. Эквидистантные римановы пространства. Научный ежегодник ОГУ, 1957, стр. 113—135.

3. Каган Н. Ф. Субпроективные пространства. Физматгиз, М., 1961.

Поступила 30 декабря 1970 г.

О КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ В ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

З. Н. Четыркина

(Пенза)

Пусть дано финслерово пространство F_n с метрической функцией $F(x, \dot{x})$, которая является однородной второй степени относительно координат $\dot{x}$ и удовлетворяет лишь условию невырожденности

$$\det |F_{\cdot\alpha\cdot\beta}| \neq 0, \ \alpha, \beta = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Группа G_r с операторами

$$X_\nu = \xi^\alpha_\nu (x) p_\alpha, \quad \nu = 1, \dots, r \tag{2}$$

является группой конформных преобразований в F_n, если

$$\alpha F = 2\psi_\nu (x) \cdot F, \tag{3}$$

где α^{ξ_ν} — символ производной Ли в направлении вектора ξ_ν,

$\psi^{\xi_\nu}_\nu (x)$ — функции от x, подчиненные условиям

$$\xi^\alpha_\nu \partial_\alpha \psi_\mu - \xi^\alpha_\mu \partial_\alpha \psi_\nu = C^\sigma_{\nu\mu} \psi_\sigma, \tag{4}$$

$C^\sigma_{\nu\mu}$ — структурные постоянные группы, $\mu, \sigma = 1, \dots, r$.
Если $\psi_\nu (x) = c_\nu$ постоянные, то (2) — группа гомотетий в F_n. Если все $c_\nu = 0$, то (2) группа движений в F_n.

Перед нами стоит проблема: когда данная группа G_r конформных преобразований в F_n будет группой гомотетий или движений в пространстве $\overset{*}{F}_n$, конформном данному

$$F(x, \dot{x}) = e^{2\rho(x)} F^* (x, \dot{x}), \tag{5}$$

$F^*(x, \dot{x})$ метрическая функция $\overset{*}{F}_n$. Пусть (2) будет группой конформных преобразований в F_n и группой гомотетий или движений в $\overset{*}{F}_n$.

Учитывая (5), из (3) получаем

$$\xi^\alpha_\nu \partial_\alpha \rho = \psi_\nu - c_\nu. \tag{6}$$

Решение (6) ищем в неявном виде $\Theta(x, \rho) = 0$, тогда система (6) преобразуется в систему

$$\xi^\alpha_\nu \partial_\alpha \Theta + (\psi_\nu - c_\nu) \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} = 0, \tag{7}$$

которая, в силу того, что $C^{\sigma}_{\nu\mu}c_{\sigma}=0$ по условию, является полной. Выясним, когда $\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\neq 0$. Обозначим через q ранг матрицы $\|\xi^{\alpha}_{\nu}(x)\|$. Если $r=q<n$, то система (6) всегда имеет решение и проблема решена положительно. Если $q<r$, то в группе можно выбрать базис так, что $\xi^{\alpha}_{a}(x)$ $(a=1,\ldots,q)$ соответствуют операторам сдвигов, а $\xi^{\alpha}_{s}(x)$ — операторам стационарной подгруппы,

$$\xi^{\alpha}_{s}(x)=\varphi^{a}_{s}(x)\,\xi^{\alpha}_{a}(x). \tag{8}$$

В силу (8) из (7) получаем

$$[\psi_s-c_s-\varphi^{a}_{s}(\psi_a-c_a)]\frac{\partial\theta}{\partial\rho}=0,$$

откуда

$$\psi_s-c_s+\varphi^{a}_{s}(\psi_a-c_a)=0,\quad C^{\sigma}_{\nu\mu}c_{\sigma}=0. \tag{9}$$

Но условий (9) и достаточно для положительного решения проблемы. Итак, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы данная группа конформных преобразований в финслеровом пространстве F_n была группой гомотетий (или движений) в пространстве $\overset{*}{F}_n$, конформном данному, необходимо и достаточно выполнения условий* (9).

Теорема 2. *Если G_r интранзитивная группа конформных преобразований (или гомотетий), действующая на q-мерных пространствах F_q в F_n так, что в специальных координатах ξ^{α}_{ν} есть функции только от x^1, $x^2,\ldots,x^q$, а среди $F_{\cdot i\cdot j}$ $(i,\ j=q+1,\ldots,n)$ хотя бы одна отлична от нуля, то G_r является группой движений некоторого финслерова пространства, конформного данному.*

Действительно, из (3) приходим к системе

$$\xi^{\alpha}_{\nu}\partial_{\alpha}F_{\cdot i\cdot j}=2\psi_{\nu}F_{\cdot i\cdot j},$$

откуда в силу (8) получаем уравнение

$$[\varphi^{a}_{s}\psi_a-\psi_s]\cdot F_{\cdot i\cdot j}=0,$$

из которого следует $\varphi^{a}_{s}\psi_a-\psi_s=0$, тогда наша теорема будет вытекать из теоремы 1. Известно [2, стр. 290], что оператор конформного движения в римановом пространстве V_n не может быть выше второго. Обобщив эти результаты на финслерово пространство F_n, легко установить, что справедлива

Теорема 3. *В финслеровом пространстве F_n, метрическая функция которого $F(x,\dot{x})$ является аналитической от координат $\dot{x}$, оператор гомотетии может быть не выше первого, а оператор конформного преобразования не выше второго порядка.*

Требование аналитичности $F(x,\dot{x})$ существенно. Например, группа с операторами

$$X_1=p_1,\quad X_2=p_2,\quad X_3=x^2p_1+x^3p_2,$$

$$X_4=cx^1p_1+x^2p_2+(2-c)\,x^3p_3,\quad X_5=x^{3\frac{c}{2-c}}p_1,\quad (c\neq 0,\ 2)$$

является группой гомотетий в пространстве F_3 с метрической функцией

$$F=\frac{\dot{x}^{3\,2}}{x^3}\exp\frac{x^{3\,\frac{2c-2}{c-2}}\left(2\dot{x}^1\dot{x}^3-\dot{x}^{2\,2}\right)}{\dot{x}^{3\,2}},\quad c_5=\frac{c}{2(2-c)},$$

которая не является аналитической в начале координат. Оператор X_5 в этой группе может быть порядка выше первого при соответствующем подборе c.

Ясно, при сделанных ограничениях, группа конформных преобразований, в стационарной группе которой имеются операторы 2-го порядка, не может быть группой гомотетий другого финслерова пространства той же размерности.

