

издательство харьковского университета

крайн-
ский
геометри-
ческий
сборник

выпуск

10

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков

1971

**РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК
НАУЧНЫХ РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ**

В 10-й выпуск сборника входят статьи, посвященные различным вопросам геометрии в целом, геометрии обобщенных пространств, пространств с заданной фундаментальной группой и другим областям геометрии.

Редакционная коллегия: акад. АН УССР проф. *A. B. Погорелов* (ответственный редактор), доц. *B. P. Белоусова*, проф. *Я. P. Бланк* (зам. ответственного редактора), доц. *D. Z. Гордеевский*, проф. *H. И. Кованцов*, доц. *E. A. Косаческая*, доц. *A. C. Лейбин* (ответственный секретарь), доц. *E. P. Сенькин*, доц. *H. C. Синюков*, доц. *B. H. Скрыблев*, доц. *M. A. Улановский*.

Адрес редколлегии: Харьков-77, пл. Дзержинского, 4.
Харьковский университет, механико-математический факультет.

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЕТЕРСОНА

Я. П. Бланк, Н. А. Загайный

Харьков

Поверхность, несущую сопряженную сеть, образованную линиями касания описанных около нее конусов (коническую сеть), называют поверхностью Петерсона.

Если коническую сеть принять за координатную, уравнения поверхности Петерсона будут иметь вид

$$\rho x_i = a_i(u) + b_i(v) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Вершины конусов расположены на кривых Γ_1, Γ_2 :

$$\lambda x_i = \frac{da_i}{du}, \quad \mu x_i = \frac{db_i}{dv} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Будем считать, что коническая сеть поверхности Петерсона порождается кривыми Γ_1, Γ_2 .

Поверхности переноса представляют собой тот частный случай поверхностей Петерсона, когда кривые Γ_1, Γ_2 принадлежат несобственной плоскости и, следовательно, коническая сеть превращается в цилиндрическую.

Если поверхности переноса инвариантны относительно аффинных преобразований, поверхности Петерсона инвариантны относительно проективных преобразований.

К. Рейдемейстер [1] определил все линейчатые поверхности переноса. Оказалось, что если косая линейчатая поверхность есть поверхность переноса, то она несет ∞^1 цилиндрических сетей, т. е. допускает как поверхность переноса бесконечное множество способов образования. При этом, как следует из теоремы Ли, линии Γ_1, Γ_2 принадлежат пучку конических сечений.

Я. П. Бланк [3, 4] определил все поверхности Петерсона, несущие ∞^2 конических сетей, и доказал, что они являются линейчатыми, принадлежат линейной конгруэнции и с точностью до вещественных либо мнимых коллинеаций исчерпываются следующими типами:

$$1^{\circ} zx^a - ty^a = 0, \quad 2^{\circ} \frac{z}{t} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

$$3^{\circ} x^3 + yt^2 - xzt = 0, \quad 4^{\circ} \frac{z}{t} = \frac{y}{x} + \ln \frac{x}{t}.$$

О. Майер [5] решает проблему об отыскании линейчатых поверхностей Петерсона в предположении, что кривые, порождающие конические сети, — алгебраические. Автор вновь получил поверхности $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, 4^{\circ}$, но определил на каждой из них лишь ∞^1 конических сетей.

Цель настоящей работы — полностью решить указанную проблему.

Пусть линейчатая поверхность отнесена к асимптотическим линиям. Ее уравнения следующие:

$$\rho x_i(u, v) = y_i(v) + uz_i(v) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (1)$$

Линии $v = \text{const}$ — прямолинейные образующие, линии $u = \text{const}$ образуют второе семейство асимптотических линий.

Для поверхности, отнесенной к асимптотическим линиям, имеют место следующие дифференциальные формулы [6]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} &= \theta_u \frac{\partial x_i}{\partial u} + \beta \frac{\partial x_i}{\partial v} + p_{11} x_i, \\ \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} &= \gamma \frac{\partial x_i}{\partial u} + \theta_v \frac{\partial x_i}{\partial v} + p_{22} x_i,\end{aligned}\quad (2)$$

причем для линейчатой поверхности (1)

$$\begin{aligned}\beta &= 0, \quad p_{11} = 0, \quad \theta_u = 0, \\ \gamma &= \varphi(v) + u \varphi_1(v) - u^2 \varphi_2(v).\end{aligned}\quad (3)$$

Дифференциальное уравнение сопряженной сети на поверхности, отнесенной к асимптотическим линиям, имеет вид

$$du^2 - e^{2\sigma} dv^2 = 0. \quad (4)$$

Сопряженная сеть (4) будет конической тогда и только тогда, если функция $\sigma(u, v)$ удовлетворяет следующей системе из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [3, 4]:

$$2\sigma_{uv} = (\gamma e^{-2\sigma})_v - (\beta e^{2\sigma})_u, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}2(\sigma_{vv} + e^{2\sigma} \sigma_{uu}) &= \sigma_v^2 - e^{2\sigma} \sigma_u^2 - 4(\gamma \sigma_u - \beta \sigma_v e^{2\sigma}) - \beta^2 e^{4\sigma} + \\ &+ \gamma^2 e^{-2\sigma} - 2e^{2\sigma} (L + 2\beta_v) + 2M + 4\gamma_u,\end{aligned}\quad (6)$$

$$L = \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta_u^2 - \beta \theta_v - \beta_v - 2p_{11},$$

$$M = \theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta_v^2 - \gamma \theta_u - \gamma_u - 2p_{22}. \quad (7)$$

Уравнения (5), (6) выражают тот факт, что оба точечных инварианта Дарбу сопряженной сети (4) равны нулю и, следовательно, оба преобразования Лапласа нашей поверхности относительно сопряженной сети (4) вырождаются в линии Γ_1 , Γ_2 .

В случае линейчатой поверхности (1)

$$L = 0, \quad M = M(v) \quad (8)$$

уравнения (5), (6) принимают вид:

$$2\sigma_{uv} = (\gamma e^{-2\sigma})_v, \quad (5')$$

$$2(\sigma_{vv} + e^{2\sigma} \sigma_{uu}) = \sigma_v^2 - e^{2\sigma} \sigma_u^2 - 4\gamma \sigma_u + \gamma^2 e^{-2\sigma} + 2M + 4\gamma_u. \quad (6')$$

Первое из этих уравнений интегрируется непосредственно:

$$e^{2\sigma} = U \left[\int \gamma \frac{du}{U} + V \right], \quad (9)$$

где U — функция одного переменного u , V — функция одного переменного v .

Если внести эти выражения для σ в (6'), получим одно функциональное уравнение, содержащее шесть функций одного аргумента ($\varphi(v)$, $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $M(v)$, $V(v)$, $U(u)$), подлежащих определению.

Воспользуемся произволом в выборе переменной v , чтобы привести $V(v)$ к постоянной.

Функцию $U(u)$, определяющую коническую сеть, разложим по формуле Тейлора в окрестности $u = 0$, т. е. в окрестности асимптоти-

ческой линии $y(v)$. В качестве линии $y(v)$ может быть взята произвольная асимптотическая, поэтому можно считать, что в ее окрестности функция $\varphi(u, v)$ регулярна и при $u=0$ $e^{2\varphi}$ не обращается ни в нуль, ни в бесконечность, так как направления кривых конической сети не совпадают с асимптотическими направлениями. Следовательно, $U(0) \neq 0$, $V(v)$ также отлично от нуля, иначе из (9) следовало бы $e^{2\varphi}|_{u=0} = 0$.

Введем вместо v новый параметр \bar{v} по формуле

$$d\bar{v}^2 = V dv^2,$$

при этом v переходит в \bar{v} , причем

$$\bar{\gamma} d\bar{v}^2 = \gamma dv^2;$$

следовательно,

$$\bar{\gamma} V = \gamma.$$

Дифференциальное уравнение конической сети принимает вид

$$du^2 - U \left[\int \bar{\gamma} \frac{du}{U} + S \right] d\bar{v}^2 = 0, \quad (S = \text{const})$$

В дальнейшем опустим знак черты и запишем выражение для $e^{2\varphi}$ следующим образом:

$$e^{2\varphi} = U \left[\int \gamma \frac{du}{U} + S \right]. \quad (10)$$

Тем самым функцию V привели к постоянной. Для определения функций $\varphi(v)$, $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $M(v)$ после подстановки в (6') выражения для $e^{2\varphi}$ из (10), где функция U заменена ее разложением по степеням u , приравняем нулю коэффициенты при u^0 , u^1 , u^2 , u^3 .

Из равенства нулю коэффициента при u^0 следует

$$2M(v) + 3\varphi_1 - \frac{\varphi^2}{4S} + a_0\varphi + a_1 = 0, \quad (11)$$

где a_i — постоянные.

Из равенства нулю коэффициента при u^1 следует

$$\varphi'' = \frac{\varphi^3}{4S} - \frac{\varphi\varphi_1}{2} + 6\varphi_2S + a_2\varphi^2 + a_3\varphi_1 + a_4\varphi + a_5. \quad (12)$$

Из равенства нулю коэффициента при u^2 , в силу (12),

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{5}{2} \frac{\varphi'^2}{S} + \frac{\varphi_1\varphi^2}{4S} - \frac{1}{2} \varphi_1^2 + 11\varphi\varphi_2 + a_6\varphi\varphi_1 + a_7\varphi_2 + \\ & + a_8\varphi^2 + a_9\varphi_1 + a_{10}\varphi + a_{11}. \end{aligned} \quad (13)$$

Наконец, из равенства нулю коэффициента при u^3 , в силу (12), (13), следует:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & -\frac{15}{4} \frac{\varphi\varphi'^2}{S^2} + \frac{15}{4} \frac{\varphi'\varphi_1'}{S} + \frac{1}{4} \frac{\varphi_2\varphi^2}{S} + \frac{15}{2} \varphi_1\varphi_2 + a_{12}\varphi'^2 + \\ & + a_{13}\varphi\varphi_2 + a_{14}\varphi_1^2 + a_{15}\varphi\varphi_1 + a_{16}\varphi^2 + a_{17}\varphi_2 + a_{18}\varphi_1 + a_{20}\varphi + a_{21}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим теперь коническую сеть в окрестности второй асимптотической линии $z(v)$.

С этой целью сделаем замену переменной u по формуле

$$u_1 = \frac{1}{u}. \quad (15)$$

При этом уравнение (1) поверхности примет вид

$$\rho_1 x_i = z_i(v) + u_1 y(v). \quad (1')$$

а функция γ преобразуется в γ_1 :

$$\gamma_1 = \gamma \frac{du_1}{du} = -\frac{\gamma}{u^2} = -\varphi_2(v) - \varphi_1(v) u_1 - \varphi_2(v) u_1^2. \quad (16)$$

Дифференциальное уравнение (4) копицкой сети преобразуется к виду

$$du_1^2 - u_1^4 e^{2z_1} dv^2 = 0.$$

Следовательно,

$$e^{2z_1} = u_1^4 e^{2z_1}. \quad (17)$$

Уравнения (5'), (6') запишем так:

$$2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1 \partial v} = (\gamma_1 e^{-2z_1})_v, \quad (5')$$

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2} + e^{2z_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2} \right] = \left(\frac{\partial z_1}{\partial v} \right)^2 - e^{2z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial u_1} \right)^2 -$$

$$- 4\gamma_1 \frac{\partial z_1}{\partial u_1} + \gamma_1^2 e^{-2z_1} + 2M_1(v) + 4 \frac{\partial M_1}{\partial u_1}. \quad (6'')$$

Полагая в (6'') вместо u_1 , γ_1 , e^{2z_1} их выражения через u , v , e^{2z_1} по формулам (15), (16), (17), убеждаемся в том, что

$$M_1(v) = M(v). \quad (18)$$

Из уравнения (5'') вытекает

$$e^{2z_1} = U_1 \left[\int \frac{\gamma_1}{U_1} du_1 + V_1 \right]; \quad (19)$$

следовательно, в силу (17),

$$\int \frac{\gamma_1}{U_1} du_1 + V_1 = \frac{u_1^4 U}{U_1} \left[\int \frac{du}{U} + S \right]. \quad (20)$$

Продифференцировав обе части (20) по u , находим

$$\frac{u_1^4 U}{U_1} = \text{const.}$$

Итак,

$$V_1 = \text{const}$$

и

$$e^{2z_1} = U_1 \left[\int \frac{\gamma_1}{U_1} du_1 + S_1 \right], \quad (21)$$

где S_1 — постоянная.

Приравняв нулю коэффициенты при u_1^0 , u_1^1 , u_1^2 , u_1^3 в уравнении (6''), получим формулы, аналогичные (11), (12), (13), (14). При этом надо учесть, что

$$\gamma_1 = \varphi_2(v) u_1^2 + \psi_1(v) u_1 + \psi(v) = -\varphi(v) u_1^2 - \varphi_1(v) u_1 - \varphi_2(v),$$

значит,

$$\psi_2(v) = -\varphi(v),$$

$$\psi_1(v) = -\varphi_1(v),$$

$$\psi(v) = -\varphi_2(v).$$

Из каждого уравнения, содержащего функции φ , φ_1 , φ_2 , M , получим новое уравнение, заменив φ , φ_1 , φ_2 , M , соответственно, на $-\varphi_2$, $-\varphi_1$, $-\varphi$, M ; при этом коэффициенты разложения функции U следует заменить коэффициентами разложения функции U_1 , а постоянную S — постоянной S_1 .

Согласно этому, наряду с уравнениями (11), (12), (13) и (14) имеют место уравнения

$$2M(v) - 3\varphi_1 - \frac{\varphi_2^2}{4S_1} - b_0\varphi_2 + b_1 = 0, \quad (11')$$

где b_i — постоянные:

$$-\varphi_1'' = -\frac{\varphi_2^3}{4S_1} - \frac{\varphi_1\varphi_2}{2} - 6\varphi S_1 + b_2\varphi_2^2 - b_3\varphi_1 + b_4\varphi_2 + b_5, \quad (12')$$

$$\begin{aligned} -\varphi_1''' &= \frac{5\varphi_2'^2}{2S_1} - \frac{\varphi_1\varphi_2^2}{4S_1} - \frac{1}{2}\varphi_1^2 + 11\varphi\varphi_2 + b_6\varphi_2\varphi_1 - b_7\varphi + \\ &\quad + b_8\varphi_2^2 - b_9\varphi_1 - b_{10}\varphi_2 + b_{11}, \end{aligned} \quad (13')$$

$$\begin{aligned} -\varphi_1'''' &= \frac{15\varphi_2\varphi_2^2}{4S^2} + \frac{15\varphi_1\varphi_2'}{4S} - \frac{\varphi\varphi_2^2}{4S} + \frac{15\varphi\varphi_1}{2} + b_{12}\varphi_2'^2 + b_{13}\varphi\varphi_2 + b_{14}\varphi_1^2 + \\ &\quad + b_{15}\varphi_1\varphi_2 + b_{16}\varphi_2^2 - b_{17}\varphi - b_{18}\varphi_1 - b_{20}\varphi_2 + b_{21}. \end{aligned} \quad (14')$$

Вычитая из (11) (11'), находим следующую зависимость между φ , φ_1 , φ_2 :

$$6\varphi_1 = \frac{\varphi^3}{4S} - \frac{\varphi_2^2}{4S_1} + L_1(\varphi, \varphi_2), \quad (22)$$

где $L_1(\varphi, \varphi_2)$ — линейная функция.

Внеся значение φ_1 из (22) в (12), (12'), находим такие выражения для φ'' , φ_2'' :

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \frac{11\varphi^3}{48S} + \frac{1}{48}\frac{\varphi\varphi_2^2}{S_1} + L_2(\varphi, \varphi_2), \\ \varphi_2'' &= \frac{11\varphi_2^3}{48S_1} + \frac{1}{48}\frac{\varphi_2\varphi_2^2}{S} + M_2(\varphi, \varphi_2), \end{aligned} \quad (23)$$

где L_2 , M_2 — полиномы второй степени.

Из (22) в силу (23) следует

$$\varphi_1 = \frac{11}{4 \cdot 12^2} \left[\frac{\varphi^4}{S^2} - \frac{\varphi_2^4}{S_1^2} \right] + \frac{\varphi'^2}{12S} - \frac{\varphi_2'^2}{12S_1} + L_3(\varphi, \varphi_2), \quad (24)$$

где L_3 — полином третьей степени.

Внесем в правую часть (13) значение φ_1 из (22); найдем

$$\varphi_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi'^2}{S} + \frac{11}{2 \cdot 24^2} \cdot \frac{\varphi^4}{S^2} - \frac{1}{2 \cdot 24^2} \frac{\varphi_2^4}{S_1^2} - \frac{5}{24^2} \frac{\varphi^2\varphi_2^2}{SS_1} + M_3(\varphi, \varphi_2). \quad (25)$$

Вычитая из (25) (24), находим

$$\frac{29}{12}\frac{\varphi'^2}{S} + \frac{1}{12}\frac{\varphi_2'^2}{S_1} - \frac{11}{2 \cdot 24^2}\frac{\varphi^4}{S^2} + \frac{21}{2 \cdot 24^2}\frac{\varphi_2^4}{S_1^2} - \frac{5}{24^2}\frac{\varphi^2\varphi_2^2}{SS_1} + A_3(\varphi, \varphi_2) = 0. \quad (26)$$

Заменив в этом равенстве φ_2 на $-\varphi$, φ на $-\varphi_2$, получим

$$\frac{1}{12}\frac{\varphi'^2}{S} + \frac{29}{12}\frac{\varphi_2'^2}{S_1} - \frac{11}{2 \cdot 24^2}\frac{\varphi^4}{S^2} + \frac{21}{2 \cdot 24^2}\frac{\varphi_2^4}{S_1^2} - \frac{5}{24^2}\frac{\varphi^2\varphi_2^2}{SS_1} + B_3(\varphi, \varphi_2) = 0. \quad (27)$$

Из (26), (27) находим φ'^2 , $\varphi_2'^2$:

$$7 \frac{\varphi_2'^2}{S_1} = \frac{1}{24^2} \left(17 \frac{\varphi_2^4}{S_1^2} + 14 \frac{\varphi^2 \varphi_2^2}{SS_1} - 31 \frac{\varphi^4}{S^2} \right) + C_3(\varphi, \varphi_2), \quad (28)$$

$$7 \frac{\varphi'^2}{S} = \frac{1}{24^2} \left(17 \frac{\varphi^4}{S^2} + 14 \frac{\varphi^2 \varphi_2^2}{SS_1} - 31 \frac{\varphi_2^4}{S_1^2} \right) + D_3(\varphi, \varphi_2). \quad (29)$$

Продифференцируем (28) и заменим φ_2'' по (23):

$$5\varphi_2' \left[89 \frac{\varphi_2^3}{S_1^2} + 7 \frac{\varphi_2 \varphi^2}{SS_1} + A_2(\varphi, \varphi_2) \right] = -\varphi' \left[7 \frac{\varphi_2^2 \varphi}{SS_1} - 31 \frac{\varphi^3}{S^2} + B_2(\varphi, \varphi_2) \right] \quad (30)$$

и аналогично

$$-\varphi_2' \left[7 \frac{\varphi^2 \varphi_2}{SS_1} - 31 \frac{\varphi_2^3}{S_1^2} + C_2(\varphi, \varphi_2) \right] = 5\varphi' \left[89 \frac{\varphi^3}{S^3} + 7 \frac{\varphi \varphi_2^2}{SS_1} + D_2(\varphi, \varphi_2) \right]. \quad (31)$$

Исключив φ' , φ_2' , находим зависимость между φ , φ_2 в следующем виде:

$$\varphi \varphi_2 \left(47 \frac{\varphi_2^4}{S_1^3 S} + 590 \frac{\varphi^2 \varphi_2^2}{S^2 S_1^2} + 47 \frac{\varphi^4}{S^3 S_1} \right) + A_5(\varphi, \varphi_2) = 0. \quad (32)$$

Чтобы получить еще одну зависимость между φ , φ_2 , приравняем два выражения для φ_2'' из (14) и (23). Предварительно преобразуем (14). В силу (23)

$$\varphi_1' = \frac{\varphi \varphi_1}{12S} - \frac{\varphi_2 \varphi_2'}{12S_1} + \alpha_1 \varphi' + \alpha_2 \varphi_2',$$

где α_1 , α_2 — постоянные.

Внеся это выражение для φ_1' в (14), находим

$$\varphi_2'' = -\frac{55 \varphi \varphi^2}{16 S^2} - \frac{5 \varphi_2 \varphi_2'}{16 SS_1} + \dots \quad (33)$$

и аналогично

$$\varphi'' = -\frac{55 \varphi_2 \varphi_2'^2}{16 S_1^2} - \frac{5 \varphi \varphi' \varphi_2'}{16 SS_1} + \dots \quad (34)$$

Исключим $\varphi' \varphi_2$ из системы уравнений (33), (34):

$$\varphi'' - \varphi_2 \varphi'' = \frac{55}{16} \left(\frac{\varphi_2^2 \varphi_2'^2}{S_1^2} - \frac{\varphi^2 \varphi'^2}{S^2} \right) + \dots \quad (35)$$

Внесем сюда значения φ_2'' , φ'' и $\varphi_2'^2$, φ'^2 из (23), (28), (29); в результате найдем алгебраическое уравнение шестого порядка относительно φ , φ_2 :

$$\left(\frac{\varphi_2^2}{S_1} - \frac{\varphi^2}{S} \right) \left[17 \frac{\varphi_2^4}{S_1^2} + 62 \frac{\varphi_2^2 \varphi^2}{SS_1} + 17 \frac{\varphi^4}{S^2} \right] + B_5(\varphi, \varphi_2) = 0. \quad (36)$$

Искомые функции $\varphi(v)$, $\varphi_2(v)$ удовлетворяют двум алгебраическим уравнениям шестого порядка (32), (36). Старшие члены этих уравнений не содержат общих множителей, следовательно, многочлены левых частей (32), (36) не имеют общего делителя и $\varphi(v)$, $\varphi_2(v)$ постоянны. В силу (23) $\varphi_1(v)$ также постоянная.

Если $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\gamma = 0$ и линейчатая поверхность представляет собою квадрику, которая несет ∞^4 конических сетей, порождаемых ее сопряженными полярами.

Если эти постоянные не все нули, то, приравняв нуль $\gamma = \varphi + -\varphi_1 u - \varphi_2 u^2$, получим две флексодальные кривые, которые в нашем случае являются асимптотическими линиями $u = \text{const}$. Следовательно, они прямые, и наша линейчатая поверхность принадлежит линейной конгруэнции, для которой эти прямые служат директрисами.

В силу (9) $e^{2\alpha}$ не зависит от v , поэтому система уравнений в частных производных приводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

Выходит, σ и определяемая ею коническая сеть зависит не менее чем от двух произвольных постоянных. В [3, 4] было доказано, что поверхность Петерсона (если исключить тривиальный случай конуса, цилиндра и плоскости) может нести не более чем ∞^4 конических сетей. Квадрики и только они несут ∞^4 конических сетей. Не существует поверхностей, несущих ∞^3 конических сетей.

Таким образом, мы приходим к выводу, что если неразвертывающаяся линейчатая поверхность, не являющаяся квадрикой, служит поверхностью Петерсона, то она обладает ∞^2 конических сетей.

Поверхности Петерсона, несущие ∞^2 конических сетей, были определены в [3, 4]. С помощью вещественных или мнимых коллинеаций их уравнения могут быть приведены к виду

$$1^\circ \quad zx^\alpha - ty^\alpha = 0$$

либо

$$2^\circ \quad \frac{z}{t} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

в случае, когда директрисы не совпадают, и к виду

$$3^\circ \quad x^3 + yt^2 - xzt = 0 \quad (\text{поверхность Cayley})$$

либо

$$4^\circ, \quad \frac{z}{t} = \frac{y}{x} + \ln \frac{x}{t},$$

когда директрисы совпадают (конгруэнция особенная).

В [6] приведены все ∞^2 представлений этих поверхностей в виде поверхностей Петерсона и даны уравнения кривых, порождающих конические сети.

Для поверхностей 1° кривые Γ_1 , Γ_2 определяются уравнениями

$$1, \quad \frac{1}{u^2}, \quad \frac{ab}{u^{a+1}}, \quad aau^{a-1},$$

$$1, \quad \frac{1}{v^2}, \quad \frac{aa}{v^{a+1}}, \quad abv^{a-1}.$$

Они расположены на поверхностях второго порядка пучка

$$zt = abx^2y$$

и определяются их пересечением с поверхностями

$$azx^\alpha = bty^\alpha,$$

$$bzx^\alpha = aty^\alpha.$$

Для поверхностей 2° кривые, порождающие сеть

$$\sin u - \cos u, \quad -\sin u - \cos u, \quad \alpha + 2\beta u, \quad 2\beta$$

$$\cos v + \sin v, \quad \sin v - \cos v, \quad \alpha - 2\beta v, \quad -2\beta,$$

расположены на поверхностях второго порядка пучка

$$23^2(x^2 + y^2) = t^2$$

и определяются их пересечением с поверхностями

$$\frac{z}{t} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \pm \left(\frac{\pi}{25} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Если $t = 0$ — несобственная плоскость, это винтовые линии, следовательно, кривые трансцендентные, и только при $\beta = 0$ получается семейство окружностей в плоскости $t = 0$, порождающих сети переноса на геликоиде.

Для поверхностей 3° кривые, порождающие конические сети

$$2au + b, 4au^3 + 6bu^2 + 2u + 1, 6xu^2 + 6bu + 1, a,$$

$$2av - b, 4av^3 - 6bv^2 + 2v - 1, 6xv^2 - 6bv + 1, a,$$

расположены на поверхностях второго порядка пучка

$$a^2(3x^2 - 2zt) = (3b^2 - 2a)t^2$$

и определяются их пересечением с поверхностями

$$a^3(x^3 + yt^2 - xzt) \pm (ab - a^2 - b^3)t^3 = 0.$$

Для поверхностей 4° кривые, порождающие конические сети

$$\frac{a}{u^2}, \frac{b \ln u - b - 1}{u^3}, -a \ln u - a - 1, a,$$

$$\frac{a}{v^2}, \frac{a \ln v - a - 1}{v^3}, -b \ln v - b - 1, b,$$

расположены на поверхностях второго порядка пучка

$$xz + yt + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2 \right)xt = 0$$

и определяются их пересечением с поверхностями

$$\frac{z}{t} = \frac{y}{x} + \ln \frac{x}{t} \pm \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \ln \frac{b}{a} \right).$$

Таким образом, во всех случаях *кривые, порождающие конические сети линейчатой поверхности Петерсона, принадлежат пучку квадрик, но вообще говоря, не алгебраические.*

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Reidemeister. Hamburger Abhandlungen 1 (1922), стр. 127—138.
2. W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie, т. II, стр. 233—235. Berlin, 1923.
3. Я. П. Бланк. Поверхности переноса и их обобщения. Докт. дисс., Харьков, 1949.
4. Я. П. Бланк. Конические сети. Записки матем. отд. физ.-матем. факультета ХГУ и Х. М. О., т. 23, 1952, стр. 113—141.
5. O. Mayeur. Surfaces régulières de Peterson Bull. Math. de la Soc. RPR т. 2, n. 1, Paris, 1958.
6. Fubini — Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, 1931.
7. Я. П. Бланк. О поверхностях, несущих ∞^2 конических сетей. ДАН СССР, т. 131, № 3, 1960, стр. 482—484.

Поступила 18 мая 1970 г.

О СФЕРИЧЕСКОМ ИЗОБРАЖЕНИИ КРАТЧАЙШЕЙ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

A. A. Борисенко

(Харьков)

В работе [1] поставлена задача: выяснить, ограничено ли сферическое изображение кратчайшей на выпуклой поверхности. В настоящей заметке построен пример выпуклой поверхности, на которой сферическое изображение кратчайшей может быть сколь угодно большим.

Пусть l — прямая в пространстве, O_1 — точка на ней, $T_i(O_1)$ — совокупность правильных выпуклых трехгранных углов с осью l и вершиной O_1 . Будем считать, что совокупность углов $T_i(O_1)$ обладает следующими свойствами:

1) все углы содержат произвольную фиксированную точку A , лежащую на прямой l и отличную от O_1 ;

2) каждый угол T_{i+1} содержится внутри T_i при любом повороте вокруг оси l ;

3) в сечении четных углов плоскостью P_1 , перпендикулярной l и проходящей через точку A , получаются подобно расположенные треугольники;

4) в сечении нечетных углов этой же плоскостью получаются также подобно расположенные треугольники, повернутые на угол π вокруг точки A ;

5) кривизны трехгранных углов T_i при $i \rightarrow \infty$ стремятся к 2π .

Зафиксируем трехгранный угол T_1 . Угол T_2 перенесем параллельно в направлении AO_1 ; новое положение его вершины обозначим через O_2 . Перенос выберем так, чтобы треугольник $t_2(P_1)$, который получается в сечении угла $T_2(O_2)$ плоскостью P_1 , был описан вокруг треугольника $t_1(P_1)$. Существует плоскость P_2 , перпендикулярная l , расположенная дальше плоскости P_1 от точки O_1 в направлении O_1A и такая, что лежащий в ней треугольник $t_2(P_2)$ вписан в $t_1(P_2)$.

Перенесем параллельно угол T_3 в направлении AO_1 так, чтобы треугольник $t_2(P_2)$ был вписан в $t_3(P_2)$; новое положение вершины угла T_3 обозначим через O_3 . Существует плоскость P_3 , перпендикулярная l , расположенная дальше плоскости P_2 от точки O_1 в направлении AO_1 и такая, что треугольник $t_3(P_3)$ вписан в треугольник $t_2(P_3)$.

Аналогично перенесем остальные углы. После параллельного переноса угла T_{n+1} треугольник $t_n(P_n)$ будет вписан в $t_{n+1}(P_n)$, а треугольник $t_{n+1}(P_{n+1})$ — в $t_n(P_{n+1})$. Общая часть всех трехгранных углов есть выпуклое тело Φ . Его поверхность F состоит из частей F_i поверхностей углов T_i . Каждая часть F_i состоит из трех выпуклых четырехугольников, каждый из которых лежит на грани T_i и соседствует с двумя четырехугольниками из F_{i-1} и двумя четырехугольниками из F_{i+1} . При этом F_i имеет общие точки, отличные от конических, лишь с F_{i-1} и F_{i+1} .

Возьмем произвольную точку X_i на F_i и соединим ее кратчайшей k_i с точкой O_1 . Эта кратчайшая пройдет через все F_s , если $s \leq i$, переходя не менее одного раза с F_{s-1} на F_s . При $s \rightarrow \infty$ двугранные углы между F_{s-1} и F_s стремятся к $\frac{2}{3}\pi$; отсюда следует, что длина сферического изображения кратчайшей k_i может быть как угодно большой, если i достаточно велико.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Залгаллер и Ю. Г. Решетняк. «Труды Четвертого всесоюзного математического съезда». Изд-во «Наука», Л., 1964.
2. В. А. Залгаллер. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. См. статью в настоящем сборнике.

Поступила 8 декабря 1969 г.

ВОПРОС О СФЕРИЧЕСКОМ ИЗОБРАЖЕНИИ КРАТЧАЙШЕЙ

B. A. Залгаллер

(Ленинград)

1. Пусть L — кратчайшая на полной выпуклой поверхности F евклидова пространства R^3 . Сферическим изображением кратчайшей L называем множество L^* на единичной сфере S^2 , которое заполняется концами внешних нормалей к тем опорным плоскостям поверхности F , которые контактируют с F в точках L .

А. В. Погорелов [1, стр. 744] ставит задачу: доказать, что каждому внутреннему замкнутому отрезку L соответствует в L^* простая спрямляемая дуга. Цель настоящей заметки — на примерах разъяснить некоторые оттенки этой задачи.

2. Начнем с рассмотрения сферического изображения всей кратчайшей на выпуклых поверхностях простых типов.

Если F — выпуклая поверхность класса C^2 , то L^ — простая спрямляемая кривая.*

Действительно, не нарушая общности, можем считать F замкнутой. Пусть δ — минимум главных радиусов кривизны по всем точкам F , очевидно, $\delta > 0$. Пусть F_δ — выпуклая поверхность, полученная отступлением (во внутрь) на δ от F , и XY — любые две точки на L , а $X'Y'$ — их проекции на F_δ . Тогда для угла $\Theta(X, Y)$ между нормальми к F в точках X и Y имеем

$$\Theta(X, Y) \leq \frac{XY}{\delta} + \frac{X'Y'}{\delta} \leq \frac{2}{\delta} XY.$$

Отсюда (вместе с замкнутостью L^* и гладкостью F) уже следует, что L^* — простая кривая и дл. $L^* \leq \frac{2}{\delta}$ дл. L .

Для кратчайшей L на выпуклом многограннике F сферическое изображение L^* содержит замкнутые множества A^*, B^* , являющиеся изображениями концов A, B кратчайшей L , и простую сферическую ломаную $(L - A - B)^*$. Если $A^* \cap B^* = 0$, то $(L - A - B)^*$ лишь концами примыкает соответственно к A^* и B^* . Если же $A^* \cap B^* \neq 0$, то A и B лежат на одной грани F . В случае, когда A и B принадлежат одной грани, но не принадлежат одному ребру, $(L - A - B)^* = A^* \cap B^*$ — точка на сфере, а если A и B принадлежат одному ребру, то $(L - A - B)^* = A^* \cap B^*$ — дуга большого круга¹.

3. Вернемся к строению L^* для общих выпуклых поверхностей. Если конец L лежит в конической точке, то L^* , заведомо, не кривая. Справедливо также следующее.

L^ может не являться простой кривой, когда конец L не коническая, а ребристая точка.*

Пример 1. Пусть F — поверхность выпуклого тела, являющегося пересечением цилиндра $y \geq |x|^{1/2}$ и полупространств $y \geq z, y \geq -z$ (рис. 1). A — начало координат, B — точка с координатами $x_B > 0, y_B = x_B^{1/2}, z_B = 0$. Мы утверждаем, что кратчайшая AB на F целиком

¹ Последний случай существенно особый: здесь параметр на кривой L^* никак не связан с монотонным продвижением вдоль L .

лежит в плоскости $z = 0$, т. е. $\overline{AB} = \overline{AP'B}$ (рис. 1). Действительно, иначе нашелся бы путь \overline{APB} , более короткий, чем $\overline{AP'B}$. Но из развертывания па плоскость боковой поверхности цилиндра следует, что $\overline{BP'} < \overline{BP}$. А выбор уравнения $y = |x|^{V^2}$ обеспечивает $\overline{AP'} < AP$. В самом деле,

$$AP = \sqrt{x_P^2 + 2y_P^2}, \quad AP' = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad \text{где } y = |x|^{V^2},$$

то, при $x > 0$,

$$\int_0^x \sqrt{1 + 2x^{2V^2-2}} dx < \sqrt{x^2 + 2x^{2V^2}},$$

в чем легко убедиться, сравнивая значения правой и левой частей при $x = 0$ и их производные при $x > 0$.

В условиях этого примера A — ребристая точка; L выходит из A в направлении ребра в этой точке; L^* имеет топологическое строение буквы T .

При решении задачи А. В. Погорелова хотелось бы начать с доказательства гипотезы, что $(L - A - B)^*$ всегда является простой кривой. Учитывая известные свойства кратчайших на выпуклой поверхности ([2, 3, 1, гл. III, § 1]), для этого достаточно доказать следующее предположение.

Кратчайшая L на выпуклой поверхности F , за исключением случая, когда L является участком прямого ребра на поверхности F , не может во внутренней для L точке пройти через ребристую точку поверхности F в направлении ребра в этой точке.

Доказательство такого утверждения имело бы значение и независимо от исследования свойств сферического изображения¹.

Высказанное предположение мы можем доказать только в весьма частном случае. Предположим, что F имеет плоскость симметрии и кратчайшая $L = \overline{AB}$ лежит в этой плоскости и проходит через ребристую точку O (не являющуюся внутренней точкой прямого ребра на L) в направлении ребра в точке O . Этот случай мы можем свести к противоречию. Переходим от F к поверхности F' тела, ограниченного только касательным конусом к F в точке O и перпендикулярными к плоскости симметрии опорными плоскостями к F в точках L . По лемме Буземана и Феллера L будет кратчайшей и на F' . Примерный вид F' изображен на рис. 2 (мы предполагаем, что именно на участке \overline{BO} кривая L не идет вдоль ребра). Пусть при обозначениях, ясных на рис. 2, точка P имеет координаты x, y, z . Мы можем выбирать P произвольно близкой к O . При этом можно добиться выполнения неравенства $\overline{BO} > \overline{BPC}$. Действительно,

$$\overline{BP} = \sqrt{\overline{BP'}^2 + z^2} = p + \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2p} + o(y^2),$$

$$\overline{PO} \geq \sqrt{x^2 + y^2} = PC + \frac{y^2}{2x} + o\left(\frac{y^2}{x}\right),$$

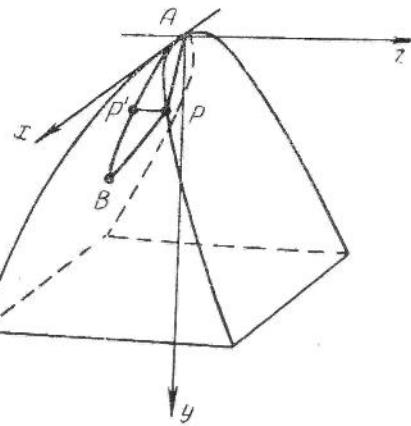


Рис. 1.

¹ О свойствах ребристых точек см. [4, стр. 48, 5]. Возможно, при доказательстве высказанного предположения могут оказаться полезными результаты работы [6].

откуда

$$\overline{BO} = p + \overline{PO} \geq \overline{BPC} + \left[\frac{y^2}{2x} - \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2p} \right] + o\left(\frac{y^2}{x}\right),$$

и при P , столь близком к O , что x мало по сравнению с $p \operatorname{ctg}^2 \alpha$, величина, стоящая в квадратных скобках, будет положительной и мажорирующей остаточный член, т. е. наступит неравенство $\overline{BO} > \overline{BPC}$.

Если и на участке \overline{OA} кратчайшая не была прямолинейным ребром, то и путь \overline{OA} заменился некоторым более коротким путем \overline{CA} . Если же OA — прямой участок ребра (как на рис. 2), то

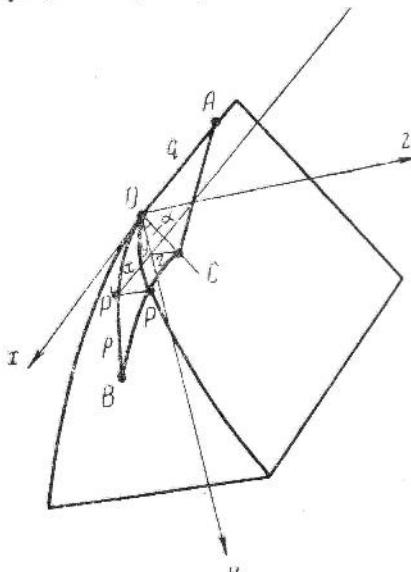


Рис. 2.

$$CA = \sqrt{q^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha}} = OA + \frac{y^2}{2q} + o(y^2),$$

и удлинение при замене OA на CA компенсируется (при достаточно малых y) сокращением при замене \overline{BO} на \overline{BPC} . Итак, L допускает сокращение, т. е. L не есть кратчайшая.

4. Обратимся к вопросу о спрямляемости L^* в случае, когда известно, что L^* — простая дуга и концы L лежат в гладких точках поверхности F . Такую кратчайшую можно приближать аналогичного типа кратчайшими L_n на выпуклых многогранниках, обеспечивая сходимость $L_n^* \rightarrow L^*$; поэтому спрямляемость L^* следовала бы из равномерной ограниченности длин L_n^* . Предположение о существовании такой равномерной оценки высказывалось [7, примеч. на стр. 214]. Однако это предположение ошибочно.

Сферическое изображение L^ кратчайшей L на выпуклом многограннике, имеющей концы в гладких точках, может оказываться длиннее любого наперед заданного числа.*

Пример 2. Предпошлем построению два замечания, относящихся к внутренней геометрии бесконечных выпуклых многогранников F .

- 1) Пусть F изометричен дважды покрытому бесконечному плоскому многограннику $HACN$ (рис. 3) с кривизнами $2\pi - \Theta$ и φ в вершинах A и C , а L — бесконечная геодезическая, идущая из вершины A под углом $\delta < \frac{\theta}{2}$ к ребру AC . Тогда при $\varphi < 2\delta$ геодезическая L является геодезическим лучом. Мы понимаем под этим, что L является кратчайшей на любом своем конечном участке AB . При $\varphi < \delta$ любой путь $BP - PA$ превосходит AB не менее, чем на $AC(1 - \cos \delta)$. Справедливость этих утверждений ясна из рис. 3 и простейших теорем планиметрии.

- 2) Пусть бесконечный выпуклый многогранник F изометричен развертке, состоящей из части U , изометричной дважды покрытой симметричной ($OK = OM$) бесконечной плоской области $HKMN$ (рис. 4) с разрезом по KM и из под克莱енной по разрезу KM гомеоморфной кругу, геодезически выпуклой, области V с многогранной метрикой положительной кривизны. (При этом полная кривизна F равна $2\pi - \Theta > 0$).

Пусть известно, что из некоторой внутренней точки A области V проведен геодезический луч L , причем идущая в U часть L есть KBN (рис. 4), а длина AK участка L в области V равна ρ . Пусть, наконец, через некоторую точку $T \in KM$ идет луч $l = TC \dots$ (рис. 4), образующий угол $\delta < \frac{\theta}{2}$ с KN .

Изменим метрику F , вырезая из F сектор с вершиной C , одной из сторон l и углом $\omega < \delta$ (рис. 4) и отождествляя края разреза. Мы утверждаем, что при достаточноном удалении точки C вдоль луча l в измененной метрике L останется геодезическим лучом.

Нетрудно проверить, что для этого достаточно при выборе C взять $z = K'C$ столь большим, чтобы выполнялось неравенство $z(1 - \cos \delta) > \rho$.

3) Перейдем к построению примера. На единичной сфере S^2 выберем область $\Omega(\varepsilon)$ с геодезическим диаметром ε , где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < 1$, $\varepsilon_0^2 = \cos \varepsilon_0$.

Каков бы ни был лежащий в $\Omega(\varepsilon)$ сферический треугольник с углом 2δ ($0 < \delta < \frac{\pi}{4}$), его площадь $\omega < \delta$. Действительно, пусть a, b — длины прилегающих к углу 2δ сторон этого треугольника, тогда имеем

$$\omega < \frac{1}{\cos \varepsilon} \left(\frac{ab}{2} \sin 2\delta \right) < \frac{\varepsilon^2}{\cos \varepsilon} \delta \leqslant \frac{\varepsilon_0^2}{\cos \varepsilon_0} \delta = \delta.$$

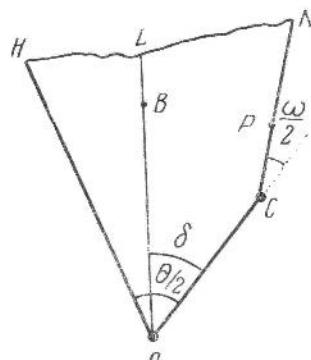


Рис. 3.

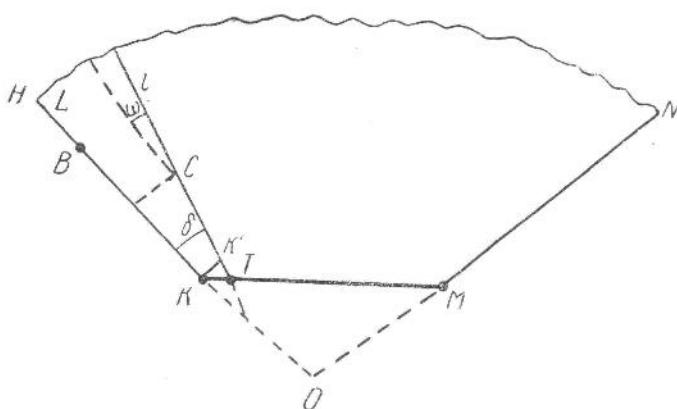


Рис. 4.

