Украинский геометрический сборник

1

выпуск

издательство харьковского университета

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск I

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1965

513
Г36

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ

В 1-й выпуск сборника входит 14 статей. Из них четыре посвящены геометрии в целом (регулярности, жесткости, единственности, зависимости формы от метрики), две — поверхности переноса в квазиэллиптическом пространстве, по одной статье — теории комплексов, теории дифференцируемых многообразий, геометрии пар поверхностей, интегральной геометрии, аксиоматике геометрических построений. Три статьи посвящены теории плоских кривых на евклидовой и неевклидовой плоскости.

2—2—3
46—65

Адрес редколлегии:

Харьков — 77, Харьковский государственный университет мех.-мат. Редколлегия украинского геометрического сборника.

ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КВАЗИПЕРЕНОСА И ИХ СВЯЗЬ С КИНЕМАТИКОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Я. П. Бланк (Харьков), ***Е. А. Косачевская*** (Донецк)

Следуя В. Бляшке, мы будем называть пространство с абсолютом, распадающимся на пару комплексно сопряженных плоскостей, квазиэллиптическим. Поверхностью квазипереноса называется поверхность квазиэллиптического пространства, допускающая каноническое представление

$$x = a(u)\, b(v), \tag{1}$$

где x, a, b — бикватернионы вида

$$A_0e_0 + A_1e_1 + \varepsilon(A_2e_2 + A_3e_3), \quad \varepsilon^2 = 0;$$

A_i — вещественные числа.

В работе [1] Бляшке поставил проблему отыскания поверхностей, которые могут быть двумя или большим числом способов представлены в виде (1) и показал, что этому соответствует в кинематике на плоскости отыскание движений с двумя степенями свободы, которые двумя различными способами представимы как произведения двух движений с одной степенью свободы.

В работе Я. П. Бланка и Л. Т. Моторного [2] вводится понятие квазисопряженной сети кривых на поверхности квазиэллиптического пространства и доказывается, что для того чтобы сеть кривых была сетью квазипереноса, необходимо и достаточно, чтобы она была чебышевской (в обобщенном смысле) и квазисопряженной. В этой же работе найдены все поверхности вращения, являющиеся одновременно поверхностями квазипереноса, и определены соответствующие им движения с двумя степенями свободы евклидовой плоскости.

§ 1. Вывод уравнений винтовой поверхности

Уравнения винтовой поверхности квазиэллиптического пространства можно найти, рассматривая преобразование

$$x = Ax'B, \tag{2}$$

при котором инвариантна ось $(x_0, x_1, 0, 0)$. Здесь x, x', A и B — бикватернионы;

$$x = x_0e_0 + x_1e_1 + \varepsilon(x_2e_2 + x_3e_3);$$
$$x' = x'_0e_0 + x'_1e_1 + \varepsilon(x'_2e_2 + x'_3e_3);$$
$$A = A_0e_0 + A_1e_1 + \varepsilon(A_2e_2 + A_3e_3);$$
$$B = B_0e_0 + B_1e_1 + \varepsilon(B_2e_2 + B_3e_3);$$
$$e_0 = 1,\ e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1,\ e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3;$$
$$e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1,\ e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2;$$
$$\varepsilon^2 = 0.$$

Условия нормировки бикватернионов

$$A_0^2 + A_1^2 = 1,\ B_0^2 + B_1^2 = 1,\ x_0^2 + x_1^2 = 1,\ x_0'^2 + x_1'^2 = 1. \tag{3}$$

Выписывая согласно (2) выражения для x_2 и x_3 и полагая в них $x_2 = x_3 = x_2' = x_3' = 0$, получим два линейных однородных уравнения относительно x_0' и x_1'. В силу произвольности x_0' и x_1' коэффициенты при них должны обращаться в нуль. Таким образом, мы получаем систему четырех уравнений

$$\begin{gathered}A_0B_2 - A_1B_3 + A_2B_0 + A_3B_1 = 0;\\ A_0B_3 + A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_0 = 0;\\ A_0B_3 + A_1B_2 + A_2B_1 - A_3B_0 = 0;\\ A_0B_2 - A_1B_3 - A_2B_0 - A_3B_1 = 0.\end{gathered}$$

Эта система с учетом (3) имеет только одно решение

$$A_2 = A_3 = B_2 = B_3 = 0. \tag{4}$$

Преобразование (2) при этом принимает вид

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0' \cos(\theta + \delta) - x_1' \sin(\theta + \delta);\\ x_1 &= x_0' \sin(\theta + \delta) + x_1' \cos(\theta + \delta);\\ x_2 &= x_2' \sin(\theta - \delta) + x_3' \cos(\theta - \delta);\\ x_3 &= -x_2' \cos(\theta - \delta) + x_3' \sin(\theta - \delta).\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены обозначения

$$A_0 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right),\ A_1 = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right),\ B_0 = \cos\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right),\ B_1 = \sin\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right).$$