Обратимся к группам конформных преобразований, стационарная подгруппа которых состоит только из операторов первого порядка. Уравнения (3) и (4) для группы со стационарной подгруппой можно переписать в виде:

$$\xi_a^c \partial_c F + \frac{\partial \xi_a^b}{\partial x^c} \dot{x}^c F_{\cdot b} = 2\psi_a F, \tag{10}$$

$$\xi_a^c \frac{\partial \varphi_s^a}{\partial x^b} \dot{x}^b F_{\cdot c} = 2\left[\psi_s - \varphi_s^a \psi_a\right] \cdot F, \tag{11}$$

$$\xi_a^c \partial_c \psi_b - \xi_b^c \partial_c \psi_a = C_{ab}^c \psi_c + C_{ab}^s \psi_s, \tag{12}$$

$$\xi_a^c \partial_c \psi_s - \varphi_s^b \xi_b^c \partial_c \psi_a = C_{as}^c \psi_c + C_{as}^t \psi_t, \tag{13}$$

$$\varphi_s^a \xi_a^c \partial_c \psi_t - \varphi_t^a \xi_a^c \partial_c \psi_s = C_{st}^u \psi_u, \tag{14}$$

$$a,\ b,\ c,\ d = 1, \ldots, q; \quad s,\ t,\ u = q+1, \ldots, r,$$

учитывая, что существует система координат, в которой все

$$\xi_v^i(x) = 0, \quad (i = q+1, \ldots, n),\ [1],\ \det\left|\xi_a^b\right| \neq 0.$$

В [2, стр. 275—279] показано, что уравнения (12)—(14) сводятся к уравнениям:

$$\xi_a^c \xi_b^d \left(\partial_c \varphi_d - \partial_d \varphi_c\right) = C_{ab}^s \Delta_s, \tag{15}$$

$$\xi_a^b \partial_b \Delta_s = \left(C_{as}^t - C_{ab}^t \varphi_s^b\right) \cdot \Delta_t, \tag{16}$$

$$\left[\tilde{C}_{ts}^u - \varphi_s^a \tilde{C}_{at}^u\right] \cdot \Delta_u = 0, \tag{17}$$

$$\Delta_s = \psi_s - \varphi_s^a \psi_a, \quad \varphi_a = \eta_a^b \psi_b,$$

$$\eta_a^b \xi_c^a = \delta_c^b, \quad \tilde{C}_{vs}^a = C_{vs}^a - C_{vb}^a \varphi_s^b,$$

для которых (17) являются условиями интегрируемости. Следуя [2, стр. 279—281], получаем, что (11) являются условиями интегрируемости уравнений (10) и (11) ($g_{\alpha\beta}$ в данном случае рассматриваются как функции не только точечных координат, но и координат направления).

Пусть (2) группа конформных преобразований в финслеровых пространствах F_n и $F_n^{(1)}$ с метрическими функциями $F(x, \dot{x})$ и $F^{(1)}(x, \dot{x})$ и наборами функций $\psi_1, \ldots, \psi_r$; $\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_r^{(1)}$ соответственно. Для того чтобы пространство F_n было конформно $F_n^{(1)}$:

$$F(x, \dot{x}) = e^{2\rho(x)} F^{(1)}(x, \dot{x}),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало решение системы

$$\xi_v^\alpha \partial_\alpha \rho = \psi_v - \psi_v^{(1)}. \tag{18}$$

(18) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\psi_s - \psi_s^{(1)} = \varphi_s^a \left(\psi_a - \psi_a^{(1)}\right). \tag{19}$$

Пусть $\Delta_s^{(1)} = \psi_s^{(1)} - \varphi_s^a \psi_a^{(1)}$, тогда (19) перепишется так:

$$\Delta_s - \Delta_s^{(1)} = 0; \tag{20}$$

Δ_s и $\Delta_s^{(1)}$ являются решениями системы (18).

7 1-1094

В силу линейности (16) $\Delta_s^0 = \Delta_s - \Delta_s^{(1)}$ тоже будет решением (16). Если $\Delta_s^0 |_{(x)=(x_0)} = 0$, то в силу (16) $\Delta_s^0 \equiv 0$ во всем пространстве, предполагая группу транзитивной. Пусть теперь $\psi_s^{(1)} = c_s^{(1)}$, причем $\psi_s(x_0) = c_s$, тогда в силу предыдущих рассуждений (9) выполняются и справедлива

Теорема 4. *Если транзитивная группа конформных преобразований финслерова пространства F_n, состоящая из операторов нулевого и первого порядков, такова, что в точке общего положения $M_0(x_0)$ функции $\psi_s(x)$, соответствующие операторам стационарной подгруппы, принимают значения $c_s = \psi_s(x_0)$, для которых найдется хотя бы один набор $c_1, c_2, \ldots, c_n$, удовлетворяющий условию $C^{\sigma}_{\nu\mu} c_\sigma = 0$, то такая группа является группой гомотетий некоторого финслерова пространства $\overset{*}{F}_n$, конформного данному.*

В связи с последней теоремой интересно привести контрпример, предложенный М. А. Улановским.

Группа

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = \gamma x + \delta y, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$$

является группой конформных преобразований в финслеровом пространстве F_2 с метрической функцией

$$F(x,\ y,\ dx,\ dy) = (y dx - x dy) \exp \frac{2dx}{x(y dx - x dy)},$$

$$F(x',\ y',\ dx',\ dy') = \lambda(x,\ y) F(x,\ y,\ dx,\ dy),\quad \lambda(x,\ y) = \exp \frac{2\beta}{x(\alpha x + \beta y)}.$$

Здесь условия теоремы 4 не выполняются. Данная группа не может быть сведена к группе гомотетий ни в каком финслеровом пространстве, конформном данному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947.

2. А. З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. Изд-во «Наука», 1966, стр. 272—294.

3. З. Н. Четыркина. Гомотетии и движения в двумерных финслеровых пространствах. Волжск. матем. сб., вып. 5, 1966, стр. 366—374.

4. Р. Ф. Билялов. Конформные группы преобразований в полях тяготения. ДАН СССР, № 3, стр. 192.

5. M. S. Knebelman. Collineations and motions in generalized spaces. Amer S. M. 51, 517—564 (1929).

Поступила 6 апреля 1970 г.

О НАЛОЖИМЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Л. А. Шор

Харьков

1. В статье рассматривается вопрос о наложимых бесконечных выпуклых поверхностях с краем. Предполагается, что полная кривизна границы выпуклой оболочки поверхности равна 2π (в дальнейшем рассматриваются только такие поверхности). Исследование проводится предложенным А. Д. Александровым методом склеивания [1, 2].