4) Внутри $\Omega(\varepsilon)$ выберем удаленные от центра $\Omega(\varepsilon)$ на $\frac{\varepsilon}{3}$ точки P^* , Q^* (рис. 5). Пусть, далее P_1, Q_1 — в $\Omega(\varepsilon)$ полуплоскости со сферическими изображениями P_1^*, Q_1^* якобы лежат на P^*, Q^* , прямые, перпендикулярные линии пересечения P_1^*, Q_1^* ,

Выберем весьма малое $\delta < \frac{\pi}{2}$ и пусть l — прямая $P_1^* \parallel l$ часть P_1 в положение P_2 так, чтобы P_1 и P_2 выскакивали из $\Omega(\varepsilon)$ под углом $\tau = \pi - 2\delta$ (см. рис. 6). Малость выбранного $\delta < 0$ мы отговорим позже.

На бесконечном выпуклом многограннике F с тремя гранями P_1, P_2, P_3 и вершиной C_1 отложим на ребрах отрезки $C_1A_1 = C_1A_2 = 1$ (рис. 6). Проведем на F из A_1 бесконечную геодезическую $L = A_1A_2 \dots$. В силу пункта 1) это будет геодезический луч на F . Его можно с сохранением этого свойства немного продолжить за конец A_1 . Для этого достаточно взять $AA_1 < \frac{1}{2} A_1C_1(1 - \cos \delta)$.

Так мы получаем идущий из A геодезический луч на трехгранной поверхности F .

5) Теперь перегнем Q_1 по прямой $m_1 \parallel m$, чтобы Q_1 и Q_2 высекали на P_2 угол γ . Вершину C_2 мы можем считать ото двинутой так далеко, что, в силу пункта 2) продолжающая начало AA_1A_2 геодезическая L на четырехгранный поверхности F (с гранями P_1, Q_1, P_2, Q_2) будет геодезическим лучом.

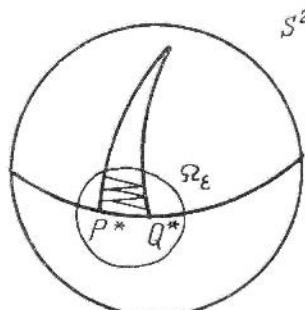


Рис. 5.

6) Аналогично перегнем P_2 по прямой $l_2 \parallel l$ и т. д. (рис. 6). Процесс обрываем через конечное число шагов, когда впервые изображение очередной плоскости Q_n или P_{n+1} выйдет за пределы $\Omega(\varepsilon)$.

7) Если при фиксированном $\varepsilon > 0$ брать достаточно малое $\delta > 0$, то количество осуществленных шагов может быть сделано больше любого наперед заданного числа.

Выбирая точку B на L в последней грани P_n , получаем кратчайшую AB . Ее сферическим изображением L^* служит $(2n-2)$ -звенная ломаная в $\Omega(\varepsilon)$ (рис. 5). При больших n длина L^* будет произвольно велика. Переход от F к замкнутому многограннику M осуществляется усечением F вдали от кратчайшей AB .

5. В примере 2 значение $\varepsilon > 0$ можно было брать произвольно малым. Мы используем это обстоятельство при построении примера 3, который подтвердит справедливость следующего утверждения.

Существуют кратчайшие на выпуклой поверхности, сферическое изображение которых является простой кривой, не спрямляемой ни на каком участке, прилегающем к одному из концов.

Пример 3. 1) В примере 2 геодезический луч L в последней грани P_n идет под весьма малым (по сравнению с ε) углом δ к близлежащему ребру. Начнем с того, что, немного усложнив построения, устраним эту особенность примера 2.

В условиях рис. 5 звенья ломаной L^* образуют последовательно друг с другом углы 2δ . Допустим, что мы будем проводить аналогичную ломаную с последовательными углами $\delta_i + \delta_{i+1}$, где $\delta_i = 2^{i-1}\delta$.

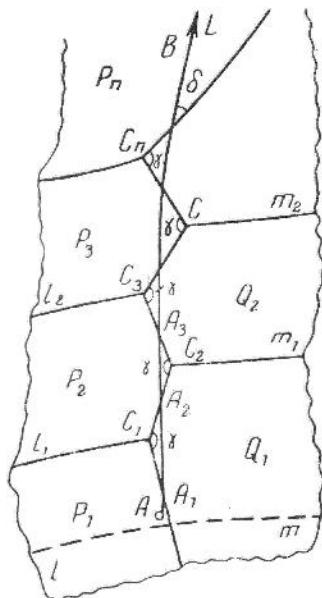


Рис. 6.

Тогда найдется такая абсолютная постоянная $0 < t < 1$ и такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, прежде чем эта ломаная выйдет из области $\Omega(\varepsilon)$, очередной угол δ_i превзойдет $t\delta$. Построим ломаную L^* с углами

$$\delta_i = \begin{cases} 2^{i-1}\delta & \text{при } i \leq i_0, \\ \delta_{i_0} & \text{при } i > i_0. \end{cases}$$

Кроме того, выберем $\varepsilon_2 > 0$ ($\varepsilon_2 < 1$) из уравнения $\varepsilon_2^2 = \frac{2t}{3} \cos \varepsilon_2$.

Наконец, выберем $\varepsilon_3 > 0$ таким, чтобы при $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$ для любого сферического треугольника, лежащего в области $\Omega(2\varepsilon)$ и имеющего сторону Δ , площадь ω допускала оценку $\omega < t\Delta$.

В пункте 3) примера 2 будем подчинять ε условию $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

При построении очередного треугольника $A_i C_i A_{i+1}$ будем придавать ему (при соответствующих вершинах) вместо углов δ , $\gamma = \pi - 2\delta$, δ углы $\tilde{\delta}_i$, $\tilde{\gamma}_i = \pi - \delta_i - \delta_{i+1}$, δ_{i+1} . Тогда для кривизны ω_i в очередной вершине C_i имеем

$$\omega_i \leq \frac{1}{\cos \varepsilon} \left(\frac{ab}{2} \sin(\delta_i + \delta_{i+1}) \right) \leq \frac{\varepsilon^2}{\cos \varepsilon} \frac{3}{2} \delta_i < t\delta_i < \delta_i,$$

что обеспечивает нам возможность сохранять L геодезическим лучом. Построения примера с этими изменениями назовем примером 2'. Теперь уже последний угол $\delta_n > t\delta$.

2) Построим по правилам примера 2' бесконечный выпуклый многогранник F , на котором кратчайшая $L = AB$ имеет сферическое изображение длины > 1 . Вдали от L усечем F до замкнутого многогранника M_1 , на котором L останется кратчайшей.

Начальный участок AA_1 кратчайшей L лежит в некоторой грани T (из рис. 6 грани T соответствует P_1).

3) Выберем на S^2 последовательность круговых областей $\Omega(\varepsilon_m)$ со стремящимися к нулю диаметрами ε_m . Для каждого m по правилам примера 2' и области $\Omega(\varepsilon_m)$ построим бесконечный выпуклый многогранник F_m и кратчайший на любом конечном участке геодезический луч L на нем с длиной сферического изображения > 1 .

Для каждого многогранника F_m рассмотрим его предельный конус K_m с вершиной в начальной точке A геодезической L на F_m . (По характеру построений примера 2' конус K_m будет четырехгранным). Геодезический L на F_m отвечает отличный от ребра луч l на K_m . (Он идет под углом $\delta_{n(m)}$ к близлежащему ребру). При больших m конусы K_m близки к плоскости.

Приложим K_m к грани T многогранника M_1 , помещая вершину A конуса K_m в точку A на T , направляя l по AA_1 и совмещая с T ту грань K_m , в которой лежит l . После этого вместо M_1 рассмотрим поверхность M_1^m тела, ограниченного плоскостями всех граней M_1 , кроме T и поверхностью K_m . При больших m грань T как бы заменяется близкой к плоскости четырехгранной поверхностью.

Кривая $L = AA_1|_{K_m} + A_1B|_{M_1}$ составит на M_1^m одну геодезическую.

4) Покажем, что при достаточно больших m она будет геодезическим лучом на M_1^m .

На поверхности M_1^m по сравнению с M_1 будет пять новых вершин: четырехгранный в точке A и четыре трехгранных вершины на пересечениях ребер K_m с прилегающими гранями M_1 . Из четырех последних вершин лишь одна лежит вблизи L .

При $m \rightarrow \infty$ метрики M_1^m сходятся к метрике M_1 , поэтому при большом m кратчайшая L на M_1^m идет по отношению к вершинам M_1

так же, как шла L на M_1 . Три новые вершины не только несут малую кривизну, но и лежат в стороне от L и не могут повлиять на возможность сокращения L .

Остается одна новая трехгранная вершина, близкая к L . Кривизны в этой вершине измеряются площадью сферического треугольника, лежащего в $\Omega(2\epsilon_0)$ и имеющего одной из сторон значение Δ , где $\pi - \Delta$ есть двугранный угол при ребре, идущем под углом $\delta_{n(m)}$ к L . Для кривизны в этой вершине имеем

$$\omega < t\Delta < t\epsilon_m < \delta_{n(m)},$$

что обеспечивает за L сохранение свойств геодезического луча.

5) Рассмотрим поверхности $\lambda_k F_m$, где $\lambda_k > 0$ и $\lambda_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. При большом k поверхность $\lambda_k F_m$ близка к K_m .

Заменим поверхностью $\lambda_k F_m$ конус K_m при построении M_1^m . При этом будем располагать $\lambda_k F_m$ в такое положение, чтобы бесконечное прямое звено геодезического луча L на $\lambda_k F_m$ совпадало с L на K_m , совпадали грани, в которых они лежат, а длина AA_1 на K_m равнялась длине AA_1 на $\lambda_k F_m$. (Точки A здесь различные, а A_1 — общая).

Поверхность тела, ограниченного всеми гранями M_1 , кроме T , и так расположенной поверхностью $\lambda_k F_m$ обозначим $M_1^{m,k}$. Кривая $L = AA_1|_{\lambda_k F_m} + A_1B|_m$, составит одну геодезическую на $M_1^{m,k}$. Можно доказать, что при достаточно большом k геодезическая L будет кратчайшей на $M_1^{m,k}$. Этот многогранник $M_1^{m,k}$ мы обозначим M_2 . Длина сферического изображения L^* на M_2 будет > 2 .

б) Начало A кратчайшей L на M_2 снова лежит внутри некоторой грани T . Заменяя ее новым «почти конусом», построим многогранник M_3 и кратчайшую L на нем, у которой длина сферического изображения будет > 3 .

Продолжая этот процесс, придем к предельной поверхности Φ и кратчайшей $L = AB$ на ней, для которой сферическое изображение L^* есть простая дуга A^*B^* , не спрямляемая в любой замкнутой окрестности своего конца A^* .

Этот пример обосновывает оговорку о спрямляемости лишь *внупренних* участков L^* в постановке задачи А. В. Погорелова.

Пример неспрямляемости L^* для геодезического луча L на бесконечной выпуклой поверхности в окрестности конца L^* , отвечающего бесконечно удаленной точке L , построен в работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Изд-во «Наука», 1969.
2. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гос. техиздат, 1948.
3. В. А. Залгаллер. О классе кривых с ограниченной вариацией поворота на выпуклой поверхности. Матем. сб., 1952, 30 (72), № 1, 59—72.
4. Г. Буземан. Выпуклые поверхности. Изд-во «Наука», 1964.
5. А. В. Погорелов. Об устойчивости изолированных ребристых точек на выпуклой поверхности при изгибании. УМН, 1953, 8, № 3, 131—134.
6. Ю. Ф. Борисов. Об одном внешне-геометрическом свойстве геодезических на гладких поверхностях. Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 19, 35—40.
7. В. А. Залгаллер, Ю. Г. Решетняк. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда, Ленинград, 1961, т. II, Изд-во «Наука», 1964, 209—215.
8. А. А. Борисенко. О сферическом изображении кратчайшей на выпуклой поверхности. См. статью в настоящем сборнике.

Поступила 9 февраля 1970 г.

О ВМЕЩЕНИИ ОДНОЙ ФИГУРЫ В ДРУГУЮ

B. A. Залгаллер

(Ленинград)

1 К сожалению, мы не знаем общих приемов, позволяющих проверять, вместимо ли движением одно данное выпуклое множество в другое. Решение частных вопросов этого рода требует изобретательности.

Вот примеры задач, решаемых достаточно элементарно.

1) Для вместимости n -мерного эллипсоида с полуосами $a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$ в эллипсоид с полуосами $b_1 \geq \dots \geq b_n > 0$ не только достаточно, но и необходимо соблюдение неравенств $a_i \leq b_i$ ($i = 1, \dots, n$).

2) Если у треугольника Δ_1 , все стороны и все высоты не превосходят соответствующих сторон и высот треугольника Δ_2 , то Δ_1 вместим в Δ_2 . (Штейнгауз)*.

3) Если произвольный параллелограмм Π с центром в начале координат подвергнут растяжению вдоль оси y : ($x = x_0, y = \lambda y_0, \lambda \geq 1$), то Π вместим во вновь полученный параллелограмм Π_λ . Более того, для вмещения достаточно поворачивать Π вокруг центра. При определенном направлении вращения все точки Π войдут в Π_λ раньше, чем уйдет одна точка Π выйдет из Π_λ .

4) Все сказанное в предыдущей задаче остается верным при замене Π произвольным центрально-симметричным выпуклым шестиугольником.

5) Допустим, что контуры плоских выпуклых фигур F_1, F_2 удалось гомеоморфно сопоставить так, что любая хорда F_1 не больше соответствующей хорды F_2 . Из этого еще не следует вместимость F_1 в F_2 .

2. Цель этой заметки — привлечь внимание читателя к следующему вопросу, ответ на который нам неизвестен**. Каждую ли выпуклую фигуру F можно вместить в фигуру F_λ , полученную из F равномерным растяжением в одном направлении в $\lambda > 1$ раз?

Справедливость этого утверждения для бесконечных и вырожденных выпуклых фигур очевидна. Верно оно и для «наиболее несимметричной» фигуры — треугольника, это следует из задачи 2). Мы докажем следующую теорему.

Высказанное утверждение верно для любой центрально-симметричной выпуклой фигуры.

Действительно, пусть O — центр симметрии F, F_λ получено из F растяжением в $\lambda > 1$ раз от проходящей через O прямой l . Рассмотрим точки A и A' , в которых l пересекает границу F . Если некоторые опорные к F в A и A' прямые перпендикулярны к l , то F лежит в F_λ . Пусть таких прямых нет. Тогда опорные к F в A и A' параллельные прямые образуют с l острый угол φ . Будем вращать F вместе с этими прямыми в сторону увеличения φ . Каждая точка $X \in F, X \notin F_\lambda$ при каких-то углах поворота попадает в F_λ . Пусть $\alpha_m(X)$ — наименьший из этих углов, а $\alpha_m(X)$ — первый угол, сколь угодно близко за которым X выходит из F_λ ; (если X все время остается в F_λ , то считаем $\alpha_m(X) = 2\pi$). Мы утверждаем, что

$$\alpha_0 = \max_{X \in F} \alpha_m(X) \leq \min_{X \in F} \alpha_M(X). \quad (*)$$

* Г. Штейнгауз. Сто задач. Физматгиз, 1959. См. также РЖМат, 1967, 9A368.

** Для трехмерных выпуклых тел соответствующий вопрос решается отрицательно. Пример дает растяжение правильного тетраэдра в направлении отрезка соединяющего середины противоположных ребер.

Допустим, что неравенство (*) неверно; т. е. существуют точки $X_1, X_2 \in F$, для которых $\alpha_m(X_1) > \alpha_m(X_2)$. Рассмотрим еще точку $X_3 \in F$, в λ -образ которой впервые попадает при вращении точки X_2 . Пусть P — выпуклая оболочка точек X_1, X_2, X_3 и симметричных им точек X'_1, X'_2, X'_3 . Очевидно, $P \subset F$, $P_\lambda \subset F_\lambda$. При повороте на $\alpha_m(X_2)$ точка X_1 еще не входит в P_λ , а при несколько больших поворотах точка X_2 (которая при меньшем повороте $\alpha_m(X_2)$ уже была в λ -образе точки X_3) выходит из P_λ . Выходит, теорема была бы неверной и для многоугольника P_λ . Но в силу задач 3) и 4) это исключено, так как P есть отрезок, параллелограмм или центрально-симметричный выпуклый шестиугольник.

Значит, (*) верно, и поворот на α_0 вмещает F в F_λ .

Поступила 9 февраля 1970 г.

МНОГОГРАННИКИ С ГРАНЯМИ, СЛОЖЕННЫМИ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Б. А. Иванов

(Ленинград)

В работе В. А. Залгаллера [1] доказано, что кроме призм и антипризм существует конечное число трехмерных выпуклых многогранников, у которых все грани суть либо правильные многоугольники, либо разбиваются диагоналями на правильные многоугольники (такие диагонали мы будем называть условными ребрами рассматриваемых «правильнограных» многогранников). Правильногранный многогранник называется простым, если он неразбивается проходящей через ребра (и условные ребра) плоскостью на два других правильнограных многогранника. В [1] доказано, что при отсутствии условных ребер существует, кроме призм и антипризм, ровно 28 простых правильнограных многогранников.

Результатом настоящей работы является

Теорема. При допущении условных ребер добавляется еще ровно пять простых правильнограных многогранников. Эти пять многогранников Q_1, \dots, Q_5 изображены на рис. 1, условные ребра отмечены штриховкой.

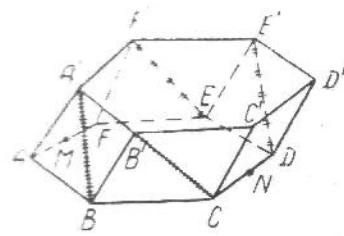
В § 1 доказано существование этих многогранников. В § 2 приведены те дополняющие изложение [1] шаги доказательства, которые позволяют утверждать несуществование простых правильнограных многогранников с условными ребрами, сверх пяти указанных. В § 3 исправлены некоторые опечатки работы [1], па текст и обозначения которой мы постоянно опираемся.

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ Q_1, \dots, Q_5

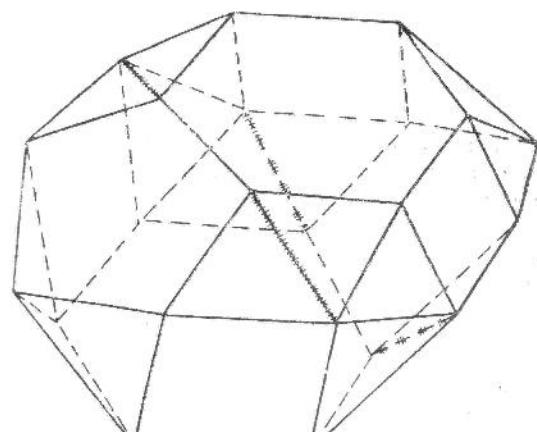
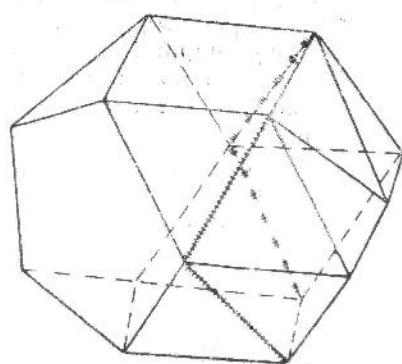
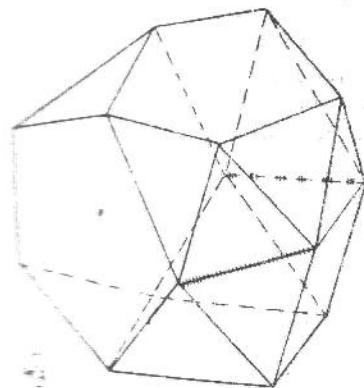
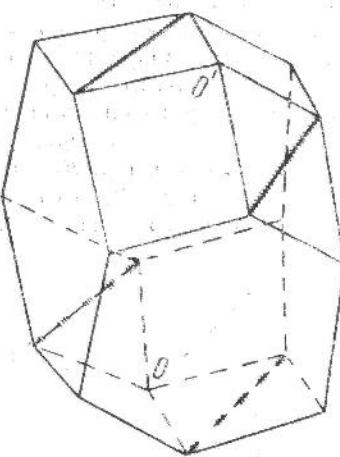
1. Если в правильной шестиугольной призме с основанием $ABCDEF$ и квадратными боковыми гранями сдвинуть верхнее основание в направлении MN , где M — середина ребра AB , а N — середина ребра DE , так, чтобы четыре из боковых граней стали ромбами с острыми углами 60° , то мы придем к многограннику Q_1 .

2. Рассмотрим симметричную многогранную вершину типа (3.4 3.4), т. е. вершину, в которой сходятся, чередуясь, два правильных тре-

* Можно считать, что вращение шло против часовой стрелки, точка X_1 была правее $A'A$, так что и определяемое для самого P направление вращения будет тем же.



Г. (скосенная шестиугольная призма)



Q₅

Рис. 1.

угольника и два квадрата. Треугольные грани продолжим лежащими в тех же плоскостях треугольниками. Получим многогранную поверхность, схематически изображенную на рис. 2. Рассмотрим развертку из четырех шестиугольников (рис. 3). Перегнув ее по ребрам a и склеив ребра b , получим «призматическую» поверхность. Сечение этой поверхности (идущее через середины ребер a, a, a, b) будет ромбом. При выборе острого угла этого ромба равным $A(3; 6; 6)$ призма стыкуется с двумя «шапками» (рис. 2), что дает многогранник Q_2 . Стыкуемость в этом положении легко доказывается на основании тождеств § 5 работы [1].

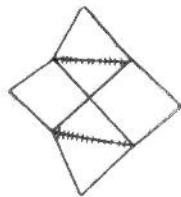


Рис. 2.

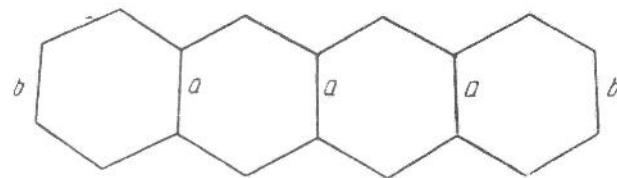


Рис. 3.

3. Пусть q_1 (рис. 4) обозначает половину известного многогранника M_8 ([1], рис. 3 и рис. 20). Если на две пятиугольные грани q_1 поставить пятиугольные пирамиды M_3 , а затем отсечь пятиугольную пирамиду с вершиной K , то получим многогранник q_2 (рис. 5). Прикладывание q_1 к q_2 (двумя способами) по неправильному шестиугольному основанию $ABCDEF$ ([1], рис. 19) дает Q_3 и Q_4 . Появление точных распрямлений проверяется на основе тождеств [1], § 5.

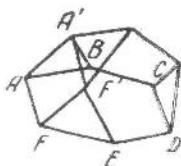


Рис. 4.

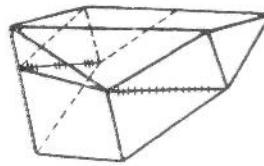


Рис. 5.

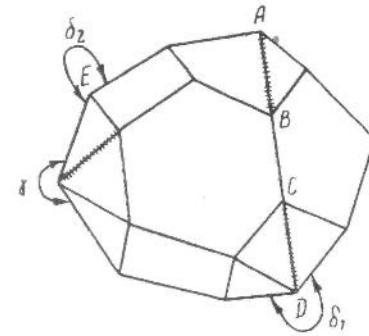


Рис. 6.

4. Рассмотрим поверхность f (рис. 6). (Она существует. Действительно, если по $ABCD$ отсечь часть $3+5+3$ и заменить ее на $3+4+3$, то получим часть существующего многогранника M_{20} (см. [1], рис. 3). При $\gamma = 108^\circ$ поверхность f жесткая. Мы утверждаем, что два жестких экземпляра f , из которых один повернут на 180° относительно другого, допускают склеивание по контурной линии. Это дает Q_5 . Действительно,

$\angle ABC = \angle BCD = 144^\circ$, $\hat{AB} = \hat{CD} = 180^\circ$. Покажем, например, что свободный угол при вершине D равен свободному углу при вершине E (рис. 6). $\delta_1 = a(A(4; 3; 10) + A(6; 3; 10); 3; 6) = 144^\circ$. $\delta_2 = \angle ABC = 144^\circ$. Аналогично проверяются остальные совпадения.

Существование многогранников Q_1, \dots, Q_5 доказано.

§ 2. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОСТЫХ ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ МНОГОГРАННИКОВ С УСЛОВНЫМИ РЕБРАМИ, КРОМЕ Q_1, \dots, Q_5

В работе [1] несуществование простых правильнограных многогранников сверх призм, антипризм и $M_1 - M_{28}$ устанавливалось следующим путем. Начиная с возможных типов вершин, постепенно наращи-

зались правильными гранями еще незамкнутая многогранная поверхность. Все время изучались ее деформации (с сохранением ее выпуклости и жесткости граней) и возможные варианты ее продолжения. Варианты обрывались в том случае, когда многогранник замыкался, либо исчезала его простота, либо терялась выпуклость, или же, наконец, наступало точное распрямление граней при одном из ребер. Наша задача пересмотреть только те места работы [1], где рассмотрение вариантов прерывалось по последней причине. Нам придется рассматривать также дополнительные варианты вклейваний, опущенные в [1] по причине распрямлений при ребрах.

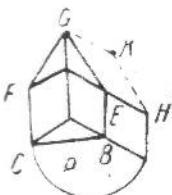


Рис. 7.

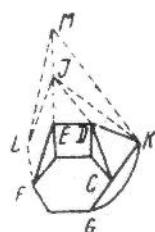


Рис. 8.

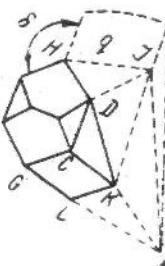


Рис. 9.

Ввиду сказанного мы излагаем доказательство в виде кратких дополнений к определенным страницам и строкам работы [1] — именно к тем местам, где рассуждения ранее обрывались по причине распрямления граней.

1) Стр. 38, строки 5 и 7. По DC может подклеиваться только 3. Иначе $\hat{DE} > 180^\circ$. Пусть в $\angle EDC$ вклевивается $3 + 3$. Тогда $\hat{DE} = 180^\circ$, $CFEB$ — ромб с углом 60° . Заклеивая контур $CFEB$ ромбом, получим состоящий многогранник $M_1 + M_2$ (с условными ребрами).

2) Стр. 39, строка 10 снизу. В $\angle EBC = 90^\circ$ возможны вклейвания $4 - p$, $p = 3, 4, 5$ (рис. 7). При этом $\hat{CB} = 180^\circ$. При $p = 4, 5$ в $\angle GEH = 90^\circ \neq \alpha_2$ невозможны под克莱ивания. При $p = 3$ в $\angle GEH = 90^\circ$ вклевивается 4, при этом в $\angle FGK = 60^\circ$ возможны вклейвания $3 + 3, 3$. Вклевивание $3 - 3$ дает $\hat{FG} > 180^\circ$. Вклевание 3 дает $\hat{FG} = 180^\circ$ и в $\angle CFK > 120^\circ$, $\angle CFK \neq \alpha_2$ невозможны под克莱ивания.

3) Стр. 39, строки 6 и 7 снизу. Пусть в $\angle FLE$ вклевывается $3 + 3$. Тогда в свободный угол при вершине E ($\approx 62^\circ 59'$) невозможны под克莱ивания.

4) Стр. 41, строка 7 снизу. $\hat{CD} = 180^\circ$ только при вклевании $3 + 3$ в $\angle DCG$ и $n = 6$ (рис. 8). В $\angle EDK = 120^\circ$ возможны вклейвания $6, 3 + 3$. Вклевание 6 ведет к Q_1 . При вклевании $3 + 3$ (рис. 8) в $\angle JEF = 90^\circ$ возможны вклейвания $3 + 3, 4$. Первое дает $\hat{IE} = 180^\circ$ и появляется противоречие в вершине I . При вклевании 4 в $\angle LJK = 120^\circ$ возможны вклейвания $3 + 3, 6$. Первое дает $M \equiv G$, тогда нарушается простота: отъезжается M_2 с вершиной K . Вклевание 6 исключено по комбинаторным соображениям.

5) Стр. 43, последняя строка. Пусть в $\angle GCD$ вклено $4 + 3$, $\hat{CD} = 180^\circ$ (рис. 9). В $\angle HDK = 90^\circ$ возможны вклейвания $4, 3 + 3$. При

вклеивании 4 в свободный угол при вершине K , не равный α_n , невозможны под克莱ивания. Вклейивание $3+3$ требует в $\angle IKL \approx 95^\circ 56'$ также вклейивания $3+3$. Тогда в $\angle HIR \approx 101^\circ 03'$ возможны вклейивания $3+4$, $3+5$, $5+3$, $4+3$, $3+3$. Вклейивания $3+p$ ($p = 4, 5$) дают $\hat{H}I > 180^\circ$. Вклейивание $5+3$ дает $\hat{I}R > 180^\circ$. Пусть в $\angle HJR$ вклено $q+3$ ($q = 3, 4$). Тогда в свободный угол δ при вершине H невозможны под克莱ивания (при $q = 3$ угол $\delta \approx 129^\circ 39' > 120^\circ$ при $q = 4$ угол $\delta \approx 101^\circ 27'$).

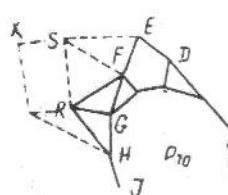


Рис. 10.

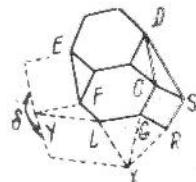


Рис. 11.

6) Стр. 45, строка 5. Пусть в угол $\delta = 120^\circ$ вклено $3+3$. Тогда в аналогичный угол при вершине H тоже вклевается $3+3$. В свободный угол при вершине L' возможны вклейивания $3+3, 3$. Первое нарушает выпуклость, второе ведет к Q_3 .

7) Стр. 45, строка 11. Пусть в $\delta = 108^\circ$ вклено $3+3$. Тогда $\hat{GK} = \hat{GL} = 180^\circ$. В свободный угол при вершине L возможны вклейивания $5, 3+3$. Вклевание 5, учитывая аналогию вершин L, N, I, K , ведет к Q_4 . Значит, в свободные углы при вершинах L и K вклевается $3+3$. Но тогда нарушается простота: отсекается M_3 .

8) Стр. 47, строка 5. Пусть в $\angle HGF$ вклено $3+3$. $\hat{FG} = 180^\circ$ (рис. 10). В $\angle RFE = 120^\circ$ возможны вклейивания $6, 3+3$. Первый вариант допускает при вершине R вклевания $3+3, 4$, но вклевание $3+3$ дает $\hat{RH} > 180^\circ$, а при вклевании 4 при вершине H остается свободный угол $\neq \alpha_n$. При вклевании в $\angle RFE 3+3$ (рис. 10) в $\angle SRH = 108^\circ$ возможны вклейивания $3+5, 5+3, 3+4, 3+3, 5, 4+3$. При вклевании $3+5, 5+3$ нарушается выпуклость либо по RH , либо по SR . Вклевание $3+4$ ведет к противоречию в вершине S . При вклевании $3+3$ отсекается M_3 с вершиной R . Вклевание 5 невозможно, так как $\angle RH = 120^\circ$. При вклевании $4+3$ (рис. 10) в $\angle XSE$ вклевается 10. В свободный угол при вершине E , не равный α_n , невозможны под克莱ивания.

9) Стр. 47, строка 5 снизу и стр. 49, строка 6 ([1], рис. 32). Вклевание в $\angle FCD = 120^\circ$ комбинации $3+3$ требует либо $n = 6$, либо $n = 10$. При $n = 6$ по контуру $KFCD$ под克莱ивается $3+3+3$, что ведет к противоречию в получившейся вершине, к которой подходят три треугольника. При $n = 10$ по контуру $KFCD$ под克莱ивается $4+3+3$. В получившийся свободный угол (при вершине, к которой подходят $4+3+3$) должно вклеваться 10, что противоречит равенству 108° свободного угла при вершине D .

10) Стр. 47, последняя строка. Пусть в $\angle GCD$ вклевывается $4+3$ (рис. 11), $\hat{CD} = 180^\circ$. В $\angle LFE$, аналогичный $\angle GCD$, возможны еще вклейивания $4+3, 3+4$. Первое дает в $\angle RGL$ вклевания $3+3$ или 6. При вклевании $3+3$ в свободный угол при вершине L вклевается 3,

что имеет противоречие в получившейся вершине, к которой подходят три треугольника. При вклейвании 6 в свободный угол при вершине R возможны вклейвания $6, 3 + 3$. Вклейвание 6 легко отбрасывается, после чего по симметрии мы приходим к Q_2 . Пусть в $\angle LFE$ вклеено $3 + 4$ (рис. 11). Тогда в $\angle RGL$ возможны вклейвания $6, 3 + 3$. Вклейвание 6 требует, чтобы по FL под克莱вался квадрат. При вклейвании $3 + 3$ (рис. 11), в $\angle YLX = 90^\circ$ вклеивается 4 и в угол $\delta \neq \alpha_n$ невозможны под克莱вания.

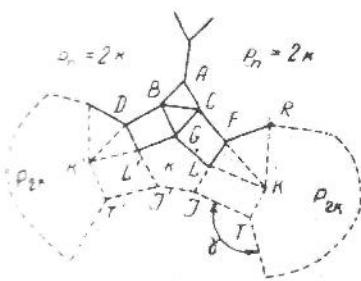


Рис. 12.

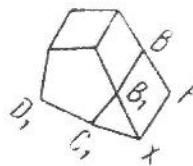


Рис. 13.

11) Стр. 50 строка 9 снизу. Пусть в $\angle DBC$ вклеивается $4 + 3$, $7 < n \leq 11$ (рис. 12). Тогда в $\angle GCF = 90^\circ$ вклеивается 4. В $\angle LGL' = 2\alpha_n - 180^\circ$ возможны вклейвания 3, 4, 5. При вклейвании 3 имеем $n = 6$, при вклейвании 4 имеем $n = 8$, при вклейвании 5 имеем $n = 10$. Значит, в $\angle LGL'$ вклеивается k и $n = 2k$, $k = 4,5$ (Учитываем, что $n \geq 7$). В $\angle LFR = 120^\circ$ возможны вклейвания $6, 3 + 3$. Вклейвание 6 требует $\angle ILF = 120^\circ$, хотя $\angle JLH = \angle LGC = \alpha_n \neq 120^\circ$. При вклейвании $3 + 3$ в $\angle ILK$ вклеивается 4. В $\angle TKR$ вклеивается $2k$. По симметрии построение продолжается (рис. 12). При $k = 5$ в $\angle I'IT = 144^\circ$ возможны еще вклейвания $4 + 3, 10, 3 + 4$. При вклейвании $4 + 3$ отсекается M_6 (шестиугольное основание $I'L'GL$). Вклейвание 10 ведет к противоречию в вершине T . Вклейвание $3 + 4$ требует $\gamma = 90^\circ$, хотя $\gamma = 120^\circ$. При $k = 4$ $I \equiv I'$ в $\angle TIT'$ вклеивается 3 и по контуру $T'K'DBCFKT$ отсекается M_5 .

12) Стр. 53, строка 10. В $\angle FBC$ вклеивается $3 + 4$, $FB = 180^\circ$. В $\angle EDF$ возможны вклейвания $4 + 3, 3 + 4, 3 + 3, 4$. Вклейвание $4 + 3$ дает противоречие в вершине F . При вклейвании $3 + 4$ при вершине F остается свободный угол $\approx 115^\circ 39'$, в который невозможны под克莱вания. При вклейвании $3 + 3$ в свободный угол при вершине F , больший 120° и не равный α_n , невозможны под克莱вания. При вклейвании 4 в свободный угол при вершине F вклеивается 4, вершина, к которой подходит набор $4 + 3 + 4$, автоматически становится трехгранный и мы получаем ~~также исключенный тип~~ (3, 4²).

13) Стр. 54, строка 8. Пусть в $\angle BB_1C_1$ вклеено $4 + 3$ (рис. 13), $B_1C_1 = 180^\circ$. В $\angle D_1C_1X$ возможны вклейвания $3 + 6, 3 + 7, 4 + 4, 6 + 3, 7 + 3, 3 + 3 + 3$. По C_1X не может под克莱иваться 6 или 7, так как тогда $FX > 180^\circ$. При вклейвании $4 + 4$ вершина X становится трехгранный с ~~также исключенным типом~~ (3, 4²). При вклейвании $p + 3$ в $\angle D_1C_1X$ ($p = 6, 7$) в $\angle FXY \neq \alpha_n$ может вклейваться $3 + 3$, что нарушает выпуклость. Вклейвание $3 + 3 + 3$ в $\angle D_1C_1X$ также нарушает выпуклость.

14) Стр. 55, строка 10. Пусть в $\angle FAB$ вклеено $3 + 3$. Тогда $B = 180^\circ - 4$ и мы имеем противоречие в получившейся вершине, к которой подходит три треугольника.

15) Стр. 57, строка 1. В $\angle FKN$ возможны вклевивания $4+3, 3+4$. При вклевании $4+3$ в свободный угол при вершине N , больший 168° , невозможны под克莱вания. Значит, в $\angle FKN$ и аналогичный ему $\angle GLN$ вклевается $3+4$. Тогда в свободный угол при вершине N , больший нуля, невозможны под克莱вания.

16) Стр. 61, строки 6 и 7 снизу. Пусть в $\angle HEK = 108^\circ$ вклеено $4+3$. Тогда в свободный угол при вершине K , больший 120° и не равный α_n , невозможны под克莱вания.

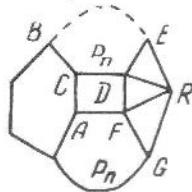


Рис. 14.

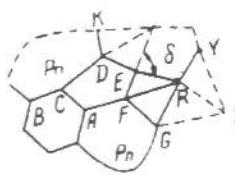


Рис. 15.

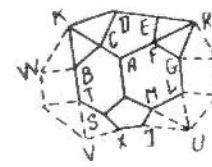


Рис. 16.

17) Стр. 63, строка 3 снизу. Утверждение, что все вершины однотипны, опирается в [1] на отсутствие условных ребер при изучении типов $(4.6.n)$ и $(5.6.n)$, $6 < n < 11$. Пусть A имеет тип $(4.6.n)$, $n \geq 7$ (рис. 14) и вершина F не типа $(4.6.n)$, т. е. в $\angle DFG$ вклевается $3+3$. Тогда в $\angle RDE$ вклевается 3 , что дает противоречие в вершине R . В случае $(5.6.n)$ $n \geq 7$ мы получаем набор граней (рис. 15), где $\delta > 120^\circ$ и $\delta \neq \alpha_n$. Значит, $n = 6$. Пусть A имеет тип $(4.6.6)$ (рис. 14, $n = 6$) и в $\angle DFG$ вклесно $3+3$. Тогда в $\angle BCD$ возможны вклевания $6,3+3$. Вклевание 6 исключается автоматически (как раньше при $n \geq 7$). Вклевание $3+3$ влечет $D = (3,4,3,4)$, $R = (3^4,4)$, что дает противоречие в получившейся вершине, к которой подходят три треугольника. Пусть A имеет тип $(5.6.6)$. Допустим, что в $\angle EFG$ вклесно $3+3$ (рис. 15, $n = 6$). В $\angle BCD$ возможны вклевания $6,3+3$. Пусть в $\angle BCD$ вклесно 6 (рис. 15, $n = 6$). В $\angle KDE$ возможны вклевания $6,3+3$. Вклевание 6 легко исключается. При вклевании $3+3$ в угол $\delta = 108^\circ$ возможны вклевания $3+3,5$. При вклевании $3+3$ в свободный угол при вершине R невозможны под克莱вания. Значит, в угол δ вклевается 5 . В $\angle YRG = 120^\circ$ возможны вклевания $6,3+3$. Вклевание 6 легко исключается. При вклевании $3+3$ в свободный угол при вершине G вклевается 4 и в получившийся свободный угол при вершине Z , равный 144° , невозможны под克莱вания. Пусть в $\angle BCD$ вклесно $3+3$ (рис. 16). В $\angle JML = 120^\circ$ возможны вклевания $6,3+3$. Вклевание 6 легко исключается. Значит, в $\angle JML$ и в $\angle XST$ вклесно $3+3$. В $\angle KBT = 144^\circ$ возможны вклевания $3+5, 3+4, 5+3, 4+3$. Вклевания $3+5, 5+3, 4+3$ легко исключаются. Значит, по контурам $VTBK$ и $ULGR$ под克莱вается комбинация $3+4+3$ (рис. 16). В $\angle WKD = 144^\circ$ возможны вклевания $3+4, 4+3, 3+5, 5+3$. Вклевания $4+3, 5+3$ исключаются непосредственно. Вклевания $3+4, 3+5$ исключаются, исходя из аналогии вершин K и R .

18) Стр. 67, строка 8 снизу. Пусть в $\angle EBC$ вклевается $3+4$. Тогда $\hat{BE} = \hat{LA} = 180^\circ$ (рис. 17). В $\angle LEK$ возможны вклевания $3+4, 3+5, 4+3, 5+3, 6,3+3$. Первое дает противоречие в вершине L , при втором $\hat{LE} > 180^\circ$. При вклевании $p+3$ ($p = 4,5$) в свободный угол при вершине L , больший 120° и не равный α_n , невозможны под克莱вания.

~~ш~~ Вклейивание 6 ведет к $K = (3, 4, 6)$, что противоречит отсутствию трехгранных вершин. При вклейвании 3+3 (рис. 17) в $\angle NKM$ возможны под克莱ивания 3,3-3. Вклейвание 3 ведет к противоречию в вершине N .

Вклейвание 3+3 дает $NK > 180^\circ$.

~~ш~~ Стр. 69, строка 11 и стр. 70 строка 2 снизу (рис. 18, $p = 4, 5$).

~~ш~~ $EF = 180^\circ$. В $\angle LEF > 120^\circ$, $\angle LEF \neq \alpha_n$ невозможны под克莱ивания.

~~ш~~ Стр. 76, строка 5 снизу и стр. 77 строка 3 снизу (рис. 19, $p = 4, 5$). В угол δ_2 вклевывается 3+3. Сравнивая вершины B, H', C , получаемся, что $\hat{AB} = \hat{BC} = \hat{H'G'}, \hat{HB} = \hat{H'B} = \hat{CG'}$. Очевидно, что в $\angle KGL' = \alpha_n$ невозможно вклейить одну грань. Вклейвание в $\angle KGL'$ под克莱ивания 3+3 ведет к противоречию в вершине K .

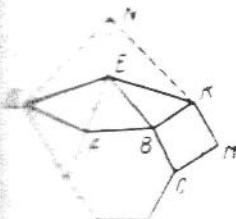


Рис. 17.

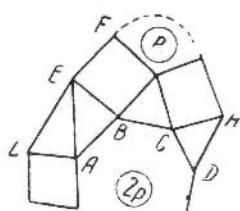


Рис. 18.

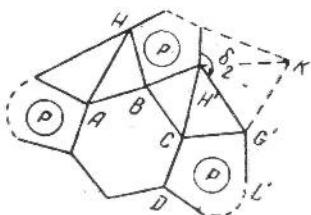


Рис. 19.

~~ш~~ Стр. 78, строка 6 снизу. В $\angle ECD = 144^\circ$ вклевывается 3+5.