Из (5) следует, что наше преобразование представляет собой совокупность вращений вокруг двух осей. При этом $(\theta + \delta)$ — угол поворота при первом вращении, а $(\theta - \delta)$ — при втором. Связывая эти углы линейной зависимостью

$$\theta - \delta = \frac{1}{\alpha}(\theta + \delta) = v, \quad \alpha = \text{const},$$

получим формулы винтообразного движения:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0' \cos\alpha v - x_1' \sin\alpha v;\\ x_1 &= x_0' \sin\alpha v + x_1' \cos\alpha v;\\ x_2 &= x_2' \sin v + x_3' \cos v;\\ x_3 &= -x_2' \cos v + x_3' \sin v.\end{aligned} \tag{5'}$$

Выбирая кривую в плоскости $x_2' = 0$

$$x_0' = \cos u,\ x_1' = \sin u,\ x_3' = p(u) \tag{6}$$

и подвергнув ее преобразованию (5′), получаем уравнения винтовой поверхности квазиэллиптического пространства:

$$\begin{aligned}x_0 &= \cos(u + \alpha v);\\ x_1 &= \sin(u + \alpha v);\\ x_2 &= p(u)\cos v;\\ x_3 &= p(u)\sin v.\end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности равны

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = 1;$$
$$g_{12} = \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial x} = \alpha; \qquad (8)$$
$$g_{22} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = \alpha^2.$$

§ 2. Винтовые поверхности квазипереноса

Сеть квазипереноса должна быть чебышевской и квазисопряженной [2], т. е. имеют место уравнения

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^2} + G^k_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^1}\frac{\partial u^j}{\partial v^2} = 0, \quad (k,\ i,\ j = 1,\ 2), \qquad (9)$$

и условие квазисопряженности

$$b_{11} + (b_{12} + \varepsilon_{12})\varphi + (b_{12} - \varepsilon_{12})\psi + b_{22}\varphi\psi = 0;$$
$$\varphi = \frac{dv}{du},\ \psi = \frac{\delta v}{\delta u}. \qquad (10)$$

Здесь $u^1 = u$, $u^2 = v$, b_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, ε_{ij} — тензор, определяемый следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \left(X,\ x,\ \frac{\partial x}{\partial u^i},\ \frac{\partial x}{\partial u^k}\right), \qquad (11)$$

где $X(0,\ 0,\ \xi_2,\ \xi_3)$ — полюс касательной плоскости относительно абсолюта [3]; $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ — координаты касательной плоскости, пронормированные так, что

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 = 1. \qquad (12)$$

Координаты ξ_i находим из уравнений

$$\sum_{i=0}^{3} x_i\xi_i = 0,\ \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial u}\xi_i = 0,\ \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial v}\xi_i = 0,$$

которые с учетом (7) и (12) дают

$$\xi_0 = \frac{1}{g}[-pp'\sin(u+\alpha v) + p^2\cos(u+\alpha v)];$$
$$\xi_1 = \frac{1}{g}[pp'\cos(u+\alpha v) + p^2\sin(u+\alpha v)]; \qquad (13)$$
$$\xi_2 = \frac{1}{g}(\alpha p'\sin v - p\cos v);$$
$$\xi_3 = -\frac{1}{g}(\alpha p'\cos v + p\sin v), \quad g = \sqrt{p^2 + \alpha^2 p'^2}.$$

Согласно (10) и (13) имеем

$$\varepsilon_{12}^2 = g^2. \qquad (14)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности определяются формулами

$$b_{ij} = \sum_{k=0}^{3}\frac{\partial^2 x_k}{\partial u^i \partial u^j}\xi_k,$$

откуда

$$b_{11}=-\frac{1}{g}p(p+p''),\ b_{12}=-\frac{\alpha}{g}(p^2+p'^2),\ b_{22}=\frac{1-\alpha^2}{g}p^2. \qquad (15)$$

Если отнести поверхность к тетраэдру

$$x,\ \frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ X,$$

деривационные формулы запишутся в виде [3]

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}=G^k_{ij}\frac{\partial x}{\partial u^k}-g_{ij}x+b_{ij}X.$$

Из этих формул находим коэффициенты G^k_{ij};

$$\begin{gathered}G^1_{11}=\frac{\alpha^2}{g^2}p'(p+p''),\ G^1_{12}=-\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{g^2}pp',\ G^1_{12}=\alpha G^1_{12}:\\ G^2_{11}=-\frac{1}{\alpha}G^1_{11},\ G^2_{12}=-\frac{1}{\alpha}G^1_{12},\ G^2_{22}=-\frac{1}{\alpha}G^1_{22}.\end{gathered} \qquad (16)$$