Аналогичный вопрос для конечных выпуклых поверхностей с краем рассматривается в [3].

Напомним, что гомеоморфная плоскости бесконечная выпуклая поверхность F с полной кривизной $< 2\pi$, край которой есть бесконечная кривая, изгибаема в классе всех выпуклых поверхностей [4]. Если же край поверхности F имеет кратные точки, в частности F является поверхностью с разрезом, то она может оказаться однозначно определенной. Соответствующий пример многогранника построен в [5]. На его основе легко строится пример ограниченного простой бесконечной ломаной гомеоморфного плоскости бесконечного выпуклого многогранника с полной кривизной $< 2\pi$ изгибаемого, но не наложимого на изометричный ему выпуклый многогранник.

Основные результаты настоящей работы формулируются в виде следующих двух теорем.

Теорема 1. *Если край гомеоморфной плоскости бесконечной выпуклой поверхности F состоит из одной связной кривой, поворот которой всюду неположителен, то поверхность F или однозначно определена или наложима на каждую изометричную ей выпуклую поверхность.*

Теорема 2. *Если край гомеоморфной плоскости бесконечной выпуклой поверхности F состоит из одной связной кривой, поворот которой всюду неотрицателен и сосредоточен в конечном числе точек, то поверхность F наложима на каждую изометричную ей выпуклую поверхность.*

2. Поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы 1 (теоремы 2), назовем поверхностями типа K (соответственно, типа HU). Обозначим край поверхности F через Γ, границу ее выпуклой оболочки через $\bar{F}$.

Край поверхности F типа K есть бесконечная кривая, которая либо не имеет кратных точек, либо является дважды покрытой полупрямой. В последнем случае поверхность F есть поверхность с разрезом по геодезической.

Точки, в которых сосредоточен поворот края поверхности F типа HU, назовем точками типа B. Край Γ поверхности типа HU есть бесконечная кривая, которая может иметь кратные точки. При этом, если ни одна из совместившихся в данной точке пространства точек кривой Γ не является точкой типа B, то совместившихся точек точно две и обе они являются внутренними точками двух совместившихся участков края — «противоположных берегов» конечного или бесконечного разреза. Концом разреза является либо общий конец двух его берегов, либо такая точка поверхности $\bar{F}$, в которой сумма углов примыкающих к ней секторов поверхности F меньше 2π.

3. Обозначим через Q развернутое на плоскость дополнение $\bar{F} - F$ поверхности F до поверхности $\bar{F}$. Согласно п. 2, если F — поверхность типа K, то Q — бесконечная замкнутая область, ограниченная простой бесконечной кривой, или дважды покрытая полупрямая. Если же F есть поверхность типа HU, то Q, вообще говоря, состоит из конечного числа замкнутых областей G_i и соединяющих их дважды покрытых отрезков. При этом либо одна из областей G_i бесконечна, либо в состав Q входит дважды покрытая полупрямая. Так как поворот кривой Γ со стороны поверхности F в каждой точке неотрицателен, то развертывание $\bar{F} - F$ на плоскость можно осуществить так, чтобы повороты кривой L со стороны Q в точках соединения границы областей G_i и G_j или области G_i с дважды покрытыми отрезками, входящими в состав Q, были неположительны.

Условимся называть Q обобщенной областью, границу Q обозначим через L. Если L — ломаная, то обобщенную область Q назовем обобщенным многоугольником. Поверхности типа HU, которым соответствуют обобщенные многоугольники, назовем поверхностями типа HU_p.

Кривая Γ допускает сохраняющее длины дуг отображение ψ на кривую L, которому соответствует подклеивание (Q, ψ) обобщенной области Q к поверхности F, восстанавливающее поверхность $\overline{F}$. Обходу кривой Γ отображение ψ ставит в соответствие обход кривой L, при котором участки кривой L, соответствующие противоположным берегам разрезов на поверхности F, проходятся дважды в противоположных направлениях. Точки кривых L и Γ, соответствующие по отображению ψ, будем обозначать одинаковыми буквами.

Согласно методу склеивания выпуклая поверхность F_0 наложима на изометричную ей выпуклую поверхность F_1 тогда и только тогда, когда существует непрерывная деформация (Q_t, ψ_t) подклеивания (Q_0, ψ_0) в подклеивание (Q_1, ψ_1). Соответствующее этой деформации отображение $\psi_t\psi_0^{-1}$ кривой L_0 на кривую L_t сохраняет условия подклеивания области Q_t к поверхности F_0.

4. Доказательство теоремы 1. Так как поворот кривой Γ всюду неположителен, то поворот кривой L со стороны области Q всюду неотрицателен. Отсюда и из локальной изометрии между областью Q и плоскостью следует, что кратчайшей в области Q между двумя любыми ее точками является отрезок прямой, т. е. Q — бесконечная выпуклая область на плоскости. Поэтому полный поворот ее границы не больше π.

Покажем, что полный поворот кривой L не может быть меньше π. Действительно, если бы полный поворот кривой L был меньше π, то из произвольной точки области Q можно было бы провести две полупрямые, не пересекающие кривой L, что противоречит одной лемме А. В. Погорелова [6, стр. 210, лемма 2]. Итак, полный поворот кривой L равен π.

Выберем на кривой L в качестве начала отсчета дуги s некоторую точку C, такую, что поворот кривой L в ней равен нулю. Пусть внутренние точки Q лежат слева от положительного направления отсчета. Точка C разбивает кривую L на две бесконечные ветви L^+ и L^-, причем L^+ выходит из точки C в положительном направлении. Обозначим через $M(s)$ точку кривой L, соответствующую дуге s, через $\varphi(s)$ — поворот открытого участка $CM(s) \subset L$, через $\gamma(s)$ — поворот открытого участка $CM(s) \subset \Gamma$ (напомним, что соответствующие по отображению ψ точки кривых L и Γ обозначаются одинаково), через $\omega(s)$ — кривизну (площадь сферического изображения) открытого участка $CM(s) \subset \Gamma$, рассматриваемого на поверхности $\overline{F}$. Обозначим $\lim\limits_{s\to+\infty}\varphi(s) = \varphi(\infty)$; $\lim\limits_{s\to-\infty}\varphi(s) =$

$$= \varphi(-\infty); \ \lim_{s\to+\infty}\omega(s) = \omega(\infty); \ \lim_{s\to-\infty}\omega(s) = \omega(-\infty).$$