~~ш~~ При этом $CE = 180^\circ$. В $\angle KEM = 120^\circ$ (рис. 20) возможны вклейвания 6,3-3. При вклейвании 6 в свободный угол при вершине $M (< 60^\circ)$ невозможны под克莱ивания. При вклейвании 3+3 в $\angle LMN \neq \alpha_n$ из соображений выпуклости нельзя вклейить 3+3. Значит, в $\angle LMN$ невозможны под克莱ивания.

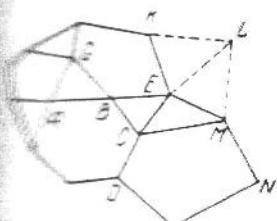


Рис. 20.

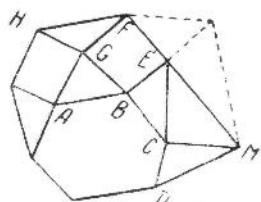


Рис. 21.

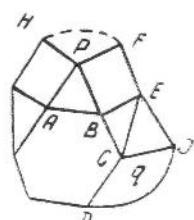


Рис. 22.

~~ш~~ Стр. 78, последняя строка. В $\angle ECD = 120^\circ$ вклевывается 3+3 ~~ш~~ (21). В $\angle FEM \neq \alpha_n$ вклевывается 3+3, что дает противоречие в вершине M .

~~ш~~ Стр. 79, строки 1 и 10. Достаточно рассмотреть положение, изображенное на рис. 22, при $p=3$ и $q=4$; $p=5$ и $q=5$. При этом $\angle FEJ > 120^\circ$, $\angle FEJ \neq \alpha_n$ невозможны под克莱ивания.

~~ш~~ Стр. 82, строка 11. Пусть в $\angle KGS$ вклено 3+3 (рис. 23).

~~ш~~ В $\angle HKJ = 120^\circ$ возможны вклейвания 6,3+3. Вклейвание 6 ведет к

~~ш~~ второе вклевывание дает $\angle RHG' = 108^\circ$. В $\angle RHG'$ возможны вклейвания 3-3, 5. Первое дает противоречие в вершине R . При втором

~~ш~~ $\angle KJR = 120^\circ$ возможны вклейвания 6,3+3. Вклейвание 6 требует,

чтобы вершина J была уже исключенного типа $(3^3 \cdot 6)$. Вклейивание $3 + 3$ ведет к отсечению M_3 с вершиной J .

25) Стр. 87, строка 2 снизу. В $\angle AET \approx 153^\circ 26'$ возможны вклейивания $3 + 3 + 3$, $3 + 5$, $4 + 4$, $5 + 3$. Первые три вклейивания исключены в [1]. Остается допустить, что по контуру $FAET$ подклеивается $3 + 5 + 3$. В $\angle KLN \approx 153^\circ 26'$ вклейивается $5 + 3$ (вклейивание $3 + 5$ исключено [1], § 19, п. 4). В свободный угол при вершине K вклейивается 4 (рис. 24).

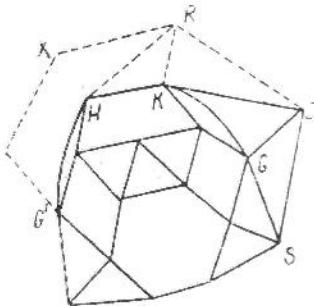


Рис. 23.

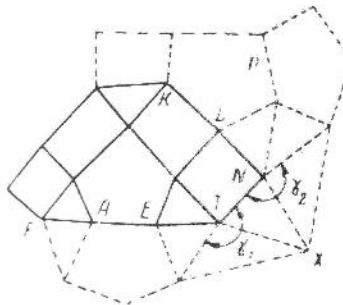


Рис. 24.

Используя известные сведения о типе вершины K пятиугольника p , приходим именно к расположению, изображенному на рис. 24. Вклейвая в $\gamma_1 = \gamma_2 = 120^\circ$ комбинацию $3 + 3$, получаем противоречие в вершине X .

26) Стр. 96, строка 8 снизу. В $\angle XYL = 120^\circ$ вклейивается $3 + 3$. Из [1] нам известно, что по контуру $XJBD'$ подклеивается $3 + 4 + 3$. Так как все положения рис. 108 работы [1] исключались независимо, нам остается только при рассмотрении пятого положения допустить возможность, изображенную на рис. 25. Здесь в $\angle L'XZ$ вклейивается 3 , что дает противоречие в вершине Z .

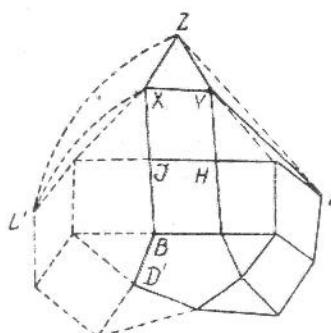


Рис. 25.

27) Стр. 98, строка 10 снизу. Нам остается рассмотреть случай, когда $\hat{FS} = 180^\circ$, а в $\angle WGS$ вклейивается $3 + 3$ или 5 . Вклейивание $3 + 3$ дает противоречие в вершине S . При вклейвании 5 в свободный угол при вершине S , равный 120° , вклейивается $3 + 3$, что ведет к противоречию в вершине K .

28) Стр. 107, строка 8. $\angle JFG = 90^\circ$ только при $\hat{DE} = 180^\circ$. Тогда в свободный угол при вершине D , больший 120° , невозможны под克莱ивания.

29) Стр. 107, строка 7 снизу. Пусть $\angle HJK = 0$. Тогда $\hat{JF} = \hat{JD} = 180^\circ$, $H \equiv K$, $\hat{BN} \approx 98^\circ 18' 47''$, 54 и в $\angle CHG \neq \alpha_n$ невозможны под克莱ивания.

30) Стр. 110, строка 1 снизу. При $\hat{AF} = \hat{BF} = 180^\circ$ мы имеем противоречие в вершине F .

31) Стр. 111, строка 5. Пусть $\gamma = 0$. Тогда в $\angle D'C'F = \angle DCF = 120^\circ$ вклеивается $3+3$. Мы получим вершину R , к которой подходят четыре треугольника. В свободный угол при вершине R , не равный α_n , невозможны подклейвания.

32) Стр. 119, строка 13 снизу. Пусть по контуру $HUVW$ подклено $3-5-3$. $VE = 180^\circ$. Пусть J — вершина, противоположная ребру UH в треугольнике JUH . Тогда в $\angle JHC = 108^\circ$ возможны вклейвания $5,5-3$. Вклейвание 5 требует трехгранности J . При вклейвании $3+3$ в свободный угол при вершине C невозможны подклейвания.

33) Стр. 120, строка 8, $\hat{BC} = \hat{EG} = 180^\circ$ ведет к противоречию в вершине V .

34) Стр. 121, строка 7. Пусть в $\angle BC'D' = 120^\circ$ вклеивается $3+3$. В свободный угол при вершине B ($\approx 78^\circ 59'$) вклеивается $3+3$, что ведет к нарушению выпуклости.

35) Стр. 121, строка 9. Если в $\angle UBR$ вклейть 5, то в свободный угол при вершине R ($< 60^\circ$) невозможны подклейвания.

36) Стр. 121, строка 7 снизу. Пусть в $\angle LRS$ вклеивается 3. Тогда $\hat{LP} = 180^\circ$, $\angle NTS = 60^\circ$. В $\angle NTS$ возможны вклейвания $3+3,3$. При вклейвании $3+3$ имеем $\hat{NT} > 180^\circ$. При вклейвании 3 в свободный угол при S вклеивается $3+3$, что ведет к нарушению выпуклости.

37) Стр. 122, строка 7. Если по BB' подклейть 4, то в $\angle TRS = 120^\circ$ невозможны подклейвания.

38) Стр. 122, строка 12. В $\angle TRS = 120^\circ$ вклеивается $3+3$. Пусть X — полученная при этом новая вершина. В $\angle XSE = 108^\circ$ возможны вклейвания $3+3,5$. Вклейвание $3+3$ дает противоречие в вершине X . При вклейвании 5 в образовавшийся свободный угол при вершине X , равный 120° , вклеивается $3+3$. Тогда в свободный угол при вершине X , не равный α_n , невозможны подклейвания.

39) Стр. 123, строка 6. Пусть в $\angle CAD$ вклеено 5, $\hat{BB'} = \hat{EE'} = 180^\circ$. Тогда в свободный угол при вершине C , равный 120° , вклеивается $3+3$, что ведет к отсечению M_3 с вершиной S .

40) Стр. 125, строка 5 снизу. Вклейвание $3+3$ в $\angle DFG$ требует $\hat{EF} = \hat{FG} = 180^\circ$. В свободный угол при вершине G , равный 120° , вклеивается $3-3$. Пусть B — вершина, противоположная FG в треугольнике FGA . Тогда в свободный угол при B , равный 60° , возможны без нарушения выпуклости вклейвания $3,3+3$. Первое нарушает простоту (отсечение M_3), второе ведет к противоречию в вершине D .

41) Стр. 126, строка 7 снизу. В $\angle LKN = 120^\circ$ вклеивается $3+3$. Тогда в $\angle XLJ = 60^\circ$ возможны вклейвания $3+3,3$. Первое нарушает выпуклость. При вклейвании 3 в $\angle XND$ возможны вклейвания $3-3,5$. Первое ведет к противоречию в вершине X . При втором вклейвании в $\angle YXL = 120^\circ$ может еще вклейтись $3+3$. При этом $XI = 3$ и 6 ; 6 ; 6 , хотя $XL = A$ (5; 5; 5).

42) Стр. 131, последняя строка. Пусть в $\angle SRL$ вклеивается 5, $\hat{SK} = \hat{AK} = 180^\circ$, $\angle ABC = 144^\circ$. Пусть SY — полученное в результате вклейвания пятнугольника ребро, а Y — соответствующая вершина, K — другая вершина пятнугольника. В $\angle YSN = 90^\circ$ возможны вклейвания $4,3-3$.

43) В $\angle YSN$ вклейвается 4. Пусть Z — противоположная S вершина пятнугольника. В $\angle ZYX = 120^\circ$ возможны вклейвания $3+4$,

$4+3, 3+3$. Вклейвание $3+4$ нарушает выпуклость. При вклейвании $4+3$ в свободный угол при вершине Z , больший 108° , невозможны под克莱ивания. При вклейвании $3+3$ в свободный угол при вершине Z возможны вклейвания $5, 3+3$. Эти вклейвания немедленно ведут к противоречию.

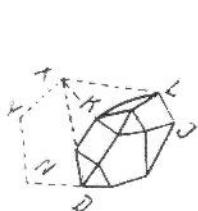


Рис. 26.

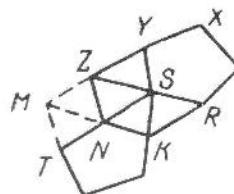


Рис. 27.

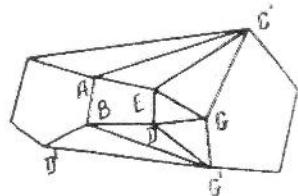


Рис. 28.

б) В $\angle YSN$ вклейвается $3+3$. Тогда, очевидно, мы имеем набор граней, изображенный на рис. 27, $\hat{SK} = 180^\circ$. В $\angle ZNT \approx 111^\circ 54'$ вклейвается $3+3$. В $\angle YZM \approx 113^\circ 26'$ возможны вклейвания $3+4, 3+5, 4+3, 5+3, 3+3$. При вклейвании $3+4, 3+5$ нарушается выпуклость. При вклейвании $4+3, 5+3$ в свободный угол при вершине Y , не равный α_n , невозможны под克莱ивания. При вклейвании $3+3$ в свободный угол при вершине Y ($\approx 126^\circ 22'$) невозможны под克莱ивания.

43) Стр. 132, строка 2 снизу. В $\angle SRU$ вклейвается 3 и отсекается M_3 с вершиной R .

44) Стр. 142, строка 1. $\angle H'CG = 0$ при $\hat{DG} = \hat{EG} = \hat{DH}' = 180^\circ, H' \equiv G$ и мы имеем противоречие в вершине G .

45) Стр. 142, строка 2. В $\angle H'CG$ вклейвается 4 при $\hat{BC} = 180^\circ (\angle ABC = 108^\circ)$. В свободный угол при вершине G вклейвается 3, после чего в свободный угол при вершине, к которой подходят четыре треугольника, невозможны под克莱ивания.

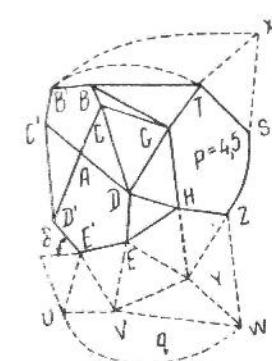


Рис. 29.

46) Стр. 142, строка 5 снизу. $\mu = 108^\circ$ при $\hat{BC} = 180^\circ$. Пусть в угол μ вклесено 5, тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 108^\circ$. Значит должно существовать положение, изображенное на рис. 28, $\angle D'CZ = 60^\circ$. Но в этом положении $\angle D'CZ \approx a$ ($15^\circ 45'$; 5; 6) $\neq 60^\circ$.

47) Стр. 156, строка 2, строка 8 снизу и строка 6 снизу. Нам нужно исключить вклейвание в $\angle BGH$ комбинаций $3+4, 3+5, 5+3$

при $\hat{DG} = 180^\circ (\angle C'AD = 108^\circ)$:

а) в $\angle BGH$ вклейвается $3+p$ ($p = 4, 5$; рис. 29). Тогда в $\angle EHZ = \alpha_p$ вклейвается $3+3$ (тип $(3^2 \cdot p \cdot 4)$ уже исключен). Если $p = 4$, то в $\angle B'BT = 60^\circ$ возможны вклейвания $3+3, 3$. Первое нарушает выпуклость. При втором в $\angle B'TS = 120^\circ$ вклейвается $3+3$. У нас $S \equiv Z$, $\angle XSY > 108^\circ$ вклейвается $3+3$. Сравнивая вершину G с вершиной T , убеждаемся, что $\hat{GH} = \hat{TS}$. Сравнивая вершину S и вершину H ,

убеждаемся, что $\hat{HY} = \hat{SY}$. Так как $\hat{HY} = A$ (4; 3; 3), то свободный угол при вершине Y равен 60° , в него возможны без нарушения выпуклости вклейвания $3+3, 3+3, 3+3$.

записи вклейивания $3,3+3$. При вклейивании 3 отсекается M_2 с вершиной Y . При вклейивании $3+3$ в свободный угол при вершине E невозможны под克莱ивания.

Если $r = 5$, то в $\angle E'YE = 120^\circ$ вклевивается $3+3$. В $\angle VYZ = 108^\circ$ возможны без нарушения выпуклости вклейивания $3+4, 4+3, 3+3, 3+3, 3+3$. Вклейивания $3+4, 4+3$ дают противоречие в вершине Z . При вклейивании $3+3$ (рис. 29) в $\angle E'VW = 144^\circ$ возможны вклейивания $4+3, 5+3, 3+4, 3+5$. При двух первых невозможны под克莱ивания в свободный угол при вершине E' . При двух последних в свободный угол при вершине E' вклевивается еще $3+3$, но при под克莱ивании по UE треугольника UVE угол $\delta < 60^\circ$. Вклейивание 5 в $\angle VYZ$ исключается аналогично:

б) в $\angle BGH$ вклевивается $5+3$ (см. [1], рис. 222 $r = 5$). В $\angle EHS \approx 142^\circ 36'$ возможны вклейивания $4+3, 5+3, 3+4, 3+5$. Ясно, что достаточно рассматривать вклейивания $q+3$ ($q = 4, 5$). Тогда в свободный угол при вершине E невозможны под克莱ивания.

55 Стр. 157, строка 1, строка 5 снизу, стр. строка 8 снизу. Нам нужно изучать положение изображенное на рис. 224 работы [1] при

$CF = CD = DH = 180^\circ, \angle FGH = 108^\circ$ и вклейвании $\angle FGH$ либо $3+3$, либо 5 . При вклейивании $3+3$ отсекается M_3 с вершиной G . Пусть в $\angle FGH$ вклено 5 . Тогда получается положение (рис. 30), где $\hat{HD} = 180^\circ, \angle EHX' = 90^\circ, \angle FEH = 144^\circ$. Оно было исключено в 42), б.

56 Стр. 164, последняя строка, стр. 165, строки 3 и 7. Нам надо рассмотреть положение, изображенное на рис. 243 работы [1] при $CF = \hat{HF}, \angle CDE = \angle FGE = 108^\circ$, когда в $\angle FGE$ вклевивается $5,5+3,3+4$. Вклейивание 5 требует, чтобы вершина E имела уже исключенный тип $3-5-3-5$. При вклейивании $3+3$ отсекается M_3 с вершиной G . Вклейивание $3+4$ дает противоречие в вершине F .

57 Стр. 168, последняя строка. Если $\hat{AC}' = \hat{AC}$, то в $\angle BCD = \angle CDE = 120^\circ$ вклевивается $3+3$, что дает противоречие в получившейся вершине, к которой подходят три треугольника.

58 Стр. 170, строка 7 снизу. Если $\hat{AC} = \hat{AD} = \hat{CF} = \hat{DH} = 180^\circ, \angle FGH$ вклевывается 3 и отсекается M_2 с вершиной G .

59 Стр. 175, рис. 269. В $\angle F'G'H' = 60^\circ$ возможны без нарушения выпуклости вклейивания $3+3,3$. Первое ведет к противоречию в вершине F . При втором отсекается M_2 .

60 Стр. 178, строка 3. При $\hat{CF} = 180^\circ$ в $\angle FSH'$ вклевивается 3 , после чего отсекается M_2 с вершиной H .

61 Стр. 184, строка 3 снизу. $\hat{BC} = \hat{ED} = \hat{TF} = 180^\circ$ при $\hat{EF} \approx 130^\circ 09' 33'' 45$. Тогда по SC может под克莱иться только 3 (по типу записи 5). Значит, в $\angle SCD \approx 104^\circ 06'$ возможны вклейивания $3+p$ ($p = 1, 4, 5$). При $p = 4, 5$ в свободный угол δ при вершине D , не равном 90° , возможны под克莱ивания. При $p = 3$ этот угол $\delta = 90^\circ$ (в чем убеждается, сравнивая вершины E и C , D и B). В угол δ вклейивание 4 . Тогда $FB > TD, \hat{FE} > \hat{TE}$. Сравнивая вершины F и E , убеж-

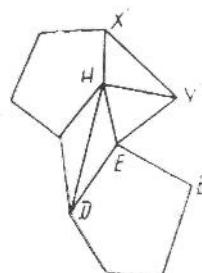


Рис. 30.

даемся, что свободный угол при вершине T меньше 60° и в него невозможны под克莱ивания.

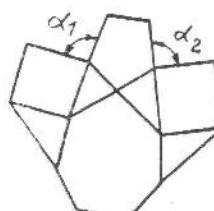
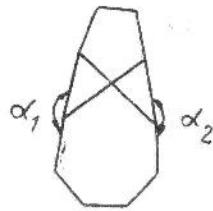
55) Стр. 185, строка 2. $\hat{BC} = \hat{BE} = \hat{TF} = \hat{TE} = 180^\circ$ ведет к противоречию в вершине T .

56) Стр. 187, последняя строка. При $\hat{DE} = \hat{CG} = \hat{EF} = 180^\circ$ $\angle LER \neq \alpha_n$ невозможны под克莱ивания.

57) Стр. 191, строка 1. $\hat{BC} = \hat{B'C'} = \hat{DH} = \hat{D'H} = 180^\circ$ ведет к противоречию в вершине H .

§ 3. ДОБАВЛЕНИЯ

1) Приведем исправления опечаток, имеющихся в [1].

	Напечатано	Следует читать
стр. 6, строка 1	... многогранник	многогранник № 37, стр. 21
стр. 8, строка 20	$\S\ 4$	$\S\ 3$
стр. 22, строка 17	$M_{15} + M_3$	$M_{15} + M_3$
стр. 24, строка 9	$M_{22} \nrightarrow M_3$	$M_{22} + M_3$
стр. 27, строка 19	$A(a; 180^\circ - b; 180^\circ - c)$	$A(180^\circ - a; 180^\circ - b; c)$
стр. 27, строка 22	$A(6, n, n) (n=4,5)$	$A(6; 4; n) (n=3, \dots, 11)$
стр. 30, строка 13	при	при $a_1 > a_2$
стр. 32, строка 6	108°	180°
стр. 33, строка 5	$108^\circ 11' 22'' 85$	$138^\circ 11' 22'', 85$
стр. 44, строка 15 и 1, 2 снизу	GH	\hat{GF}
стр. 44, последняя строка	$\min \delta \approx 131^\circ 56'$	$\min \delta \approx 131^\circ 44'$ $\max \delta \approx 131^\circ 56'$
стр. 45, строка 4	L	L . В случае 10 в δ вклейний нет,
стр. 45, строка 10	в случае 5	в случае 8
стр. 45, строка 16	$\angle DCE,$	$\angle DCE = 0,$
стр. 55, строка 5	EE_1D	$\angle EE_1D_1$
стр. 63, строка 7	$JFGK$	$SFGN$
стр. 63, строка 26	правильногранный	полуправильный
стр. 74, рис. 74		
стр. 75, строка 4	$> 60^\circ$ невозможны под克莱ивания	$> 150^\circ$ невозможно под克莱ивание $3+4$
стр. 87, строка 2	$A(6; 4; x)$	$A(6; 3; x)$
стр. 88, строка 11	невозможны	возможны
стр. 88, строка 12	$5+3$, после ... K	$5+3, K = (3, 4, 5, 4)$
стр. 92, строка 15	$93^\circ 05' 07''$	$90^\circ 00' 00''$
стр. 104, строка 14	$\angle UKL$	$\min \angle UKL$
стр. 107, строка 20	0	180°
стр. 118, строка 7	RMT	RWT
стр. 119, строка 16	\hat{VW}	\hat{VE}
стр. 132, строка 3	RLN	RLH
стр. 132, строка 8	U	S

Продолжение

	Напечатано	Следует читать
стр. 134, строка 10 стр. 135, строка 11 стр. 136, строка 8 стр. 136, строка 10 стр. 137, строка 4 стр. 138, строка 4 стр. 138, строка 7 стр. 139, строка 8 стр. 139, вспомогательная строка стр. 140, строка 1 стр. 140, строка 8	$M_{21} - M_{25}$ $SH'J'$ $G'HII$ 0 $H'J'K'$ рис. 222 $3 + 5, \dots, p = 5$ $E'EH$ UE $D'H'$ при	$M_{21} - M_{24}$ $SH'J'$ $G'H'U$ 180° $H'J'K'$ рис. 225 $3 + 4, \dots, p = 4$ FGH UF $D'H$ или

В На стр. 132, строка 9, пропущен анализ случая вклейивания в ~~комбинации~~ комбинации $3 + 3$. При этом в свободный угол при вершине N , ~~напоминая~~ 120° , невозможны под克莱ивания.

В Приведенные в [1] на стр. 27—28 тождества мы можем дополнить еще некоторыми:

$$\begin{aligned} A(3; n) &= A(4; 6; n), \quad n = 3, \dots, 11 \\ A(3; 4; 10) + A(3; 6; 10) &= A(5; 4; 3), \\ A(3; 4; 5) &= A(5; 5; 5), \\ A(3; 6; 3; 3) &= a(A(6; 3; 5); 60^\circ; 36^\circ), \\ A(3; 4; 90^\circ) + A(3; 3; 4) &= 30^\circ, \\ A(3; 4; 90^\circ) + A(3; 3; 3; 4) &= 90^\circ + A(3; 3; 4), \\ A(3; 5; 5; 5) &= 2A(3; 5; 5), \\ A(36^\circ; 36^\circ; 72^\circ) + A(108^\circ; 72^\circ; 72^\circ) &= 180^\circ, \\ A(3; 3; 3) &= 2A(3; 3; 4). \end{aligned}$$

При $x = a(60^\circ + A(3; 3; 4); 3; 4)$:
 $A(3; 4; x) + A(3; 3; x) = 90^\circ$.

Библиографию работы [1] о правильных и полуправильных многогранниках их многомерных, невыпуклых и других обобщениях можно дополнять частью литературы, упомянутой в книге Coxeter H. S. M., Moser W. O. J. «Generators and relations for discrete groups», 1957. Кроме того, можно присоединить работы:

- 15 Глек А. С. Правильные многогранники простейших гиперболических типов. Изв. Акад. наук Иванов. Гос. Пед. инст., 1963, 34, вып. мат., 27—30.
- 16 Глек А. С. Правильные многогранники на замкнутой поверхности с эйлеровой характеристикой $\chi = -3$. Изв. высш. учебн. заведений, математика, 1966, 6, 50—53.
- 17 Норкин С. В. Полуправильные многогранники. Математика в школе, 1958, № 3—4, 20.
- 18 Соловьев С. П. Одна теорема об однородных многогранниках. Укр. геом. сб., 1966, 1, 99—106.
- 19 Соловьев С. П. О количестве однородных многогранников с неотрицательной эйлеровой характеристикой. Укр. геом. сб., 1966, 3, 123—129.
- 20 Соловьев С. П. Конечность числа элементарных однородных многогранников неограниченной плоскости. Укр. геом. сб., 1968, вып. 5—6.
- 21 Соловьев С. П. Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников. Третий Всесоюзный симпозиум по геометрии в целом, 1969, 64—65.
- 22 Соловьев С. П. Об одном классе однородных многогранников. Укр. геом. сб., 1970, № 1.
- 23 Соловьев С. П. Однородные многогранники. (Диссертация). ФТИНТ АН УССР, Каганка, 1970.
- 24 Alliford L. V. Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1966, 55, 251—254.

97. Coxeter H. S. M. Wythoff's construction for uniform polytopes. Proc. London Math. Soc., 1935, (2) 38, 327—39.
98. Du Val P. Homographies, quaternions and rotations. Oxford, 1964.
99. Garner C. W. L. Polyhedra and honeycombs in hyperbolic space Dissertation, Univ. Toronto, 1964, 1—121, Dissertation Abstracts, 1965, 26(5):2775.
100. Garner C. W. L. Coordinates for vertices of regular honeycombs in hyperbolic space. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1966, 293, 94—107.
101. Garner C. W. L. Regular skew polyhedra in hyperbolic threespace. Canad. J. Math. 1967, 19(6):1179-1186.
102. Gott J. R. 111 Pseudopolyhedrons.
103. Grünbaum B. Convex polytopes. Wiley, 1967.
104. Hess E. Über die regulären Polytope höherer Art. Sitzungber der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwiss zu Marburg, 1885, 31—57.
105. Jessen B. Orthogonal icosahedra. Nordisk Mat. Tidskr., 1967, 15, 90—96.
106. Klein F. Lectures of the icosahedron. N. Y., 1956.
107. Kotzig A. O pravidelné pestrých polyedroch. Mat.-fyz. časop, 1966, 16, № 2 183—186 (словацк. реz. англ. русск.)
108. Matschinski M. Remarques sur les polytopes saturés. C. R. Acad. Sci. Paris, 1958, 246 (4), 528—531.
109. Matschinski M. Formule d'Euler généralisée et condition de son application. Courbure extérieure et intérieure. C. R. Acad. Sci. Paris, 1956, 243 (21), 1595-1598.
110. Mc Mullen P. Qualifying M. Sc. thesis, University of Birmingham, 1966.
111. Mc Mullen P. Combinatorially regular polytopes. «Mathematika», 1967, 14, 142—150.
112. Mc Mullen P. Affinely and projectively regular polytopes J. London Math. Soc., 1968, 43, 755—757.
113. Mc Mullen P. Regular star-polytopes and a theorem of Hess Proc. London Math. Soc., 1968, 18, № 4, 577-596.
114. Oss S. L. Die regelmässige vierdimensionalen Polytope höher Art. Verhandlungen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 1, 1915, 12, 1.
115. Seigel J. J. Polytopes (на голландском). Math. Centrum Amsterdam Afd. Zuivere Wisk, 1966, Rept № ZW-005, 7.
116. Tits J. Géométries polyédriques et groupes simples, «11 Réunion de Math. d'Expression latine» (Florence, 1960, 64-86, Cremonese, Rome, 1962).
117. Urech A. Polytopes réguliers de l'espace an dimensions et leurs groupes de rotations. Zürich 1925.

Автор приносит глубокую благодарность Виктору Абрамовичу Залгаллеру за помощь и советы в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Залгаллер. Выпуклые многогранники с правильными гранями. Зап. научн. сем. Ленингр. отд. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 2, «Наука», 1967 (имеется английский перевод: Zalgaller Convex polyhedra with regular faces. Semin. math. V. A. Steklov Math. Inst., Leningrad, vol. 2, 1969, N. Y.)

Поступила 8 декабря 1969 г.

О ПЛОСКОСТЯХ СИММЕТРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА E^3

B. F. Игнатенко

(Полтава)

A. C. Лейбин

(Харьков)

В этой статье рассматриваются алгебраические поверхности F_n порядка $n \geq 3$ евклидова трехмерного пространства E^3 , имеющие конечное число N плоскостей симметрий, и для них указываются все возможные значения числа N ; приводятся также общие уравнения F_n для каждой конечной группы симметрий E^3 . При этом используются такие обозначения: $F_n^9, F_n^6, F_n^{15}, F_n^C, F_n^D$ — поверхность F_n с плоскостями симметрии

имеет симметрию куба, правильных тетраэдра, икосаэдра, пирамиды, бипирамиды и только с этими плоскостями симметрии; это значит, что, например, поверхность с симметрией куба, имеющая симметрию и тетраэдра, относится к F_n^6 и не относится к F_n^6 ; F_n^* — приводимая поверхность, в состав которой входит хотя бы один набор из $l \geq 2$ плоскостей с общей прямой, так что угол между любыми двумя соседними из них равен $\frac{\pi}{l}$ [1], ($0 < l < \pi - 1$): $l \neq n$, так как число N конечно.

Г*. Пусть дана поверхность F_n , отличная от F_n^* , с N плоскостями симметрии. Для всех таких F_n в [2], исходя из работ [3, 4], указываются точные верхние границы числа N в зависимости от n и групп симметрий пространства E^3 ; все возможные значения N в зависимости от n и указанных групп представлены табл. 1*.

Таблица 1

Тип симметрии	n	N
F_n^6	≥ 3	6
F_n^9	$2p (p = 2, 3, \dots)$	9
F_n^{15}	$2p (p = 3, 4, \dots)$	15
F_n^C	≥ 3	$1, 2, \dots, n$
F_n^D	≥ 3	$3, 4, \dots, n + 1$

Уравнения плоскостей симметрии рассматриваемых поверхностей в следующем виде:

$$F_n^6: \quad x_i \pm x_j = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j);$$

$$F_n^9: \quad \begin{aligned} x_i &= 0, \\ x_i \pm x_j &= 0; \end{aligned}$$

$$F_n^{15}: \quad \begin{aligned} x_i &= 0, \\ x_i \pm \lambda x_j \pm \mu x_k &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \lambda, \mu, k = (1, 2, 3) \text{ (циклически); } \lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \mu = -\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

$$F_n^C: \quad \lambda_k x_1 - \mu_k x_2 = 0,$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1).$$

$$F_n^D: \quad \begin{aligned} x_3 &= 0, \\ \lambda_k x_1 - \mu_k x_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{N-1} \quad (k = 0, 1, \dots, N-2, N \geq 3).$$

Если ϕ — многочлен от двух или трех переменных, то общие уравнения этих поверхностей можно представить так [2, 3, 4]:

* Вариант 46) таблицы 1 в случаях $N=1, 2, 3$ соответствующая (би)пирамида не содержит ни структура множества плоскостей симметрии сохраняется.

$$F_n^6: \Phi_1 \equiv \varphi \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2, \prod_{i=1}^3 x_i, \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^3 x_i^2 x_j^2 \right) = 0;$$

$$F_n^{9!}: \Phi_2 \equiv \varphi \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2, \prod_{i=1}^3 x_i^2, \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^3 x_i^2 x_j^2 \right) = 0;$$

$$F_n^{15}: \Phi_3 \equiv \varphi \left[\sum_{i=1}^3 x_i^2, \prod_{(i, j)} (x_i^2 - \lambda^2 x_j^2), \prod_{(i, j)} (x_i^2 - \lambda^4 x_j^2) \sum_{(i, j, k)} (x_i^4 - 2x_j^2 x_k^2) \right] = 0,$$

где номера (i, j, k) пробегают все циклические перестановки чисел 1, 2, 3, а (i, j) могут быть только такими: (2, 1), (1, 3), (3, 2);

$$F_n^C: \Phi_4 \equiv \varphi \left(\sum_{r, s} c_{r, s} |z|^{2r} \operatorname{Re} z^{Ns}, x_3 \right) = 0,$$

где $c_{r, s}$ — коэффициенты, числа $r, s > 0$ — целые, $z = x_1 + \sqrt{-1} x_2$;

$$F_n^D: \Phi_5 \equiv \varphi \left(\sum_{r, s} c_{r, s} |z|^{2r} \operatorname{Re} z^{Ns}, x_3^2 \right) = 0.$$

3°. Предположим, что поверхности F_n включают и F_n^* . В составе поверхности F_n может входить плоскость как q -кратная компонента ($1 \leq q \leq n-2$); все ее отражения в плоскостях симметрии F_n являются компонентами F_n той же кратности. При подсчете числа плоскостей симметрии F_n каждую такую плоскость, если она является плоскостью симметрии поверхности, будем считать за одну ее плоскость симметрии.

Теорема 1. Поверхности F_n^{*6} , содержащие свои плоскости симметрии, существуют только при $n = 9$ и любом $n \geq 11$.

Доказательство. Так как сама совокупность шести плоскостей симметрии F_n^6 имеет симметрию куба, то F_n^{*6} должна включать «элемент симметрии» тетраэдра [3] — поверхность 3-го порядка $x_1 x_2 x_3 = c (c \neq 0)$. Поэтому $\min O(F_n^{*6}) = 9$. Добавление к полученной поверхности F_9^{*6} хотя бы одной плоскости влечет за собой появление еще не менее двух симметричных с ней плоскостей, что дает $n \geq 12$. Поверхность F_{11}^{*6} получим, добавляя к F_9^{*6} сферическую компоненту. Пример поверхности любого порядка, указанного в теореме, можно получить беря любые целые $r, s \geq 0$ в уравнении

$$\prod_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^3 (x_i^2 - x_j^2) \left(\prod_{i=1}^3 x_i - c \right)^{r+1} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 - 1 \right)^s = 0, \quad (c \neq 0).$$

Теорема доказана.

Замечание. При $n < 7$ поверхностей F_n^{*6} нет; при $n = 7$ поверхности F_n^* существуют, но плоскости симметрии этих поверхностей в их составе не входят. Пример такой поверхности можно задать так (п. 2°):

$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i^4 - 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 x_i^2 x_j^2 \right) \left(\prod_{i=1}^3 x_i - c \right) = 0.$$

Теорема 2. Поверхность нечетного порядка $F_{2p+1}^9 (F_{2p+1}^{15})$ существует при любых $p \geq 1$ ($p \geq 7$) и только при таком p и всегда является поверхностью F_n^* .

Доказательство. Если поверхность F_n^9 отлична от F_n^* , то ее порядок может быть только четным (табл. 1). Согласно теореме 13 работы [5] поверхность F_n^9 при нечетном n содержит одну свою плоскость симметрии следовательно, в ее состав входят или только три, или все плоскости симметрии; поэтому $\min_0(F_n^9) = 3$. Поверхность F_3^{*9} единственна; ее можно задать уравнением [1]:

$$x_1 x_2 x_3 = 0. \quad (1)$$

Подставляя к поверхности (1) сферические компоненты с центром в начале координат, получим примеры поверхностей F_n^{*9} любого нечетного порядка $n > 3$.

В справедливости теоремы для поверхностей F_n^{*15} можно убедиться аналогично.

Теорема доказана.

Ч. При доказательстве теоремы 7 работы [5] фактически установлена

Лемма. Пусть поверхность F_n пространства E^n центральна и через ее центр проходят плоскость a и ортогональная ей прямая b . Тогда, если a — плоскость симметрии F_n , то b — ее ось симметрии, и наоборот.

Д. Поверхность F_n^C , отличная от F_n^* , не может иметь больше n плоскостей симметрии; для поверхности F_n^{*C} справедлива

Теорема 3. Пусть в состав поверхности F_n^{*C} с конечным множеством плоскостей симметрии входит h этих плоскостей как компонент кратности q , причем число всех плоскостей симметрии $N > n - qh$. Тогда

Ч. $N = 2h$ ($h = 2, 3, \dots, n - 2$) и поверхность F_n^{*C} нецентральна.

Доказательство. Пусть поверхность F_n^{*C} имеет $N > n - qh$ плоскостей симметрии с общей прямой a . Так как множество плоскостей симметрии F_n^{*C} конечно, то $n > qh$. Обозначим через $F_{n'}$ ($n' = n - qh$) поверхность F_n^{*C} без входящих в ее состав плоскостей симметрии кратности q . В силу того, что $N > n'$, поверхность $F_{n'}$ имеет $N - 2h$ плоскостей симметрии [1].

Число $n' \geq 2$, ибо при $n' = 1$ рассматриваемая поверхность должна быть поверхностью F_n^D .

Число $h \geq 2$. В самом деле, при $h = 1$ будет $n - q < 2$, т. е. $n = q$, поверхность F_n^{*C} состоит из q -кратной плоскости.

Таким образом, $n \geq 4$ и $N = 2h$ ($h = 2, 3, \dots, n - 2$). Примеры поверхности F_n^{*C} с N плоскостями симметрии определяют уравнения

$$[(x_1^2 + x_2^2)^t + ax_3] \chi_h^q = 0, \quad (n = 2t + qh), \quad (2)$$

$$[(x_1^2 + x_2^2)^t + ax_3^{2t+1}] \chi_h^q = 0, \quad (n = 2t + qh + 1), \quad (3)$$

$$\chi_h = \prod_{k=0}^{h-1} (\lambda_k x_1 - \mu_k x_2);$$

здесь ε — ватуральное.

Поверхность F_n^{*C} является нецентральной. Действительно, в силу членности N через a проходят некоторые две взаимно ортогональные плоскости симметрии. Поэтому a — ось симметрии F_n^{*C} . При наличии центра поверхность F_n^{*C} должна иметь (по лемме п. 4°) плоскость симметрии, ортогональную a , что по условию невозможно.

Теорема доказана.

Замечание. Произвольная плоскость α , ортосекущая к прямой a , пересекает поверхность F_n' по кривой четного порядка. Поэтому при нечетном n' плоскость α определяет 2-асимптотическое направление F_n' [5], а следовательно, и поверхности F_n^{*C} . Для поверхности (3), например, такое направление определяет плоскость $x_3 = 0$.

Пусть через прямую a проходит $N > n$ плоскостей симметрии поверхности F_n^{*C} . Тогда $N = 2h$ и $h > \left[\frac{n}{2}\right]$ плоскостей симметрии F_n^{*C} (через одну) входят в ее состав [1]. При помощи теоремы 3 можно убедиться что $n \geq 4$, $3 \leq h \leq n - 2$ и поэтому $n \geq 5$. Таким образом, справедливое такое

Следствие. Пусть поверхность F_n^{*C} с конечным множеством плоскостей симметрии имеет $N > n$ этих плоскостей. Тогда $n \geq 5$, $N = 2h$ ($h = 3, \dots, n - 2$) и поверхность F_n^{*C} нецентральна.

6°. Имеет место

Теорема 4. Пусть поверхность F_n^{*D} имеет конечное множество плоскостей симметрии и все плоскости симметрии, входящие в ее состав, проходят через одну прямую, причем h из них имеют кратность q . Если при этом число всех плоскостей симметрии $N > n - qh + 1$, то $n \geq 4$, $N = 2h + 1$ ($h = 2, 3, \dots, n - 2$) и поверхность F_n^{*D} центральна; при нечетном n числа h, q нечетны.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3. Пример поверхности F_n^{*D} с N плоскостями симметрии дает уравнение

$$[(x_1^2 + x_2^2)^t + ax_3^2] \chi_h^q = 0.$$

Следствие. Пусть поверхность F_n^{*D} имеет конечное множество плоскостей симметрии, причем все плоскости симметрии F_n^{*D} , входящие в ее состав, проходят через одну прямую, а число всех плоскостей симметрии $N > n - 1$. Тогда $n \geq 5$, $N = 2h + 1$ ($h = 3, \dots, n - 2$) и поверхность F_n^{*D} центральна; при нечетном n числа h, q нечетны.

Теорема 5. Пусть в состав поверхности F_n^{*D} с конечным множеством плоскостей симметрии входит h этих плоскостей как компонент кратности q с общей прямой и плоскость симметрии, им ортогональна как компонента кратности q' , причем число всех плоскостей симметрии $N > n - qh - q' + 1$. Тогда $n \geq 4$, $N = 2h + 1$ ($h = 2, 3, \dots, n - 1$) и поверхность F_n^{*D} центральна.

Доказательство теоремы 5 также аналогично доказательству теоремы 3. При этом отметим, что для F_n^{*D} возможен случай $n - qh = 1$. Пример поверхности F_n^{*D} с N плоскостями симметрии можно задать так:

$$x_3^q [(x_1^2 + x_2^2)^l + ax_3^2]^m \chi_h^q = 0,$$

где число $l \geq 0$ — целое; $n = 2hl + hq + q'$.

Из теоремы 5 непосредственно вытекают такие следствия:

Следствие 1. Пусть в состав поверхности F_n^{*D} с конечным множеством плоскостей симметрии входят три линейно независимые из них

число всех плоскостей симметрии $N > n + 1$. Тогда $n \geq 4$, $N = 2n + 1$ ($n = 3, \dots, n - 1$) и поверхность F_n^{*D} центральна.

Следствие 2. Если поверхность F_n^{*D} удовлетворяет теореме 5 и не является из одних плоскостей, то $n \geq 5$.

Если не учитывать кратности линейных компонент поверхностей F_n^C и F_n^D , являющихся их плоскостями симметрии, то увеличиваются нижние граничины числа N , указываемые в теоремах 3, 4, 5, и эти теоремы уточняются. При этом исключается целый класс поверхностей, удовлетворяющих указанным теоремам. К этому классу, например, относится поверхность (2), при $t = 3$, $h = 6$, $q = 2$.

Теорема 2 (п. 3°), следствие теоремы 3 (п. 5°) и следствие 1 теоремы 5 (п. 6°) показывают, какие изменения в табл. 1 вносят поверхности F_n^C вместо табл. 2, аналогичная табл. 1:

Таблица 2

Группа симметрии	n	N
F_n^6	≥ 3	6
F_n^9	≥ 3	9
F_n^{15}	$6, 8, 10, 12;$ ≥ 14	15
F_n^C	≥ 3	$1, 2, \dots, n$
	≥ 5	$2h$ ($h = 3, \dots, n - 2$)
F_n^D	≥ 3	$3, 4, \dots, n + 1$
	≥ 4	$2h + 1$ ($h = 3, \dots, n - 1$)

Табл. 2 дает полную картину зависимости N от $n \geq 3$ и групп симметрии пространства E^3 . Из нее, в частности, вытекает следующая

Теорема 6. Пусть поверхность F_n с конечным множеством плоскостей симметрии имеет ровно N этих плоскостей.

При $n \geq 5$ таких F_n (включающих и F_n^*) точная верхняя граница N определяется так: $\bar{N} = 9$ при $n = 3, 4, 5$; \bar{N} достигается на F_n с плоскостями симметрии куба, при $n \neq 5$ только на них; $\bar{N} = 15$ при $n = 6, 8$; \bar{N} достигается на F_n с плоскостями симметрии икосаэдра, при $n = 6$ — только на них; $\bar{N} = 2n - 1$ при всех остальных n ; \bar{N} достигается на F_n с плоскостями симметрии бипирамиды.