Введем на плоскости правую прямоугольную систему координат с началом в точке C и осью x, направленной по полукасательной к кривой L^+ в этой точке. Угол между осью x и полукасательной к кривой L^- в точке C обозначим через α. Построим два семейства кривых L_t^+ и L_t^-, задав кривые L_t^+ уравнениями

$$\begin{aligned} x_t(s) &= \int_0^s \cos[\varphi(s) + t(\omega(\infty) - \omega(s))]\,ds, \\ y_t(s) &= \int_0^s \sin[\varphi(s) + t(\omega(\infty) - \omega(s))]\,ds \end{aligned} \qquad 0 \leqslant s < \infty$$

и кривые L_t^- уравнениями

$$\begin{aligned} x_t(s) &= \int_s^0 \cos[\alpha - \varphi(s) - t(\omega(-\infty) - \omega(s))]\,ds, \\ y_t(s) &= \int_s^0 \sin[\alpha - \varphi(s) - t(\omega(-\infty) - \omega(s))]\,ds. \end{aligned} \qquad -\infty < s \leqslant 0$$

Так как $\varphi(s)+\gamma(s)=\omega(s)$, $\varphi(0)=0$, $\gamma(0)=0$ и при $s>0$ функции $\varphi(s)$ и $\omega(s)$ монотонно не убывают, а функция $\gamma(s)$ монотонно не возрастает (при $s<0$ функции $\varphi(s)$ и $\omega(s)$ монотонно не возрастают, а функция $\gamma(s)$ монотонно не убывает), то кривые L_t^+ и L_t^- при всех $t\in[0, 1]$ — выпуклые. Семейства кривых L_t^+ и L_t^- непрерывны по параметру t, причем $L_0^+\equiv L^+$ и $L_0^-\equiv L^-$. Кривую, составленную из кривых L_t^+ и L_t^-, обозначим через L_t. Поворот $\varphi_t(C)$ кривой L_t в точке C равен

$$\pi-\alpha+(\omega(\infty)+\omega(-\infty))\,t\leqslant\pi-\alpha+\omega(\infty)+\omega(-\infty)=\omega(\Gamma)\leqslant\pi.$$

Полный поворот $\varphi(L_t)$ кривой L_t равен

$$\varphi(C)+\varphi(L_t^+)+\varphi(L_t^-)=\pi-\alpha+(\omega(\infty)+\omega(-\infty))\,t+\varphi(\infty)-$$
$$-t\omega(\infty)+\varphi(-\infty)-t\omega(-\infty)=\pi-\alpha+\varphi(\infty)+\varphi(-\infty)=\varphi(L)=\pi.$$

Отсюда следует, что кривая L_t ограничивает бесконечную область Q_t (быть может, вырождающуюся в дважды покрытую полупрямую), удовлетворяющую условиям подклеивания к поверхности F. При этом семейство областей Q_t $(t\in[0, 1])$ непрерывно. Поэтому поверхность F наложима на некоторую выпуклую поверхность F_1, для которой подклеивание области Q_1 является тривиальным.

Так как тривиальное подклеивание любой поверхности, изометричной поверхности F, допускает непрерывную деформацию в область Q_1, то теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Теорема 2 доказывается по следующей схеме. Сначала устанавливается, что каждая поверхность типа HU наложима на некоторую изометричную ей поверхность типа HUp, затем доказывается, что любые две изометричные поверхности типа HUp наложимы.

Лемма 1. *Каждая поверхность F типа HU наложима на некоторую изометричную ей поверхность F типа HUp.*

Доказательство. Согласно п. 3, достаточно доказать, что каждая из областей G_i, входящих в состав обобщенной области Q, соответствующей поверхности F, допускает непрерывную деформацию в многоугольник, сохраняющую условия подклеивания. Для конечных областей G_i это доказано в лемме 2 статьи [3].

Допустим, что в состав обобщенной области Q входит бесконечная область G. Так как число точек типа B на кривой Γ конечно, то на ней можно выбрать точки C_1 и C_2 так, чтобы выходящие из них бесконечные ветви Γ_1 и Γ_2 кривой Γ не содержали точек типа B. Поворот кривой L со стороны обобщенной области Q неотрицателен всюду, кроме, быть может, точек типа B. Отсюда и из уже упоминавшейся выше леммы А. В. Погорелова [6, стр. 210, лемма 2] следует, что точки C_1 и C_2 можно выбрать так, чтобы открытая кратчайшая C_1C_2 в обобщенной области Q проходила строго внутри бесконечной области G. При таком выборе точек C_1 и C_2 кратчайшая C_1C_2 есть отрезок прямой. Кратчайшая C_1C_2 отсекает от Q бесконечную часть $G^*\subset G$. Поворот границы области G^* всюду неотрицателен (неотрицательность поворота на бесконечных ветвях L_1 и L_2, соответствующих по отображению ψ ветвям Γ_1 и Γ_2 кривой Γ, следует из выбора точек C_1 и C_2; на участке C_1C_2 из того, что C_1C_2 отрезок прямой; наконец, углы области G^* в точках C_1 и C_2 не превосходят π).

Обобщенная область $Q-G^*$ конечна и допускает сохраняющую условия подклеивания непрерывную деформацию в обобщенный многоугольник. При этом деформация может быть осуществлена так, чтобы углы обобщенной области $Q-G^*$ в точках C_1 и C_2 не возрастали и прямолинейный участок C_1C_2 ее границы не деформировался. Бесконечная область G^* допускает сохраняющую условия подклеивания непрерывную деформацию в бесконечную полуполосу, при которой участок C_1C_2 ее границы остается неизменным, ветви L_1 и L_2 переходят в одинаково направленные параллельные полупрямые, и углы области в точках C_1 и C_2 не возрастают. Эта деформация строится аналогично деформации бесконечной области Q в доказательстве теоремы I. Произведение описанных деформаций обобщенной области $Q-G^*$ и бесконечной области G^* является непрерывной сохраняющей условия подклеивания деформацией обобщенной области Q в обобщенный многоугольник.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если поверхности F типа HUp соответствует обобщенный многоугольник Q с числом вершин $n \geqslant 3$, среди которых имеется хотя бы одна пара смежных вершин A_1 и A_2 с углами $\alpha_1 < \pi$ и $\alpha_2 < \pi$, то поверхность F наложима на некоторую поверхность F' типа HUp, которой соответствует обобщенный многоугольник Q' с числом вершин $< n$.*

Доказательство леммы 2 ничем не отличается от доказательства аналогичной леммы для конечных выпуклых поверхностей [3, лемма 4].