Замечание. Теорема 6 аналогична теореме 7 работы [2], в которой приводятся значения \bar{N} для F_n , отличных от F_n^* ; поверхности F_n^{*D} с \bar{N} плоскостями симметрии рассматриваются также в [6].

Общее уравнение каждой из поверхностей F_n^6 , F_n^9 , F_n^{15} , F_n^C , F_n^D , F_n^* , можно записать так:

$$F_n^6: \Phi_1 \prod_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^3 (x_i^2 - x_j^2)^q = 0;$$

$$F_n^9: \Phi_2 \prod_{i=1}^3 x_i^{q'} \prod_{\substack{j=1 \\ i < j}}^3 (x_i^2 - x_j^2)^q = 0;$$

$$F_n^{15}: \Phi_3 \cdot \prod_{\substack{(i, j, k) \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2}} x_i^q (x_i + \varepsilon_1 \lambda x_j + \varepsilon_2 \mu x_k)^q = 0;$$

$$F_n^C: \Phi_4 \cdot \prod_r \chi_h^q r = 0;$$

$$F_n^D: \Phi_5 \cdot x_3^{q'} \prod_r \chi_h^q r = 0,$$

где числа $q, q' \geq 0$ — целые, $h \geq 2$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в E^m . Укр. геом. сб., вып. 7, Изд-во ХГУ, Харьков, 1969 стр. 40—55.
2. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях ортогональной симметрии поверхностей пространства E^m . Укр. геом. сб., вып. 8, Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.
3. L. Le Corneau. Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyédres réguliers. Acta Math., 10, 1887, 201—280.
4. E. Goursat. Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre réguliers. Ann de l'Éc. Norm (3), IV, 159—260, 310—340.
5. В. Ф. Игнатенко. О гиперплоскостях ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей. Укр. геом. сб., вып. 5—6, Изд-во ХГУ, Харьков, 1968 стр. 78—84.
6. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях симметрии приходимо поверхности одного специального вида. Укр. геом. сб., вып. 9, Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.

Поступила 6 мая 1970 г.

**О ЛЕММЕ БУЗЕМАНА И ФЕЛЛЕРА В СФЕРИЧЕСКОМ
И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВАХ**

A. Д. Милка

Харьков

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Многие важные результаты геометрии в целом выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве основываются на следующем предложении, известном как лемма Буземана и Феллера.

Пусть F — выпуклая поверхность и L — спрямляемая кривая, расположенная вне F . Тогда при проектировании L на F (сопоставление каждой точке кривой ближайшей к ней точки поверхности) L переходит в спрямляемую кривую, длина которой не превосходит длины кривой L .

Для примера можно напомнить, что эта лемма существенно используется в доказательствах теоремы А. Д. Александрова о сходимости метрик [1] и теоремы А. В. Погорелова о трех замкнутых квазигеодезических [2].

В этой статье устанавливается аналог леммы Буземана и Феллера в пространствах с постоянной кривизной, отличных от евклидова, — в сферическом и в пространстве Лобачевского. Основной результат здесь относится к сферическому пространству, где приходится определять специальное отображение, — «проектирование», — на выпуклую поверхность в пространстве Лобачевского, как и в евклидовом, применимо обычное проектирование.

Содержание леммы Буземана и Феллера заключается, по существу в простом факте, из которого эта лемма легко выводится: при проекти-

любые пары точек на выпуклый двугранный угол расстояние между которыми не увеличивается. Приведем доказательство этого факта, отличное от данного в [3], распространяющееся в пространство Лобачевского при проектирования в этом пространстве в обычном смысле, т. е. изображения точек пространства ближайшей к ней точки поверхности.

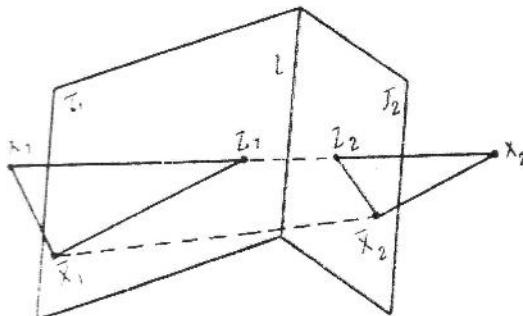


Рис. 1.

Теорема. V — двугранный выпуклый угол с гранями T_1 и T_2 , пересекающиеся по ребру l ; X_1 и X_2 — точки вне угла, $\bar{X}_1 \in T_1$ и $\bar{Y}_1 \in T_2$ — проекции их проекций на грани V . Считается, что $X_1, X_2 \in V$ и $\bar{X}_1, \bar{Y}_1 \in l$. Имеются две возможности: а) отрезок X_1X_2 и угол V пересекаются; б) пересечение X_1X_2 и V пусто.

Случай а. Пусть $Z_1 \in T_1$ и $Z_2 \in T_2$ — точки, встречающиеся в ребре l , с углом V (рис.). Тогда имеем: $X_1X_2 = X_1Z_1 + Z_1Z_2 + Z_2X_2$; отсюда $\bar{X}_1\bar{Z}_1 \subset T_1$ и $\bar{Z}_2\bar{X}_2 \subset T_2$ — проекции отрезков X_1Z_1 и Z_2X_2 на соответствующие грани. Наконец неравенство между длинами отрезков X_1Z_1 и $\bar{X}_1\bar{Z}_1$ вытекает из того же неравенства для проекций этих отрезков с ломаной $\bar{X}_1\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{X}_2$ и того обстоятельства, что проектирование отрезка не увеличивает длину отрезка.

Случай б. Пусть Z_1 и Z_2 — точки отрезка X_1X_2 , соответствующие проекциям которых $\bar{Z}_1 \subset T_1$ и $\bar{Z}_2 \subset T_2$ на плоскости, несущие грани T_1 и T_2 , принадлежат l (рис. 2). Тогда имеем: $X_1X_2 = X_1Z_1 + Z_1Z_2 + Z_2X_2$; отсюда $\bar{X}_1\bar{Z}_1 \subset T_1$ и $\bar{Z}_2\bar{X}_2 \subset T_2$ — проекции отрезков X_1Z_1 и Z_2X_2 на соответствующие грани; отрезок $\bar{Z}_1\bar{Z}_2$ — проекция отрезка Z_1Z_2 на ребро l . Наконец неравенство между длинами отрезков X_1X_2 и $\bar{X}_1\bar{X}_2$ вытекает из неравенства для проекций этих отрезков с ломаной $\bar{X}_1\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{X}_2$ и того обстоятельства, что проектирование отрезка на плоскость или на линию длины отрезка не увеличивается.

Таким образом, в каждом случае длина $\bar{X}_1\bar{X}_2$ не превосходит длины X_1X_2 .

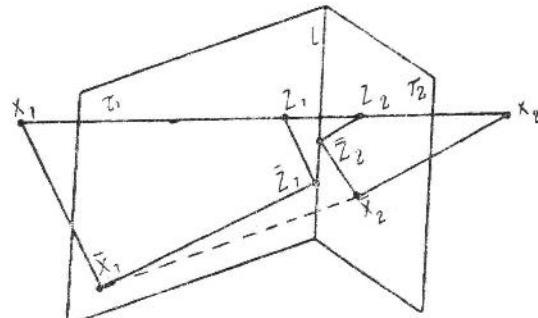


Рис. 2.

Статья состоит из четырех параграфов. В § 2 вводится специальное проектирование на замкнутую выпуклую гиперповерхность в сферическом пространстве, не увеличивающее расстояний между точками (обычное проектирование, — сопоставление ближайшей точки, — здесь непригодно). При этом полностью, как элемент доказательства, используется описанная только что конструкция для проектирования на двугранный угол. Аналог леммы Буземана и Феллера приводится в § 3. Там же и в § 4 даются другие непосредственные приложения введенного проектирования. Соответствующие результаты § 3 известны, но они получаются с помощью используемого метода совсем просто. В § 4 устанавливаются некоторые внешние геометрические свойства квазигеодезических линий на выпуклых многогранниках-гиперповерхностях в пространствах с постоянной кривизной и, кроме этого, дается новое доказательство теоремы существования квазигеодезических. Ссылки на литературу, необходимые в § 2—4, содержатся непосредственно в тексте.

Замечание 1. В [1] содержится доказательство теоремы о сходимости метрик сходящихся выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве (см. также [3]). На основании результатов настоящей статьи доказательство [1] почти буквально переносится на случай пространств сферического и Лобачевского. Известное для этих пространств доказательство, приведенное в [4], отличается от данного в [1].

Замечание 2. В [2] доказана теорема о существовании трех замкнутых квазигеодезических на замкнутой выпуклой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. На основании результатов данной статьи доказательство [2] почти буквально переносится на случай пространств сферического и Лобачевского. Такое перенесение доказательства, по-видимому, небезинтересно, хотя сама теорема для этих пространств ранее установлена: она является следствием теоремы А. Д. Александрова [5] о существовании трех замкнутых квазигеодезических в двумерном многообразии с ограниченной кривизной, гомеоморфном сфере.

Необходимо сделать некоторые пояснения, поскольку в «евклидовых» доказательствах теорем, отмеченных в замечаниях 1 и 2, кроме леммы Буземана и Феллера, существенно используется подобное преобразование поверхностей.

Подобие в сферическом и гиперболическом пространствах, как известно, отсутствует. Однако в этих пространствах можно ввести преобразование, аналогичное подобию, и проиллюстрировать соответствующие соображения на примере пространства Лобачевского.

Пусть O — точка в гиперболическом пространстве H с кривизной -1 , центр «подобия», которую мы будем считать фиксированной; k — положительная постоянная, коэффициент «подобия»; $Z \in H$ — произвольная, отличная от O точка, и z — расстояние от Z до O . Продолжим отрезок OZ за точку Z и выберем на этом отрезке или его продолжении некоторую точку Z' . Расстояние от Z' до O обозначим z' . Выбор точки Z' подчиним требованию: $\operatorname{th} z' = k \operatorname{th} z$. Легко проверить, что преобразование пространства $Z \rightarrow Z'$, — «подобие», — когда Z пробегает H , является геодезическим и, следовательно, переводит выпуклые гиперповерхности в выпуклые. Пусть S_r и S_R — концентрические гиперсфераe в H с центрами в O и радиусами r и R соответственно, где $r < R$. Допустим что мы имеем семейство $\{F\}$ выпуклых замкнутых гиперповерхностей, заключенных в слое между гиперсфераe. «Подобие» $Z \rightarrow Z'$ в пространстве H определяет некоторое преобразование семейства $\{F\}$. Справедливо следующее предложение.

Пусть F — поверхность семейства, F' — ее преобразование, $L \subset F$ и $L' \subset F'$ — некоторые соответствующие в этом преобразовании кривые.

если L, L' срамачены одновременно и их соответствующие длины $s(L), s(L')$ связаны соотношением

$$\delta^{-1}(k) \cdot s(L) < s(L') \leq \delta(k) \cdot s(L).$$

$\rightarrow \delta$ при $k \rightarrow 1$ и не зависит ни от выбора кривых L, L' , ни от поверхности F из $\{F\}$.

Доказательство здесь простое и не приводится. Его достаточно осущест-
вить для замкнутых, заключенных между S_r и S_R , у которых несущие
плоскости не пересекают внутренней сферы. Сходное утверж-
дение имеет место в сферическом пространстве (точнее — в полу-
пространстве с центром «подобия» в этом случае принимается центр соответствующей гиперфереры; аналитически преобразование «подобия» определяется формулой $\operatorname{tg} z' = k \operatorname{tg} z$).

§ 2. ЛЕМИА О СЖАТИИ В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть S_n — n -мерное сферическое пространство (которое для удобства рассмотрим как евклидовую гиперферу); S_n^* — замкнутое
пространство в S_n , определяемое гиперплоскостью S_{n-1} ; F — замкнутое
гиперповерхность в S_n , не совпадающая с S_{n-1} , расположенная в S_n^* . Нашей целью является доказательство следующего пред-
ложения: существует отображение внешности поверхности F относи-
тельно S_n^* на эту поверхность, которое не увеличивает расстояний

в полусфере S_n^* гиперболическую метрику, привяж в качестве сферу S_{n-1} и в качестве прямых линий новой метрики внешности в пространстве S_n , ортогональные к этой сфере. Гипер-
болическое пространство, полученное таким способом, обозначим $S_{n,n}$.
Метрика в этом пространстве, определяемую поверхностью F в S_n^* ,
обозначим $\tilde{\varphi}_H$. В соответствии с этим каждую точку, рассматриваемую в пространстве S_n^* или как точку пространства $S_{n,n}$, будем обозначать одним символом, сопровождая его во втором случае шляйм H . К поверхности F_H в $S_{n,n}$ отнесем и точки абсолюта,
которые в S_n^* относятся к поверхности F .

Балансеры S_n^* разбиваются на два класса: 1) внутренние
балансы тела, ограниченного поверхностью F (эти точки отсут-
ствуют, если F вырождается в дважды покрытую выпуклую область в
плоскости); 2) точки множества в S_n^* , дополнения к множеству то-
кок первого класса. Множество точек класса 2) мы называем внешностью
поверхности F относительно S_n^* . При этом естественным образом опре-
деляется внешность поверхности F_H в пространстве $S_{n,n}$ (к этой внеш-
ности относим и соответствующие точки абсолюта).

Построим в пространстве $S_{n,n}$ вспомогательное отображение φ_H внеш-
ности F_H из эту поверхность.

Пусть $Z_H \in F_H$. Тогда положим $\varphi_H(Z_H) = \bar{Z}_H = Z_H$.

Пусть $Z_H \in F_H$ и не является точкой абсолюта. В этом случае опре-
делим $\varphi_H(Z_H) = \bar{Z}_H$, где \bar{Z}_H — точка F_H , ближайшая к точке Z_H в мет-
рике $\tilde{\varphi}_H$. Точка \bar{Z}_H , очевидно, — единственная. Прямолинейный отре-
зок $Z_H \bar{Z}_H$ в этой метрике, соединяющий точки Z_H и \bar{Z}_H , как кривая
в пространстве S_n представляет дугу окружности, ортогональной к S_{n-1} .

Эта дуга окружности соединяет в S_n^* точки Z и \bar{Z} , соответствующие Z_H и \bar{Z}_H . Из экстремального свойства отрезка $Z_H\bar{Z}_H$ следует, что гиперплоскость в S_n , проходящая через \bar{Z} ортогонально к указанной окружности, является опорной к поверхности F . (Заметим, что углы между кривыми, рассматриваемые в метриках S_n^* и S_{n-1}^* , совпадают).

Пусть $Z_H \in F_H$ и принадлежит абсолюту; $\{Z^k\}$ последовательность точек в S_n^* , не принадлежащих S_{n-1} , сходящаяся к точке Z ; $\{\bar{Z}_H^k\}$ — соответствующая последовательность точек, определяемая функцией φ_H : $\bar{Z}_H^k = \varphi_H(Z^k)$. Легко устанавливается, что последовательность $\{Z_H^k\}$ сходится к некоторой точке $\bar{Z}_H \in F_H$, не принадлежащей абсолюту и что точка \bar{Z}_H не зависит от выбора последовательности $\{Z^k\}$ и, следовательно, единственная; что окружности в S_n , проходящие через пары точек Z^k и \bar{Z}_H^k , ортогональные к S_{n-1} , сходятся к той же, единственной окружности, проходящей через Z и \bar{Z} ; что гиперплоскость в S_n , проходящая через \bar{Z} ортогонально к предельной окружности, является опорной к поверхности F . Теперь мы полагаем $\varphi_H(Z_H) = \bar{Z}_H$.

Функция $\varphi_H(\varphi_H(Z_H) = Z_H)$ определена полностью. (Остался не разобранным лишь случай, когда $F_H \subset S_{n-1}$ и не совпадает с абсолютом. В этом случае удобно сразу рассматривать пространство S_n^* . Проектирующими траекториями здесь выбираются полуокружности в S_n , центры которых принадлежат S_{n-1} и заполняют там $(n-2)$ -мерную плоскость, «охватывающую» множество точек F в S_{n-1}).

В пространстве S_n^* естественным образом определяется отображение, — обозначим его φ , — внешности поверхности F на эту поверхность. Именно, если Z — произвольная точка из этой внешности, Z_H — соответствующая точка в S_{n-1}^* и $\bar{Z}_H = \varphi(Z_H)$, то мы полагаем $\varphi(Z) = \bar{Z}$, где \bar{Z} , как и раньше, — точка поверхности F , соответствующая \bar{Z}_H . В связи с этим введем некоторые определения. Будем называть отображение φ эквидистантным проектированием, а точку \bar{Z} — эквидистантной проекцией точки Z на поверхность F . Дугу $Z\bar{Z}$ окружности в S_n , ортогональной к S_{n-1} , соединяющую в S_n^* точки Z и \bar{Z} — эквидистантным перпендикуляром на F из Z (\bar{Z} — основание перпендикуляра). Эквидистантный перпендикуляр $Z\bar{Z}$, очевидно, единственный.

Есть смысл говорить об эквидистантном проектировании в S_n^* на гиперплоскость (точнее, на полуgilерплоскость с границей в S_{n-1}). Такое проектирование осуществляется окружностями в сферическом пространстве, ортогональными к гиперплоскости, — обозначим ее F , — и в S_{n-1} . Система этих проектирующих окружностей, — назовем их эквидистантными, — обладает характерными свойствами: каждая точка S_n^* принадлежит определенной и единственной эквидистантной окружности; каждая эквидистантная окружность является пересечением пучка гиперсфер в S_n с центрами во всевозможных точках границы T ; любые две эквидистантные окружности располагаются в S_n в двумерной плоскости, ортогонально пересекающей T и являются в этой плоскости эквидистантными кривыми. Эквидистантное проектирование на гиперплоскость, очевидно, не увеличивает расстояний между точками. Свойства эти легко усматриваются из следующего замечания. Пусть S_{n-2} — $(n-2)$ -мерная плоскость в S_n , принадлежащая S_{n-1} . Рассмотрим движение в простран-

S_n — вращение вокруг плоскости S_{n-2} . Тогда траекториями точек S_n в этом движении будут окружности, и каждая гиперплоскость в S_n , проходящая через S_{n-2} , — в частности, и плоскость S_{n-1} , — пересекается этими окружностями ортогонально.

Лемма. Внешность выпуклой гиперповерхности F относительно гиперсферы S_n^* допускает на эту поверхность отображения, не увеличивающие расстояний между точками. Одним из таких отображений является эквидистантное проектирование на F . Это проектирование еще тем свойством, что переводит точки гиперсферы S_{n-1} , не принадлежащие поверхности, в точки поверхности, не принадлежащие сфере.

Доказательство. Надо установить, что эквидистантное проектирование не увеличивает расстояний между точками.

Пусть X и Y — точки S_n^* из внешности F , одна из которых не принадлежит поверхности, и пусть \bar{X} и \bar{Y} — эквидистантные проекции F этих точек. Покажем, что длины $|XY|$ и $|\bar{X}\bar{Y}|$ прямолинейных отрезков XY и $\bar{X}\bar{Y}$ в S_n^* , соединяющих соответствующие точки, связаны неравенством $|XY| \geq |\bar{X}\bar{Y}|$.

Пусть T_X и T_Y — гиперплоскости в S_n , опорные к F в точках X и Y соответственно к эквидистантным перпендикулярам $\bar{X}\bar{X}$ и $\bar{Y}\bar{Y}$ к поверхности в этих точках. (Естественно предположить, что $\bar{X} \neq \bar{Y}$ и $T_X \neq T_Y$). Эти опорные гиперплоскости составляют в S_n двугранный угол, содержащий поверхность F , часть которого в S_n^* будем обозначать U . Часть U мы сохраняем наименование «двугранный угол». Переходя к грани U в S_n^* , представляющую $(n-2)$ -мерную полуплоскость, можно называть ребром угла. Точки \bar{X} и \bar{Y} , очевидно, являются эквидистантными проекциями X и Y на плоскости T_X и T_Y соответственно в двугранном угле U . Вообще для каждой точки Z из внешности F эквидистантная проекция этой точки на плоскость грани угла, содержащая грани, является также и эквидистантной проекцией Z на ребро угла. Это вытекает из экстремального свойства, определяющего эквидистантное проектирование.

Могут представиться две возможности: 1) открытый отрезок XY разбивается с углом U ; 2) открытый отрезок XY не имеет с углом U общих точек.

Случай 1. Пусть X_1 и Y_1 — точки пересечения открытого отрезка XY с углом U , где $X_1 \in T_X$ и $Y_1 \in T_Y$. Отрезок XY разбивается этими точками на три части — отрезки XX_1 , X_1Y_1 , Y_1Y . Имеем $|\bar{X}X_1| \leq |Y_1\bar{Y}| < |Y_1Y|$. Заметим, что $|XY| = |XX_1| + |X_1Y_1| + |Y_1Y|$, а длина $|\bar{X}\bar{Y}|$ между точками \bar{X} и \bar{Y} подчинено неравенству $|\bar{X}\bar{Y}| \leq |\bar{X}X_1| + |X_1Y_1| + |Y_1\bar{Y}|$. Таким образом, $|\bar{X}\bar{Y}| \leq |XY|$.

Случай 2. Пусть $XX_1 \subset XY$ и $Y_1Y \subset XY$ — отрезки, эквидистантные проекции которых, — обозначим их L_X и L_Y , — соответственно на плоскости T_X и T_Y принадлежат соответствующим граням угла U . Отрезки L_X и L_Y не пересекаются. В противном случае из каждой из общей точки Y исходило бы по два эквидистантных перпендикуляра. Установим, что данные отрезки максимальные в следующем смысле: отрезки, имеющие концы L_X и L_Y , эквидистантные проекции \bar{X}_1 и \bar{Y}_1 точек X_1 и Y_1 , принадлежат ребру угла. Соединим проекции \bar{X}_1 и \bar{Y}_1 отрезком $\bar{X}_1\bar{Y}_1$ и продолжим его за точку Y_1 до пере-

сечения со сферой S_{n-1} . Точку пересечения обозначим Z . Пусть $S_{\bar{X}_1}$, $S_{\bar{Y}_1}$ — концентрические гиперсфера в S_n с центрами в точке Z и радиусами $|Z\bar{X}_1|$ и $|Z\bar{Y}_1|$ соответственно. Из свойств эквидистантного проектирования на гиперплоскость, отмеченных ранее, следует, что $X_1 \in S_{\bar{X}_1}$ и $Y_1 \in S_{\bar{Y}_1}$. Поскольку отрезок $\bar{X}_1\bar{Y}_1$ ортогонален $S_{\bar{X}_1}$ и $S_{\bar{Y}_1}$, то $|X_1Y_1| > |\bar{X}_1\bar{Y}_1|$. Кроме того, кривые L_X и L_Y , как эквидистантные проекции отрезков на гиперплоскости, спрямляемы, и их длины $|L_X| = |L_Y|$ подчинены неравенствам $|L_X| \leq |XX_1|$ и $|L_Y| \leq |YY_1|$. Теперь как и в предыдущем случае, получаем последовательно: $|XY| = |XX_1| + |X_1Y_1| + |Y_1Y| \geq |L_X| + |\bar{X}_1\bar{Y}_1| + |L_Y| \geq |\bar{X}\bar{Y}|$, т. е. $|\bar{X}\bar{Y}| \leq |XY|$. Лемма доказана.

§ 3. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЛЕММЫ О СЖАТИИ

Будем использовать обозначения, принятые для сферического пространства в предыдущем параграфе.

Теорема 1 (аналог леммы Буземана и Феллера). *Пусть $F \subset S_n^*$ — замкнутая выпуклая гиперповерхность, L — кривая с конечной длиной, расположенная во внешности F по отношению к S_n^* . Пусть \bar{L} — эквидистантная проекция L на F . Тогда L в параметризации, индуцированной параметризацией \bar{L} , — спрямляемая кривая, длина которой не превосходит длины кривой L .*

Доказательство основывается на лемме о сжатии и проводится также, как и в евклидовском случае.

В следующих двух теоремах считается, что рассматриваемое сферическое пространство является пространством кривизны единицы.

Теорема 2. *Пусть $F \subset S_n^*$ — замкнутая выпуклая гиперповерхность. Внутренний диаметр F не превосходит π ; равенство π достигается лишь для поверхности, содержащей диаметральные точки сферы S_{n-1} , границы S_n^* .*

Для доказательства проектируем эквидистантно на F сферу S_{n-1} и применяем теорему 1 (см. также [6], теорема 2).

Пусть F — замкнутая выпуклая гиперповерхность в сферическом пространстве, и пусть $X \in F$ — произвольная точка. Точка $Y \in F$ называется полярной к X , если выполняется следующее условие: для каждой точки $Z \in F$ сумма расстояний от Z на этой поверхности до X и Y не превосходит π .

Теорема 3. *Каждая точка на выпуклой гиперповерхности в сферическом пространстве имеет отличную от нее полярную к ней точку.*

В доказательстве применяется та же идея, что и для предыдущей теоремы. Кроме того, здесь используется лемма о сжатии (см. также [7], ч. II, теорема 8).

Теорема 4. *Пусть F и Φ — замкнутые выпуклые гиперповерхности в S_n^* , причем $F \neq \Phi$, и пусть Φ охватывает поверхность F , т. е. расположается в S_n^* во внешности этой поверхности. Утверждается, что площадь поверхности F не превосходит площади поверхности Φ , и равенство площадей возможно лишь в случае, когда F и Φ есть двугранные многогранники с гранями — полугиперсферами сферического пространства. В частности: площадь поверхности F не превосходит площади гиперсферы S_{n-1} , границы S_n^* ; если F — многогранник, то площадь любой его грани не больше суммы площадей остальных граней.*

Доказательства проектируем эквидистанцию Φ на F , учитываем известное внутреннее представление площади поверхности как мерой меры Хаусдорфа (см. [3]) и применяем теорему 1. Доказательство этой теоремы дал ранее Шепард ([8], теорема (3), а также в [3]).

Замечание. Еще один метод оценки площади F площадью S_{n-1} . Пусть внутренний многогранник X — внутренняя точка его грани. Многогранник F разбивается на два не пересекающиеся множества: 1) множество точек, каждая из которых соединяется с X на F единственной кратчайшей линией, являясь для этой кратчайшей внутренней точкой. — к этому мы относим и точку X ; 2) дополнение па многограннике F к множеству 1). Множество 2) естественно назвать множеством 2). С помощью теоремы о строении окрестности кратчайшей на многограннике, доказанной в [7] (ч. II, теорема 8; см. также замечание 2), устанавливается следующее. Множество 1) локально изометрично S_{n-1} ; в целом это множество в метрике, индуцированной метрикой F , изометрично открытому телесному многограннику P на сфере, центральному относительно образа точки X на этой сфере, не по-прежнему изометричной точки к этому образу (по теореме о внутренней метрике F) и, следовательно, не покрывающему всей сферы. Многогранника P представляет собой развертку, клетку с семисектирования (изометрические отождествления), которой проводят к многогранной метрике, изометричной многограннику P , образ границы P в этой метрике изометричен множеству 2). Отсюда находится оценка: площадь многогранника F не превосходит $(n-1)$ -мерному объему P не превосходит площади S_{n-1} . Для поверхности F та же оценка получается с помощью приближения многогранниками. Могут представиться два случая: а) для любой точки из F найдется другая точка, отстоящая от первой на расстоянии, меньшем внутреннего диаметра S_{n-1} ; б) исключающий предыдущий. Оценка площади F в случае а), строгая. В случае б) по теореме 2 из [6] поверхность F и многогранники изометричны и, следовательно, имеют равные площади. (В приведенном рассмотрении последнего случая достаточно воспользоваться и

4. КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ

Многогранник P — выпуклый многогранник-гиперповерхность в пространстве кривизной, евклидовом, сферическом или пространстве здесь и в дальнейшем считается, что тип пространства определен. Ломаную C на этом многограннике, составленную из прямолинейных отрезков в гранях, будем называть квазигеодезической, если следующее условие. В каждой внутренней вершине ломаной C любое направление на многограннике, исходящее из этой вершины, сопрягает с примыкающими звеньями ломаной углы (в смысле внутренней геометрии), которые в сумме не превосходят π (см. [7]). В этом разделе мы приводим некоторые теоремы о внешне геометрических свойствах квазигеодезических на выпуклых многогранниках, являющихся распространением на многомерный случай соответствующих результатов А. В. Погорялова ([2], теоремы 1—4). Кроме того, здесь излагается простое доказательство теоремы существования для квазигеодезических, которое, в отличие от внутренне геометрического доказательства, основывается на факте реализованности в пространстве рассматриваемой многогранной метрики.

Теорема 1. Из каждой точки на многограннике P в любом направлении можно провести квазигеодезическую ломаную, притом такую, которая не имела бы точек возврата. Квазигеодезическая ломаная по длине неограниченно продолжается в обе стороны.

Доказательство. Нужно установить первую часть теоремы. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда P — конус в евклидовом пространстве, и нам надо продолжить квазигеодезическую ломаную в вершину этого конуса.

Пусть O — вершина конуса P и r_X — прямолинейный отрезок конуса, исходящий из этой вершины. Докажем, что существует отрезок r_Y , исходящий из O , который вместе с первым отрезком составят двухзвенную квазигеодезическую ломаную. Условимся обозначать образующие конуса, несущие отрезки r_X , r_Y , теми же (соответствующими) символами.

Пусть S — гиперсфера единичного радиуса с центром в вершине P_S — сечение $P \cap S$, представляющее выпуклый многогранник в сферическом пространстве S . Каждой образующей конуса P соответствует многогранник P_S определенная точка, пересечение этой образующей гиперсферой. Внутренний диаметр многогранника не превосходит π , поэтому расстояние на многограннике P_S между точками равняется углу на конусе между соответствующими образующими. Пусть $X, Y \in P_S$ — точки, соответствующие образующим r_X, r_Y . Точка X — заданная. Точка Y — искомая и есть полярная для X , т. е. подчинена условию: для каждой точки $Z \in P_S$ сумма расстояний от X и Y до этой точки не превосходит π . Существование точки Y , отличной от X , обеспечивается теоремой 3 (§ 3), и соответствующий отрезок l_Y вместе с отрезком l_X представляют двухзвенную квазигеодезическую ломаную.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть P, P' — замкнутые выпуклые многогранники, при чем P располагается во внешности P' ; C — ломаная, общая многогранникам P и P' . Тогда, если C — квазигеодезическая на многограннике P , она является квазигеодезической и на многограннике P' .

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда P и P' — выпуклые евклидовские конусы с общей вершиной (см. [7]) и C — проходящая через эту вершину двухзвенная ломаная. Пусть S — гиперсфера единичного радиуса с центром в вершине, P_S и P'_S соответственно — сечения $P \cap S$ и $P' \cap S$, представляющие в сферическом пространстве S выпуклые многогранники. Ломаной на P_S соответствуют две взаимно полярные точки, также принадлежащие и P'_S . Учитывая, что P_S охватывает P'_S , по теореме 1 (3) находим, что эти точки на P'_S — также взаимно полярные. Отсюда и следует, что ломаная C на многограннике P'_S — квазигеодезическая.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть P — замкнутый выпуклый многогранник и C — ломаная, квазигеодезическая на P . Пусть τ — коническая или цилиндрическая двумерная поверхность, проектирующая ломаную C , прямолинейные образующие которой проходят через внутренние точки выпуклого тела, ограниченного многогранником P . Тогда при развертывании τ на плоскость (двумерную) C переходит в выпуклую ломаную, обращенную выпуклостью в сторону «от поверхности».

Доказательство непосредственно вытекает из определяющего свойства полярных точек на выпуклой гиперповерхности в сферическом пространстве. Здесь, как и в двух предыдущих теоремах, также используется переход к евклидовскому конусу, к двухзвенной квазигеодезической на

шагуе и, соответственно, к выпуклому многограннику в сферическом пространстве, сечению конуса единичной гиперсферой.

Теорема 4. Пусть P — замкнутый выпуклый многогранник, ограниченный выпуклым телом K , C — квазигеодезическая ломаная на этом теле. Пусть квазигеодезическая C деформируется в кривую C' , концы квазигеодезической остаются неподвижными, а всякая точка ее перемещается наружу вдоль прямой, выходящей из K . Тогда длина кривой C' не меньше длины квазигеодезической C .

Эта теорема — следствие предыдущей. Доказательство сводится к изучению двумерной многогранной развертки, гомеоморфной кругу, составленной из двух ломанных изометрических C и C' , при этом ломаной, соответствующей C , со стороны развертки в каждую из вершин неположителен.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Ученые записки Уральского филиала АН СССР, № 167 (1949), 275—307.
- Л. А. В. Погорелов. Квазигеодезические линии на выпуклой поверхности. Ученые записки Уральского филиала АН СССР, № 167 (1949), 275—307.
- Л. А. Бузаман. Выпуклые поверхности. Изд-во «Наука», М., 1964.
- Л. А. Д. Александров. Полные выпуклые поверхности в пространстве. Ученые записки Уральского филиала АН СССР, сер. матем., т. 9 № 2 (1945), 113—120.
- Л. А. Д. Александров. Квазигеодезические на многообразиях, гомеоморфных сфере. Ученые записки Уральского филиала АН СССР, 74 (1950), 613—616.
- Л. А. Д. Малка. Метрическое строение одного класса пространств, содержащих выпуклые поверхности. Укр. геометр. сб., вып. 4 (1967), 43—48.
- Л. А. Д. Малка. Многомерные пространства с многогранной метрикой неотрицательных кривизн. Ч. I. Укр. геометр. сб., вып. 5—6 (1968), 103—114; ч. II, там же, вып. 7 (1969), 68—77.
- Г. Е. С. Shephard. Angle deficiencies of convex polytopes. J. Lond. Math. Soc., 2 (1968), 325—336.
- Л. А. Д. Малка. О внутренней метрике выпуклых гиперповерхностей. Укр. геометр. сб., вып. 2 (1966), 59—69.

Поступила 15 мая 1970 г.

ИЗОПЕРИМЕТРИИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА СФЕРЕ

A. D. Milkov

(Харьков)

В этой заметке дается новое простое доказательство изопериметрии выпуклого многоугольника на сфере, вписанного в сферу.

Покажем, что, рассматривая произвольный многоугольник, будем мы получать ту из частей сферы, ограниченную соответствующей окружностью, которая имеет меньшую площадь.

Пусть $P \equiv ABC \dots D$ — замкнутый выпуклый многоугольник вписаный в малую окружность, $P' \equiv A'B'C' \dots D'$ — многоугольник изопериметрический на той же сфере, не равный, но изометричный $|AB| = |A'B'|, |B'C'| = |BC|, \dots, |D'A'| = |DA|$; символ $|\cdot|$ обозначает длину дуги. Тогда площадь многоугольника P' меньше площади многоугольника P .

Доказательство. Можно считать, что P' — выпуклый многоугольник. Мы превратим его в выпуклый с помощью конечного числа относительно опорных прямых (см. соответствующее доказательство в [1], где рассматривался случай многоугольника в плоскости); в результате площадь P' увеличивается.

Можно считать также, что многоугольник P охватывает центр окружности, в которую он вписан. В противном случае мы поступаем следующим образом. Заменяем сторону многоугольника P двумя новыми звеньями так, чтобы новый многоугольник вписывался в ту же окружность, охватывая ее центр, — это преобразование эквивалентно прикладыванию к некоторого треугольника; точно такой же треугольник соответствующим образом прикладываем извне к P' (выпуклому), заменяем соответствующую сторону P' надлежащими новыми звеньями, и в случае необходимости с помощью отражений превращаем полученный многоугольник в выпуклый.

Заметим, что многоугольник P' помещается внутри полусфера, поскольку его периметр не превосходит длины большой окружности. Этим обосновывается возможность использованных отражений для превращения многоугольника в выпуклый.

Итак, P и P' — выпуклые многоугольники. Будем считать еще, что они не равные.

Примем центр сферы за начало отсчета векторов в пространстве. Пусть e_X — орт вершины $X \in P$, e — орт центра окружности, в которую P вписан. Пусть θ_X и $\theta_{X'}$ — внутренние углы многоугольников P и P' соответствующие по изометрии (X и X' — соответствующие вершины многоугольников).

Обозначим V многогранный угол с вершиной в начале отсчета, проектирующий многоугольник P . Введем вектор $\omega = \sum_X e_X (\theta_{X'} - \theta_X)$. По однолемме А. В. Погорелова (см. [2]) вектор ω отличен от нуля и направлен в сферическое изображение угла V . Следовательно, $\omega \cdot e < 0$, но $\omega \cdot e = \sum_X e_X e (\theta_{X'} - \theta_X) = c(S_{P'} - S_P)$, где $S_{P'}$ и S_P — площади соответствующих многоугольников, c — положительная постоянная, поскольку $e_X e > 0$ и не зависит от X . Таким образом, $S_{P'} < S_P$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Решетняк. Об одном приеме превращения невыпуклой ломаной в выпуклую. «Успехи матем. наук», 12, № 3 (75) (1957), 189—191.
2. Ю. А. Волков. О деформациях выпуклого многогранного угла. «Успехи матем. наук», 11, № 5 (71) (1956), 209—210.

Поступила 15 мая 1970

**О СОПРЯЖЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ НА НЕГОЛОНОМНОМ
МНОГООБРАЗИИ V_n^{n-1} В P_n**

M. P. Роговой

(Харьков)

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим в проективном пространстве P_n неголономное многообразие V_n^{n-1} с образующим элементом (M_0, μ) , где M_0 — точка пространства, а μ — инцидентная ей плоскость. Сопровождающий репер определяется точками M_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), из которых точки M_1, M_2, \dots, M_n выбраны в μ . Уравнение инфинитезимального перемещения репера

$$dM_i = \omega^k M_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, n);$$

исследуют уравнению структуры проективного пространства

$$D\omega_i^k = [\omega_{i0}^j]_j^k, \quad (i, j, k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

При перемещениях в плоскости φ

$$\omega_0^n = 0; \quad (3)$$

устанавливается, что условия полной интегрируемости этого уравнения

$$\Gamma_{ij}^n \neq \Gamma_{ji}^n, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (4)$$

коэффициенты в разложении

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega_0^j, \quad \begin{cases} i, k = 0, 1, 2, \dots, n; \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}. \quad (5)$$

Симметричные системы на многомерных поверхностях афинного и проективного пространств в самом общем виде были определены и изучены В. Рыжиковым [4]. Строение двухкомпонентных неприводимых сопряженных систем на многомерных поверхностях проективного пространства исследовано М. А. Акивисом [5].

Точка M_0 — точка на m -мерной поверхности в P_n и E_m — ее касательная плоскость в точке M_0 . Два направления dM_0 и δM_0 , принадлежащие E_m , называются сопряженными на поверхности, если $d\delta M_0$, принадлежащее E_m , принадлежит E_m [4]:

$$d\delta M_0 \equiv 0 (E_m). \quad (6)$$

Геометрический смысл условия (6) состоит в том, что при инфинитезимальном перемещении касательной δM_0 в направлении dM_0 эта касательная остается в E_m .

Условие сопряженности распространяется на направления произвольной размерности [4]. Направления E_p и E_q размерностей p и q называются сопряженными на m -мерной поверхности, если сопряжены соответствующие направления, соответственно принадлежащие E_p и E_q :

$$d_{E_p} d_{E_q} M_0 \equiv 0 (E_m), \quad (7)$$

d_{E_p} и d_{E_q} означают дифференцирование соответственно в направлениях E_p и E_q .

Симметрические направления поверхности — это ее самосопряженные. Для одномерного асимптотического направления

$$d^2 M_0 \equiv 0 (E_m), \quad (8)$$

для каждого асимптотического направления E_s^a

$$d_{E_s^a}^2 M_0 \equiv 0 (E_m). \quad (9)$$

Набор направлений $E_{p_0}, E_{p_1}, \dots, E_{p_k}$, определенных в каждой точке поверхности, образует сопряженную систему $S(E_{p_0}^a, E_{p_1}, \dots, E_{p_k})$, удовлетворяющую следующие условия:

1) любая пара направлений сопряжена;

2) направления E_{p_i} изолированные, т. е. размерность их оболочки не превышает размерностей.

Симметричная система $S(E_{p_0}^a, E_{p_1}, \dots, E_{p_k})$ называется полной, если $p_0 + p_1 + \dots + p_k = m$, и сверхполной, если $2p_0 + p_1 + \dots + p_k > m$ [4].

2. СОПРЯЖЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ НА V_n^{n-1}

Рассматривая асимптотические направления в двух бесконечно близких точках на V_3^2 в P_3 , Я. П. Бланк получил проективную характеристику неголономности [1]. Изучая сопряженные направления на V_n в P_3 , Е. Бомпиани ввел другую проективную характеристику неголономности [2]. Сопряженные направления на неголономных многообразиях и их свойства в E_n рассматриваются в работе V. Obadeanu [7].

На неголономном многообразии V_n^{n-1} сопряженность не обладает свойством инволютивности; здесь $d\delta M_0 \neq \delta dM_0$; имеет место следующее

Определение. Направление dM_0 называется сопряженным направлению δM_0 на неголономном многообразии V_n^{n-1} , если $d\delta M_0$ принадлежит плоскости μ :

$$d\delta M_0 \equiv 0 (\mu). \quad (10)$$

Согласно (1), принимая во внимание (3),

$$\delta M_0 = \omega_0^k (\delta) M_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (11)$$

$$d\delta M_0 = (d\omega_0^k (\delta) + \omega_0^j (\delta) \omega_j^k (d)) M_k + \omega_0^l (\delta) \omega_l^n (d) M_n, \quad (12)$$

$$(k, j = 0, 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, n-1).$$

В силу (12) условие сопряженности (10) направления dM_0 направлению δM_0 приобретает следующий вид:

$$\omega_0^i (\delta) \omega_i^n (d) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (13)$$

или, воспользовавшись (5),

$$\Gamma_{ij}^n \omega_0^i (\delta) \omega_0^j (d) = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (14)$$

Из (14) следует, что данному фиксированному направлению δM_0 на V_n^{n-1} отвечает сопряженная $(n-2)$ -плоскость в том смысле, что любое направление dM_0 в этой $(n-2)$ -плоскости сопряжено направлению δM_0 . В координатах относительно сопровождающего репера уравнение этой $(n-2)$ -плоскости записывается так:

$$\Gamma_{ij}^n \omega_0^i (\delta) x^j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (15)$$

Попутно отметим, что в силу (4) коэффициенты Γ_{ij}^n не образуют симметрической матрицы и, в общем случае, условие (14) не выполняется, если поменять направления dM_0 и δM_0 местами; это означает, что свойство инволютивности сопряженных направлений, которое имеет место на голономной поверхности, здесь не соблюдается.

В статье [8] дано распространение на неголономное многообразие V_n^{n-1} в P_n соответствия, которое для случая $n=3$ построил Е. Бомпиани между прямыми связки с центром в точке M_0 и полем прямых в плоскости μ неголономного многообразия V_3^2 [2]. В этом обобщенном соответствии Бомпиани прямой $(M_0 \delta M_0)$, лежащей в плоскости μ неголономного многообразия V_n^{n-1} , соответствует $(n-2)$ -плоскость пересечения плоскостей μ и μ^* в точках M_0 и $M_0^* = M_0 + \delta M_0$:

$$\begin{cases} (M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1}), \\ (M_0^* M_1^* M_2^* \dots M_{n-1}^*) = (M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1}) + \delta (M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1}) \end{cases} \quad (16)$$

Если перейти к координатам относительно сопровождающего репера, нетрудно убедиться в том, что $(n-2)$ -плоскость (16) совпадает с $(n-2)$ -

(15), сопряженной направлению dM_0 . Таким образом, соответствие Бомпиани — это соответствие между одномерными и сопряженными $(n-2)$ -мерными направлениями на V_n^{n-1} .