Из леммы 2 следует, что поверхность F типа HUp, которой соответствует обобщенный многоугольник Q с числом вершин $n \geqslant 3$, наложима на некоторую выпуклую поверхность F' типа HUp, которой соответствует обобщенный многоугольник Q' с числом вершин $m < n$, причем, если $m > 2$, то среди его вершин нет двух смежных с углами меньше π.

Лемма 3. *Пусть $\varphi^+(L)$ и $\varphi^-(L)$ положительная и отрицательная части поворота кривой L со стороны обобщенной области Q, соответствующей поверхности F типа HU.*
Тогда

$$\varphi^+(L) \leqslant 2\pi, \tag{1}$$

$$\varphi^-(L) \leqslant \pi. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(L)$ и $\varphi(\Gamma)$ полные повороты кривых L и Γ. Тогда

$$\varphi^+(L) - \varphi^-(L) = \varphi(L) = \pi, \tag{3}$$

$$\varphi(L) + \varphi(\Gamma) \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Так как сумма поворотов кривых L и Γ всюду неотрицательна, то из (3) и (4) следует (1) и (2).

Лемма доказана.

6. Пусть F выпуклая поверхность типа HUp и пусть положительная часть поворота границы обобщенного многоугольника Q сосредоточена в точках $A_1, A_2, \ldots, A_k$, которые занумеруем в положительном направлении обхода Q и будем называть вершинами типа A. Пусть среди вершин типа A никакие две не являются смежными вершинами Q. Тогда они разбивают границу обобщенного многоугольника Q на ломаные, имеющие в каждой вершине строго отрицательные повороты со стороны Q. Эти ломаные, среди которых одна или две могут быть бесконечными, назовем ломаными типа N. Концами бесконечных ломаных типа N являются точки A_1 и A_k. Если имеется только одна бесконечная ломаная типа N, которая начинается, например, в точке A_1, то из точки A_k выходит бесконечная сторона l_k ломаной L. Если единственная бесконечная ломаная типа N выходит из точки A_k, то из

точки A_1 выходит бесконечная сторона l_1 ломаной L. Если бесконечных ломаных типа N нет, то из точек A_1 и A_2 выходят бесконечные стороны l_1 и l_2 ломаной L.

Условимся поворот ломаной типа N, если не оговорено противное, брать по абсолютной величине. Пусть A_iA_{i+1} некоторая конечная ломаная типа N. Поворот ее не превосходит π, и если он равен π, то не может быть сосредоточен только в одной точке. Поэтому вместе с замыкающим ее отрезком прямой A_iA_{i+1} она ограничивает некоторый невырожденный выпуклый многоугольник $T_{i\,i+1}$. Углы многоугольника $T_{i\,i+1}$ в вершинах A_i и A_{i+1} обозначим Θ_i' и Θ_{i+1}''. При этом поворот ломаной A_iA_{i+1} равен $\Theta_i' + \Theta_{i+1}''$.

Бесконечная ломаная типа N, выходящая из точки A_1 (точки A_k), вместе с полупрямой, выходящей из этой точки параллельно бесконечным сторонам Q, ограничивает бесконечный могоугольник $T_1(T_k)$. Угол $\Theta_1''(\Theta_k')$ этого многоугольника в точке A_1 (точке A_k) равен повороту бесконечной ломаной типа N, выходящей из точки A_1 (точки A_k). Если из точки A_1 (точки A_k) выходит бесконечная сторона ломаной L, то считаем, что $\Theta_1''=0$ $(\Theta_k'=0)$.

Углы обобщенного многоугольника Q в вершинах A_i обозначим через $\alpha_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$.

Лемма 4. *Пусть поворот некоторой конечной ломаной $A_iA_{i+1}\subset L$ типа N не больше $\frac{\pi}{2}$ и выполнено хотя бы одно из неравенств*

$$\alpha_i + 2\Theta_i' \leqslant \pi,\quad \alpha_{i+1} + 2\Theta_{i+1}'' \leqslant \pi. \tag{5}$$

Тогда, если выполненное неравенство строгое, то поверхность F наложима на некоторую поверхность F' типа HUp, соответствующий которой обобщенный многоугольник Q' имеет хотя бы две смежные вершины с углами $<\pi$, и общее число вершин многоугольника Q' не больше общего числа вершин многоугольника Q. Если же выполнено равенство (5), *то поверхность F наложима на поверхность F' типа HUp, соответствующий которой многоугольник Q' имеет хотя бы на одну вершину меньше, чем многоугольник Q.*

Лемма 4, так же как и ее доказательство, совпадает с леммой 6 статьи [3].

Лемма 5. *Пусть поворот бесконечной ломаной $L_i\subset L$ $(i=1,\ k)$ типа N, выходящей из точки A_i, не превосходит $\frac{\pi}{2}$, тогда поверхность F наложима на некоторую поверхность F' типа HUp, соответствующий которой обобщенный многоугольник Q' имеет хотя бы на одну вершину меньше, чем многоугольник Q.*

Доказательство. Проведем на границе $\overline{F}$ выпуклой оболочки поверхности F разрез по участку Γ_i кривой Γ, соответствующему по отображению ψ участку L_i ломаной L, и развернем его на плоскость в дважды покрытую ломаную L_i. Обозначим покрывающие L_i конгруэнтные ей ломаные через L_i' и L_i'', и пусть $C'\in L_i'$, $C''\in L_i''$ вершины, из которых выходят бесконечные стороны этих ломаных. Будем деформировать дважды покрытую ломаную L_i, поворачивая участок A_iC'' вокруг точки A_i и перемещая бесконечную сторону ломаной L_i'', выходящую из точки C'', параллельно самой себе. Поворот ломаной L_i не больше $\frac{\pi}{2}$, поэтому, если угол $\Delta\alpha_{it}$, на который был повернут участок $A_iC''\subset L_i''$ меньше π, то ломаная L_{it}, составленная из ломаных L_i' и деформированной ломаной L''_{it} ограничивает бесконечный многоугольник $\widetilde{Q}_i$. Если $\Delta\alpha_{it} \leqslant \pi - \alpha_i$, то многоугольник $\widetilde{Q}_i$ удовлетворяет условиям подклеивания к поверхности $\overline{F}$ с разрезом по Γ_i. Непрерывному увеличению угла $\Delta\alpha_{it}$ от нуля до $\pi - \alpha_i$ соответствует непрерывная деформация $\widetilde{Q}_i$, которая порождает изгибание поверхности $\overline{F}$ с разрезом и, следовательно, поверхности F. В результате изгибания поверхности F при

$$\Delta\alpha_{it_1} = \pi - \alpha_i$$

получим некоторую поверхность F', которой соответствует обобщенный многоугольник Q', склеенный из многоугольников Q и $\widetilde{Q}_{t_1}$. Число вершин многоугольника Q' меньше числа вершин многоугольника Q, так как в точке A_i у него вершины нет, и новых вершин по сравнению с Q у него не появляется.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть положительная часть поворота ломаной L сосредоточена только в двух точках A_1 и A_2, из которых выходят ее бесконечные стороны l_1 и l_2. Тогда поверхность F наложима на некоторую изометричную ей выпуклую поверхность F' с разрезом.*

Доказательство. Так как бесконечный обобщенный многоугольник Q имеет не меньше двух вершин, то он имеет внутренние точки. Вершинами его выпуклой оболочки $\overline{Q}$ могут быть только точки A_1 и A_2. Отсюда следует, что выпуклая оболочка $\overline{Q}$ многоугольника Q есть бесконечный многоугольник с вершинами в точках A_1 и A_2, бесконечными сторонами l_1 и l_2 и конечной стороной A_1A_2.

Допустим, что отрицательная часть поворота ломаной L сосредоточена в точках $C_1, C_2, \ldots, C_m \in A_1A_2 \subset L$.

Обозначим углы обобщенной области Q в точках C_i через β_i. Будем деформировать ломаную L, сохраняя длины ее конечных сторон и полагая углы между сторонами деформированной ломаной L_t равными

$$\alpha_{1t} = \alpha_1 + (\pi - \alpha_1)\,t,$$
$$\alpha_{2t} = \alpha_2\,(1 - t),$$
$$\beta_{it} = \beta_i + (\pi - \beta_i)\,t \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

При каждом значении $t \in [0, 1]$ бесконечная ломаная L_t ограничивает бесконечный многоугольник Q_t $(Q_0 \equiv Q)$, вырождающийся при $t = 1$ в дважды покрытую полупрямую. Многоугольники Q_t $(t \in [0, 1])$ удовлетворяют условиям подклеивания к поверхности F и образуют непрерывное семейство. Деформации многоугольника Q в дважды покрытую полупрямую соответствует изгибание поверхности F в поверхность с разрезом.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть F поверхность типа HUp и Q, соответствующий ей обобщенный многоугольник. Пусть положительная часть поворота ломаной L сосредоточена в вершинах $A_1, A_2, \ldots A_k$ $(k \geqslant 2)$ типа A, никакие две из которых не являются смежными вершинами Q. Тогда среди ломаных типа N, которые входят в состав ломаной L, найдется хотя бы одна, удовлетворяющая условиям одной из лемм 4—6.*

Доказательство. Если в состав ломаной L входит только одна ломаная типа N, то она удовлетворяет условиям леммы 6.

Допустим, что в состав ломаной L входит не менее двух ломаных типа N (конечных или бесконечных). Согласно п. 6, равенство (3) может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{k} (\pi - \alpha_i) - \sum_{i=1}^{k} \Theta'_i - \sum_{i=1}^{k} \Theta''_i = \pi, \tag{6}$$

а неравенство (1) в виде

$$\sum_{i=1}^{k} (\pi - \alpha_i) \leqslant 2\pi. \tag{7}$$

Умножив равенство (6) на два, и вычтя затем из полученного равенства неравенство (7), после преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + 2\Theta'_i + 2\Theta''_i) \leqslant k\pi. \tag{8}$$

Из (8) следует, что хотя бы в одной из вершин A_i выполнено неравенство

$$\alpha_i + 2\Theta'_i + 2\Theta''_i \leqslant \pi. \tag{9}$$

Вершина A_i, для которой выполнено (9), является концом хотя бы одной ломаной типа N. Если среди ломаных типа N нет имеющих поворот больше $\frac{\pi}{2}$, то та из них, которая имеет точку A_i своим концом удовлетворяет условиям леммы 4.

Допустим теперь, что одна из ломаных типа N, например, ломаная A_jA_{j+1}, имеет поворот больше $\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\Theta'_j + \Theta''_{j+1} > \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Тогда из неравенств (8) и (10) получим

$$\sum_{i=1}^{j-1} (\alpha_i + 2\Theta'_i + 2\Theta''_i) + \alpha_j + 2\Theta''_j + \alpha_{j+1} + 2\Theta'_{j+1} +$$
$$+ \sum_{i=j+2}^{k} (\alpha_i + 2\Theta'_i + 2\Theta''_i) < (k-1)\pi.$$

Следовательно, должны выполняться хотя бы два из неравенств

$$\alpha_i + 2\Theta'_i + 2\Theta''_i < \pi \quad i \neq j, \ i \neq j+1, \tag{11}$$

$$\alpha_j + 2\Theta''_j < \pi, \tag{12}$$

$$\alpha_{j+1} + 2\Theta'_{j+1} < \pi. \tag{13}$$

Так как число ломаных типа N не меньше двух, то хотя бы одна из вершин A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ есть общий конец двух ломаных типа N. При этом поворот каждой ломаной типа N, кроме ломаной A_jA_{j+1}, меньше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому из неравенств (11)—(13) следует, что хотя бы одна из ломаных типа N удовлетворяет условиям леммы 4 или леммы 5.

Лемма доказана.

7. Пусть F поверхность типа HUp, которой соответствует обобщенный многоугольник Q, имеющий n вершин, среди которых нет двух смежных с углами меньше π. Тогда из лемм 4, 5, 6 и 7 следует, что F наложима либо на некоторую поверхность F' типа HUp с разрезом,

либо на некоторую поверхность F' типа HUp, которой соответствует многоугольник Q', имеющий не более, чем n вершин. При этом, если число вершин обобщенного многоугольника Q' равно n, то среди них есть хотя бы одна пара смежных вершин, с углами меньше π. Отсюда и из лемм 2 и 6 следует, что каждая поверхность F типа HUp наложима на некоторую поверхность F' типа HUp с разрезом.

Лемма 8. *Изометричные поверхности с разрезом типа HUp наложимы.*

Доказательство леммы 8 аналогично доказательству теоремы 1 статьи [7].

Из п. 7 и леммы 8 следует наложимость любых двух изометричных поверхностей типа HUp. Так как согласно лемме 1 каждая поверхность типа HU наложима на некоторую поверхность типа HUp, то теорема 2 доказана.