Одномерные самосопряженные направления на V_n^{n-1} , как следует из (14), удовлетворяют уравнению

$$\Gamma_{ij}^k \omega_0^j(d) \omega_0^i(d) = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (17)$$

и в координатах относительно сопровождающего репера:

$$\Gamma_{ij}^k x^i x^j = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (18)$$

Уравнение асимптотического конуса неголономного многообразия (18). Одномерные образующие этого конуса — асимптотические направления на V_n^{n-1} .

3. УСЛОВИЕ СОПРЯЖЕННОСТИ В КАНОНИЧЕСКОМ РЕПЕРЕ

Канонический репер для V_n^{n-1} в P_n построен в статье [8]. За ребра $(M_0 M_1), (M_0 M_2), \dots, (M_0 M_{n-1})$ принятые инвариантные прямые в плоскости π . Каждая из этих прямых обладает тем свойством, что отвечающая ей $(n-2)$ -плоскость, в полярном соответствии относительно асимптотического конуса и $(n-2)$ -плоскость, отвечающая этой прямой в соответствии Бомпиани, совпадают. За исключением прямой $(M_0 M_m)$ для случая $n = 2m$ все эти прямые являются образующими асимптотического конуса. Прямая $(M_0 M_n)$ — проективная нормаль для V_n^{n-1} . Точки M_1, M_2, \dots, M_{n-1} — это точки пересечения инвариантных прямых с $(n-2)$ -плоскостью, отвечающей в соответствии Бомпиани прямой $(M_0 M_n)$.

В каноническом репере имеют место следующие равенства:

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, n; i \neq j). \quad (19)$$

Условие сопряженности (14) направления dM_0 направлению dM_0 в каноническом репере записывается так:

$$\Gamma_{i+k, k}^{\pi} \omega_0^{n-k}(\delta) \omega_0^k(d) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (20)$$

Уравнение $(n-2)$ -плоскости (15), сопряженной направлению dM_0 ,

$$\Gamma_{i+k, k}^{\pi} \omega_0^{n-k}(\delta) x^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (21)$$

Уравнение асимптотического конуса (18) в каноническом репере записывается так

$$\Gamma_{i+k, k}^{\pi} x^{n-k} x^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (22)$$

4. БИСОПРЯЖЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Как уже отмечалось, сопряженные направления на V_n^{n-1} не обладают свойством квивалютности: если направление dM_0 сопряжено направлению dM_0 , то направление dM_0 , вообще говоря, не сопряжено направлению dM_0 .

Пусть δM_0 какое-нибудь направление на V_n^{n-1} ; ему отвечает сопряженная $(n-2)$ -плоскость (21). Этой $(n-2)$ -плоскости, в свою очередь, отвечает сопряженное ей направление dM_0 ; направлением служит, очевидно, ось пучка $(n-2)$ -плоскостей, сопряженных всевозможным направлениям, принадлежащим $(n-2)$ -плоскости (21). Направление dM_0 назовем бисопряженным направлению δM_0 .

Выберем в $(n-2)$ -плоскости (21), сопряженной направлению

$$\delta M_0 = \omega_0^j(\delta) M_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (23)$$

какие-нибудь $n-2$ линейно независимых направлений:

$$d_i M_0 = \omega_0^j(d_i) M_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, n-2);$$

тогда

$$\Gamma_{n-k, k}^n \omega_0^{n-k}(\delta) \omega_0^{n-k}(d_i) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, n-2). \quad (24)$$

Направление

$$dM_0 = \omega_0^j(d) M_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (25)$$

бисопряженное направлению (23), определяется из системы уравнений

$$\Gamma_{n-k, k}^n \omega_0^{n-k}(d_i) \omega_0^k(d) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, n-2). \quad (26)$$

Заменим в (24) индекс суммирования k на $n-k$:

$$\Gamma_{k, n-k}^n \omega_0^{n-k}(d_i) \omega_0^k(\delta) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (27)$$

и рассмотрим системы уравнений (26) и (27). Принимая при фиксированном k величины $\Gamma_{n-k, k}^n \omega_0^k(d)$ в системе (26) и величины $\Gamma_{k, n-k}^n \omega_0^k(\delta)$ в системе (27) за неизвестные, замечаем, что эти системы совпадают, и поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma_{1, n-1}^n \omega_0^1(\delta) : \Gamma_{2, n-2}^n \omega_0^2(\delta) : \dots : \Gamma_{n-1, 1}^n \omega_0^{n-1}(\delta) = \\ = \Gamma_{n-1, 1}^n \omega_0^1(d) : \Gamma_{n-2, 2}^n \omega_0^2(d) : \dots : \Gamma_{1, n-1}^n \omega_0^{n-1}(d). \end{aligned} \quad (28)$$

Формула (28) позволяет определить направление dM_0 , бисопряженное данному направлению δM_0 :

$$\begin{aligned} \omega_0^1(d) : \omega_0^2(d) : \dots : \omega_0^{n-1}(d) = \\ = \frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n} \omega_0^1(\delta) : \frac{\Gamma_{2, n-2}^n}{\Gamma_{n-2, 2}^n} \omega_0^2(\delta) : \dots : \frac{\Gamma_{n-1, 1}^n}{\Gamma_{1, n-1}^n} \omega_0^{n-1}(\delta). \end{aligned} \quad (29)$$

Для голоморфной поверхности

$$\Gamma_{k, n-k}^n = \Gamma_{n-k, k}^n, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1); \quad (30)$$

направление δM_0 и бисопряженное направление dM_0 совпадают.

Рассмотрим теперь p линейно независимых направлений $\delta_i M_0$, $\delta_2 M_0, \dots, \delta_p M_0$ на V_n^{n-1} :

$$\delta_i M_0 = \omega_0^j(\delta_i) M_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, p); \quad (31)$$

ранг матрицы

$$\left| \begin{array}{c} \omega_0^j(\delta_i) \\ \hline \end{array} \right|_{i=1, j=1}^{i=p, j=n-1}$$

равен p .

Этим направлениям соответствуют бисопряженные направления $d_1M_0, d_2M_0, \dots, d_pM_0$:

$$d_iM_0 = \omega_0^j(d_i)M_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, p), \quad (32)$$

т.е. согласно (29),

$$\begin{aligned} & \omega_0^1(d_i) : \omega_0^2(d_i) : \dots : \omega_0^{n-1}(d_i) = \\ & = \frac{\Gamma_{1,n-1}^n}{\Gamma_{n-1,1}^n} \omega_0^1(\delta_i) : \frac{\Gamma_{2,n-2}^n}{\Gamma_{n-2,2}^n} \omega_0^2(\delta_i) : \dots : \frac{\Gamma_{n-1,1}^n}{\Gamma_{1,n-1}^n} \omega_0^{n-1}(\delta_i), \quad (i = 1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

Ранг матрицы

(33)

$$\| \omega_0^j(d_i) \|_{i,j=1}^{i=p, j=n-1}$$

в силу (33) также равен p и, следовательно, направления (32) линейно независимы. Кроме того, направлению $(M_0, \lambda_1\delta_1M_0 + \lambda_2\delta_2M_0 + \dots + \lambda_p\delta_pM_0)$, принадлежащему p -направлению $(M_0, \delta_1M_0, \delta_2M_0, \dots, \delta_pM_0)$, соответствует, очевидно, бисопряженное направление $(M_0, \lambda_1d_1M_0 + \lambda_2d_2M_0 + \dots + \lambda_pd_pM_0)$, принадлежащее p -направлению $(M_0, d_1M_0, d_2M_0, \dots, d_pM_0)$.

Таким образом, p -направлению $E_p = (M_0, \delta_1M_0, \delta_2M_0, \dots, \delta_pM_0)$ соответствует бисопряженное p -направление $E_p^b = (M_0, d_1M_0, d_2M_0, \dots, d_pM_0)$.

Будем искать направления E_p , обладающие тем свойством, что соответствующие им бисопряженные направления E_p^b совпадают с ними, $E_p \equiv E_p^b$.

Начнем с $p = 1$. Ищем такое одномерное направление E_1

$$\omega_0^1(\delta) : \omega_0^2(\delta) : \dots : \omega_0^{n-1}(\delta).$$

которое совпадало бы со своим бисопряженным направлением E_1^b :

$$\frac{\Gamma_{1,n-1}^n}{\Gamma_{n-1,1}^n} \omega_0^1(\delta) : \frac{\Gamma_{2,n-2}^n}{\Gamma_{n-2,2}^n} \omega_0^2(\delta) : \dots : \frac{\Gamma_{n-1,1}^n}{\Gamma_{1,n-1}^n} \omega_0^{n-1}(\delta).$$

Нетрудно усмотреть, что этим свойством обладают только инвариантные направления (M_0M_j) , ($j = 1, 2, \dots, n-1$) неголономного многообразия

$V_{\frac{n}{2}}^{n-1}$ — ребра канонического репера (предполагается, что отношения $\frac{\Gamma_{1,n-1}^n}{\Gamma_{n-1,i}^n}$ попарно не равны друг другу).

Пусть теперь $p > 1$. Если E_p образовано любыми p инвариантными направлениями (M_0M_j) , то, очевидно, $E_p \equiv E_p^b$. Докажем, что этим свойством обладают только эти E_p .

В самом деле, если некоторое E_p задано p линейно независимыми одномерными направлениями

$$\omega_0^1(\delta_j) : \omega_0^2(\delta_j) : \dots : \omega_0^{n-1}(\delta_j), \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

то соответствующее ему бисопряженное E_p^b определяется одномерными направлениями

$$\frac{\Gamma_{1,n-1}^n}{\Gamma_{n-1,1}^n} \omega_0^1(\delta_j) : \frac{\Gamma_{2,n-2}^n}{\Gamma_{n-2,2}^n} \omega_0^2(\delta_j) : \dots : \frac{\Gamma_{n-1,1}^n}{\Gamma_{1,n-1}^n} \omega_0^{n-1}(\delta_j), \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

которые также линейно независимы. Направления E_p и E_p^b совпадают тогда и только тогда, когда ранг r матрицы

$$\left| \begin{array}{cccc} \omega_0^1(\delta_1) & \omega_0^2(\delta_1) & \dots & \omega_0^{n-1}(\delta_1) \\ \omega_0^1(\delta_2) & \omega_0^2(\delta_2) & \dots & \omega_0^{n-1}(\delta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0^1(\delta_p) & \omega_0^2(\delta_p) & \dots & \omega_0^{n-1}(\delta_p) \\ \frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n} \omega_0^1(\delta_1) & \frac{\Gamma_{2, n-2}^n}{\Gamma_{n-2, 2}^n} \omega_0^2(\delta_1) & \dots & \frac{\Gamma_{n-1, 1}^n}{\Gamma_{1, n-1}^n} \omega_0^{n-1}(\delta_1) \\ \frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n} \omega_0^1(\delta_2) & \frac{\Gamma_{2, n-2}^n}{\Gamma_{n-2, 2}^n} \omega_0^2(\delta_2) & \dots & \frac{\Gamma_{n-1, 1}^n}{\Gamma_{1, n-1}^n} \omega_0^{n-1}(\delta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n} \omega_0^1(\delta_p) & \frac{\Gamma_{2, n-2}^n}{\Gamma_{n-2, 2}^n} \omega_0^2(\delta_p) & \dots & \frac{\Gamma_{n-1, 1}^n}{\Gamma_{1, n-1}^n} \omega_0^{n-1}(\delta_p) \end{array} \right| \quad (34)$$

равен p , $r = p$.

Предположим, что минор p -го порядка, стоящий в верхнем левом углу матрицы

$$\left| \begin{array}{cccc} \omega_0^1(\delta_1) & \omega_0^2(\delta_1) & \dots & \omega_0^p(\delta_1) \\ \omega_0^1(\delta_2) & \omega_0^2(\delta_2) & \dots & \omega_0^p(\delta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0^1(\delta_p) & \omega_0^2(\delta_p) & \dots & \omega_0^p(\delta_p) \end{array} \right| \quad (35)$$

не равен нулю,

и рассмотрим миноры $(p+1)$ -го порядка матрицы (34), окаймляющие базисный минор (35), элементами только первого справа столбца и элементами одной из p остальных строк; все эти миноры равны нулю:

$$\left| \begin{array}{cccc} \omega_0^1(\delta_1) & \omega_0^2(\delta_1) & \dots & \omega_0^p(\delta_1) & \omega_0^{p+1}(\delta_1) \\ \omega_0^1(\delta_2) & \omega_0^2(\delta_2) & \dots & \omega_0^p(\delta_2) & \omega_0^{p+1}(\delta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_0^1(\delta_p) & \omega_0^2(\delta_p) & \dots & \omega_0^p(\delta_p) & \omega_0^{p+1}(\delta_p) \\ \frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n} \omega_0^1(\delta_j) & \frac{\Gamma_{2, n-2}^n}{\Gamma_{n-2, 2}^n} \omega_0^2(\delta_j) & \dots & \frac{\Gamma_{p, n-p}^n}{\Gamma_{n-p, p}^n} \omega_0^p(\delta_j) & \frac{\Gamma_{p+1, n-p-1}^n}{\Gamma_{n-p-1, p+1}^n} \omega_0^{p+1}(\delta_j) \end{array} \right| = 0. \quad (36)$$

$(j = 1, 2, \dots, p).$

Разложим определитель (36) по элементам последней строки:

$$\frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n} \omega_0^1(\delta_j) \Delta_1 + \frac{\Gamma_{2, n-2}^n}{\Gamma_{n-2, 2}^n} \omega_0^2(\delta_j) \Delta_2 + \dots + \frac{\Gamma_{p+1, n-p-1}^n}{\Gamma_{n-p-1, p+1}^n} \omega_0^{p+1}(\delta_j) \Delta_{p+1} = 0, \quad (37)$$

$(i = 1, 2, \dots, p),$

где

$$\Delta_i = (-1)^{i+1} \left| \begin{array}{ccccc} \omega_0^1(\delta_1) & \dots & \omega_0^{i-1}(\delta_1) & \omega_0^{i+1}(\delta_1) & \dots & \omega_0^{p+1}(\delta_1) \\ \omega_0^1(\delta_2) & \dots & \omega_0^{i-1}(\delta_2) & \omega_0^{i+1}(\delta_2) & \dots & \omega_0^{p+1}(\delta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0^1(\delta_p) & \dots & \omega_0^{i-1}(\delta_p) & \omega_0^{i+1}(\delta_p) & \dots & \omega_0^{p+1}(\delta_p) \end{array} \right|, \quad (38)$$

$(i = 1, 2, \dots, p+1).$

Из (37) получаем

$$\Delta_1 : \Delta_2 : \dots : \Delta_{p+1} = \frac{\Gamma_{p+1, n-p-1}^n}{\Gamma_{n-p-1, p+1}^n} \Delta_1 : \frac{\Gamma_{p, n-p}^n}{\Gamma_{n-p, p}^n} \Delta_2 : \dots : \frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n} \Delta_{p+1}. \quad (39)$$

В силу (35) определитель $\Delta_{p+1} \neq 0$ и из (39), в предположении, что

$$\frac{\Gamma_{i, n-i}^n}{\Gamma_{n-i, i}^n} \neq \frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n}, \quad (i = 2, 3, \dots, p+1),$$

следует, что все остальные

$$\Delta_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Но тогда из (37) следует, что

$$\omega_0^{p+1}(\delta_j) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p). \quad (40)$$

Аналогично, присоединяя последовательно к минору (35) другие столбцы матрицы (34), доказывается, что все

$$\omega_0^k(\delta_j) = 0, \quad (k = p+1, p+2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, p); \quad (41)$$

а это означает: искомое направление E_p , обладающее тем свойством, что оно совпадает со своим бисопряженным E_p^b — это направление, определяемое инвариантными прямыми $(M_0 M_1)$, $(M_0 M_2)$, \dots , $(M_0 M_p)$:

$$E_p = (M_0 M_1 M_2 \dots M_p). \quad (42)$$

Совершенно аналогично доказывается, что этим свойством обладают только инвариантные p -направления, определяемые любыми p инвариантными прямыми $(M_0 M_{i_k})$, $(k = 1, 2, \dots, p)$:

$$E_p = (M_0 M_{i_1} M_{i_2} \dots M_{i_p}). \quad (43)$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема. Инвариантные p -направления неголономного многообразия V_n^{n-1} и только эти направления совпадают с соответствующими им бисопряженными p -направлениями.

Отметим, что для ранга r матрицы (34) могут представиться три случая.

1) $r = 2p < n - 1$. Направления

$$\omega_0^1(\delta_j) : \omega_0^2(\delta_j) : \dots : \omega_0^{n-1}(\delta_j), \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (44)$$

и бисопряженные им направления

$$\frac{\Gamma_{1, n-1}^n}{\Gamma_{n-1, 1}^n} \omega_0^1(\delta_j) : \frac{\Gamma_{2, n-2}^n}{\Gamma_{n-2, 2}^n} \omega_0^2(\delta_j) : \dots : \frac{\Gamma_{n-1, 1}^n}{\Gamma_{1, n-1}^n} \omega_0^{n-1}(\delta_j), \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (45)$$

составляют линейно независимую систему $2p$ -направлений. Направление E_p , определяемое направлениями (44), и бисопряженное ему направление E_p^b , определяемое направлениями (45), не имеют общих направлений, т. е. они изолированы.

2) $p < r < 2p$, или $r = 2p - m$, где $m < p$.

Направления (44) и (45) составляют линейно зависимую систему $2p$ -направлений. Направления E_p и E_p^b имеют общее m -направление E_m .

Из многообразия p -направлений всегда можно выделить подмногообразие p -направлений E'_p , обладающих указанным свойством.

Условия, которым удовлетворяет это подмногообразие, могут быть получены, если приравнять нуль миноры $(r+1)$ -го порядка, окаймляющие базисный минор матрицы (34). Число таких миноров и, следовательно, условий такое:

$$q = (2p - r)(n - 1 - r) = m(n - 2p + m - 1). \quad (46)$$

Вопрос о структуре подмногообразия p -направлений E_p' требует отдельного исследования.

3) $r = p$. Направление E_p совпадает со своим бисопряженным направлением E_p^b . Направление E_p — инвариантное p -направление (43) неголономного многообразия V_n^{n-1} .

5. ИНВОЛЮТИВНО СОПРЯЖЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Пусть $E_p = (M_0, \delta_1 M_0, \delta_2 M_0, \dots, \delta_p M_0)$ — произвольное p -направление на V_n^{n-1} . Сопряженное ему $(n-p-1)$ -направление E_{n-p-1} , согласно (20), определяется однородной системой линейных уравнений

$$\Gamma_{n-k, k}^n \omega_0^{n-k}(\delta_i) \omega_0^k(d) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, p). \quad (47)$$

Выделим в E_{n-p-1} одномерные направления, которым сопряжены все направления $\delta_i M_0$ из E_p ; для этого $\omega_0^k(d)$, кроме системы (47), должны удовлетворять системе уравнений

$$\Gamma_{n-k, k}^n \omega_0^{n-k}(d) \omega_0^k(\delta_i) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, p),$$

или, заменив индекс суммирования k на $n-k$,

$$\Gamma_{k, n-k}^n \omega_0^{n-k}(\delta_i) \omega_0^k(d) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, p). \quad (48)$$

Уравнения (47) и (48) объединяются в одну систему (47)–(48) однородных линейных уравнений, фундаментальная система решений которой определяет многомерное направление E_q , инволютивно сопряженное направлению E_p : любое одномерное направление, принадлежащее E_p , и любое одномерное направление, принадлежащее E_q , взаимно сопряжены.

Сравним матрицу системы (47)–(48)

$$\left| \begin{array}{cccc} \Gamma_{n-1, 1}^n \omega_0^{n-1}(\delta_1) & \Gamma_{n-2, 2}^n \omega_0^{n-2}(\delta_1) & \dots & \Gamma_{1, n-1}^n \omega_0^1(\delta_1) \\ \Gamma_{n-1, 1}^n \omega_0^{n-1}(\delta_2) & \Gamma_{n-2, 2}^n \omega_0^{n-2}(\delta_2) & \dots & \Gamma_{1, n-1}^n \omega_0^1(\delta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{n-1, 1}^n \omega_0^{n-1}(\delta_p) & \Gamma_{n-2, 2}^n \omega_0^{n-2}(\delta_p) & \dots & \Gamma_{1, n-1}^n \omega_0^1(\delta_p) \\ \Gamma_{1, n-1}^n \omega_0^{n-1}(\delta_1) & \Gamma_{2, n-2}^n \omega_0^{n-2}(\delta_1) & \dots & \Gamma_{n-1, 1}^n \omega_0^1(\delta_1) \\ \Gamma_{1, n-1}^n \omega_0^{n-1}(\delta_2) & \Gamma_{2, n-2}^n \omega_0^{n-2}(\delta_2) & \dots & \Gamma_{n-1, 1}^n \omega_0^1(\delta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1, n-1}^n \omega_0^{n-1}(\delta_p) & \Gamma_{2, n-2}^n \omega_0^{n-2}(\delta_p) & \dots & \Gamma_{n-1, 1}^n \omega_0^1(\delta_p) \end{array} \right| \quad (49)$$

с матрицей (34), первые p строк которой состоят из компонент одномерных направлений (44), определяющих E_p , а остальные p строк — из компонент бисопряженных направлений (45), определяющих E_p^b .

Ранг матрицы (49), очевидно, равен рангу матрицы (34); обозначим общий ранг этих матриц через r и рассмотрим случай, когда $r = 2p < n-1$ (пункт 4, случай 1). Направление E_p и соответствующее ему E_p^b изолированы. Система (47)–(48) определяет направление E_{n-2p-1} , такое, что E_p и E_{n-2p-1} инволютивно сопряжены.

Как известно, размерность $P_{n,m}$ многообразия всех m -плоскостей π -пространства определяется по формуле [6]:

$$P_{n,m} = (m+1)(n-m). \quad (50)$$

Воспользовавшись этой формулой, нетрудно подсчитать размерность $P_{n-1}(E_p)$ многообразия всех p -направлений E_p неголономного многообразия V_n^{n-1} , как многообразия p -плоскостей $(n-1)$ -пространства, исходящих из данной точки M_0 :

$$P_{n-1}(E_p) = p(n-p-1). \quad (51)$$

Размерность многообразия направлений E_{n-2p-1} , инволютивно сопряженных направлениям E_p ,

$$P_{n-1}(E_{n-2p-1}) = 2p(n-2p-1). \quad (52)$$

Ищем такое E_p , для которого

$$P_{n-1}(E_p) = P_{n-1}(E_{n-2p-1});$$

что оказывается равным

$$p = \frac{n-1}{3}.$$

Следовательно, такое E_p существует, если $\frac{n-1}{3}$ — число целое. При этом же значении p , как легко убедиться, размерности самих E_p и E_{n-2p-1} также одинаковы.

Исходя из этого, необходимо рассмотреть три случая.

1-й случай. $p = \frac{n-1}{3}$ — число целое; $P_{n-1}(E_p) = P_{n-1}(E_{n-2p-1})$ и размерность E_p равна размерности E_{n-2p-1} .

Соответствие между инволютивно сопряженными направлениями E_p и E_{n-2p-1} взаимно однозначное. Все многообразие p -направлений на V_n^{n-1} разбивается на инволютивно сопряженные пары.

2-й случай. $p < \frac{n-1}{3}$; $P_{n-1}(E_p) < P_{n-1}(E_{n-2p-1})$, и размерность E_p меньше размерности E_{n-2p-1} .

Каждому E_p соответствует некоторое инволютивно сопряженное E_{n-2p-1} . Каждому же E_{n-2p-1} соответствует инволютивно сопряженное E_p , размерность которого

$$t = n - 1 - 2(n - 2p - 1) = 4p - (n - 1) < p,$$

поэтому направления E_{n-2p-1} , которым соответствуют инволютивно сопряженные направления E_p , должны удовлетворять определенным условиям.

В самом деле, если принять какое-нибудь E_{n-2p-1} за исходное, то система уравнений (47) — (48) определит инволютивно сопряженное E_p только тогда, когда ранг ее матрицы окажется равным $r = n - p - 1$. Все миноры $(n-p)$ -го порядка, окаймляющие базисный минор этой матрицы, должны обратиться в нуль; число таких миноров

$$\varphi = [2(n-2p-1) - (n-p-1)][n-1-(n-p-1)] = p(n-3p-1). \quad (53)$$

Следовательно, между формами $\omega_0^k(\delta_i)$, ($k = 1, 2, \dots, n-1$; $i = 1, 2, \dots, n-2p-1$), определяющими направление E_{n-2p-1} , имеет место ровно q соотношений. Эти соотношения выделяют из всего многообразия направлений E_{n-2p-1} подмногообразие направлений E'_{n-2p-1} , обладающих инволютивно сопряженными направлениями E_p .

Размерность этого подмногообразия направлений E'_{n-2p-1}

$$\begin{aligned} P_{n-1}(E'_{n-2p-1}) &= P_{n-1}(E_{n-2p-1}) - q = 2p(n-2p-1) - p(n-3p-1) = \\ &= p(n-p-1) = P_{n-1}(E_p). \end{aligned}$$

Многообразие направлений E_p отображается в многообразие направлений E_{n-2p-1} .

Ввиду изложенного выше (пункт 4, случай 2), попутно отметим, что подмногообразие направлений E'_{n-2p-1} состоит из направлений, каждое из которых имеет со своим бисопряженным направлением общее направление E_{n-3p-1} .

3-й случай. $\frac{n-1}{3} < p < \frac{n-1}{2}$;

$P_{n-1}(E_p) > P_n(E_{n-2p-1})$ и размерность E_p больше размерности E_{n-2p-1} .

Каждому E_p соответствует некоторое инволютивно сопряженное E_{n-2p-1} . Каждому же E_{n-2p-1} отвечает инволютивно сопряженное E_t , размерность которого

$$t = n - 1 - 2(n - 2p - 1) = 4p - (n - 1) > p.$$

Все направления E_p , принадлежащие E_t , имеют одно и то же инволютивно сопряженное E_{n-2p-1} . Многообразие направлений E_p отображается на многообразие направлений E_{n-2p-1} .

Эти выводы подтверждаются также подсчетом размерностей многообразий направлений. Размерность многообразия всех E_p , принадлежащих E_t ($t > p$), вычисляется по формуле (51):

$$P_t(E_p) = p(t-p) = p[3p-(n-1)].$$

Воспользовавшись теперь формулами (51) и (52), убеждаемся в том, что точно такое же значение имеет разность

$$P_{n-1}(E_p) - P_{n-1}(E_{n-2p-1}) = p[3p-(n-1)],$$

т. е.

$$P_{n-1}(E_p) = P_{n-1}(E_{n-2p-1}) + P_t(E_p).$$

6. ИНВОЛЮТИВНАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ; ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ

Особым назовем случай, когда ранг матрицы (49) и, следовательно, ранг матрицы (34) удовлетворяет условию $r = 2p - m$; $m < p$ (пункт 4, случай 2). Направление E_p и бисопряженное ему направление E_p^b имеют общее направление E_m . Подмногообразие направлений E'_p , обладающих этим свойством, удовлетворяет определенным условиям, число q которых определяется формулой (46).

Из системы уравнений (47)–(48) следует, что направлениям E'_p соответствуют инволютивно сопряженные направления E_{n-r+1} , размерность которых $n-r-1 = n-2p+m-1$ на m единиц больше размерности инволютивно сопряженных направлений E_{n-2p-1} , которые соответствуют направлениям E_p в неособом случае.

Размерность подмногообразия направлений E'_p равна

$$P_{n-1}(E'_p) = P_{n-1}(E_p) - q = (p-m)(n+p-m-1). \quad (54)$$

Будем искать многообразие направлений E'_p , размерность которого равна наперед заданному числу l , $P_{n-1}(E'_p) = l$. При фиксированных n и p получаем уравнение для определения m :

$$(p-m)^2 - (n-1)(p-m) + l = 0,$$

откуда

$$m = p - \frac{(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2 - 4l^2}}{2}. \quad (55)$$

Подкоренное выражение в (55) должно быть квадратом целого числа; это, как известно, будет иметь место тогда и только тогда, если

$$n-1 = x^2 + y^2, \quad l = xy, \quad (56)$$

где x и y — любые целые числа.

Из (55) получаем для m следующие значения:

$$m_1 = p - x^2, \quad m_2 = p - y^2; \quad (57)$$

а для ранга матрицы (34), соответственно,

$$r_1 = p + x^2, \quad r_2 = p + y^2. \quad (58)$$

Из (56) заключаем, что не для любого n имеет место особый случай а только тогда, когда $n-1$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Далее, паре целых чисел x и y отвечают определенные значения p и l ; для m и r , в силу того что x и y входят в (56) симметрично, можно оставить только по одному значению:

$$m = p - x^2 \quad (57')$$

$$r = p + x^2. \quad (58')$$

Из (57') следует, что $x^2 < p$, а из (56), (58') и условия $r < n-1$ — что $p < y^2$, следовательно, имеет место неравенство

$$x^2 < p < y^2; \quad (59)$$

это означает, что в формулах (57') и (58') за x следует принять меньшее из двух чисел x и y .

Для размерностей многообразия E'_p и инволютивно сопряженного многообразия E_{n-r-1} получаем

$$P_{n-1}(E'_p) = x^2(2x^2 + y^2), \quad (60)$$

$$P_{n-1}(E_{n-r-1}) = (x^2 + p)(y^2 - p).$$

Значение p , при котором

$$P_{n-1}(E'_p) = P_{n-1}(E_{n-r-1}),$$

определяется из уравнения

$$p^2 - (y^2 - x^2)p + 2x^4 = 0, \quad (61)$$

откуда

$$p = \frac{y^2 - x^2 \pm \sqrt{(y^2 + x^2)(y^2 - 3x^2)}}{2}. \quad (62)$$

Можно доказать, что подкоренное выражение в (62) не может быть квадратом целого числа; следовательно, такого значения не существует.

Отметим еще, что при $y^2 < 3x^2$ $P_{n-1}(E'_p) > P_{n-1}(E_{n-r-1})$; многообразие E'_p отображается на многообразие E_{n-r-1} . При $y^2 > 3x^2$ уравнение (61) имеет два вещественных корня $p_1 < p_2$:

$$P_{n-1}(E'_p) > P_{n-1}(E_{n-r-1}), \text{ если } p < p_1$$

или

$$p > p_2; \quad P_{n-1}(E'_p) < P_{n-1}(E_{n-r-1}), \text{ если } p_1 < p < p_2.$$

7. ИНВОЛЮТИВНАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ; ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ

Особый интерес представляет случай, когда размерность l многообразия направлений E_p' равна нулю. Это означает, что таких направлений может быть только конечное число.

Из (55), при $l = 0$, размерность n пространства не подчинена никаким ограничениям — она может быть произвольной; для m получаем два значения:

$$m_1 = p, \quad m_2 = p - (n - 1).$$

Но $p < n - 1$, поэтому значение m_2 отпадает; остается только значение

$$m = p$$

и, следовательно,

$$r = 2p - m = p.$$

Направление E_p' совпадает со своим бисопряженным направлением E_p^* (пункт 4, случай 3). Как было доказано, этим свойством обладают только инвариантные p -направления

$$E_p = (M_0 M_{i_1} M_{i_2} \dots M_{i_p}). \quad (63)$$

Евиду того что $r = p$ — наименьшее возможное значение для ранга направлению (63) соответствует инволютивно сопряженное направление наибольшей возможной размерности $n - p - 1$. Иными словами, направление E_{n-p-1} , сопряженное направлению (63), будет для него также инволютивно сопряженным.

Например, прямой $(M_0 M_i)$

$$\omega_0^1(\delta) = \omega_0^2(\delta) = \dots = \omega_0^{i-1}(\delta) = \omega_0^{i+1}(\delta) = \dots = \omega_0^{n-1}(\delta)$$

соответствует, согласно (21), сопряженная $(n - 2)$ -плоскость, уравнение которой $x^{n-i} = 0$; следовательно, одномерное направление $(M_0 M_i)$ и $(n - 2)$ -мерное направление $(M_0 M_1 \dots M_{n-i-1} M_{n-i+1} \dots M_{n-1})$ инволютивно сопряжены.

Попутно отметим, что, так как прямая $(M_0 M_i)$ — инвариантная образующая асимптотического конуса (22), за исключением прямой $(M_0 M_m)$ для случая $n = 2m$, то соответствующее ей инволютивно сопряженное $(n - 2)$ -направление — касательная вдоль этой образующей $(n - 2)$ -плоскость конуса; для прямой же $(M_0 M_m)$ — это полярная $(n - 2)$ -плоскость относительно асимптотического конуса.

Инвариантному p -направлению E_p (63) соответствует также инвариантное $(n - p - 1)$ -направление E_{n-p-1} . Построить его можно следующим образом: строим сперва инволютивно сопряженные $(n - 2)$ -направления, соответствующие одномерным направлениям $(M_0 M_{i_k})$, принадлежащим E_p :

$$(M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-i_k-1} M_{n-i_k+1} \dots M_{n-1}); \quad (64)$$

$$(k = 1, 2, \dots, p)$$

пересечение $(n - 2)$ -плоскостей (64) и определяет искомое E_{n-p-1} .

Инвариантные инволютивно сопряженные направления E_p и E_{n-p-1} могут быть изолированными и не изолированными. В последнем случае их общее направление является асимптотическим направлением — плоской образующей асимптотического конуса. Так, направлениям $(M_0 M_1)$, $(M_0 M_2)$, $(M_0 M_{n-1})$ соответствуют инволютивно сопряженные направления

$$(M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-2}), (M_0 M_1 \dots M_{n-3} M_{n-1}),$$

$$(M_0 M_2 \dots M_{n-3} M_{n-2});$$

поэтому направлениям $(M_0 M_1 M_2)$, $(M_0 M_1 M_{n-1})$ соответствуют инволютивно сопряженные направления

$$(M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-3}), \quad (M_0 M_2 \dots M_{n-3} M_{n-2}).$$

Направления $(M_0 M_1 M_{n-1})$, $(M_0 M_2 \dots M_{n-3} M_{n-2})$ изолированы, а направления $(M_0 M_1 M_2)$, $(M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1})$ имеют общее асимптотическое направление $(M_0 M_1 M_2)$.

8. МНОГОМЕРНЫЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ НА V_n^{n-1}

Всякое s -мерное самосопряженное направление E_s^a является s -плоской образующей асимптотического конуса

$$\Gamma_{n-k, k}^n x^{n-k} x^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (22)$$

Известно, что максимальная размерность плоских образующих гиперконуса 2-го порядка в n -пространстве не превышает $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n-1}{2}$ при нечетном n [6]. В связи с этим для асимптотического конуса (22) указанная размерность равна $\frac{n-1}{2}$ при нечетном n и $\frac{n}{2}-1$ — при четном n .

Размерность $P_n(s)$ многообразия s -плоских образующих E_s^a асимптотического конуса может быть подсчитана тем же приемом, что и размерность многообразия s -плоских образующих гиперкуадрики [6]. Имеет место следующая формула:

$$P_n(s) = \frac{(2n-3s-3)s}{2}. \quad (65)$$

Для плоских образующих максимальной размерности имеем:

a) n — четно, $s = \frac{n}{2}-1$,

$$P_n\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{n(n-2)}{8}; \quad (65')$$

b) n — нечетно, $s = \frac{n-1}{2}$,

$$P_n\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{(n-1)(n-3)}{8}. \quad (65'')$$

Для случая $n=4$ или 5 легко можно получить уравнения многообразия плоских образующих максимальной размерности асимптотического конуса (22).

Пусть $n=5$. Уравнение асимптотического конуса

$$(\Gamma_{14}^5 + \Gamma_{41}^5)x^1x^4 + (\Gamma_{23}^5 + \Gamma_{32}^5)x^2x^3 = 0. \quad (66)$$

Максимальная размерность его плоских образующих $s = \frac{5-1}{2} = 2$, а размерность многообразия этих образующих, согласно (65''),

$$P_5(2) = \frac{(5-1)(5-3)}{8} = 1.$$

Представив уравнение (66) в виде

$$\frac{(\Gamma_{14}^5 + \Gamma_{41}^5)x^1}{x^2} = -\frac{(\Gamma_{23}^5 + \Gamma_{32}^5)x^3}{x^4} = \lambda, \quad (67)$$

получаем

$$\begin{aligned} (\Gamma_{14}^5 + \Gamma_{41}^5)x^1 - \lambda x^2 &= 0, \\ (\Gamma_{23}^5 + \Gamma_{32}^5)x^3 + \lambda x^4 &= 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Уравнения (68) и представляют однопараметрическое семейство двумерных плоских образующих асимптотического конуса (66). Легко усмотреть, что здесь имеются два таких семейства плоских образующих.

Для значений $n > 5$ задача несколько усложняется, однако она может быть решена с помощью простого приема, на который указал Я. П. Бланк.

Пусть $n = 6$. Уравнение асимптотического конуса

$$(\Gamma_{15}^6 + \Gamma_{51}^6)x^1x^5 + (\Gamma_{24}^6 + \Gamma_{42}^6)x^2x^4 + \Gamma_{33}^6(x^3)^2 = 0. \quad (69)$$

Этот конус обладает плоскими образующими максимальной размерности $s = \frac{6}{2} - 1 = 2$; размерность многообразия образующих, согласно (65'),

$$P_6(2) = \frac{6(6-2)}{8} = 3.$$

Чтобы получить уравнения указанного многообразия, полагаем

$$x^1 = \lambda x^2 + \mu x^3$$

и подставляем в (69):

$$x^2[(\Gamma_{15}^6 + \Gamma_{51}^6)\lambda x^5 + (\Gamma_{24}^6 + \Gamma_{42}^6)x^4] + x^3[(\Gamma_{15}^6 + \Gamma_{51}^6)\mu x^5 + \Gamma_{33}^6 x^3] = 0,$$

или

$$\frac{(\Gamma_{15}^6 + \Gamma_{51}^6)\lambda x^5 + (\Gamma_{24}^6 + \Gamma_{42}^6)x^4}{x^3} = -\frac{(\Gamma_{15}^6 + \Gamma_{51}^6)\mu x^5 + \Gamma_{33}^6 x^3}{x^2} = v.$$

Таким образом, трехпараметрическое семейство двумерных плоских образующих асимптотического конуса (69) представляется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x^1 - \lambda x^2 - \mu x^3 = 0, \\ (\Gamma_{15}^6 + \Gamma_{51}^6)\lambda x^5 + (\Gamma_{24}^6 + \Gamma_{42}^6)x^4 - vx^3 = 0, \\ (\Gamma_{15}^6 + \Gamma_{51}^6)\mu x^5 + \Gamma_{33}^6 x^3 - vx^2 = 0. \end{cases} \quad (70)$$

Указанным путем можно получить уравнения семейства плоских образующих максимальной размерности асимптотического конуса для любого n . Нетрудно также подсчитать количество таких семейств для данного n .

9. ОБ ИНВОЛЮТИВНО СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМАХ НА V_n^{n-1}

Понятие инволютивно сопряженной системы для V_n^{n-1} может быть введено, как и понятие сопряженной системы для голономной многомерной поверхности [4].

Определение. Совокупность направлений $E_{p_0}^a, E_{p_1}, E_{p_2}, \dots, E_{p_k}$, определенных в окрестности точки M_0 на V_n^{n-1} , образует инволютивно сопряженную систему $S(E_{p_0}^a, E_{p_1}, E_{p_2}, \dots, E_{p_k})$, если они в каждой точке этой окрестности попарно инволютивно сопряжены и изолированы.

В общем случае, когда $r = 2p$, инволютивно сопряженные направления E_p и E_{n-2p-1} изолированы. В самом деле, если бы они имели общее E_s , то оно было бы асимптотическим; но асимптотическое E_s^a является также общим для E_p и E_p^b , а это в данном случае невозможно. Направления E_p и E_{n-2p-1} образуют инволютивно сопряженную систему $S(E_p, E_{n-2p-1})$; эта система неполная, так как $p + (n - 2p - 1) < n - 1$.

В особом случае, когда $r = 2p - m$, инволютивно сопряженные направления могут быть изолированы и могут содержать общее асимптотическое направление E_s^a . Если они изолированы, то образуют инволютивно сопряженную систему $S(E_p, E_{n-2p+m-1})$; если они не изолированы, то, выделив общее асимптотическое направление E_s^a , получаем вырожденную трехкомпонентную систему $S(E_s^a, E_{p-s}, E_{n-2p+m-s-1})$. Обе эти системы неполные.

Полные инволютивные сопряженные системы на V_n^{n-1} также существуют. В вырожденном случае, когда $r = p$, инволютивно сопряженные направления E_p и E_{n-p-1} образованы инвариантными направлениями $(M_0 M_j)$, ($j = 1, 2, \dots, n-1$). При этом, если E_p и E_{n-p-1} изолированы, они образуют систему $S(E_p, E_{n-p-1})$; если же они содержат общее асимптотическое E_s^a , имеем вырожденную инволютивно сопряженную систему $S(E_s^a, E_{p-s}, E_{n-p-s-1})$. Обе эти системы полные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк. Про геометричний зміст умови інтегруваності піфаффового диференціального рівняння. Записки н.-д. інституту матем. і мех. та Харківського математичного т-ва, серія 4, т. XIII, вип. 1, 1936, (75—81).
2. Е. Вопріалі. Sulle varietà analonome. Rend dei Lincei, V. XXVII, F. 5, 1938.
3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. ОГИЗ, М., 1948.
4. В. В. Рыжков. Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Труды Московского математического о-ва, т. 7, 1958, (179—226).
5. М. А. Аківіс. О строении двухкомпонентных сопряженных систем. Труды геом. семинара, т. 1, 1966, (7—31).
6. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства. Изд-во «Наука», М., 1966.
7. V. Obadeanu. Extinderea relației de conjugare pe varietătile neolonomice. Studii și cercetări mat. Acad. RSR, 20, № 1, 1968, (25—30).
8. М. Р. Роговой. К проективно-дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности. Укр. матем. сб., вып. 8, 1970 (112—119).

Поступила 19 ноября 1969 года.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА

Ю. С. Слободян

(Харьков)

Вполне геодезической поверхностью n -мерного финслерова пространства называется такая поверхность, геодезические линии которой являются одновременно геодезическими линиями пространства.

Геометрия поверхностей финслерова пространства во многом отлична от геометрии поверхностей риманова пространства. Это связано с тем, что в финслеровом пространстве невозможно выбрать систему n взаимно ортогональных векторов. Свойство ортогональности векторов не взаимно.

Метрика пространства индуцирует связность на поверхности двумя существенно различными способами. С одной стороны, метрика пространства индуцирует метрику на поверхности. Относительно последней можно определить внутреннюю связность поверхности. С другой стороны, можно построить ковариантный дифференциал вектора в пространстве, затем спроектировать его на поверхность. Полученный при этом вектор можно принять за индуцированную ковариантную производную исходного вектора [1, гл. 5].

В настоящей работе доказано, что если рассматриваемая гиперповерхность вполне геодезическая, то ее внутренняя и индуцированная связности совпадают.

Однако даже если рассматриваемая гиперповерхность вполне геодезическая, нормаль к ней по кривой, лежащей на F_{n-1} , не переносится параллельно в связности Кардана.

Здесь доказывается, что вектор, касательный к в. г. поверхности вдоль кривой, лежащей на вполне геодезической поверхности, переносится параллельно в связности Бервальда. Отсюда следует, что если в финслеровом пространстве через каждую точку и в каждом направлении проходит вполне геодезическая гиперповерхность, то такое пространство представляет собой проективно-минковское пространство.

Теорема 1. Индуцированная связность Кардана и внутренняя связность гиперповерхности F_{n-1} совпадают тогда и только тогда, когда поверхность F_{n-1} вполне геодезическая.

Доказательство. Необходимость следует из результатов Рунда [2]. Докажем достаточность.

Для того чтобы поверхность F_{n-1} была вполне геодезической, необходимо и достаточно, чтобы [1, стр. 125]

$$\Omega_{\alpha\beta} = -n_i C_{jk|l}^i \dot{x}^l B_{\alpha\beta}^{jk}.$$

С другой стороны,

$$\Omega_{\alpha\beta} = n_i (B_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{hk}^{*i} B_{\alpha\beta}^{hk}).$$

Вычитая, имеем

$$n_i (B_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{hk}^{*i} B_{\alpha\beta}^{hk} + C_{jk|l}^i \dot{x}^l B_{\alpha\beta}^{jk}) = 0. \quad (1)$$

И, таким образом,

$$B_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{hk}^{*i} B_{\alpha\beta}^{hk} + C_{jk|l}^i \dot{x}^l B_{\alpha\beta}^{jk} = \bar{G}_{\alpha\beta}^i. \quad (2)$$

Умножим последнее соотношение на B_i^{δ} и просуммируем по i , получим

$$(B_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{hk}^{*i} B_{\alpha\beta}^{hk}) B_i^{\delta} + C_{jk|l}^i \dot{x}^l B_{\alpha\beta}^{jk} B_i^{\delta} = \bar{G}_{\alpha\beta}^{\delta},$$

или, применяя формулу [1, гл. 5, 3.40], получаем

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{*\delta} + C_{jk|l}^i \dot{x}^l B_{\alpha\beta}^{jk} B_i^{\delta} = \bar{G}_{\alpha\beta}^{\delta}. \quad (3)$$

Умножая это уравнение на \dot{u}^{α} , получим

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{*\delta} \dot{u}^{\alpha} = \bar{G}_{\alpha\beta}^{\delta} \dot{u}^{\alpha}.$$

Однако [1, гл. 5, 3.15]

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{*\delta} \dot{u}^{\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \dot{u}^{\alpha} = \frac{\partial G^{\delta}}{\partial u^{\beta}}. \quad (4)$$

И, таким образом,

$$\frac{\partial G^\delta}{\partial \dot{u}^\beta} = \bar{G}_{\alpha\beta}^{\delta} \dot{u}^\alpha.$$

Следуя Рунду [1, гл. 5, 9.3], вектор Ω с компонентами

$$\Omega^i = \frac{1}{2} B_{\alpha\gamma}^i \dot{u}^\alpha \dot{u}^\gamma + G^i.$$

Учитывая (3) и (4), получим

$$\Omega^i = \frac{1}{2} \frac{\partial G^\delta}{\partial \dot{u}^\alpha} \dot{u}^\alpha B_\delta^i, \quad (5)$$

откуда

$$\frac{\partial \Omega^i}{\partial \dot{u}^\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G^\delta}{\partial \dot{u}^\alpha \partial \dot{u}^\beta} \dot{u}^\alpha + \frac{\partial G^\delta}{\partial \dot{u}^\beta} \right) B_\delta^i. \quad (6)$$

Однако

$$2G^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{u}^\beta} \dot{u}^\beta.$$

И, следовательно,

$$G^\alpha = B_\delta^i \Omega^i.$$

Дифференцируя это соотношение, получим

$$\frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{u}^\gamma} = G_{\beta\gamma}^\alpha \dot{u}^\beta.$$

Подставим полученный результат в (6):

$$\frac{\partial \Omega^i}{\partial \dot{u}^\beta} = \frac{\partial G^\delta}{\partial \dot{u}^\beta} B_\delta^i. \quad (6')$$

Компоненты индуцированного объекта связности имеют вид [1, гл. 5, 9.5]

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{\alpha\beta\gamma} + C_{hkr} (B_{\alpha\gamma}^{hk} \Omega_r^k - B_{\beta\gamma}^{hk} \Omega_r^k).$$

Подставляя значения (6'), получим

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} C_{hkr} B_{\gamma\delta}^{kr} \left(B_\alpha^h \frac{\partial G^\delta}{\partial \dot{u}^\beta} - B_\beta^h \frac{\partial G^\delta}{\partial \dot{u}^\alpha} \right). \quad (7)$$

С другой стороны, компоненты собственного объекта связности поверхности F_{n-1} имеют вид [1, гл. 5, 9, 8]

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{\alpha\beta\gamma} - C_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial G^\delta}{\partial \dot{u}^\alpha} + C_{\alpha\delta\gamma} \frac{\partial G^\delta}{\partial \dot{u}^\beta}. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), получим

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^* = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*.$$

Это и доказывает теорему.

Рассмотрим параллельный перенос вектора, касательного к вполне геодезической поверхности F_{n-1} , вдоль линии, лежащей на поверхности F_{n-1} .

Теорема 2. Вектор, касательный к вполне геодезической гиперповерхности F_{n-1} , переносится параллельно вдоль линии, лежащей на F_{n-1} в связности Бервальда.

Доказательство. Известно [1, гл. 5, § 7], что

$$\Omega_{\alpha\beta} = -B_{\beta}^{k_0} \delta_{\alpha}^0 n_k.$$

Учитывая (1), получим

$$-n_i C_{jkl}^i \dot{x}^h B_{\alpha\beta}^{jk} = -B_{\beta}^{k_0} \delta_{\alpha}^0 n_k,$$

откуда

$$(n_i C_{jkl}^i \dot{x}^h B_{\alpha\beta}^{jk} - \delta_{\alpha}^0 n_k) B_{\beta}^k = 0.$$

Выражение в скобках пропорционально нормали

$$(n_i C_{jkl}^i \dot{x}^h B_{\alpha\beta}^{jk} - \delta_{\alpha}^0 n_k) = A_{\alpha} n_k. \quad (*)$$

Определим коэффициент A_{α} . Для этого умножим последнее уравнение на n^k и просуммируем по k . Так как n_i — единичный вектор, то

$$A_{\alpha} = n_i C_{jkl}^i \dot{x}^h B_{\alpha\beta}^{jk} n^k - n^k \delta_{\alpha}^0 n_k.$$

Учитывая, что [1, гл. 6, § 7]

$$n^k \delta_{\alpha}^0 n_k = \frac{1}{2} g_{kl} \Gamma_{l\alpha}^k, \quad (x, n) B_{\alpha}^l n^k n^l,$$

получим

$$A_{\alpha} = n_i C_{jkl}^i \dot{x}^h B_{\alpha\beta}^{jk} - \frac{1}{2} g_{kl} \Gamma_{l\alpha}^k B_{\alpha}^l n^k n^l. \quad (9)$$

Подставляя найденное выражение A_{α} в систему (*), получим

$$\delta_{\alpha}^0 n_k = \left\{ n_i C_{jkl}^i \dot{x}^h B_{\alpha\beta}^{jk} - \left(n_i C_{ipl}^i \dot{x}^h - \frac{1}{2} g_{pl} \Gamma_{lp}^i \right) n^p n_k \right\}.$$

Однако [1, гл. 2]

$$g_{pl} \Gamma_{lp}^i = \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^i} + 2C_{plh} \frac{\partial n^h}{\partial x^i} - g_{hl} \Gamma_{lp}^{*h} - g_{ph} \Gamma_{pl}^{*h}.$$

Учитывая это выражение, а также однородность тензора C_{plh} , получим

$$\delta_{\alpha}^0 n_k = \left\{ n_i C_{jkl}^i \dot{x}^h - \left[n_i C_{ipl}^i \dot{x}^h - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^i} - g_{hl} \Gamma_{lp}^{*h} - g_{ph} \Gamma_{pl}^{*h} \right) n^i \right] n^p n_k \right\} B_{\alpha}^l.$$

Так как

$$C_{jkl}^i \dot{x}^h = G_{jk}^i - \Gamma_{ik}^h,$$

то последнее соотношение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha}^0 n_k &= \left[n_i (G_{jk}^i - \Gamma_{ik}^h) - \left[n_i (G_{ip}^i - \Gamma_{ip}^h) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^i} - g_{hl} \Gamma_{lp}^{*h} - g_{ph} \Gamma_{pl}^{*h} \right) n^i \right] n^p n_k \right] B_{\alpha}^l. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\delta_{\alpha}^0 n_k = \left\{ n_i (G_{jk}^i - \Gamma_{ik}^h) - \left[n_i G_{ip}^i n^p - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^i} n^p n^l \right] n_k \right\} B_{\alpha}^l.$$

Так как n_i — единичный, то

$$g_{pl} n^p n^l = 1.$$

Дифференцируя это уравнение, получим

$$\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^j} = -2g_{pl} \frac{\partial n^p}{\partial x^j} n^l.$$

Таким образом,

$$\delta_a^0 n_k = \left\{ n_l G_{lp}^l (\delta_k^0 - n^p n_k) - n_l \left(\Gamma_{jk}^{*l} + \frac{\partial n^l}{\partial x^j} n_k \right) \right\} B_a^l.$$

Умножим последнее уравнение на g^{km} :

$$g^{km} \delta_a^0 n_k = \left\{ n_l G_{lp}^l (g^{mp} - n^m n^p) - n_l \left(\Gamma_{jk}^{*l} g^{mk} + \frac{\partial n^l}{\partial x^j} n^m \right) \right\} B_a^l.$$

Однако

$$g^{km} \delta_a^0 n_k = \delta_a^0 n^m + g^{mk} g_{nk} {}_l B_a^l n^h.$$

Значит

$$\begin{aligned} \delta_a^0 n^m + g^{mk} \left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - g_{hi} \Gamma_{jk}^{*l} - g_{lk} \Gamma_{jh}^{*l} \right) n^h B_a^l = \\ = \left\{ n_l G_{lp}^l (g^{mp} - n^m n^p) - n_l \left(\Gamma_{jk}^{*l} g^{mk} + \frac{\partial n^l}{\partial x^j} n^m \right) \right\} B_a^l. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} \delta_a^0 n^m = & \left\{ \left(-g^{mk} \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} n^h + \Gamma_{jh}^{*m} n^h \right) + \right. \\ & \left. + n_l G_{lp}^l (g^{mp} - n^m n^p) - n_l \frac{\partial n^l}{\partial x^j} n^m \right\} B_a^l. \end{aligned}$$

Так как

$$g^{mk} \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} n^h = g^{mk} \frac{\partial n_k}{\partial x^j} - \frac{\partial n^m}{\partial x^j},$$

то

$$\begin{aligned} \delta_a^0 n^m = & \left\{ -g^{mi} \frac{\partial n_l}{\partial x^j} + \frac{\partial n^m}{\partial x^j} + \Gamma_{jh}^{*m} n^h + \right. \\ & \left. + n_l G_{lp}^l (g^{mp} - n^p n^m) - n_l \frac{\partial n^l}{\partial x^j} n^m \right\} B_a^l. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{\partial n^m}{\partial x^j} + \Gamma_{jh}^{*m} n^h = \frac{Dn^m}{Dx^j}.$$

Последнее выражение примет вид

$$\delta_a^0 n^m = \left\{ -\frac{\partial n_i}{\partial x^j} (g^{mi} - n^m n^i) + n_l G_{lp}^l (g^{mp} - n^m n^p) + \frac{Dn^m}{Dx^j} \right\} B_a^l.$$

Обозначим ковариантную производную вектора n_i в связности Бервальда $\frac{\tilde{D}n_i}{\tilde{D}x^j}$, тогда получим

$$\delta_a^0 n^m = \left\{ -\frac{\tilde{D}n_i}{\tilde{D}x^j} (g^{mi} - n^m n^i) + \frac{Dn^m}{Dx^j} \right\} B_a^l. \quad (10)$$

Однако позже будет показано, что

$$\delta_a^0 n^m = n_j^m; B_a^l. \quad (**)$$

И, таким образом, имеем

$$\frac{\tilde{D}n_i}{\tilde{D}x^j} (g^{mi} - n^m n^i) B_a^l = 0.$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$g^{mi} (\delta_i^l - n^i n_l) \frac{\tilde{D}n_i}{\tilde{D}x^j} B_a^l = 0.$$

Учитывая, что

$$B_a^l b_l^a = \delta_l^a - n^l n_l,$$

получим

$$g^{mi} B_b^l b_l^a \frac{\tilde{D}n_i}{\tilde{D}x^j} B_a^l = 0.$$

Умножая на g_{mk} и суммируя, найдем

$$b_k^r B_1^l \frac{\tilde{D}n_i}{\tilde{D}x^j} B_a^l = 0. \quad (11)$$

После умножения на B_β^k и суммирования

$$B_1^l \frac{\tilde{D}n_i}{\tilde{D}x^j} B_a^l = 0.$$

Докажем соотношение (**):

$$n_l \left(\Gamma^{*l}_{hk} + C_{hk/l}^l \dot{x}^l \right) B_{a,j}^{hk} = - B_{a\beta}^l n_l,$$

или

$$n_l G_{hk}^l B_{a\beta}^{hk} = - B_{a\beta}^l n_l. \quad (11')$$

Рассмотрим выражение

$$A_a^m = n_l G_{j\rho}^l (g^{mp} n^m n^\rho) B_a^l.$$

Запишем его в виде

$$A_a^m = n_l G_{j\rho}^l g^{lm} B_\beta^p b_l^a B_a^l.$$

Применяя (11'), получим

$$A_a^m = n_l B_{a\beta}^l b_l^a g^{lm}.$$

Однако

$$\frac{\partial (B_i^l B_l^\beta)}{\partial u^a} = \frac{\partial (\delta_i^l - n^l n_l)}{\partial u^a},$$

откуда

$$B_{\alpha\beta}^l B_l^\beta = \left(-\frac{\partial n^i}{\partial x^r} n_i - n^i \frac{\partial n_i}{\partial x^r} \right) B_r^r + \dots$$

Следовательно,

$$A_a^m = n_i \left(\frac{\partial n^i}{\partial x^r} n_i - n^i \frac{\partial n_i}{\partial x^r} \right) B_r^r g^{lm}.$$

Подставляя значение A_a^m в уравнение (10), получим

$$\delta_a^0 n^m = \frac{\partial n^m}{\partial x^i} + \Gamma_{jh}^{im} n^h B_j^i.$$

Выберем в пространстве координаты таким образом, чтобы поверхность F_{n-1} была координатной. Из соотношения (11) тогда следует, что вектор, касательный к вполне геодезической поверхности, инвариантен при параллельном переносе.

Следствие. *Если через каждую точку финслерова пространства и в каждом $(n-1)$ -мерном направлении проходит вполне геодезическая гиперповерхность, то пространство проективно минковское.*

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Rund. The Differential Geometry of Finsler spaces, Springer, Berlin (1959).
2. H. Rund. The intrinsic and induced curvature theories of subspaces of a Finsler space, Tensor (N. S) v. 19. № 3 P. 294—312.

Поступила 5 января 1970 г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОМПЛЕКСОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

M. A. Солейман

(Киев)

В настоящее время хорошо изучены свойства комплексов в евклидовом, аффинном и проективном пространствах. Упомянем для примера работы [1, 2, 3]. Что касается комплексов в неевклидовых пространствах, то здесь положение намного хуже. Вероятно, первой работой в этом направлении является статья Н. И. Кованцова [4]. В 1963 году вышла статья того же автора, посвященная теории комплексов в гиперболическом пространстве [5]. Этими же вопросами занимался и В. И. Машанов [6].

В названных работах были затронуты лишь начальные свойства комплексов в неевклидовых пространствах. Рассмотрения ограничивались в основном лишь окрестностью первого порядка.

В настоящей заметке мы рассматриваем один класс комплексов, определяя его геометрическими свойствами в окрестности второго порядка. У изучаемого класса комплексов два инфекционных центра совпадают с центрами луча (последние определяются как такие взаимно-ортогональные точки, которым в нормальной корреляции на луче соответствуют взаимно-перпендикулярные плоскости).

Это определение позволяет не только указать целый ряд свойств комплексов, но и дать безынтегральное представление некоторых их классов. Будем называть указанные комплексы центроинфлексионными.

Определения используемых нами понятий читатель найдет в работах [1] и [4]. Все исследование выполняется методом внешних форм Кардана (см. [7]).

Возьмем трехмерное проективное пространство P_3 . Зададим в нем некоторую мнимую поверхность второго порядка (абсолют эллиптического пространства)

$$M^2 = 0. \quad (1)$$

Буквой M обозначена текущая аналитическая точка абсолюта, задаваемая своими координатами в некотором неподвижном репере. Символом MN будем обозначать полярную форму от квадратичной формы, стоящей в левой части уравнения (1). Следовательно, равенство

$$MN = 0 \quad (2)$$

означает полярную сопряженность точек M , N относительно абсолюта (их ортогональность). Подвижный репер эллиптического пространства состоит из четырех аналитических точек A_0 , A_1 , A_2 , A_3 (задаваемых своими координатами в неподвижном репере), удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} A_0 A_0 &= R^2, \quad A_0 A_i = 0, \quad A_i A_j = \delta_{ij}, \\ (i, j) &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3)$$

R — радиус кривизны эллиптического пространства. Деривационные уравнения эллиптического пространства имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta; \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3). \quad (4)$$

Дифференцируя равенства (3), получаем следующие соотношения между формами ω_α^β :

$$\omega_0^0 = 0, \quad \omega_i^0 = -\frac{1}{R^2} \omega^i, \quad \omega_i^j = -\omega_j^i, \quad (5)$$

мы положили $\omega^i = \omega_0^i$. Кроме того, в дальнейшем мы будем полагать $A_0 = A$.

Условия интегрируемости уравнений (4) (уравнения структуры эллиптического пространства) имеют вид

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^i \omega_j^i], \\ D\omega_i^j &= [\omega_k^k \omega_k^i] - \frac{1}{R^2} [\omega^j \omega^i]. \end{aligned} \quad (6)$$

Если поместить вершины A , A_3 в центры луча комплекса, а соответствующие им плоскости принять за координатные плоскости AA_3A_2 и AA_3A_1 , то репер становится каноническим репером комплекса, а формы ω_α^β будут связаны следующими соотношениями:

$$\omega_3^1 = k\omega^2. \quad (7)$$

За базисные формы комплекса примем формы ω^1 , ω^2 , ω_3^2 , тогда продолжение уравнения (7) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} dk &= p\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2, \\ -k\omega_1^2 + \frac{1}{R^2}\omega^3 &= \alpha\omega^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^2, \\ -\omega_1^2 + k\omega^3 &= \beta\omega^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Все коэффициенты $k, p, \alpha, \beta, \dots$ являются инвариантами. Инвариант k есть величина, обратная кривизне комплекса, определенной в работе [4]. Уравнения (8) можно переписать так:

$$\begin{aligned} dk &= p\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2, \\ -\Delta\omega^3 &= (\alpha - k\beta)\omega^2 + (q - k\gamma)\omega^1 + (\gamma - kr)\omega_3^2, \\ -\Delta\omega_1^2 &= \left(k\alpha - \frac{\beta}{R^2}\right)\omega^2 + \left(kq - \frac{\gamma}{R^2}\right)\omega^1 + \left(k\gamma - \frac{r}{R^2}\right)\omega_3^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Delta = k^2 - \frac{1}{R^2}.$$

При $\Delta = 0$ имеем $k = \pm \frac{1}{R}$. Следует сказать, что в начале работы [4] положено $R = 1$. Следовательно, в данном случае $k = \pm 1$. Но это характеризует клиффордовы комплексы. Таким образом, равенство

$$\Delta = 0 \quad (10)$$

характеризует клиффордовы комплексы. В дальнейшем клиффордовы комплексы исключим из рассмотрения, следовательно, будем полагать

$$\Delta \neq 0.$$

Впредь мы также будем всюду полагать

$$R = 1. \quad (11)$$

Найдем уравнение, определяющее инфлексионные центры луча l . Пусть $M = A + tA_3$ — какая-нибудь точка луча, Σ — плоскость, соответствующая ей в нормальной корреляции на луче l . Такая плоскость касается конуса лучей комплекса, проходящих через точку M , вдоль луча l . Учитывая уравнения (4), (5) и (11), имеем

$$dM = -t\omega^3 M + (\omega^1 + t\omega_3^1) A_1 + (\omega^2 + t\omega_3^2) A_2 + [dt + (1 + t^2)\omega^3] A_3. \quad (*)$$

Если точка M остается неподвижной, то

$$\begin{aligned} \omega^1 + t\omega_3^1 &= 0, \quad \omega^2 + t\omega_3^2 = 0, \\ dt + (1 + t^2)\omega^3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Плоскость Σ будет иметь тангенциальные координаты

$$\rho\tilde{\sigma} = (AA_3dA) = \omega^1(AA_3A_1) + \omega^2(AA_3A_2),$$

$\tilde{\sigma}$ — множитель пропорциональности. Учитывая, что формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$ связаны равенствами (7) и (12), а также наличие множителя ρ , мы можем переписать последнее равенство в виде:

$$\tilde{\sigma} = -tk(AA_3A_1) + (AA_3A_2) \quad (13)$$

(множитель пропорциональности внесли под знак символа $\tilde{\sigma}$). Дифференцируя (13), будем иметь

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma} &= -(tdk + kdt)(AA_3A_1) - tk[\omega^2(A_2A_3A_1) + \omega_3^2(AA_2A_1) + \\ &+ \omega_1^2(AA_3A_2)] + \omega^1(A_1A_3A_2) + \omega_3^1(AA_1A_2) + \omega_2^1(AA_3A_1) = \\ &= -tk\omega_1^2\tilde{\sigma} - (\omega_1^2 + tdk + kdt + t^2k^2\omega_1^2)(AA_3A_1) + \\ &+ (\omega^1 + t\omega_3^1)(A_3A_2A_1) + k(\omega^2 + t\omega_3^2)(AA_1A_2). \end{aligned} \quad (**)$$

Плоскость Σ будет неподвижной при условии наличия равенств

$$\begin{aligned}\omega^1 + t\omega_3^1 &= 0, \quad \omega^2 + t\omega_3^2 = 0, \\ kdt + tdk + (1 + t^2k^2)\omega_1^2 &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Два первых уравнения (14) совпадают с двумя первыми уравнениями (12). Вычтем из третьего уравнения (14) третье уравнение (12), умноженное на k , получим

$$tdk + (1 + t^2k^2)\omega_1^2 - k(1 + t^2)\omega^3 = 0.\tag{15}$$

Учитывая уравнения (8), приведем уравнение (15) к виду:

$$t(p\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2) - (\beta\omega^2 + \gamma\omega^1 + r\omega_3^2) - k(\alpha\omega^2 + q\omega^1 + \gamma\omega_3^2)t^2 = 0.\tag{16}$$

Из равенств (12) или (14) находим

$$\omega^1 = -tk\omega^2, \quad \omega_3^2 = -\frac{1}{t}\omega^2.$$

Внесем это в (16), сократим на ω^2 и приведем к общему знаменателю, получим следующее уравнение четвертого порядка:

$$k^2qt^4 - 2k\alpha t^3 + (2k\gamma + p)t^2 - 2\beta t + r = 0.\tag{17}$$

Это уравнение и определяет инфлексионные центры луча l .

Рассматриваемый нами класс центроинфлексионных комплексов характеризуется совпадением центров луча с инфлексионными центрами. Поскольку центры луча у нас сейчас совпадают с точками A и A_3 , то для них должно быть $t = 0$ и $t = \infty$. Внося это в уравнение (17), получим

$$q = 0; \quad r = 0.\tag{a}$$

Исключение составляют комплексы, для которых $k = 0$. В этом случае было бы

$$dA_3 = -\omega^3 A + \omega_3^2 A_2,$$

следовательно точка A_3 описывает поверхность, касающуюся плоскости AA_3A_2 . Комплекс представляет собой совокупность касательных к некоторой поверхности — специальный комплекс. В дальнейшем специальные комплексы будем исключать из рассмотрения. Уравнение (17) принимает вид

$$2k\alpha t^2 - (2k\gamma + p)t + 2\beta = 0.\tag{18}$$

Внесем (a) в (8) и (9). В результате имеем:

$$\begin{aligned}\omega_3^1 &= k\omega^2, \\ dk &= p\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2, \\ \omega^3 &= \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2}\omega^2 - \frac{k\gamma}{1 - k^2}\omega^1 + \frac{\gamma}{1 - k^2}\omega_3^2, \\ \omega_1^2 &= \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2}\omega^2 - \frac{\gamma}{1 - k^2}\omega^1 + \frac{k\gamma}{1 - k^2}\omega_3^2.\end{aligned}\tag{19}$$

Из последних уравнений получаем

$$\begin{aligned}\omega^3 - \omega_1^2 &= \frac{\alpha + \beta}{1 + k}\omega^2 + \frac{\gamma}{1 + k}(\omega_3^2 + \omega^1), \\ \omega^3 + \omega_1^2 &= \frac{\alpha - \beta}{1 - k}\omega^2 + \frac{\gamma}{1 - k}(\omega_3^2 - \omega^1).\end{aligned}\tag{20}$$

Главные поверхности. Каждая линейчатая поверхность комплекса определяется отношениями базисных форм $\omega^1 : \omega^2 : \omega_3^2$. Точка на образующей этой поверхности называется точкой прикосновения, если касательная плоскость к поверхности в этой точке совпадает с плоскостью, соответствующей этой точке в нормальной корреляции. Касательная плоскость к поверхности $\omega^1 : \omega^2 : \omega_3^2$ в точке $M = A + tA_3$ имеет тангенциальные координаты

$$\rho\sigma = (AA_3dM) = (\omega^1 + t\omega_3^1)(AA_3A_1) + (\omega^2 + t\omega_3^2)(AA_3A_2). \quad (21)$$

Для точек прикосновения должно быть

$$\rho\sigma = \bar{\sigma}.$$

Сравнивая (21) с (13), получаем

$$\frac{\omega^1 + t\omega_3^1}{-kt} = \frac{\omega^2 + t\omega_3^2}{1},$$

или

$$k\omega_3^2t^2 + 2k\omega^2t + \omega^1 = 0. \quad (22)$$

Это квадратное уравнение и определяет точки прикосновения на поверхности. При изменении параметра луча поверхности эти точки описывают линии прикосновения.

Главной поверхностью называется линейчатая поверхность комплекса, у которой линии прикосновения являются асимптотическими линиями. Асимптотические линии определяются уравнением

$$(AA_3dMd^2M) = 0,$$

или

$$d\bar{\sigma} \cdot dM = 0 \quad (23)$$

(мы учли, что плоскости σ и $\bar{\sigma}$ совпадают друг с другом).

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} \cdot dM = & -(\omega_1^2 + tdk + kdt)(\omega^2 + t\omega_3^2)(AA_3A_1A_2) - t\omega^3(\omega^1 + tk\omega^2) \times \\ & \times (A_3A_2A_1A) + (dt + \omega^3)(\omega_3^1 + tk\omega_3^2)(AA_1A_2A_3) - \\ & - tk\omega_1^2(\omega^1 + t\omega_3^1)(AA_3A_2A_1) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $(AA_1A_2A_3) \neq 0$ (вершины репера не лежат в одной плоскости), то мы будем иметь

$$kt^2(-k\omega_1^2 + \omega^3) - tdk + (-\omega_1^2 + k\omega^3) = 0. \quad (24)$$

Для главной поверхности это уравнение совпадает с уравнением (22), что дает

$$\frac{-k\omega_1^2 + \omega^3}{\omega_3^2} = \frac{-dk}{2k\omega^2} = \frac{-\omega_1^2 + k\omega^3}{\omega^1} = s. \quad (25)$$

Через s обозначим величину общего отношения. Учитывая (8), равенства (25) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \alpha\omega^2 + q\omega^1 + (\gamma - s)\omega_3^2 &= 0, \\ \beta\omega^2 + (\gamma - s)\omega^1 + r\omega_3^2 &= 0, \\ (p + 2ks)\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Исключая отсюда ω^2 , ω^1 , ω_3^2 , получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma - s \\ \beta & \gamma - s & r \\ p + 2ks & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Для центроинфлексионных комплексов уравнение (27) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma - s \\ \beta & \gamma - s & 0 \\ p + 2ks & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(\gamma - s)[(\gamma - s)(p + 2ks) - 2\alpha\beta] = 0. \quad (28)$$

Один из корней этого уравнения $-s = \gamma$. Система (26) сводится в этом случае к паре уравнений

$$\omega^2 = 0; \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2 = 0. \quad (29)$$

Отсюда видно, что все такие главные поверхности принадлежат конгруэнции

$$\omega^2 = 0. \quad (30)$$

Легко видеть, что конгруэнция (30) голономная. Действительно,

$$D\omega^2 = [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^3\omega_3^2] = \left(\frac{k\gamma}{1-k^2} - \frac{k\gamma}{1-k^2}\right)[\omega^1\omega_3^2] = 0.$$

Поскольку для этой конгруэнции

$$dA = \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3,$$

то это означает, что точка A (центр луча) описывает фокальную поверхность σ_3 конгруэнции (30). Поскольку

$$dA_3 = -\omega^3 A + \omega_3^2 A_2,$$

то это означает, что точка A_3 (второй центр, также совпадающий с инфлексионными центрами), также описывает фокальную поверхность σ_3 конгруэнции (30). Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. У центроинфлексионных комплексов центры луча описывают фокальные поверхности голономной конгруэнции, образованной лучами комплекса. Комплекс расслаивается в однопараметрическое семейство таких конгруэнций.

Из равенств

$$\begin{aligned} dA_1 &= -\omega^1 A + \omega_1^2 A_2, & (\omega^2 = 0) \\ dA_2 &= \omega_1^1 A_1 + \omega_2^3 A_3 \end{aligned}$$

следует, что прямая $A_1 A_2$ также описывает конгруэнцию, фокальными поверхностями которой являются поверхности σ_1 , σ_2 , описываемые точками A_1 и A_2 .

Из равенств

$$\begin{aligned} dA &= \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3, \\ dA_1 &= -\omega^1 A + \omega_1^2 A_2 \end{aligned} \quad (\omega^2 = 0)$$

следует, что поверхности σ и σ_1 являются фокальными поверхностями конгруэнции, описанной лучом AA_1 . Наконец, равенства

$$\begin{aligned} dA_3 &= -\omega^3 A + \omega_3^2 A_2, \\ dA_2 &= \omega_2^1 A_1 + \omega_2^3 A_3 \end{aligned} \quad (\omega^2 = 0)$$

показывают, что поверхности σ_3 и σ_2 являются фокальными поверхностями конгруэнции, описанной лучом A_3A_2 .

Теорема 2. Четверка поверхностей $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ порождает четверку конгруэнций $\{AA_1\}, \{A_1A_2\}, \{A_2A_3\}, \{A_3A\}$, для которых они являются фокальными с фокусами A, A_1, A_2, A_3 .

Однако последовательность указанных конгруэнций не является последовательностью Лапласа.

Действительно, когда точка A описывает кривую, касающуюся луча AA_1 , и, следовательно, $\omega^3 = 0$, точка A_1 описывает кривую, которая не касается луча A_1A_2 . Поскольку пары прямых $AA_3 - A_1A_2$, $AA_1 - A_2A_3$ параллельны в смысле Клиффорда, то четырехугольник $AA_1A_2A_3$ является косым параллелограммом.

Теорема 3. Главные поверхности (29) являются цилиндрами лишь при условии

$$\alpha = \pm 3. \quad (31)$$

Доказательство. Прямые AA_3 и A_1A_2 пересекают абсолют эллиптического пространства в точках

$$M_1 = A + iA_3; \quad M_2 = A - iA_3$$

$$M_3 = A_1 + iA_2; \quad M_4 = A_1 - iA_2$$

(действительно, мы имеем $M_1^2 = M_2^2 = M_3^2 = M_4^2 = 0$). Образующими абсолюта, проходящими, например, через точку M_1 , являются прямые M_1M_3 и M_1M_4 . Дифференцируя, получим

$$\begin{aligned} dM_1 &= dA + idA_3 = \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3 + i(-\omega^3 A + \omega_3^2 A_2) = \\ &= -i\omega^3 (M_1 - iA_3) + \omega^1 (M_3 - iA_2) + \omega^3 A_3 + i\omega_3^2 A_2 = -i\omega^3 M_1 + \\ &\quad + \omega^1 M_3 + i(\omega_3^2 - \omega^1) A_2, \\ dM_1 &= -i\omega^3 M_1 + \omega^1 M_4 + i(\omega_3^2 + \omega^1) A_2. \end{aligned}$$

Точка M_1 будет перемещаться по прямой M_1M_3 лишь тогда, когда

$$\omega^1 - \omega_3^2 = 0, \quad (32)$$

а по прямой M_1M_4 — когда

$$\omega^1 + \omega_3^2 = 0. \quad (33)$$

Сравнивая (32) и (33) со вторым уравнением (29), мы приходим к равенствам (31). Теорема доказана.

Теорема 4. Все четыре конгруэнции $\{AA_1\}, \{A_1A_2\}, \{A_2A_3\}$ и $\{A_3A\}$ являются конгруэнциями W .

Доказательство. Действительно, возьмем, например, конгруэнцию $\{AA_1\}$. Мы имеем

$$dA = \omega^1 A_1 + \omega^3 A_3,$$

$$d^2A = \omega^1 (-\omega^1 A + \omega_1^2 A_2) + \omega^3 (-\omega^3 A + \omega_3^2 A_2) + d\omega^1 A_1 + d\omega^3 A_3,$$

$$dA_1 = -\omega^1 A + \omega_1^2 A_2,$$

$$d^2A_1 = -\omega^1 (\omega^1 A_1 + \omega^3 A_3) + \omega_1^2 (-\omega_1^2 A_1 - \omega_3^2 A_3) - d\omega^1 A + d\omega_1^2 A_2.$$

Поскольку касательной плоскостью поверхности σ является плоскость AA_1A_3 , то уравнение асимптотических линий поверхности будет иметь вид

$$\omega^1 \omega_1^2 + \omega^3 \omega_3^2 = 0. \quad (34)$$

Касательной плоскостью поверхности σ_1 является плоскость AA_1A_2 . Следовательно, уравнение асимптотических линий этой поверхности имеет вид

$$\omega^1\omega^3 + \omega_1^2\omega_3^2 = 0. \quad (35)$$

Учитывая уравнения (19), мы приведем уравнения (34) и (35) к виду

$$\frac{\gamma}{1-k^2} [(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2] = 0.$$

Возможны два случая:

1) $\gamma = 0$.

Этот случай мы рассмотрим позднее.

2) $\gamma \neq 0$; тогда будем иметь следующее уравнение асимптотических:

$$(\omega^1)^2 - (\omega_3^2)^2 = 0. \quad (36)$$

Уравнения асимптотических на обеих поверхностях совпадают, следовательно, рассматриваемая конгруэнция есть конгруэнция W . При этом на всех фокальных поверхностях этих конгруэнций уравнения асимптотических линий имеют вид (36). Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что в уравнении (36) отсутствует член, содержащий произведение форм $\omega^1\omega_3^2$. Это означает, что координатные линии $\omega^1 = 0$ и $\omega_3^2 = 0$ на каждой фокальной образуют сопряженную сеть. Линии $\omega_3^2 = 0$ на поверхности σ , сопряженные линиям $\omega^1 = 0$, совпадают с линиями $\omega^3 = 0$, касательными к прямым AA_1 , лишь при условии $\gamma = 0$. Аналогичное совпадение будет иметь место и на других фокальных поверхностях.

Теорема 5. У центроинфлексионных комплексов, характеризуемых равенством

$$\gamma = 0, \quad (37)$$

конгруэнции $\{AA_1\}$ и $\{A_2A_3\}$ вырождаются в две линейчатые поверхности. Каждая пара соответствующих лучей этих поверхностей является директрисами (теперь) линейных конгруэнций $\{AA_3\}$ и $\{A_1A_2\}$.

Доказательство. Действительно, обозначая через (AA_1) совокупность плюckerовых координат прямой, т. е. аналитическую прямую, мы будем иметь (с учетом (37))

$$d(AA_1) = \omega^2 [(A_2A_1) - \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2} (A_3A_1) - \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2} (AA_2) - k(AA_3)].$$

При $\omega^2 = 0$ имеем

$$d(AA_1) = 0.$$

Следовательно, прямая AA_1 действительно описывает поверхность. С этой поверхностью (линейчатой) совпадают поверхности σ и σ_1 . Аналогично доказывается, что прямая A_2A_3 также описывает линейчатую поверхность, с которой совпадают поверхности σ_2 и σ_3 . Но в таком случае прямые AA_3 и A_1A_2 описывают линейные конгруэнции, директрисами которых являются прямые AA_1 и A_2A_3 . Эти конгруэнции, таким образом, в целом совпадают друг с другом.

Рассматриваемый комплекс представляет собой однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций.

Найдем широту комплексов (37). Выпишем полную систему уравнений, характеризующих такой комплекс:

$$\begin{aligned} \omega_3^1 = k\omega^2, \quad dk = p\omega^2 + \alpha\omega^1 + \beta\omega_3^2, \quad -k\omega_1^2 + \omega^3 = \alpha\omega^2, \\ -\omega_1^2 + k\omega^3 = \beta\omega^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Из последних двух уравнений имеем

$$\begin{aligned}\omega^3 &= \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2} \omega^2, \\ \omega_1^2 &= \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2} \omega^2.\end{aligned}\quad (39)$$

Продифференцируем систему уравнений (38) внешним образом. Учитывая (39), получим

$$\begin{aligned}[\Delta p \omega^2] + [d\alpha \omega^1] + [d\beta \omega_3^2] &= 0, \\ [d\alpha \omega^2] + 2\alpha \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2} [\omega^1 \omega^2] + \left(1 - k^2 + \alpha \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2} - \beta \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2}\right) [\omega^2 \omega_3^2] &= 0, \quad (40) \\ [d\beta \omega^2] + \left(k^2 - 1 + \beta \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2} - \alpha \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2}\right) [\omega^1 \omega^2] + 2\beta \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2} [\omega^2 \omega_3^2] &= 0,\end{aligned}$$

где

$$\Delta p = dp + p \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2} \omega^1 - p \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2} \omega_3^2.$$

Алгебраически разрешая первое уравнение системы (40), по лемме Картана будем иметь:

$$\begin{aligned}\Delta p &= x_1 \omega^2 + x_2 \omega^1 + x_3 \omega_3^2, \\ d\alpha &= x_2 \omega^2 + x_4 \omega^1 + x_5 \omega_3^2, \\ d\beta &= x_3 \omega^2 + x_5 \omega^1 + x_6 \omega_3^2.\end{aligned}\quad (41)$$

Внося значения $d\alpha$ и $d\beta$ в последние два уравнения системы (40), получим

$$x_4 = -2\alpha \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2}, \quad x_5 = 1 - k^2 + \alpha \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2} - \beta \frac{k\alpha - \beta}{1 - k^2}, \quad x_6 = 2\beta \frac{\alpha - k\beta}{1 - k^2}.$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в монографии С. П. Финкова (см. [7]), $\bar{q} = 3$, $s_1 = 3$; тогда $s_2 = 0$. Следовательно, число Картана $Q = s_1 = 3$. Число произвольных коэффициентов системы (41) $N = 3$. Таким образом, критерий Картана для системы дифференциальных уравнений (38), удовлетворен, а потому эта система в инволюции, ее решение существует с произволом в три функции одного аргумента. Рассмотренные комплексы существуют с произволом в три функции одного аргумента. Таким образом, класс центроинфлексионных комплексов, характеризуемых условием $\gamma = 0$, существует с произволом в три функции одного аргумента.

С таким же произволом существует и линейчатая поверхность в трехмерном точечном пространстве, это дает нам основание предположить, что рассматриваемый комплекс вполне определяется заданием линейчатой поверхности. Такое предположение соответствует истине. Докажем следующую теорему:

Теорема 6. Чтобы построить произвольный центроинфлексионный комплекс рассматриваемого класса, следует взять произвольную линейчатую поверхность и принять за директрисы линейчатой конгруэнции образующую этой поверхности и полярно-сопряженную с ней прямую относительно абсолюта эллиптического пространства. Комплекс будет представлять собой совокупность таких конгруэнций.

Доказательство. Действительно, возьмем произвольную линейчатую поверхность σ_{01} , поместим на эту поверхность вершины A, A_1 сопровождающего тетраэдра. Этот тетраэдр выберем автополярным отно-

сительно абсолюта. Построим комплекс прямых как однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций с парами директрис AA_1 , AA_2 , AA_3 . У такого комплекса конус с вершиной A вырождается в плоский пучок прямых, лежащих в плоскости AA_2A_3 . Следовательно, с одной стороны, точка A является инфлексионным центром, с другой — этой точке в нормальной корреляции на луче соответствует плоскость AA_2A_3 . Аналогично, точка A_3 является также инфлексионным центром и ей соответствует в нормальной корреляции плоскость A_3AA_1 . Эти плоскости AA_2A_3 и A_3AA_1 полярно сопряжены относительно абсолюта. Но в таком случае точки A , A_3 являются центрами луча. Так как они — и инфлексионные центры, то построенный комплекс является центроинфлексионным. Следовательно, для комплекса будет выполняться равенство (19), т. е.

$$q = r = 0;$$

далее,

$$d(AA_1) = \omega^2(A_1A_2) + \omega^3(A_1A_3) + \omega_1^2(AA_2) + \omega_1^3(AA_3).$$

Так как прямая AA_1 описывает поверхность σ_{01} , то мы имеем

$$\omega^3 = \lambda\omega^2,$$

$$\omega_1^2 = \mu\omega^2.$$

Следовательно, $\gamma = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Киев, 1963.
2. Р. Н. Щербаков. Построение метрической теории комплекса прямых при помощи репеража линейчатых подмногообразий. Труды Томского ун-та, 155 (1961), 3—24.
3. К. И. Гриневич Юс. Комплекс прямых в аффинном пространстве. ДАН ССР, т. 61, № 2, 1948.
4. Н. И. Кованцов. Теория комплексов в эллиптическом пространстве. Ап. Stiint. Univ. Losi. 1963, 1, 9, № 1.
5. Н. И. Кованцов. Комплексы в гиперболическом пространстве. Сибирский матем. журнал, 1963, 4, № 5.
6. В. И. Машанов. Построение общей теории комплексов прямых пространств Лобачевского, Евклида, Римана. Доклады III Сибирской конференции по математике и механике, Томск, ТГУ, 1964.
7. С. П. Филиков. Метод внешних форм Картана, М.-Л., 1948.

Поступила 18 мая 1970 г.

ГОМОМОРФИЗМЫ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Я. Л. Шапиро, А. Г. Яброва

(Горький)

В работах [1] и [2] М. А. Улановским было введено понятие гомоморфизма аффинной связности как такое дифференцируемое отображение (Φ) соответствующего многообразия в другое многообразие аффинной связности, которое сохраняет параллельный перенос. Как указано в работе [1], многообразие аффинной связности (L_n) , допускающее такой гомоморфизм, необходимо содержит геодезическое поле ω -мерных направлений (иначе говоря, геодезическое распределение). Однако это поле специального вида. Кроме того, изложение вопроса в целом потребовало глобализации геодезического поля, приведшей к понятию суперинволютивного

распределения. Выяснение взаимозависимости между упомянутыми понятиями и является целью настоящей работы. При этом связность предполагается без кручения и отображение Φ — регулярным отображением на соответствующее пространство.

1. СУПЕРИНВОЛЮТИВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть Q — ω -мерное инволютивное распределение на многообразии X^n ^{*} и (V, φ) — адаптированная к Q координатная пара; тогда каждое сечение (S) «куба» V , описываемое уравнениями $u^i = \text{const}$, $u^a = t^a$,

$$(i, j, k = 1, \dots, n - \omega; a, b, c = n - \omega + 1, \dots, n),$$

в которых $u^\alpha(x, \beta, \sigma = 1, \dots, n)$ — адаптированные координаты на V , является интегральным многообразием распределения Q [3].

Если для каждой точки $x \in X^n$ найдется такая включающая x адаптированная координатная пара, что различным сечениям S соответствуют различные же максимальные интегральные многообразия распределения Q , их (т. е. S) содержащие, то Q назовем суперинволютивным распределением (или α -распределением). Вышеупомянутую координатную пару (V, φ) назовем адаптированной к суперинволютивному распределению.