8. Отметим некоторые следствия из теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Если край бесконечной выпуклой поверхности F состоит из нескольких бесконечных кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, имеющих всюду неположительный поворот, то F или однозначно определена, или наложима на любую изометричную ей выпуклую поверхность.*

Если поворот края бесконечной поверхности F всюду неотрицателен, то край F не может состоять более чем из двух бесконечных компонент. При этом, если край состоит из двух компонент, то площадь сферического изображения поверхности $\overline{F}$ сосредоточена на крае поверхности F, значит площадь сферического изображения поверхности F равна нулю, и потому F локально изометрична плоскости. Так как кроме того F гомеоморфна плоскости, то справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если край поверхности F состоит из двух бесконечных компонент и поворот его всюду неотрицателен и сосредоточен в конечном числе точек, то F наложима на любую изометричную ей поверхность, в частности F наложима на плоскость.*

Теорема 5. *Если край поверхности F состоит из нескольких бесконечных кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ и кривая Γ_1 имеет со стороны F всюду неотрицательный поворот, сосредоточенный в конечном числе точек, а кривые $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots \Gamma_n$ — всюду неположительный, то F наложима на любую ей изометричную поверхность.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Л. А. Шор. О деформациях тривиального подклеивания. «Укр. геометр. сб.», вып. 3, Изд-во ХГУ, 1966.
3. Л. А. Шор. О наложимых выпуклых поверхностях с краем, имеющим неотрицательный поворот. «Укр. геометр. сб.», вып. 10. Изд-во ХГУ, 1970.
4. Л. А. Шор. Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем. «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6. Изд-во ХГУ, 1968.
5. Л. А. Шор. Об изгибании выпуклых многогранников с разрезом. УМЖ, т. 16, № 4, 1964.
6. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. «Наука», М., 1969.
7. Л. А. Шор. Об одном классе изгибаний выпуклых поверхностей с разрезом. «Укр. геометр. сб.», вып. 4, Изд-во ХГУ, 1967.

Поступила 13 апреля 1970 г.

Рефераты

УДК 513

Одно неравенство на кривизны куска трехмерной седловой поверхности $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$. Аминов. Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 3—5.

Устанавливается обобщение по размерности одной теоремы Н. В. Ефимова. Доказана теорема: пусть в евклидовом пространстве $E^4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ над кубом V в пространстве $E^3 = (x_1, x_2, x_3)$ задана трехмерная седловая поверхность $x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, главные кривизны которой λ_i удовлетворяют условиям: а) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \leqslant -K_0 < 0$, б) $0 < \lambda_1 \leqslant S_0$, $0 < \lambda_2 \leqslant S_0$, где K_0 и S_0 — постоянные, в) двумерная поверхность в E^3, составленная из отрезков, соединяющих центр куба V с его ребрами, ни в одной точке не является характеристической по отношению к проекциям на E^3 асимптотических конусов поверхности. Тогда сторона куба a ограничена

$$a \leqslant c\sqrt{\frac{S_0}{K_0}},$$

где c — абсолютная постоянная.

УДК 513

Выражение степени нормального отображения замкнутой нечетномерной гиперповерхности евклидова пространства через риманов тензор. Аминов Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 5—10.

В работе установлена теорема: степень нормального отображения N гиперповерхности M^{2p+1} определяется формулой

$$N\omega^{2p+1} = \int\limits_{M^{2p+1}} \pm \frac{\sqrt[2p]{\det \| \psi_{\alpha\beta} \|}}{g}\, dV,$$

где ω^{2p+1} — объем единичной $(2p+1)$-мерной сферы, g — детерминант матрицы коэффициентов первой квадратичной формы,

$$\psi_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} 2^{-p} (2p!)^{-1} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{\alpha-1} \mu_{\alpha+1} \cdots \mu_{2p+1}} \varepsilon^{\nu_1 \cdots \nu_{\beta-1} \nu_{\beta+1} \cdots \nu_{2p+1}} \times$$
$$\times R_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} \cdots R_{\mu_{2p}\mu_{2p+1}\nu_{2p}\nu_{2p+1}}.$$

УДК 513

О характеристиках изгибания поверхностей. Белов К. М. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 10—15.

Работа посвящена изгибаниям поверхностей в целом. По свойствам сети характеристик изгибания автор классифицирует изгибания на эллиптические, параболические и гиперболические. Изучаются свойства отдельных характеристик, в частности, выводится формула скручивания характеристики, выясняются условия, исключающие появление замкнутых характеристик. Вводится понятие индекса особой точки изгибания и приводятся его свойства.

Библиографических ссылок 12.

УДК 513

Множество разреза развертки положительной кривизны. Волков Ю. А., Подгорнова Е. Г. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 15—25.

Исследуется множество разреза двумерной полной многогранной метрики (развертки) положительной кривизны, заданной на сфере или на плоскости. (Понятие множества разреза (м. р.) применяется в том же смысле, в каком оно было введено, как известно, еще Пуанкаре для римановых метрик). Устанавливается, в частности, что для компактной развертки указанное множество является связным графом без циклов, ребра которого — кратчайшие, степень каждой вершины равна числу кратчайших, соединяющих соответствующую вершину м. р. с точкой, по отношению к которой построено это множество.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

Об алгебраических поверхностях в E^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 26—31.

В работе найдено общее уравнение алгебраических гиперповерхностей F_n пространства E^4, инвариантных относительно группы симметрий правильного симплекса; доказано существование таких поверхностей, отличных от совокупности сфер, для любого порядка $n \geqslant 3$. Для таких же поверхностей, инвариантных относительно группы симметрий правильного 600-гранника, найден минимальный порядок $n_{\min} = 12$.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

К оценке числа главных диаметральных плоскостей алгебраической поверхности пространства E^m. Игнатенко В. Ф. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 31—35.

Доказывается теорема: пусть множество главных диаметральных плоскостей поверхности F_n конечно и ее асимптотический конус распадается на h компонент порядка r_k кратности $s_k < n$; $\sum_{k=1}^{h} r_k s_k = n$. Тогда число N ее главных диаметральных плоскостей удовлетворяет условию

$$N \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{h} r_k - 1 \right)^{m-i}.$$

Библиографических ссылок 7.

УДК 513

Теория конгруэнций в трехмерном евклидовом пространстве как теория неголономных поверхностей. Кованцов Н. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 35—47.

Каждому понятию и инварианту теории конгруэнций сопоставляется соответствующее понятие и инвариант неголономной поверхности. Доказывается, что голономную конгруэнцию в общем случае можно рассматривать как ортогональную к неголономной поверхности (обратное не всегда верно).

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

Группы движений в специальных двумерных пространствах путей. Кондратьев А. Т. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 47—52.

Рассматриваются двумерные пространства путей, определяемых системой дифференциальных уравнений $\ddot{x}^i + \Gamma^i(x, \dot{x}) = 0$, где Γ^i — полиномы 3-й степени относительно $\dot{x}^i$. Эти пространства классифицируются по группам аффинных движений.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

Измеримость n-точечных множеств относительно проективных групп на плоскости. Луценко А. В. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 53—63.