Суперинволютивным является, например, распределение, которое индуцирует на аналитической группе любая ее замкнутая аналитическая подгруппа (см [3], стр. 160—162).

Максимальное интегральное многообразие распределения Q (которое сейчас и в дальнейшем, если не будет оговорок, предполагаем суперинволютивным), проходящее через точку $p \in X^n$, обозначим через $N(p)$ или N , а множество всех N — через \tilde{Q} .

Если $A \subset X^n$, то подмножество \tilde{Q} , состоящее из всех N , пересекающих A , обозначим через $\tilde{Q}(A)$. Адаптированная к Q пара (V, φ) индуцирует координатную пару (Δ, ψ) на \tilde{Q} следующим образом: $\Delta = \tilde{Q}(V)$, и если $N(p) \in \Delta$ ($p \in V$), то

$$\psi N(p) = \mu \varphi(p),$$

где μ отображает $\varphi(V)$ в $R^{n-\omega}$ согласно формуле

$$\mu \varphi(p) = (u^i).$$

Таким образом, $\psi(\Delta)$ — куб в $R^{n-\omega}$, и пара (Δ, ψ) определяет взаимно-однозначное соответствие между точками этого куба и элементами множества Δ .

Пусть (Δ, ψ) и (Δ', ψ') — две пары, индуцированные парами (V, φ) и (V', φ') , адаптированными к Q , и N пересекает V и V' . Поскольку N (в качестве многообразия) предполагается связным, то открытые (относительно N) множества $V \cap N$ и $V' \cap N$ можно соединить конечной цепочкой подобных же множеств $V_1 \cap N, \dots, V_s \cap N$. В результате такого построения нетрудно усмотреть, что для элементов $N \in \Delta \cap \Delta'$ имеет место преобразование координат

$$u'^i = u^i(\mu),$$

где u'^i — дифференцируемые функции от точки (u^i) пространства $R^{n-\omega}$, описывающей открытое множество последнего. Следовательно, имеет место

* X^n — класса C^0 , $v > 1$.

Предложение 1. Если Q — ω -мерное суперинволютивное распределение на дифференцируемом многообразии X^n , то класс пар (Δ, ψ) , индуцированных всеми адаптированными к Q координатными парами, определяет на множестве \tilde{Q} всех максимальных интегральных многообразий Q структуру дифференцируемого ($n - \omega$ -мерного) многообразия¹, причем «естественное» отображение Φ , при котором точке $p \in X^n$ соответствует содержащее эту точку максимальное интегральное многообразие, является регулярным.

Наоборот, пусть $\Phi: X^n \rightarrow Y^{n-\omega} (\omega > 0)$ — регулярное отображение X^n на $Y^{n-\omega}$ и (D, F) — координатная пара, включающая точку $y_0 \in Y^{n-\omega}$. Тогда множество $\Phi^{-1}(y_0)$ в некоторой координатной окрестности точки $x_0 \in \Phi^{-1}(y_0)$ определено уравнениями вида

$$\Phi^i(x^\beta) = y_0^i, \quad (1)$$

где $(y_0^i) \in \varphi(y_0)$ и x^β — координаты точки x из окрестности точки x_0 , причем $\Phi^i(x_0^\beta) = y_0^i$ и

$$\operatorname{rang} \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\beta} \right) (x_0^\beta) = n - \omega.$$

Отсюда следует, что для некоторой окрестности (V_0) точки x_0 уравнения (1) эквивалентны уравнениям вида

$$x^i = x^i(x^a),$$

$$(i = 1, \dots, n - \omega; a = n - \omega + 1, \dots, n),$$

где x^i — дифференцируемые функции точки (x^a) пространства R^n , описывающей некоторое его открытое подмножество d_0 .

Мы можем взять $(x^a) \in d_0$ за координаты точки $x \in \Phi^{-1}(y_0) \cap N_0$. Если ограничиться связной компонентой множества $\Phi^{-1}(y_0)$, то вышеописанный класс координатных пар очевидным образом определяет на ней структуру дифференцируемого многообразия, являющегося подмногообразием многообразия X^n и подпространством последнего, рассматриваемого как топологическое пространство. Касательные ω -мерные плоскости к полученным таким образом подмногообразиям образуют ω -мерное инволютивное распределение на X^n , для которого они (т. е. подмногообразия) являются максимальными интегральными многообразиями. Полученное таким образом распределение Q на X^n будем называть индуцированным (отображением Φ). Построим теперь адаптированную к Q и включающую x_0 ($\Phi(x_0) = y_0$) координатную пару. С этой целью к функціям $\Phi^*(y^i) = u^i$ ($y^i \in F(D)$), которые определены для некоторой окрестности точки x_0 , прибавим еще ω функций u^a ($a = n - \omega + 1, \dots, n$) так, что вместе они образуют координатную систему на «кубе» $V \subset X^n$.

В пределах полученной таким образом координатной пары (V, φ) отображение Φ записывается в виде $y^i = u^i$, из чего следует адаптированность этой пары к Q . Кроме того, если $y_1^i = y_2^i$, то соответствующие сечения «куба» $V: u^i = y_1^i, u^i = y_2^i$ принадлежат различным максимальным интегральным многообразиям (две точки, по одной принадлежащие множествам $\Phi^{-1}(y_1)$ и $\Phi^{-1}(y_2)$, не могут, как легко видеть, принадлежать одному и тому же (связному) интегральному многообразию индуцированного Q). Таким образом, справедливо

¹ Его дифференцируемость, очевидно, не меньше дифференцируемости многообразия X^n .

Предложение 2. Если Φ — регулярное отображение многообразия X^n на многообразие $Y^{n-\omega}$ ($0 < \omega < n$), то индуцированное на X^n ω -мерное распределение Q суперинволютивно.

Каждому элементу $N(p) \in \tilde{Q}$ можно поставить в соответствие элемент $y = \Phi(p)$ многообразия $Y^{n-\omega}$. Это соответствие, вообще говоря, является локальным диффеоморфизмом; в случае же связности множества $\Phi^{-1}(y)$ мы имеем диффеоморфизм \tilde{Q} на $Y^{n-\omega}$.

Хотя X^n (на котором задано суперинволютивное Q) мы предполагаем отделимым (хаусдорфовым), \tilde{Q} неотделимо. Так как «естественное» отображение $\Phi: X^n \rightarrow \tilde{Q}$ регулярно, то оно открыто.

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием отделимости \tilde{Q} является замкнутость множества, составленного из элементов $(p, q) \in X^n \times X^n$, принадлежащих одному и тому же описывающему \tilde{Q} многообразию N .

Приведем, наконец, без доказательства

Предложение 3. Если Q — суперинволютивное распределение на хаусдорфовом бикомпактном многообразии (X^n) , то \tilde{Q} хаусдорфово.

2. ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ГОМОМОРФИЗМ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Пусть $p \in L_n$, D — некоторая (открытая) окрестность p , на которой задано ω -мерное ($\omega + 1 < n$) инволютивное распределение (Q) и $N^\beta(q)$ по-прежнему обозначает его максимальное интегральное многообразие, проходящее через точку $q \in D$.

Пусть, далее, τ — любое (одномерное) направление в q , не принадлежащее $N^\beta(q)$, и $\gamma(s)$ — геодезическая линия на D с аффинным параметром s , пробегающим некоторую окрестность I пуля арифметического пространства R , проходящая через q и имеющая в ней направление τ . Если множество $N^{\beta+1}(\gamma = U N^\beta(\gamma(s))$ является вполне геодезическим подмногообразием при любом $q \in D$, любом τ и некотором I , то Q называется геодезическим распределением в окрестности p . Таково по существу определение геодезического поля (ω -мерных) направлений, которое было дано в работах [4, 5].

Как доказано в [5], чтобы ω -мерное распределение (Q) было геодезическим в окрестности $q \in L_n$, необходимо и достаточно, чтобы дифференцируемые векторные поля A^a ($a = n - \omega + 1, \dots, n$), образующие его базис, удовлетворяли (в окрестности q) условиям

$$A^{a\alpha}_{\beta} = T^a \delta^{\alpha}_{\beta} + B^a_{\beta\beta} A^{b\alpha}, \quad (2)$$

$$R^a_{(\beta\beta)\delta} A^{a\delta} = H^a_{(\beta\beta)} \delta^a_{\delta} + F^a_{\beta\beta\delta} A^{b\delta}, \quad (3)$$

где $A^{a\alpha}$ — компоненты полей A^a ; $R^a_{\beta\beta\delta}$ — компоненты тензора кривизны; скобки обозначают симметризацию; по индексу b происходит суммирование, а T^a , $B^a_{\beta\beta}$, $H^a_{\beta\beta}$, $F^a_{\beta\beta\delta}$ ($= F^a_{\delta\beta\beta}$) — некоторые функции локальных координат.

При $\omega + 1 = n$ заданное в окрестности $q \in L_n$ инволютивное распределение мы называем геодезическим в этой окрестности, если векторы A^a , образующие его базис, удовлетворяют условиям (2) и (3).

В работе [5] показано, что для адаптированной к Q координатной пары (V, φ) , полагая $V^a = \delta_a^\alpha$, можно получить из (2), (3) условия

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^i &= \Pi_{\alpha\beta}^i(u^j) + \psi_{(\alpha}\delta_{\beta)}^i, \\ \Pi_{\alpha\beta}^i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

в которых $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ — коэффициенты связности для (V, φ) ; u^α — адаптированные координаты, а $\Pi_{\alpha\beta}^i$, ψ_α — некоторые функции.

Как показано в той же работе, для $\omega + 1 < n$ условия (4) — эквивалент условий (2), (3); легко проверить, что это остается справедливым и для $\omega + 1 = n$. Заметим еще, что имеет место

$$\psi_\alpha = T^\alpha. \quad (4a)$$

Распределение (Q) на L_n назовем локально геодезическим (на L_n), если оно является геодезическим в окрестности любой точки $q \in L_n$.

Геодезическим (на L_n) назовем любое суперинволютивное локально геодезическое распределение.

Пусть Φ обозначает (регулярный) гомоморфизм L_n на $L_{n-\omega}$ ($0 < \omega < n$), (Δ, ψ) — координатная пара на $L_{n-\omega}$, включающая точку $\tilde{p} \in L_{n-\omega}$, и (V, φ) — такая адаптированная к Φ координатная пара, что $\tilde{p} \in V$ ($\Phi p = \tilde{p}$), и ограничение гомоморфизма Φ на V задается равенствами

$$\tilde{u}^i = u^i \ (i = 1, \dots, n - \omega),$$

в которых \tilde{u}^i обозначают координаты, соответствующие паре (Δ, ψ) . Для точки (u^i) арифметического пространства $R^{n-\omega}$ имеет место

$$(u^i) = \mu\varphi(q),$$

где $q \in V$, $\varphi(q) = (u^\alpha) \in R^n$, а μ — отображение R^n на $R^{n-\omega}$:

$$\mu(u^\alpha) = (u^i).$$

Согласно предыдущему, пара (V, φ) одновременно адаптирована и к суперинволютивному распределению Q , индуцированному отображением Φ на L_n .

Если $u^\alpha = u^\alpha(t)$ — уравнение какой-либо кривой $\gamma(t) \in V$, а $\lambda(t)$ — какой-либо параллельно перенесенный вдоль нее вектор, то

$$\frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{dt} \lambda^\gamma = 0, \quad (5)$$

где λ^α — компоненты λ и $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ — коэффициенты связности для (V, φ) .

Так как $(\Phi\gamma(t))^\alpha = u^\alpha(t)$ и $((d\Phi)\lambda)^\alpha = \lambda^\alpha$, то, ввиду гомоморфизма Φ , мы одновременно с (5) имеем

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + \tilde{\Gamma}_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \lambda^k = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ — коэффициенты связности для пары (Δ, ψ) .

Из сопоставления (5) с (6) следует, что

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i; \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^i = 0. \quad (7)$$

Сравнение же (7) с условиями (4) приводит к выводу, что последние выполняются при

$$\Pi_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i; \quad \psi_a = 0. \quad (8)$$

Следовательно, индуцированное распределение Q является геодезическим; кроме того, ввиду (4а) для него $T^a = 0$ (в условиях (2), (3)). Но это еще не все. Вычисляя компоненты $R_{\beta\alpha}^i$ тензора кривизны для пары (V, φ) , мы получим, ввиду (7), $R_{\beta\alpha}^i = 0$. С другой стороны, согласно (3), $R_{(\beta\alpha)a}^i = H_{(\beta\alpha)}^a \delta_{\alpha}^i$. Следовательно, $H_{\alpha}^a = 0$.

Таким образом, если существует (регулярный) гомоморфизм (Φ) L_n на $L_{n-\omega}$, то индуцированное на L_n распределение (Q) является геодезическим, причем величины T^a и H_{α}^a (в условиях (2) и (3)) равны нулю.

Наоборот, пусть L_n содержит геодезическое распределение (Q) , причем $T^a = H_{\alpha}^a = 0$.

Для пары (V, φ) , адаптированной к Q , имеют место соотношения (4), причем ввиду $\psi_a = T^a = 0$ имеем

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^i = 0. \quad (9)$$

Прямое вычисление приводит теперь к результату

$$R_{(\beta\alpha)a}^i = -2 \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^i}{\partial u^a}.$$

Так как $R_{(\beta\alpha)a}^i = H_{(\alpha\beta)}^a \delta_{\alpha}^i = 0$, то

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(u^l). \quad (10)$$

Поскольку Q суперинволютивно, множество \tilde{Q} (максимальных интегральных многообразий распределения Q) является дифференцируемым многообразием и индуцированная (известным из предыдущего образом) парой (V, φ) пара (Δ, ψ) является на нем координатной. Мы видим, что каждой паре (Δ, ψ) на \tilde{Q} ставится в соответствие набор функций

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(u^l).$$

Пусть (V', φ') — другая адаптированная к Q пара, причем $V \cap V' \neq \emptyset$.

Тогда $\tilde{Q}(V \cap V')$ — непустое открытое множество, включенное в $\Delta \cap \Delta'$ (пара (Δ', ψ') индуцирована парой (V', φ')). Если $\Gamma_{\beta\alpha}^a$, $\Gamma_{\beta\alpha}^{'a}$ — коэффициенты связности, соответствующие парам (V, φ) , (V', φ') , то для $p \in V \cap V'$,

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{'a} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\pi} \frac{\partial u'^a}{\partial u^{\pi}} \frac{\partial u^b}{\partial u'^{\beta}} \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial u'^{\alpha}} + \frac{\partial u'^a}{\partial u^{\pi}} \frac{\partial^2 u^{\pi}}{\partial u'^{\beta} \partial u'^{\alpha}}. \quad (11)$$

Так как формулы преобразования от адаптированных координат u^a к адаптированным же координатам u'^a на $V \cap V'$ неизбежно имеют вид

$$u'^i = u^i; \quad u'^a = u^a(u^b, u^i),$$

то отсюда и из (11), учитывая (9), получаем

$$\Gamma_{jk}^{i'} = \Gamma_{jk}^s \frac{\partial u'^i}{\partial u^s} \frac{\partial u^t}{\partial u'^j} \frac{\partial u^r}{\partial u'^k} + \frac{\partial u'^i}{\partial u^s} \frac{\partial^2 u^s}{\partial u'^j \partial u'^k}. \quad (12)$$

Пусть теперь (V, φ) и (V', φ') — две любые адаптированные к (суперинволютивному) Q координатные пары и $N_0 \in \Delta \cap \Delta'$.

Как уже упоминалось, существует конечная цепь открытых на N_0 множеств $V_1 \cap N_0, \dots, V_s \cap N_0$, соединяющая точки $p \in V \cap N_0$ и $p' \in V' \cap N_0$, где (V_x, φ_x) ($x = 1, \dots, s$) — адаптированные пары, причем

$$V_1 = V, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad V_s = V', \quad \varphi_s = \varphi'.$$

Рассмотрим открытые (в \tilde{Q}) непустые множества

$$\tilde{Q}_{12}(V_1 \cap V_2), \dots, \tilde{Q}_{s-1,s}(V_{s-1} \cap V_s)$$

и их пересечение

$$G = \tilde{Q}_{12} \cap \dots \cap \tilde{Q}_{s-1,s},$$

представляющее собой также непустое (поскольку $N_0 \in G$) открытое множество. Очевидно, что

$$G \subset \Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_s \quad (\Delta_1 = \Delta, \Delta_s = \Delta').$$

Если обозначить координаты и коэффициенты связности для пары (V_x, φ_x) через u^{xa} и $\Gamma_{x\beta, x\sigma}^{xa}$, то будем иметь для G аналоги формулы (12):

$$\begin{aligned} \Gamma_{x\beta, xk}^{xi} &= \Gamma_{(x-1)\beta, (x-1)k}^{(x-1)i} + \frac{\partial u^{xi}}{\partial u^{(x-1)s}} \frac{\partial u^{(x-1)i}}{\partial u^{xj}} \frac{\partial u^{(x-1)r}}{\partial u^{xk}} + \\ &+ \frac{\partial u^{xi}}{\partial u^{(x-1)s}} \frac{\partial^2 u^{(x-1)s}}{\partial u^{xi} \partial u^{xk}}, \quad (u^{(x-1)i}) \in \mathcal{G}_{x-1}(G), \end{aligned} \quad (13)$$

где $x = 2, \dots, s$.

Из формул (13) мы очевидным образом снова получаем (12).

Таким образом, имеют место

Теорема 1. Если пространство аффинной связности без кручения (L_n) допускает регулярный гомоморфизм (Φ) на другое пространство $(L_{n-\omega}, 0 < \omega < n)$ аффинной связности, то L_n содержит геодезическое $(\omega$ -мерное) распределение (Q) , для которого величины T^a и H_a^a в условиях (2), (3) равны нулю. Распределение это (Q) индуцировано гомоморфизмом Φ .

Теорема 2. Если L_n (без кручения) допускает геодезическое ω -мерное $(0 < \omega < n)$ распределение (Q) , для которого величины T^a и H_a^a в условиях (2) и (3) равны нулю, то на дифференцируемом многообразии \tilde{Q} (единственным образом) определена аффинная связность тем, что «естественное» отображение $\Phi: L_n \rightarrow \tilde{Q}$ является регулярным гомоморфизмом.

Заметим, что связность на \tilde{Q} , о которой идет речь в теореме 2, может и не быть хаусдорфовой (другими словами, \tilde{Q} может и не быть хаусдорфовым). Но если, например, L_n бикомпактно и, разумеется, хаусдорфово, то \tilde{Q} хаусдорфово.

Как следует из сформулированных теорем, необходимым и достаточным условием того, что пространство аффинной связности без кручения (L_n) допускает (регулярный) гомоморфизм на другое пространство $(L_{n-\omega}, 0 < \omega < n)$ аффинной связности, является существование на L_n суперинволютивного распределения, для любого локального базиса (A^a) которого имеют место условия

$$1) \quad A_{\beta}^{a\alpha} = B_{\beta}^a A^{b\alpha},$$

$$2) \quad R_{(\beta\alpha)}^a A^{ab} = F_{\beta\alpha}^a A^{ab},$$

где $B_{\beta\alpha}^a$ и $F_{\beta\alpha}^a (= F_{\alpha\beta}^a)$ — некоторые величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Улановский. Группа движений и эндоморфизмы пространства аффинной связности. *Математический сборник*, т. 58 (100), № 3, 1962.
2. М. Улановский. Гомоморфизмы пространств аффинной связности. *Украинский геометрический сборник*, вып. 5—6, Изд-во ХГУ, 1968.
3. К. Шевалле. Теория групп Ли. М., 1948.
4. Я. Шапиро. О геодезических полях многомерных направлений. *ДАН*, 1941, 237—239.
5. Я. Шапиро. Геодезические поля направлений и проективные системы путей. *Математический сборник*, т. 36 (78) : 1, 1955.

Поступила 5 мая 1970 г.

О НАЛОЖИМЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С КРАЕМ, ИМЕЮЩИМ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ПОВОРОТ

Л. А. Шор

(Харьков)

1. ВВЕДЕНИЕ

Выпуклая поверхность F_0 наложима на выпуклую поверхность F_1 , если она допускает непрерывное изгибание в поверхность F_1 в классе всех выпуклых поверхностей, т. е. если существует включающее F_0 и F_1 непрерывное семейство нетривиально изометричных между собой выпуклых поверхностей F_t , $t \in [0, 1]$.

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. Гомеоморфная открытому кругу выпуклая поверхность F , поворот края которой всюду неотрицателен и сосредоточен в конечном числе точек, наложима на любую ей изометричную.

Эта теорема была сформулирована А. В. Погореловым (без дополнительного требования конечности числа точек края, в которых сосредоточен его поворот) среди перешедших вопросов в монографии [1]. Требование конечности числа точек, в которых сосредоточен поворот края, выполняется, в частности, для многогранников.

Поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы 1, будем называть *поверхностями типа H* . Следуя А. Д. Александрову ([2], стр. 292), будем говорить, что скленивание выпуклой поверхности F из поверхностей F_1, F_2, \dots, F_n можно произвести реально, если они наложимы на соответствующие куски поверхности F . Из теоремы 1 в качестве непосредственного следствия получается

Теорема 2. Если выпуклая поверхность F склеивается из поверхностей F_1, F_2, \dots, F_n типа H , то это склеивание можно произвести реально.

Из теоремы 1 и возможности разбиения любого многоугольника на выпуклую поверхность на выпуклые треугольники ([2], стр. 88) вытекает

Теорема 3. Если поворот края выпуклой поверхности F сосредоточен в конечном числе точек, то она может быть разбита на конечное число таких кусков, что любая ей изометричная выпуклая поверхность F может быть реально склеена из них.

1.1. Обозначим край поверхности F типа H через Γ ; точки, в которых сосредоточен его поворот, назовем точками типа B и обозначим их через B_1, B_2, \dots, B_m .

Кривая Γ может иметь кратные точки. При этом в силу выпуклости поверхности F сумма углов ее секторов в совмещенных в пространстве

точках кривой Γ должна быть не больше 2π . Таким образом, если ни одна из совместившихся в данной точке пространства точек кривой Γ не является точкой типа B , то совместившихся точек точно две и обе они являются внутренними точками двух совмещенных участков края, которые имеют равный нулю поворот и при обходе Γ проходятся в противоположных направлениях. Такие участки края являются «противоположными берегами разреза». Относительно концов разреза имеет место следующее: либо в конце разреза совместилось несколько различных точек кривой Γ , из которых не более чем одна имеет угол сектора, равный π , либо концом разреза является общий конец двух его берегов.

1.2. Пусть \bar{F} — граница выпуклой оболочки поверхности F типа H . Согласно 1.1, дополнение $\bar{F} - F$ поверхности F до поверхности \bar{F} состоит из конечного числа локально изометрических плоскости областей, взятых вместе с их границами, и берегов соединяющих их разрезов, проведенных по квазигеодезическим линиям на поверхности \bar{F} . Некоторые из разрезов могут вырождаться в точки. В частности, $\bar{F} - F$ может быть гомеоморфно замкнутому кругу. Не исключено также, что $\bar{F} - F$ не содержит внутренних точек, т. е. поверхность F есть поверхность с разрезом по квазигеодезической ломаной на \bar{F} .

Развернутое на плоскость дополнение $\bar{F} - F$ поверхности F до поверхности \bar{F} является замкнутым, односвязным, вообще говоря, неоднолистным множеством, состоящим из конечного числа локально изометрических плоскости областей G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с присоединенными к ним границами и соединяющих их дважды покрытых прямых отрезков, в которые развертываются берега разрезов. Некоторые из отрезков, соединяющих области G_i , могут вырождаться в точки. Назовем такое множество обобщенной областью, соответствующей поверхности F , и обозначим через Q , а его границу через L .

Обобщенную область Q будем называть обобщенным многоугольником, если ее граница L —ломаная с конечным числом сторон. Поверхности типа H , которым соответствуют обобщенные многоугольники, будем называть поверхностями типа H_p .

Кривая Γ допускает изопериметрическое отображение Ψ на кривую L , которому соответствует подклинивание (Q, Ψ) обобщенной области Q к поверхности F , восстанавливающее поверхность \bar{F} . Отображение Ψ обходу кривой Γ ставит в соответствие обход кривой L . При обходе кривой L дважды покрытые прямые отрезки, соответствующие берегам разрезов, проходят дважды в противоположных направлениях. Соответствующие по отображению Ψ точки кривых Γ и L условимся обозначать одинаковыми буквами.

Так как поворот кривой Γ со стороны поверхности F в каждой точке неотрицателен, то развертывание $\overline{F}-F$ на плоскость можно осуществить так, чтобы повороты кривой L со стороны Q в точках соединения границ двух областей G_i и G_j или в точках соединения границы области G_i с дважды покрытыми отрезками, входящими в состав Q , были неположительны.

1.3. Доказательство теоремы 1 проводится предложенным А. Д. Александровым методом склеивания. В нем существенно используется вытекающая из теоремы А. Д. Александрова «о склеивании» [2] и теоремы А. В. Погорелова «об однозначной определенности» [1], [3] теорема, согласно которой для наложимости выпуклой поверхности F_0 на выпук-

лую поверхность F_1 необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная деформация (Q_t, Ψ_t) под克莱ивания (Q_0, Ψ_0) в под克莱ивание (Q_1, Ψ_1) ¹. От деформации (Q_t, Ψ_t) обобщенной области Q_0 в обобщенную область Q_1 кроме непрерывности требуется еще, чтобы она сохраняла условия под克莱ивания области Q_0 к поверхности F_0 , т. е. была изопараметрической и сохраняла заданные нижние границы поворотов кривой L_0 .

Доказательство строится по следующей схеме, использующей симметричность и транзитивность отношения наложимости. Сначала (в 2) доказывается, что любая поверхность типа H наложима на поверхность типа H_p . Затем (в 3) показывается, что любые две изометрические поверхности типа H_p наложимы.

2. НАЛОЖИМОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ ТИПА H НА ПОВЕРХНОСТЬ ТИПА H_p

2. 1. Пусть $l = A_1A_2$ — плоская выпуклая кривая длины σ ; $M = M(s)$ — точка кривой l , соответствующая дуге s , отсчитываемой от точки A_1 ; $\varphi(s)$ — правый поворот открытого участка $A_1M(s)$ кривой l ; $\varphi(M) = \varphi(s+0) - \varphi(s)$ — правый поворот кривой l в точке M .

Лемма 1. Пусть $\gamma(s)$ и $\omega(s) = \tilde{\gamma}(s) - \gamma(s)$ ($s \in [0, \sigma]$) монотонно неубывающие функции и

$$0 \leq \gamma(s) \leq \tilde{\gamma}(s) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma(\sigma) < \tilde{\gamma}(\sigma). \quad (1)$$

Тогда существует непрерывное семейство выпуклых кривых l_t ($t \in [0, 1]$), удовлетворяющих следующим условиям:

2. 2. кривые l_t соединяют точки A_1 и A_2 ;

2. 3. длины кривых l_t равны σ ;

2. 4. существует такое s^* ($0 < s^* < \sigma$), что

2. 4. 1. правый поворот открытого участка $A_1M_t(s)$ ($0 < s \leq s^*$) кривой l равен

$$\varphi_t(s) = \varphi(s)(1-t) + \gamma(s)t = \tilde{\gamma}(s) - t\omega(s);$$

2. 4. 2. правый поворот открытого участка $M_t(s^*)M_t(s)$ ($s^* < s \leq \sigma$) кривой l_t равен

$$\begin{aligned} \varphi_t(s) - \varphi_t(s^*+0) &= [\varphi(s) - \varphi(s^*+0)](1-\tau(t)) - [\gamma(s) - \gamma(s^*+0)]\tau(t) = \\ &= \varphi(s) - \varphi(s^*+0) - [\omega(s) - \omega(s^*+0)]\tau(t), \end{aligned}$$

где $\tau(t)$ — некоторая монотонно возрастающая непрерывная функция t ;

2. 4. 3. правый поворот кривой l_t в точке $M_t(s^*)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi_t(M_t(s^*)) > \tilde{\gamma}(M(s^*)), \quad (t > 0); \quad (2)$$

2. 5. углы α_i и $\alpha_{i,t}$ между хордой A_1A_2 и полукасательными к кривым l и l_t в точках A_1 и A_2 удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_{i,t} < \alpha_i, \quad (i = 1, 2; t > 0).$$

Доказательство. Построим две плоские кривые $l_1 = A_1A'_2$ и $l_2 = A'_1A_2$, удовлетворяющие следующим условиям:

2. 6. 1. длины кривых l_1 и l_2 равны σ ;

2. 6. 2. кривые l_1 и l_2 касаются кривой l соответственно в точках A_1 и A_2 ;

¹ Эта теорема доказывается аналогично теореме А. Д. Александрова ([4], гл. V, § 2, теорема 2). Осложнения, возникающие при переходе от многогранников к общим выпуклым поверхностям [5], для поверхностей типа H не имеют места.

2.6.3. правый поворот $\varphi_1(s)$ открытого участка $A_1M(s)$ кривой l_1 равен

$$\varphi_1(s) = \varphi(s) - \omega(s) \quad (0 < s \leq \sigma); \quad (3)$$

правый поворот $\varphi_2(s)$ открытого участка $M_2(s)A_2$ (дуга s отсчитывается от точки A'_1) кривой l_2 равен

$$\varphi_2(s) = \varphi(\sigma) - \varphi(s+0) - [\omega(\sigma) - \omega(s+0)], \quad (0 < s \leq \sigma). \quad (4)$$

2.7. Из условий 2.6.1 — 2.6.3 следует, что кривые l_1 и l_2 выпуклы в ту же сторону, что и кривая l , и расположены по одну сторону с ней от прямой A_1A_2 . Расстояния $d_1(s)$ и $d_2(s)$ точек $M_1(s) \in l_1$ и $M_2(s) \in l_2$ от прямой A_1A_2 выражаются равенствами

$$d_1(s) = \int_0^s \sin[x_1 - \varphi_1(s)] ds; \quad d_2(s) = \int_s^\sigma \sin[x_2 - \varphi_2(s)] ds. \quad (5)$$

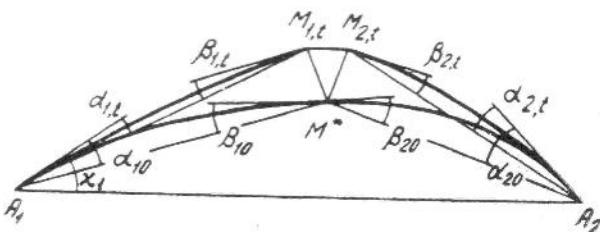


Рис. 1.

Из (3), (4), (5) следует, что

$$\begin{aligned} d_1(0) &= 0, \quad d_1(\sigma) > 0, \\ d_2(0) &> 0, \quad d_2(\sigma) = 0, \end{aligned}$$

поэтому в силу непрерывности функций $d_1(s)$ и $d_2(s)$ существует хотя бы одно такое значение s (обозначим его s^*), что

$$d_1(s^*) = d_2(s^*) \quad (0 < s^* < \sigma).$$

Обозначим точки $M(s^*) \in l$ через M^* , $M_i(s^*) \in l_i$ через M_i^* .

2.8. Построим теперь два семейства кривых $l_{1,t} = A_1M_{1,t}$ и $l_{2,t} = M_{2,t}A_2$ ($t \in [0, 1]$) (рис. 1), удовлетворяющих следующим условиям:

2.8.1. длины кривых $l_{1,t}$ и $l_{2,t}$ равны соответственно s^* и $\sigma - s^*$;

2.8.2. кривые $l_{1,t}$ и $l_{2,t}$ касаются кривой l соответственно в точках A_1 и A_2 ;

2.8.3. правый поворот $\varphi_{1,t}(s)$ открытого участка $A_1M_t(s)$ кривой $l_{1,t}$ ($s \in [0, s^*]$) и отсчитывается от точки A_1 равен

$$\varphi_{1,t}(s) = \varphi(s) - t\omega(s); \quad (6)$$

2.8.4. правый поворот $\varphi_{2,t}(s)$ открытого участка $M_{2,t}M_t(s)$ кривой $l_{2,t}$ ($s \in [0, \sigma - s^*]$) и отсчитывается от точки $M_{2,t}$ равен

$$\varphi_{2,t}(s) = \varphi(s^* + s) - \tau(t)[\omega(s^* + s) - \omega(s^* + 0)], \quad (7)$$

где функция $\tau(t)$ определена так, чтобы при каждом $t \in [0, 1]$ выполнялось равенство расстояний точек $M_{1,t}$ и $M_{2,t}$ от прямой A_1A_2 . Функция $\tau(t)$, как обратная монотонно возрастающей непрерывной функции, однозначна, монотонно возрастает и непрерывна. Отсюда следует, что

семейство кривых $l_{2,t}$, так же как и семейство кривых $l_{1,t}$, непрерывно по параметру t . Так как кривая l_{10} является участком A_1M^* кривой l , а кривая l_{11} является участком $A_1M_1^*$ кривой l_1 , то $\tau(0) = 0$ и $\tau(1) = 1$.

2.9. Обозначим через $\alpha_{i,t}$ и $\beta_{i,t}$ углы между хордой $A_iM_{i,t}$ и полукасательными к кривой $l_{i,t}$ в точках A_i и $M_{i,t}$ ($i = 1, 2$; $t \in [0, 1]$); $M_{10} \equiv M_{20} \equiv M^*$. Ставим следующие равенства:

$$\alpha_{10} + \beta_{10} = (\alpha_{1,t} + \beta_{1,t}) = \tau(s^*). \quad (8)$$

$$\alpha_{20} + \beta_{20} = (\alpha_{2,t} + \beta_{2,t}) = \tau(t) [\omega(\tau) - \omega(s^*) = 0].$$

Из неравенства (1) и равенства (6) при $t > 0$ следует

$$0 \leq \operatorname{tg} \alpha_{1,t} = \frac{\int_0^{s^*} \sin \varphi_{1,t}(s) ds}{\int_0^{s^*} \cos \varphi_{1,t}(s) ds} < \frac{\int_{s^*}^1 \sin \varphi_t(s) ds}{\int_0^{s^*} \cos \varphi_t(s) ds} = \operatorname{tg} z_{10} < \infty,$$

откуда

$$\alpha_{1,t} < z_{10} < \frac{\pi}{2}. \quad (9a)$$

Аналогично получаются неравенства

$$\alpha_{2,t} < z_{20} < \frac{\pi}{2}, \quad (9b)$$

$$\beta_{1,t} < \beta_{10} < \frac{\pi}{2}; \quad \beta_{2,t} < \beta_{20} < \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Так как, согласно (6) и (7), поворот кривой $l_{i,t}$ ($i = 1, 2$) всюду не больше поворота кривой l_{10} и хотя бы на одном участке или в одной точке строго меньше, то, проектируя кривые $l_{1,t}$ и $l_{2,t}$ на стягивающие их хорды, получим неравенство (см. также [6], стр. 73)

$$A_1M_{1,t} > A_1M^*, \quad A_2M_{2,t} > A_2M^*. \quad (11)$$

В силу неравенства (1) выполняется неравенство

$$\angle A_1M^*A_2 \geq \frac{\pi}{2} + z_{10} - z_{20}. \quad (12)$$

Отсюда и из неравенств (10) следует, что нормаль n_1 в точке M^* кривой $l_{1,0}$ пересекает отрезок A_1A_2 . В силу леммы I работы [7] точка $M_{1,t}$ лежит с той же стороны от прямой n_1 , что и точка A_1 , а точка $M_{2,t}$ с той же стороны от n_2 , что и точка A_2 . Так как отрезки $M_{1,t}M_{2,t}$ и A_1A_2 параллельны, то отсюда следует, что четырехугольник $A_1M_{1,t}M_{2,t}A_2$ является выпуклой трапецией, у которой углы при основании A_1A_2 острые. Следовательно, имеют место неравенства

$$A_1M_{2,t} > A_1M_{1,t}; \quad A_2M_{1,t} > A_2M_{2,t}. \quad (13)$$

Из неравенств (11) получаем

$$\angle A_1M^*M_{1,t} > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}z_{10}; \quad \angle A_2M^*M_{2,t} > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}z_{20}.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (12), следует, что точки $M_{1,t}$ и $M_{2,t}$ лежат внутри угла, образованного продолжениями сторон угла $A_1M^*A_2$. Так как четырехугольник $A_1M_{1,t}M_{2,t}A_2$ является выпуклой трапецией, то треугольник $M^*M_{1,t}M_{2,t}$ содержится в пересечении углов $M_{1,t}A_1M^*$ и $M_{2,t}A_2M^*$.

2. 10. Обозначим через M_t точку пересечения окружностей с центрами в точках A_1 и A_2 и радиусами $A_1M_{1,t}$ и $A_2M_{2,t}$, лежащую в верхней полуплоскости по отношению к прямой A_1A_2 . Из неравенств (11) и (13) следует, что точка M_t лежит внутри треугольника $M_{1,t}M^*M_{2,t}$, поэтому имеют место неравенства

$$\angle A_2A_1M_t < \angle A_2A_1M_{1,t}; \quad \angle A_1A_2M_t < \angle A_1A_2M_{2,t} \quad (14)$$

$$\angle M_{1,t}A_1M_t < \alpha_{10} - \alpha_{1,t}; \quad \angle M_{2,t}A_2M_t < \alpha_{20} - \alpha_{2,t}. \quad (15)$$

Если повернуть кривую $l_{1,t}$ вокруг точки A_1 по часовой стрелке на угол $\alpha_{10} - \alpha_{1,t}$, а кривую $l_{2,t}$ вокруг точки A_2 против часовой стрелки на угол $\alpha_{20} - \alpha_{2,t}$, то получим простую незамкнутую кривую l_t , составленную из повернутых кривых $l_{1,t}$ и $l_{2,t}$.

2. 11. Кривая l_t соединяет точки A_1 и A_2 и имеет длину, равную z . Таким образом, условия 2. 2 и 2. 3 для нее выполнены. Согласно 2. 8. 3 и 2. 8. 4 ее правые повороты на открытых участках A_1M_t и M_tA_2 удовлетворяют условиям 2. 4. 1. и 2. 4. 2. Из (14), (9a) и (9b) следует выполнение условия 2. 5. Чтобы проверить выполнение условия 2. 4. 3, вычислим поворот $\varphi_t(M_t)$ кривой l_t в точке $M_t = M_t(s^*)$ соединения повернутых кривых $l_{1,t}$ и $l_{2,t}$. Из 2. 8 и 2. 11 следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_t(M_t) &= \varphi(M^*) + t\omega(s^*) + z(t)[\omega(z) - \omega(s^* + 0)] - \\ &\quad - \angle M_{1,t}A_1M_t - \angle M_{2,t}A_2M_t. \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенств (8) и неравенств (9a), (9b), (10) и (15) получаем неравенство (2).

Так как выполнение условий 2. 4. 1 — 2. 4. 3 обеспечивает выпуклость кривых l_t и непрерывность их семейства по параметру t следует из 2. 8 и 2. 10, то лемма 1 доказана полностью.

2. 12. Лемма 2. Каждая поверхность F типа H наложима на некоторую изометрическую ей поверхность типа H_p .

Доказательство. Согласно 1. 2 граница L обобщенной области Q , дополняющей поверхность F до \bar{F} , состоит из конечного числа кривых, образующих границы областей G_i , и конечного числа дважды покрытых прямых отрезков, соответствующих разрезам. Рассмотрим некоторый участок границы области G_i . В силу выпуклости поверхности F сумма поворотов этого участка и соответствующего ему по отображению Ψ^{-1} участка кривой Γ неотрицательна. Поворот любого участка кривой Γ , не содержащего точек типа B , равен нулю. Если рассматриваемый участок кривой L не содержит точек типа B , то его поворот со стороны области G_i должен быть всюду неотрицателен. Так как число точек типа B конечно, то граница каждой из областей G_i разбивается на конечное число кривых l_{ij} , имеющих со стороны области G_i неотрицательный поворот. Если две такие кривые l_{ij} и l_{ik} являются смежными участками границы области G_i , то в силу неотрицательности их поворотов угол между ними в области G_i должен быть больше нуля.

Не нарушая общности, можно считать, что любая часть кривой l_{ij} имеет со стороны области G_i строго положительный поворот. Из предыдущего следует, что при этом в кривую l_{ij} можно вписать выпуклую ломаную $C_1C_2 \dots C_s$, все точки которой, кроме вершин, лежат строго внутри области G_i .

Сторона C_rC_{r+1} этой ломаной отрезает от области G_i сегмент Z_{ijr} , ограниченный хордой C_rC_{r+1} и участком C_rC_{r+1} выпуклой кривой l_{ij} . Согласно лемме 1 граница сегмента Z_{ijr} допускает непрерывную изо-периметрическую деформацию в треугольник, при которой хорда C_rC_{r+1}

не изменяется, а углы сегмента в точках C_r и C_{r+1} не возрастают. Вместе с сегментом Z_{ijr} деформируется и область G_i и обобщенная область Q . Условия подклевания области Q к поверхности F при деформации не нарушаются, так как углы ее в точках C_r и C_{r+1} не возрастают и повороты со стороны Q деформируемой части кривой l_{ij} остаются неотрицательными. Проделав такую деформацию каждого сегмента деформации Q соответствует изгибание F , то лемма доказана.

3. НАЛОЖИМОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА H_p

3.1. Лемма 3. Пусть ABC произвольный треугольник со сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ и противолежащими им углами α , β , γ . Пусть¹

$$0 < \alpha < \bar{\alpha} < \pi; \quad 0 < \gamma < \bar{\gamma} < \pi. \quad (16)$$

Тогда треугольник ABC допускает непрерывную деформацию в выпуклый четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, у которого

$$A_1B_1 = c, \quad B_1C_1 = a, \quad C_1D_1 + D_1A_1 = b$$

и углы в вершинах A_1 и C_1 равны соответственно $\bar{\alpha}$ и $\bar{\gamma}$.

Доказательство. Пусть некоторая точка D делит сторону AC треугольника ABC на две части $AD = x$ и $DC = b - x$. Построим два треугольника $A'B'D'$ и $B''C''D''$, у которых

$$A'B' = c; \quad A'D' = x; \quad \angle B'A'D' = \bar{\alpha};$$

$$B''C'' = a; \quad C''D'' = b - x; \quad \angle B''C''D'' = \bar{\gamma}.$$

Точку D на стороне AC треугольника ABC выберем теперь так, чтобы

$$B'D' = B''D'',$$

т. е. чтобы

$$c^2 + x^2 - 2cx \cos \bar{\alpha} = a^2 + (b - x)^2 - 2a(b - x) \cos \bar{\gamma}.$$

Отсюда

$$x = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \bar{\gamma} - c^2}{2(b - a \cos \bar{\alpha} - x \cos \bar{\gamma})}.$$

Так как из треугольника ABC следует, что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma; \quad b = a \cos \alpha + c \cos \gamma,$$

то в силу (16)

$$b - a \cos \bar{\alpha} - c \cos \bar{\gamma} > 0; \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos \bar{\gamma} - c^2 > 0$$

и потому указанный выбор точки D возможен.

Будем непрерывно деформировать вырожденный четырехугольник $ABCD$ в выпуклый четырехугольник $A_tB_tC_tD_t$, сохраняя длины его сторон a , c , x и $b - x$ и вытягивая диагональ B_tD_t . При этой деформации углы четырехугольника в точках A_t и C_t возрастают и остаются не больше π . Если при $t = 1$ угол четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ в точке A_1 станет равен α , то согласно выбору точки D угол в точке C_1 станет равен $\bar{\gamma}$.

¹ Не исключено, что треугольник ABC вырождается в дважды покрытый отрезок.

Лемма доказана.

3.2. Лемма 4. Если поверхности F типа H_p соответствует обобщенный многоугольник Q с числом вершин $n \geq 3$, среди которых имеется хотя бы одна пара смежных вершин A_1 и A_2 с углами $\alpha_1 < \pi$ и $\alpha_2 < \pi$, то поверхность F наложима на некоторую поверхность F' типа $H_{p'}$, которой соответствует обобщенный многоугольник Q' с числом вершин $< n$.

Доказательство.

3.3.1. Введем в обобщенном многоугольнике Q внутреннюю метрику ρ_Q , положив расстояние между двумя точками Q равным точной нижней границе длин кривых, лежащих в Q и соединяющих эти точки¹. Такое введение метрики в обобщенном многоугольнике Q возможно, так как он связан и состоит из конечного числа локально изометрических плоскости многоугольников и дважды покрытых отрезков прямых. Более того, из компактности Q следует, что каждые две его точки соединимы кратчайшей, длина которой равна расстоянию в метрике ρ_Q между ними. Так как Q ограничен ломаной L с конечным числом сторон, то кратчайшие в Q являются либо отрезками прямых, либо ломанными с конечным числом сторон. Вершины кратчайшей могут лежать только в вершинах Q , в которых поворот ломаной L со стороны Q отрицателен. Отсюда следует, что если некоторая точка открытой кратчайшей CD , т. е. кратчайшей с исключеными концами, является внутренней точкой некоторой стороны a ломаной L , то либо

$$CD \subseteq a,$$

либо открытая кратчайшая CD содержит хотя бы один из концов стороны a , являющийся вершиной ломаной L .

3.3.2. Так как углы в точках A_1 и A_2 меньше π , то согласно 1.2 точки A_1 и A_2 не могут быть точками соединения двух областей G_i или концами дважды покрытых отрезков.

3.4. Пусть C — некоторая вершина ломаной L , отличная от A_1 и A_2 и ближайшая в метрике ρ_Q к стороне A_1A_2 ломаной L , тогда кратчайшие CA_1 и CA_2 являются отрезками прямых.

3.5. Если расстояние в метрике ρ_Q между точкой C и стороной A_1A_2 равно нулю, то доказываемое утверждение следует из того, что кратчайшие CA_1 и CA_2 являются отрезками стороны A_1A_2 .

3.6. Допустим теперь, что расстояние вершины C от стороны A_1A_2 больше нуля. В силу 3.3.2. сторона A_1A_2 ломаной L является стороной одного из многоугольников G_i , входящих в состав обобщенного многоугольника Q . Пусть C' — точка стороны A_1A_2 , ближайшая к точке C .

Для расположения точки C' на стороне A_1A_2 имеются две возможности:

- 1) точка C' совпадает с одной из точек A_1 и A_2 , например A_1 ;
- 2) точка C' является внутренней точкой стороны A_1A_2 .

Рассмотрим подробно первый случай. Второй рассматривается аналогично.

3.6.1. Так как точка C является ближайшей к стороне A_1A_2 вершиной ломаной L (отличной от A_1 и A_2) и в рассматриваемом случае расстояние точки C от стороны A_1A_2 равно длине кратчайшей CA_1 , то открытая кратчайшая CA_1 не может содержать вершин ломаной L . Отсюда в силу 3.3.1 следует, что либо кратчайшая CA_1 является стороной ломаной L и значит стороной многоугольника G_i , смежной со

¹ Заметим, что в метрике ρ_Q расстояние между точками ломаной L , соответствующими совмещенным в пространстве точкам кривой Γ , равно нулю.

стороной A_1A_2 , либо открытая кратчайшая CA_1 вообще не содержит точек ломаной L и делит многоугольник G_l на два невырожденных многоугольника G'_l и G_l . И в том и в другом случае кратчайшая CA_1 является отрезком прямой.

3.6.2. Пусть U некоторая гомеоморфная замкнутому кругу полуокрестность кратчайшей CA_1 в многоугольнике G_l , расположенная с той же стороны от отрезка CA_1 , что и сторона A_1A_2 многоугольника G_l . Из предыдущего следует, что если U достаточно узка, то в ней нет других точек ломаной L , кроме точек стороны A_1A_2 , кратчайшей CA_1 (если она является стороной L) и одной из примыкающих к вершине C сторон G_l .

Обозначим через s длину отрезка $A_1M(s) \subset A_1A_2$ ($0 < s < \sigma$, где σ — длина стороны A_1A_2). Если s достаточно мало, то открытая кратчайшая $CM(s)$ не содержит точек ломаной L и потому $CM(s)$ является отрезком прямой. Пусть $s_0 < \varepsilon$ — наибольшее такое число, что при всех $s < s_0$ открытая кратчайшая $CM(s)$ не содержит точек ломаной L . Так как при всех $s \in (0, s_0)$ открытые кратчайшие $CM(s)$ не содержат точек ломаной L , то все они — отрезки прямых. При $s \rightarrow s_0 - 0$ кратчайшие $CM(s)$ сходятся к отрезку прямой CM_0 , который в силу компактности Q принадлежит Q и, следовательно, является кратчайшей между C и $M_0 \equiv M(s_0)$. Таким образом, кратчайшая CM_0 — отрезок прямой и доказательство того, что кратчайшая CA_2 — отрезок прямой, сводится теперь к доказательству того, что $s_0 = \varepsilon$.

Допустим, вопреки доказываемому, что $s_0 < \varepsilon$. В силу определения числа s_0 открытая кратчайшая CM_0 содержит некоторую точку ломаной L . Так как точка C не принадлежит стороне A_1A_2 , а точка M_0 , по предположению, является внутренней точкой стороны A_1A_2 , то кратчайшая CM_0 не может быть частью одной из сторон ломаной L . Но так как открытая кратчайшая CM_0 содержит некоторую точку ломаной L , то, согласно 3.3.1, она содержит некоторую вершину E ломаной L . Эта вершина отлична от C и не может совпадать ни с A_1 , ни с A_2 , так как по условию поворота ломаной L в точках A_1 и A_2 положительны.

Рассмотрим треугольник CA_1M_0 . Он целиком лежит внутри или на границе Q . Так как точка A_1 ближайшая к точке C точки стороны A_1A_2 и

$$\rho_Q(C, A_1) = CA_1, \quad (17)$$

$$\rho_Q(C, M_0) = CM_0 \quad (0 < s \leq s_0),$$

то угол в вершине A_1 треугольника CA_1M_0 тупой, а углы его в вершинах C и M_0 острые. Если (рис. 2)

$$\angle EA_1M_0 > \frac{\pi}{2},$$

то

$$\angle CEA_1 > \frac{\pi}{2},$$

как внешний для треугольника EA_1M_0 . Следовательно,

$$CA_1 > EA_1. \quad (18)$$

Но отрезок EA_1 лежит внутри треугольника CA_1M_0 , значит,

$$EA_1 = \rho_Q(E, A_1). \quad (19)$$

Из соотношений (17), (18) и (19) следует неравенство

$$\rho_Q(C, A_1) > \rho_Q(E, A_1).$$

которое противоречит тому, что точка C ближайшая к стороне A_1A_2 вершина Q .

Если же (рис. 3) $\angle EA_1M_0 < \frac{\pi}{2}$.

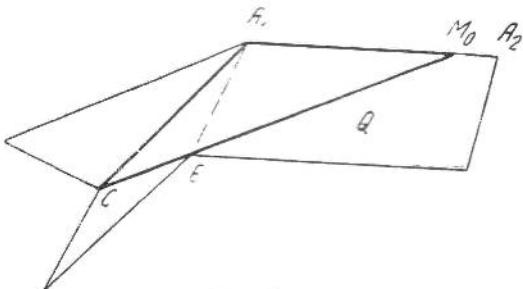


Рис. 2.

то оба угла треугольника EA_1M_0 при стороне A_1M_0 острые, и потому высота EE^* , опущенная из вершины E на сторону A_1M_0 , проходит внутри него. Так как треугольник EA_1M_0 является частью треугольника CA_1M_0 , то отсюда следует, что

$$\rho_Q(E, E^*) = EE^*. \quad (20)$$

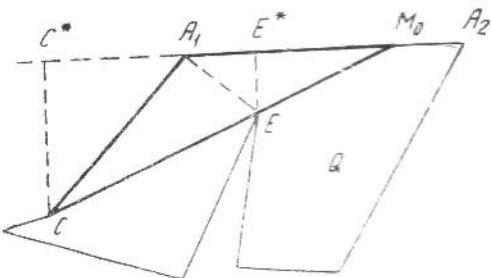


Рис. 3.

Точка E расположена на прямой CM_0 между точками C и M_0 . Поэтому длина перпендикуляра CC^* , опущенного из точки C на прямую A_1M_0 , больше длины отрезка EE^* . Отсюда в силу неравенства

$$CA_1 > CC^*$$

и равенств (17) и (20) следует неравенство

$$\rho_Q(C, A_1) > \rho_Q(E, E^*),$$

которое противоречит тому, что точка C ближайшая к стороне A_1A_2 вершина Q .

Итак, $s_0 = \sigma$ и кратчайшая CA_2 — отрезок прямой. Отсюда, а также из 3.5, 3.6 и 3.1 следует, что всегда кратчайшие CA_1 и CA_2 — отрезки прямых и, таким образом, утверждение 3.4 доказано полностью.

3.7. Кратчайшие CA_1 и CA_2 разбивают обобщенный многоугольник Q на три части: обобщенные многоугольники Q_1 и Q_2 , примыкающие соответственно к кратчайшим CA_1 и CA_2 , и треугольник CA_1A_2 .

быть может, вырождающийся в дважды покрытый отрезок с концами в точках A_1 и A_2 . Углы α'_1 и α'_2 треугольника CA_1A_2 в вершинах A_1 и A_2 удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \alpha'_1 \leq \alpha_1, \quad 0 \leq \alpha'_2 \leq \alpha_2.$$

Согласно лемме 3 треугольник CA_1A_2 допускает непрерывную изопараметрическую деформацию в выпуклый четырехугольник $C_1A_{11}A_{21}D_1$, углы которого в точках A_{11} и A_{21} равны

$$\alpha_1 + \pi = \alpha'_1 \text{ и } \alpha'_2 + \pi = \alpha_2.$$

Деформации треугольника CA_1A_2 в четырехугольник $C_1A_{11}A_{21}D_1$ соответствует деформация сбобщенного многоугольника Q в обобщенный многоугольник Q' , при которой его части Q_1 и Q_2 , оставаясь конгруэнтными сами себе, поворачиваются вместе со сторонами CA_1 и CA_2 треугольника CA_1A_2 . При этой деформации углы обобщенного многоугольника Q изменяются только в точках C , A_1 , A_2 и D . Углы в точках A_1 и A_2 монотонно возрастают, становясь у Q' равными π , а в точках C и D убывают. Следовательно, при этой деформации Q условия под克莱ивания к поверхности F сохраняются. Поэтому деформации сбобщенного многоугольника Q в Q' соответствует изгибание поверхности F в поверхность F' . Так как углы обобщенного многоугольника Q' в точках A_1 и A_2 равны π , то лемма доказана.

3.8. Следствие из леммы 4. Пусть поверхность F типа H_p удовлетворяет условиям леммы 4. Тогда поверхность F наложима на некоторую выпуклую поверхность F' , соответствующий которой обобщенный многоугольник Q' имеет $\pi < \alpha_i < 2\pi$ в вершинах и либо есть дважды покрытый прямой отрезок, либо среди его вершин нет двух смежных, в которых углы меньше π .

3.9. **Лемма 5.** Пусть $\varphi^+(L)$ и $\varphi^-(L)$ — положительная и отрицательная части поворота ([8], стр. 10) ломаной L со стороны обобщенного многоугольника Q , соответствующего поверхности F типа H_p . Тогда

$$\varphi^+(L) \leq 4\pi, \quad \varphi^-(L) \leq 2\pi.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(L)$ — полный поворот ломаной L . Тогда

$$\varphi^+(L) - \varphi^-(L) = \varphi(L) = 2\pi.$$

Сумма полного поворота ломаной L в кривой Γ равна площади сферического изображения кривой Γ на поверхности \bar{F} и потому не превосходит 4π . Повороты ломаной L и кривой Γ сосредоточены в конечном числе точек и в каждой точке сумма их неотрицательна. Отсюда следует, что

$$\varphi^+(L) \leq 4\pi, \quad \varphi^-(L) \leq 2\pi.$$

Лемма доказана.

3.10. Пусть F — выпуклая поверхность типа H_p и пусть положительная часть поворота ломаной L — границы сбобщенного многоугольника Q сосредоточена в вершинах A_1, A_2, \dots, A_k , которые будем называть вершинами типа A . Пусть вершины A_1, A_2, \dots, A_k разбивают ломаную L на части $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_kA_1$, имеющие внутренние вершины, и в каждой из них строго отрицательные повороты. Ломаные $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_kA_1$ будем называть ломанными типа N . Заметим, что если поворот некоторой ломаной типа N равен¹ π (здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, поворот ломаной типа N берется

по абсолютной величине), то он не может быть сосредоточен в одной точке. В связи с этим каждая ломаная A_iA_{i+1} типа N , поворот которой $\leq \pi$ совместно с отрезком прямой A_iA_{i+1} , соединяющим ее концы, образует невырожденный выпуклый многоугольник, который будем обозначать T_i (рис. 4). Углы многоугольника T_i в вершинах A_i и A_{i+1} обозначим через θ'_i и θ''_{i+1} . Заметим, что поворот ломаной A_iA_{i+1} равен при этом $\theta'_i + \theta''_{i+1}$. Углы обобщенного многоугольника Q в вершинах A_i обозначим через α_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

3. 11. Лемма 6. Пусть поворот некоторой ломаной A_iA_{i+1} типа N

не больше $\frac{\pi}{2}$ и выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\alpha_i + 2\theta'_i \leq \pi; \quad \alpha_{i+1} + 2\theta''_{i+1} \leq \pi. \quad (21)$$

Тогда, если выполненное неравенство строгое, поверхность F наложима на некоторую поверхность F' типа H_p , соответствующий которой обобщенный многоугольник Q' имеет хотя бы две смежные вершины с углами $< \pi$, и общее число вершин многоугольника Q' не больше общего числа вершин многоугольника Q . Если же выполнено равенство (21), то поверхность F наложима на поверхность F' типа H_p , соответствующий которой многоугольник Q' имеет хотя бы на одну вершину меньше, чем многоугольник Q .

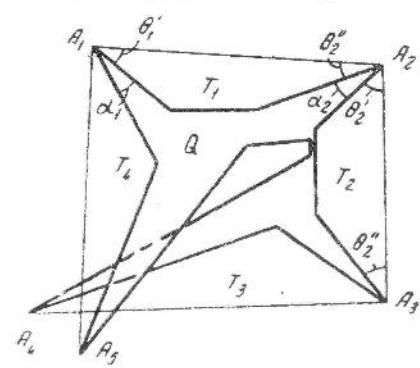


Рис. 4.

многоугольник Q' имеет хотя бы на одну вершину меньше, чем многоугольник Q .

Доказательство. Пусть, например, поворот ломаной A_1A_2 не больше $\frac{\pi}{2}$ и

$$\alpha_1 + 2\theta'_1 \leq \pi. \quad (22)$$

Возьмем границу \bar{F} выпуклой оболочки поверхности F и проведем на \bar{F} разрез по участку A_1A_2 кривой Γ . Поверхность \bar{F} с разрезом по участку A_1A_2 допускает изгибание [9], которое осуществляется следующим образом. Разрез по участку A_1A_2 кривой Γ разворачивается вдважды покрытый участок A_1A_2 ломаной L . Пусть X_t — некоторая точка ломаной $A_1A_2 \subset L$. Обозначим через A_1X_t ломаную симметричную с участком A_1X_t ломаной A_1A_2 относительно прямой A_1A_2 и через $A_2X'_t$ ломаную, полученную из участка A_2X_t ломаной A_1A_2 поворотом вокруг точки A_2 на угол $X_tA_2X'_t$. Так как поворот ломаной A_1A_2 не больше $\frac{\pi}{2}$, то замкнутая ломаная \tilde{L}_t , составленная из ломаных A_1A_2 , A_1X_t и $A_2X'_t$, не имеет кратных точек и ограничивает многоугольник \tilde{Q}_t . Угол многоугольника \tilde{Q}_t в точке X_t меньше π . Углы в точках открытого участка A_1X_t не больше π , в точках открытого участка $A_2X'_t$ такие же, как и в соответствующих точках участка $A_2X_t \subset A_1A_2$. Угол в точке A_1 равен $2\theta'_1$ и, следовательно, не превосходит кривизны поверхности \bar{F} в точке A_1 . Если точка X_t достаточно близка к точке A_1 , то угол в точке A_2 меньше кривизны поверхности F в точке A_2 . Таким

образом, условия подклевивания многоугольника \tilde{Q}_t к поверхности \bar{F} с разрезом по A_1A_2 выполнены. Непрерывному движению точки X_t по ломаной A_1A_2 от точки A_1 к точке A_2 соответствует непрерывная деформация многоугольника \tilde{Q}_t , которую будем продолжать до тех пор, пока либо угол многоугольника \tilde{Q}_t в точке A_2 не станет равен $\pi - \alpha_2$, либо точка X_t не совместится с точкой A_2 . Значение параметра t , соответствующее окончанию деформации, обозначим t_1 . Деформации многоугольника \tilde{Q}_t соответствует изгибание поверхности \bar{F} с разрезом по A_1A_2 и, следовательно, поверхности F . В результате изгибаания поверхности \bar{F} получим некоторую поверхность F' , которой соответствует обобщенный многоугольник Q' , склеенный из многоугольников Q и \tilde{Q}_{t_1} .

Число вершин многоугольника Q' не больше числа вершин многоугольника Q . Действительно, у многоугольника Q' может появиться только одна новая по сравнению с многоугольником Q вершина в точке X'_{t_1} . Но если у Q' появляется вершина в точке X'_{t_1} , то у него исчезает вершина в точке A_2 .

Если было выполнено строгое неравенство (22), то в вершине A_1 многоугольника Q' угол меньше π и на участке A_1A_2 границы Q' имеется вершина с углом меньше π , смежная с вершиной A_1 .

Если выполнено равенство (22), то в точке A_1 угол многоугольника Q' равен π . Следовательно, число вершин многоугольника Q' в этом случае хотя бы на единицу меньше числа вершин многоугольника Q .

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть поворот некоторой ломаной A_iA_{i+1} типа N не большие π и выполнены следующие неравенства:

$$\alpha_i + 2\theta'_i \leq \pi, \quad \alpha_{i+1} + 2\theta''_{i+1} \leq \pi. \quad (23)$$

Тогда, если хотя бы одно неравенство (23) строгое, то поверхность F наложима на некоторую поверхность F^1 типа H_p , соответствующий которой обобщенный многоугольник Q' имеет хотя бы две смежные вершины с углами $<\pi$, и общее число вершин многоугольника Q' не больше общего числа вершин многоугольника Q . Если же выполняются оба равенства (23), то поверхность F наложима на некоторую поверхность F' типа H_p , соответствующий которой многоугольник Q' имеет на две вершины меньше, чем многоугольник Q .

Доказательство. Пусть, например, поворот ломаной A_1A_2 не больше π и

$$\alpha_1 + 2\theta'_1 \leq \pi, \quad \alpha_2 + 2\theta'_2 \leq \pi. \quad (24)$$

Возьмем границу \bar{F} выпуклой оболочки поверхности F и проведем на \bar{F} разрез по участку A_1A_2 кривой F . Этот разрез развернем в участок A_1A_2 (дважды покрытый) ломаной L . Пусть X_t и Y_t — две точки ломаной A_1A_2 , разбивающие ее на три части A_1X_t , X_tY_t , Y_tA_2 , не имеющие общих точек, кроме концов. И пусть расстояния точек X_t и Y_t от прямой A_1A_2 равны между собой. Обозначим через A_1X_t' и A_2Y_t' ломанные симметричные с ломаными A_1X_t и A_2Y_t относительно прямой A_1A_2 и через X_tY_t' ломаную, полученную из участка X_tY_t ломаной A_1A_2 параллельным переносом его на вектор X_tX_t' .

Так как углы θ_1 и θ_2 меньше $\frac{\pi}{2}$ и поворот участка A_1M ломаной A_1A_2 монотонно не убывает при движении точки M от A_1 к A_2 , то ломаная A_1A_2 однозначно проектируется на прямую A_1A_2 . Отсюда следует что замкнутая ломаная, составленная из ломаных $A_1X'_t$, $X'_tY'_t$, Y'_tA_2 и A_1A_2 , не имеет точек самопересечения и потому ограничивает некоторый многоугольник \tilde{Q}_t . Углы многоугольника \tilde{Q}_t в точках X'_t и Y'_t меньше π . Углы его в точках A_1 и A_2 равны соответственно $2\theta_1$ и $2\theta_2$ и не превосходят кривизны вершин A_1 и A_2 поверхности \bar{F} . Углы в точках открытых участков $A_1X'_t$ и Y'_tA_2 не больше π , а в точках открытого участка $X'_tY'_t$ такие же, как и в соответствующих точках открытого участка X_tY_t . Таким образом, условия подклевания многоугольника \tilde{Q}_t к поверхности \bar{F} с разрезом по A_1A_2 выполнены. Непрерывному движению точек X_t и Y_t по ломаной A_1A_2 от точек A_1 и A_2 навстречу одна другой, при котором их расстояния от прямой A_1A_2 остаются равными между собой, соответствует непрерывная деформация многоугольника \tilde{Q}_t , которую будем продолжать до совмещения точек X_t и Y_t . Значение параметра t , соответствующее окончанию деформации, обозначим t_1 . Деформации многоугольника \tilde{Q}_t соответствует изгибание поверхности \bar{F} с разрезом по A_1A_2 и, следовательно, поверхности F . В результате изгибания поверхности F получим некоторую поверхность F' , которой соответствует обобщенный многоугольник Q' , склеенный из многоугольников Q и Q'_t .

Число вершин многоугольника Q' не больше числа вершин многоугольника Q , так как у него не появляется ни одной новой вершины.

Если, например, первое неравенство (24) строгое, то в вершине A_1 многоугольника Q' угол $<\pi$. Так как во всех точках открытого участка A_1A_2 границы многоугольника Q' углы $\ll\pi$ и хотя бы в одной точке $<\pi$, то многоугольник Q' имеет пару смежных вершин с углами $<\pi$.

Если имеют место оба равенства (24), то углы многоугольника Q' в точках A_1 и A_2 равны π . Общее число вершин многоугольника Q' в этом случае оказывается на 2 меньше, чем число вершин многоугольника Q .

Лемма доказана.

3.12. Лемма 8. Пусть F — поверхность типа H_p и Q — соответствующий ей обобщенный многоугольник. Пусть положительная часть поворота ломаной L сосредоточена в вершинах A_1, A_2, \dots, A_k типа A , разбивающих ее на ломаные $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_kA_1$ типа N . Тогда среди ломаных A_iA_{i+1} найдется хотя бы одна, которая удовлетворяет условиям леммы 6 или 7.

3.12.1. Доказательство. Согласно лемме 5 сумма поворотов всех ломаных $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_kA_1$ не превосходит 2π . Поэтому среди них не может быть более трех, имеющих поворот $>\frac{\pi}{2}$. Если же среди ломаных типа N имеется одна, имеющая поворот $>\pi$, то общее число ломаных типа N с поворотом $>\frac{\pi}{2}$ в этом случае не больше двух. При этом поворот второй такой ломаной $<\pi$.

Вдоль каждой ломаной A_iA_{i+1} типа N , имеющей поворот $\ll\pi$, под克莱м к обобщенному многоугольнику Q выпуклый многоугольник T_t . Полученный при этом многоугольник обозначим Q^* . Положительная

часть поворота границы многоугольника Q^* сосредоточена в некоторых вершинах типа A ломаной L . Пусть это будут вершины $A_{l_1}, A_{l_2}, \dots, A_{l_l}$. Так как многоугольник Q^* имеет внутренние точки и вершинами его выпуклой оболочки могут быть только некоторые из вершин $A_{l_1}, A_{l_2}, \dots, A_{l_l}$, то $l \geq 3$.

3. 12. 2. Если некоторая вершина A_{l_s} ($s = 1, 2, \dots, l$) многоугольника Q^* является общим концом двух ломаных типа N , каждая из которых имеет поворот $\leq \frac{\pi}{2}$, то хотя бы одна из этих ломаных удовлетворяет условиям леммы 6.

Действительно, так как повороты обеих ломаных $\leq \frac{\pi}{2}$, то остается проверить, выполнено ли неравенство (21) хотя бы для одной из них в вершине A_{l_s} . Угол многоугольника Q^* в вершине A_{l_s} равен

$$\alpha_{l_s} + \beta'_{l_s} + \gamma'_{l_s}.$$

Так как поворот границы многоугольника Q^* в этой точке положителен, то

$$\alpha_{l_s} + \beta'_{l_s} + \gamma'_{l_s} < \pi.$$

откуда

$$\alpha_{l_s} + 2 \min(\beta'_{l_s}, \gamma'_{l_s}) < \pi.$$

Выполнение неравенства (21) хотя бы для одной из ломаных типа N , имеющих точку A_{l_s} своим концом, доказано.

3. 12. 3. Из 3. 12. 2 следует справедливость утверждения доказываемой леммы в случае, когда число l точек A_{l_s} больше установленного числа ломаных типа N , имеющих поворот $> \frac{\pi}{2}$. В частности, так как $l \geq 3$, лемма справедлива, если среди ломаных типа N не более чем одна имеет поворот $> \frac{\pi}{2}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что не менее двух ломаных типа N имеют поворот $> \frac{\pi}{2}$.

3. 12. 4. Допустим, что поворот одной из ломаных типа N , например, ломаной A_1A_2 , больше π . Тогда, согласно 3. 12. 1 и 3. 12. 3, остается рассмотреть случай, когда имеется еще одна ломаная типа N с поворотом $> \frac{\pi}{2}$.

В силу 3. 12. 1 поворот со стороны многоугольника Q^* участка A_1A_2 его границы отрицателен и по абсолютной величине $> \pi$. Так как полный поворот границы многоугольника Q^* равен 2π , то положительная часть поворота границы Q^* больше 3π . Поворот границы многоугольника Q^* во всех точках A_{l_s} меньше π . Отсюда следует, что в рассматриваемом случае число l вершин A_{l_s} многоугольника Q^* не меньше четырех. Так как в рассматриваемом случае только две ломаные типа N имеют поворот $> \frac{\pi}{2}$, то согласно 3. 12. 3 и 3. 12. 2 можно считать, что $l = 4$, ломаные типа N с поворотом $> \frac{\pi}{2}$ не имеют общих концов и концами их являются точки A_{l_s} ($s = 1, 2, 3, 4$).

Пусть для определенности $A_{i_1} \equiv A_1$ и $A_{i_2} \equiv A_2$, т. е. поворот ломаной $A_{i_1}A_{i_2}$ типа N больше π , поворот же ломаной $A_{i_3}A_{i_4}$ типа N больше $\frac{\pi}{2}$, но меньше π . Рассмотрим ломаные $A_{i_1-1}A_{i_1}$ и $A_{i_4}A_{i_4+1}$ типа N . Повороты их меньше $\frac{\pi}{2}$, поэтому, если выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\alpha_{i_3} + 2\theta'_{i_3} < \pi, \quad \alpha_{i_4} + 2\theta'_{i_4} < \pi, \quad (25)$$

соответствующая ломаная (та, для которой выполнено неравенство) удовлетворяет условиям леммы 6.

Если же оба неравенства (25) не выполнены, то в силу неравенств

$$\alpha_{i_3} + \theta'_{i_3} + \theta''_{i_3} < \pi \text{ и } \alpha_{i_4} + \theta'_{i_4} + \theta''_{i_4} < \pi$$

получим

$$\alpha_{i_3} + 2\theta'_{i_3} < \pi \text{ и } \alpha_{i_4} + 2\theta'_{i_4} < \pi.$$

Отсюда следует, что ломаная $A_{i_3}A_{i_4}$ удовлетворяет условиям леммы 7.

3.12.5. Рассмотрим теперь случай, когда ломаных типа N , имеющих поворот $> \frac{\pi}{2}$, не меньше двух и среди них нет ни одной с поворотом $> \pi$.

Допустим сначала, что число l точек A_{i_s} равно трем. Тогда выпуклая оболочка многоугольника Q^* есть треугольник $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$. В каждой его вершине A_{i_s} выполняется неравенство

$$\alpha_{i_s} + \theta'_{i_s} + \theta''_{i_s} < \theta_{i_s}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (26)$$

где θ_{i_s} — угол треугольника $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ в вершине A_{i_s} . Пусть для определенности

$$\theta_{i_1} < \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{i_2} < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда из (26) следует:

$$\alpha_{i_1} + 2\theta'_{i_1} < \pi; \quad \alpha_{i_2} + 2\theta'_{i_2} < \pi, \quad (27)$$

$$\alpha_{i_3} + 2\theta'_{i_3} < \pi; \quad \alpha_{i_2} + 2\theta'_{i_2} < \pi. \quad (28)$$

Если на ломаной $A_{i_1}A_{i_3}$, соединяющей точки A_{i_1} и A_{i_3} , нет точек типа A , т. е. если она есть ломаная типа N , то в силу неравенств (27) она удовлетворяет условиям леммы 7. Если же на ломаной $A_{i_1}A_{i_3}$ есть хотя бы одна точка типа A , то точки A_{i_1} и A_{i_3} являются концами четырех ломаных $A_{i_1-1}A_{i_1}$, $A_{i_1}A_{i_1+1}$, $A_{i_2-1}A_{i_2}$, $A_{i_2}A_{i_2+1}$ типа N . Хотя бы одна из них имеет поворот меньше $\frac{\pi}{2}$. В силу одного из неравенств (27) или (28) эта ломаная удовлетворяет условиям леммы 6.

Допустим теперь, что число l точек A_{i_s} больше трех. Если среди ломаных типа N , имеющих поворот больше $\frac{\pi}{2}$, нет ни одной, оба конца которой есть некоторые из вершин A_{i_s} ($s = 1, 2, \dots, l$), то среди вершин $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_l}$ заведомо найдется хотя бы одна, являющаяся общим концом двух ломаных типа N , имеющих поворот меньше $\frac{\pi}{2}$. Согласно 3.12.2 остается рассмотреть случай, когда оба конца некоторой ломаной

типа N , имеющей поворот больше $\frac{\pi}{2}$, есть некоторые из точек A_{ls} ($s = 1, 2, \dots, l$). Пусть, например, такой ломаной будет $A_{l_1}A_{l_2}\dots A_{l_s}A_{l_1}$.

Если выполнены оба неравенства

$$\beta_{l_1} < \beta'_{l_1}, \quad \beta'_{l_1} < \theta'_{l_1}, \quad (29)$$

то

$$\alpha_{l_1} + 2\beta'_{l_1} < \pi, \quad \alpha_{l_1} + 2\theta'_{l_1} < \pi$$

и ломаная $A_{l_1}A_{l_2}\dots A_{l_s}A_{l_1}$ удовлетворяет условиям леммы 7.

Если же выполнено хотя бы одно неравенство, противоположное (29), например,

$$\beta'_{l_1} > \theta'_{l_1},$$

и поворот ломаной $A_{l_1}A_{l_2}\dots A_{l_s}A_{l_1}$ типа N не превосходит $\frac{\pi}{2}$, то ломаная $A_{l_1}A_{l_2}\dots A_{l_s}A_{l_1+1}$ удовлетворяет условиям леммы 6. Поэтому в дальнейшем будем считать, что поворот ломаной $A_{l_1}A_{l_2}\dots A_{l_s}A_{l_1+1}$ больше $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим два возможных случая:

- 1) точка A_{l_1+1} есть одна из точек A_4, \dots, A_l , например, $A_{l_1+1} \equiv A_l$;
- 2) точка A_{l_1+1} не есть одна из точек A_4, \dots, A_l .

В первом случае либо ломаная $A_4A_{l_1}$ удовлетворяет условиям леммы 7, либо ломаная $A_{l_1}A_{l_1+1}$ типа N удовлетворяет условиям леммы 6, либо поворот ломаной $A_{l_1}A_{l_1+1}$ больше $\frac{\pi}{2}$. Если имеет место последнее, то, согласно 3.12.2, можно считать, что $l = 4$ и $A_{l_1+1} \equiv A_4$. Но тогда либо ломаная $A_4A_{l_1}$ удовлетворяет условиям леммы 7, либо ломаная $A_4A_{l_1+1}$ удовлетворяет условиям леммы 6.

Во втором случае, согласно 3.12.2, можно сразу считать, что $l = 4$ и ломаная $A_{l_1}A_{l_1}$ есть ломаная типа N , имеющая поворот $> \frac{\pi}{2}$. Примыкающие к ней ломаные $A_{l_1-1}A_{l_1}$ и $A_{l_1}A_{l_1+1}$ имеют поворот меньше $\frac{\pi}{2}$, поэтому (аналогично 3.12.4) либо ломаная $A_{l_1}A_{l_1}$ удовлетворяет условиям леммы 7, либо хотя бы одна из ломаных $A_{l_1-1}A_{l_1}$ и $A_{l_1}A_{l_1+1}$ удовлетворяет условиям леммы 6.

Лемма 8 доказана полностью.

3.13. Следствие из лемм 6, 7, 8. Пусть F — поверхность типа H_p и Q — соответствующий ей обобщенный многоугольник; число вершин Q равно p и среди них нет ни одной пары смежных с углами меньше π . Тогда поверхность F наложена на некоторую поверхность F' типа H_p , соответствующий которой обобщенный многоугольник Q' имеет не больше чем p вершин и среди них есть хотя бы одна пара смежных с углами меньше π .

3.14. Из 3.8 и 3.13 следует, что каждая поверхность F типа H_p наложена на некоторую поверхность F' типа H_p , соответствующий которой обобщенный многоугольник Q' есть дважды покрытый прямой отрезок.

3.15. Лемма 9. Если поверхности F_0 и F_1 типа H_p изометричны и соответствующие им обобщенные многоугольники Q_0 и Q_1 есть дважды покрытые прямые отрезки то F_0 наложена на F_1 .

Доказательство леммы 9 аналогично доказательству теоремы 1 работы [10].

Из З. 14 и леммы 9 следует, что любые две изометричные поверхности типа H_p наложимы. Так как согласно лемме 2 каждая поверхность типа H наложима на некоторую поверхность типа H_p , то теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Р. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. «Наука», М., 1969.
2. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.-Л., 1948.
3. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Киев, 1952.
4. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
5. Л. А. Шор. О деформациях тривидального под克莱ивания. Укр. геометр. сб., вып. 3, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
6. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия, ОНТИ, М.-Л., 1935.
7. Л. А. Шор. Об изгибаemости выпуклых поверхностей с краем. Укр. геометр. сб., вып. 5—6, Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.
8. А. Д. Александров, В. А. Залгаллер. Двумерные многообразия ограниченной кризисны. Тр. МИАН СССР, т. XIII, 1962.
9. Л. А. Шор. Об изгиbании выпуклых многогранников с разрезом. УМЖ, т. 16, № 4, 1964.
10. Л. А. Шор. Об одном классе изгибаний выпуклых поверхностей с разрезом. Укр. геометр. сб., вып. 4, Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

Поступила 1 декабря 1969 г.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Линейчатые поверхности Петерсона. Бланк Я. П. Загайный Н. А. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 3—11.

Дается полное решение проблемы об отыскании всех линейчатых поверхностей Петерсона. Доказывается, что неразвертывающаяся линейчатая поверхность Петерсона, не являющаяся квадрикой, принадлежит линейной конгруэнции и несет двупараметрическое множество сетей Петерсона. Кривые, порождающие эти сети, расположены на квадриках пучка и в общем случае являются трансцендентными. Получены конечные уравнения поверхностей и сетей Петерсона на них.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513

О сферическом изображении кратчайшей на выпуклой поверхности. Борисенко А. А. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1970, стр. 11—12.

Показано, что сферическое изображение кратчайшей на выпуклых поверхностях может быть сколь угодно большим.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513

Вопрос о сферическом изображении кратчайшей. Залгаллер В. А. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 12—19.

Обсуждаются возможные особенности сферического изображения L^* кратчайшей L на выпуклой поверхности. Строится пример кратчайшей (на выпуклом многограннике), для которой L^* — произвольно длинная кривая и пример кратчайшей (на общей выпуклой поверхности), L^* — неспрямляемая вблизи одного конца кривая. Высказывается предположение, что кратчайшая не может проходить через ребристую точку на выпуклой поверхности в направлении ребра в этой точке, кроме случаев, когда вся кратчайшая есть участок прямолинейного ребра.

Рисунков 6. Библиографических ссылок 3.

УДК 513

О вмещении одной фигуры в другую. Залгаллер В. А. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 19—20.

Высказывается предположение, что каждую выпуклую фигуру F можно вместить в фигуру, полученную из F растяжением с произвольным направлением коэффициентом, большим единицы. Предположение доказывается для центрально-симметричных F .

УКД 513

Многогранники с прямыми склонениями из правильных многоугольников. Иванов В. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 10, 1971, стр. 30—34.

В монографии В. А. Залгаллера «Выпуклые многогранники с правильными гранями» найдены все выпуклые многогранники, грани которых являются правильные многоугольники, но два не лежащие в одной плоскости, т. е. не имеющие общих ребер.

В данной работе условные ребра допускаются. Найдены все такие многогранники, не распадающиеся на выпуклые многогранники с правильными гранями.

Доказательства изложены в виде дополнений к соответствующим доказательствам в монографии В. А. Залгаллера. Приведены исправления замеченных в этой монографии опечаток и дополнительный список литературы по многогранникам с правильными гранями.

Рисунков 32. Библиографических ссылок 1.

УДК 513

О плоскостях симметрии алгебраических поверхностей пространства E^3 . Ігнатенко В. Ф., Лейбин А. С. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 34—40.

Указываются все возможные значения конечного числа плоскостей ортогональной симметрии алгебраической поверхности F_n трехмерного евклидова пространства E^3 и приводится общее уравнение F_n для каждой конечной группы симметрии E^3 .

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

О лемме Буземана и Феллера в сферическом и гиперболическом пространствах. Милка А. Д. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 40—49.

Устанавливается аналог леммы Буземана и Феллера в сферическом и гиперболическом пространствах. Даются некоторые приложения, в частности — к исследованию внешние геометрических свойств квазигеодезических линий на выпуклых гиперповерхностях-многогранниках.

Рисунков 2. Библиографических ссылок 9.

УДК 513

Об изопериметрии многоугольников на сфере. Милка А. Д. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 49—50.

Приводится новое доказательство изопериметрического свойства выпуклого многоугольника на сфере, вписанного в окружность.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513.71

О сопряженных направлениях на неголономном многообразии V_n^{n-1} в P_n . Роговой М. Р. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 50—65.

Изучаются бисопряженные и инволютивно сопряженные многомерные направления на неголономном многообразии V_n^{n-1} в P_n .

Доказана теорема: инвариантные p -направления неголономного многообразия V_n^{n-1} и только эти направления совпадают с соответствующими им бисопряженными p -направлениями.

Рассматриваются общий, скобый и вырожденный случаи инволютивной сопряженности направлений на V_n^{n-1} .

Показано, что на V_n^{n-1} существуют полные инволютивные сопряженные системы.

Библиографических ссылок 8.

УДК 513

Некоторые свойства вполне геодезических гиперповерхностей финслерова пространства. Слободян Ю. С. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 65—71.

В работе доказано, что индуцированная и внутренняя связности Картана совпадают только на вполне геодезических поверхностях. Исследован вопрос о параллельном переносе нормали вдоль вполне геодезической поверхности. Доказано, что если через каждую точку и в каждом $(n-1)$ -мерном направлении проходит вполне геодезическая поверхность, то такое пространство проективно минковское.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513

Об одном классе комплексов эллиптического пространства. Солейман М. А. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 71—80.

Статья посвящена свойствам комплексов в эллиптическом пространстве с привлечением к рассмотрению второй дифференциальной окрестности луча. Рассмотрены комплексы, у которых центры являются инфлексионными центрами. Это выделяет линейчатое многообразие, свойства которого сформулированы в ряде теорем. В одном частном случае дано безынтегральное представление рассматриваемых комплексов.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513

Гомоморфизмы аффинной связности и геодезические распределения. Шапиро Я. Л., Яброва А. Г. Украинский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 80—87.

Если для каждой точки (p) дифференцируемого многообразия (x^n), содержащего ω -мерное инволютивное распределение (Q), найдется такая включающая p адаптированная к Q координатная пара (v , ξ), что различным сечениям (s), являющимся интегральными многообразиями Q , соответствуют различные же максимальные интегральные многообразия Q , их (т. е. s) содержащие, то распределение Q назовем суперинволютивным.

Доказана следующая

Теорема. Необходимым и достаточным условием того, что пространство аффинной связности без кручения (L_n) допускает (регулярный) гомоморфизм на $L_{n-\omega}$ ($0 < \omega < n$), является существование на L_n суперинволютивного распределения, для любого локального базиса (A^a) которого имеют место условия

$$1) AB, {}_{ba}^{ba} = B_{b\beta}^a A^{b\alpha},$$

$$2) R_{(12)}^a A^{ab} = F_{\theta \beta}^a,$$

где $B_{\theta \beta}^a$, $F_{\theta \beta}^a$ ($= F_{\theta \beta \beta}^a$) — некоторые величины.

Условия 1) и 2) характеризуют упомянутое распределение как геодезическое (специального вида).

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

О возможных выпуклых поверхности с краем, имеющим неотрицательный поворот. М. Г. А. Неструевский геометрический сборник, вып. 10, 1971, стр. 17—115.

Говорят, что выпуклая поверхность F , называемая за выпуклую поверхность F_1 , если она допускает изогнутое вовнутрь F_1 , в классе всех выпуклых поверхностей. Основным результатом работы является следующий тезис: отображение открытому краю выпуклая поверхность, повернут края которого вследу изогнутости и сосредоточен в конечном числе точек, близкими к ним любыми ее подогнута.

Доказательство тезиса проводится методом индукции.

Рисунок 4. Библиографический список ...

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Я. П. Бланк, Н. А. Загайный. Линейчатые поверхности Петерсона	3
А. А. Борисенко. О сферическом изображении кратчайшей на выпуклой поверхности	11
В. А. Залгаллер. Вопрос о сферическом изображении кратчайшей	12
В. А. Залгаллер. О вмещении одной фигуры в другую	19
А. А. Иванов. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников	20
В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях симметрии алгебраических поверхностей пространства E^3	34
А. Д. Милка. О лемме Буземана и Феллера в сферическом и гиперболическом пространствах	40
А. Д. Милка. Об изопериметрии многоугольников на сфере	49
М. Р. Роговой. О сопряженных направлениях на неголономном многообразии V_n^{n-1} в P_n	50
Ю. С. Слободян. Некоторые свойства вполне геодезических гиперповерхностей финслерова пространства	65
М. А. Солейман. Об одном классе комплексов эллиптического пространства	71
Я. Л. Шапиро, А. Г. Яброва. Гомоморфизмы аффинной связности и геодезические распределения	80
Л. А. Шор. О наложимых выпуклых поверхностях с краем, имеющим неотрицательный поворот	87
Рефераты	105

Редактор А. П. Гужва
Техредактор Л. Е. Макроусова
Корректор Т. А. Жигальцова

Сдано в набор 3/XI 1970 г. Подписано к печати 29/VII 1971 г. БЦ 50282.
Формат 70×108¹/₁₆. Объем: 6,75 физ. л., 9,1 усл. печ. л., 9 уч.-изд. л.
Зак. 0-2013. Тираж 660. Цена 90 коп. Св. ТП 1971 г. поз. 343.

Типооффсетная фабрика «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров УССР
Харьков, ул. Энгельса, 11.