В статье исследуется вопрос о существовании инвариантных мер n-точечных множеств Q относительно проективных групп на плоскости. Для $n > 4$ множества Q не имеют инвариантной меры. Для $n \leqslant 4$ указаны группы, относительно которых множества Q измеримы. В случае неизмеримости найдены все подмножества n-точечных множеств, обладающие инвариантными мерами относительно проективных групп. Приведены аналитические выражения для мер указанных множеств.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

Необходимые и достаточные условия существования примитивного выпуклого многогранника с данными числами n-угольных граней. Медяник А. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 63—66.

Примитивный (каждая вершина инцидентна трем граням) выпуклый многогранник с данными числами n-угольных граней a_n, удовлетворяющими условию $\sum_{n \geqslant 3} (6-n)a_n = 12$, существует тогда и только тогда, когда некоторая система уравнений имеет неприводимое решение.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

Оценки некоторых характеристик области в двумерном многообразии. Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 67—73.

Устанавливаются некоторые оценки для характеристик области, гомеоморфной кругу (площади, длины границы, внутреннего радиуса) в двумерном многообразии с ограниченной кривизной, зависящие от удельной кривизны области и удельного поворота ее границы.

Библиографических ссылок 10.

УДК 513

О некоторых свойствах квазигеодезических. Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 73—77.

Устанавливаются некоторые свойства квазигеодезических линий в трехмерном пространстве (евклидовом, сферическом или гиперболическом), дополняющие известные. В частности, а) доказывается теорема: две квазигеодезические равной длины, из которых одна — кратчайшая, исходящие из одной точки в одном направлении на выпуклой поверхности, совпадают; в) дается характеристика взаимного расположения кратчайшей и квазигеодезической на выпуклой поверхности; с) устанавливается одна теорема о возможности аппроксимации геодезической линии на выпуклой поверхности квазигеодезическими на выпуклых поверхностях, сходящихся к исходной. Последний результат распространяется на случай выпуклых гиперповерхностей многомерного пространства (приближающие гиперповерхности — многогранники).

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

Проблема Борсука в трехмерных пространствах постоянной кривизны. Риссилинг А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 78—83.

Доказывается, что всякое тело диаметра d, расположенное в трехмерном пространстве постоянной кривизны, можно разбить на четыре части, диаметр которых меньше d (для эллиптического пространства $d < 60°$).

Библиографических ссылок 1.

УДК 513.71

Проективные характеристики неголономности многообразия V_n^{n-1}. Роговой М. Р. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 83—87.

Получены проективные характеристики неголономности для неголономного многообразия V_n^{n-1} в P_n, которые для V_3^2 в P_3 были введены Я. П. Бланком и Е. Бомпиани. Установлена связь между этими характеристиками неголономности.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

Бесконечно малые почти геодезические преобразования аффинносвязных и римановых пространств. II. Синюков Н. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 87—95.

Изучаются бесконечно малые почти геодезические преобразования третьего типа $\Pi_3(\xi)$ римановых пространств (см. Синюков Н. С. Украинский геометрический сборник, 1970 г., вып. 9, стр. 86—95). Сначала здесь на основе анализа основных уравнений $\Pi_3(\xi)$ дается точная оценка сверху степени подвижности произвольного риманова пространства V_n относительно $\Pi_3(\xi)$ (при неизотропном векторе μ^h). Затем находятся римановы пространства первой (максимальной в геометрическом смысле) подвижности по отношению $\Pi_3(\xi)$, каковыми оказываются пространства постоянной кривизны, а также полная оценка степени их подвижности. Наконец, при помощи некоторого специального условия выделяются V_n второй подвижности относительно $\Pi_3(\xi)$, обнаруживается, что они являются субпроективными пространствами основного случая, и дается для них точная оценка степени подвижности относительно $\Pi_3(\xi)$.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

О конформных преобразованиях в финслеровых пространствах. Четыркина З. Н. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 95—98.

Выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа конформных преобразований в финслеровом пространстве F_n сводились к группе гомотетий или движений пространства F_n^*, конформного данному. Доказывается сводимость интранзитивной группы конформных преобразований F_n к группе движений в F_n^*, если операторы группы в специальных координатах есть функции от $x^1, x^2, \ldots, x^q$ $(q < n)$ и среди $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$ $(i, j = q+1, \ldots, n)$ хотя бы одна отлична от нуля. Здесь $F(x, \dot{x})$ — метрическая функция F_n. И наконец, показано, что транзитивная группа конформных преобразований в F_n, состоящая из операторов порядков 0 и 1, является группой гомотетий (или движений) в F_n^*, если в точке $M_0(x_0)$ общего положения $\psi_s(x)$ — функции соответствующие операторам стационарной подгруппы, принимают значения $c_s = \psi_s(x_0)$, для которых найдется хотя бы один набор $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — чисел, удовлетворяющих условию $C_{\nu\mu}^{\sigma} c_\sigma = 0$ $(\nu, \mu, \sigma = 1, \ldots, r)$, где $C_{\nu\mu}^{\sigma}$ — структурные постоянные группы.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

О наложимых бесконечных выпуклых поверхностях. Шор Л. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 11, 1971, стр. 98—106.

Рассматривается вопрос о наложимости бесконечных выпуклых поверхностей с краем, полная кривизна границы выпуклой оболочки которых равна 2π. Доказываются следующие две теоремы: 1) если край гомеоморфной плоскости бесконечной выпуклой поверхности F состоит из одной связной кривой, поворот которой всюду неположителен, то поверхность F или однозначно определена или наложима на каждую изометричную ей выпуклую поверхность; 2) если край гомеоморфной плоскости бесконечной выпуклой поверхности F состоит из одной связной кривой, поворот которой всюду неотрицателен и сосредоточен в конечном числе точек, то поверхность F наложима на каждую изометричную ей выпуклую поверхность.

Библиографических ссылок 7.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *А. П. Гужва*
Техредактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Ж. Л. Бялая*

Сдано в набор 4/V 1971 г. Подписано к печати 12/XI 1971 г. БЦ 50405. Формат $70 \times 108^1/_{16}$. Объем 7 физ. печ. л., 9,8 усл. печ. л., 12,4 уч.-изд. л., Зак. 1-1094. Тираж 620. Цена 1 руб. 24 коп. Св. ТП 1971 г.; поз. 344.

Типоофсетная фабрика «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров УССР. Харьков, ул. Энгельса, 11.