Подставляя (14) — (16) в уравнения (9) и (10), приводим их к виду

$$\begin{gathered}\varphi_u+\psi\varphi_v+\frac{p'(\alpha\varphi+1)}{p}[(1+\alpha)\varphi+(1-\alpha)\psi]=0;\\ \psi_u+\varphi\psi_v+\frac{p'(\alpha\psi+1)}{p}[(1+\alpha)\varphi+(1-\alpha)\psi]=0;\\ p(p+p'')+(1+\alpha)(p^2+\alpha p'^2)\varphi-(1-\alpha)(p^2-\alpha p'^2)\psi-(1-\alpha^2)p^2\varphi\psi=0.\end{gathered} \qquad (17)$$

Из последнего уравнения этой системы следует

$$\frac{K}{(1+\alpha)\varphi-F+1}=(1-\alpha)\psi-F-1=\sigma;$$

$$K=\frac{p''}{p}+F^2,\ F=\alpha\left(\frac{p'}{p}\right)^2,$$

откуда

$$\varphi=\frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{K}{\sigma}+F-1\right),\ \psi=\frac{1}{1-\alpha}(\sigma+F+1). \qquad (18)$$

Подстановка (18) в первые два уравнения (17) дает

$$\begin{gathered}K\sigma_u+\frac{1}{1-\alpha}K(\sigma+F+1)\sigma_v=K'\sigma+F'\sigma^2+\\ +\frac{p'}{p}[\alpha K+(\alpha F+1)\sigma](K+2F\sigma+\sigma^2);\\ \sigma\sigma_u+\frac{1}{1+\alpha}[K+(F-1)\sigma]\sigma_v=-F'\sigma-\frac{p'}{p}(\alpha F+1+\alpha\sigma)(K+2F\sigma+\sigma^2).\end{gathered} \qquad (19)$$

Из (19) имеем

$$\begin{gathered}\Delta\sigma_v=-K'\sigma^2-\frac{p'}{p}[K^2(\alpha F+1)+4\alpha K^2\sigma+\\ +2K(3\alpha F+1)\sigma^2+4\alpha K\sigma^3+(\alpha F+1)\sigma^4],\\ (1-\alpha^2)\Delta\sigma_u=(1-\alpha)K'[K+(F-1)\sigma]\sigma+\\ +\frac{p'}{p}\{K^2[\alpha(1-\alpha)K+(1+\alpha)(\alpha F+1)(F+1)]+\\ +2K^2(1+\alpha+2\alpha^2+4\alpha F)\sigma+2K[3\alpha K+(3\alpha F+1)(F+\alpha)]\sigma^2+\\ +2K(1-\alpha+2\alpha^2+4\alpha F)\sigma^3+[\alpha(1+\alpha)K+(1-\alpha)(\alpha F+1)(F-1)]\sigma^4\};\\ \Delta=\frac{1}{1-\alpha^2}K[(1-\alpha)K-2(1+\alpha F)\sigma-(1+\alpha)\sigma^2]=K(\varphi-\psi)\sigma.\end{gathered} \qquad (20)$$

Условие совместности системы (20) после довольно громоздких вычислений приводится к виду

$$\Delta (Z_0\sigma^4 + Z_1\sigma^3 + Z_2\sigma^2 + KZ_1\sigma + K^2Z_0) = 0; \tag{21}$$

$$Z_0 = \frac{p'}{p}[K'(\alpha F + 1) - \alpha KF'] + 2K\left(\frac{p'}{p}\right)^2\left(3\alpha F + 1 - 2\alpha^2\frac{p''}{p}\right) - K\left(\frac{p'}{p}\right)'(\alpha F + 1);$$

$$Z_1 = 2\alpha K\left[4K\left(\frac{p'}{p}\right)^2 - 2K\left(\frac{p'}{p}\right)' - K'\frac{p'}{p}\right];$$

$$Z_2 = K'^2 - K'' - 2\alpha\frac{p'}{p}K'F - 2K^2\left[3\alpha\frac{p'}{p}KF' - 2\left(\frac{p'}{p}\right)^2\left(\alpha F + 1 + 2\alpha^2\frac{p''}{p}\right) + \left(\frac{p'}{p}\right)'(3\alpha F + 1)\right].$$

Если (21) не является тождеством, оно определяет σ как функцию только одной переменной u, а следовательно, в силу (18), φ и ψ также будут зависеть только от u.

Условие совместности (21) обращается в тождество при

$$Z_0 = 0,\ Z_1 = 0,\ Z_2 = 0. \tag{22}$$

Покажем, что эта система уравнений при $\alpha \neq 0$ противоречива.

Обозначим $\frac{p'}{p}$ через ζ, тогда

$$K = \zeta' + \zeta^2 + \alpha^2\zeta^4,\ F = \alpha\zeta^2. \tag{23}$$

Из второго уравнения (22):

$$\zeta K' = 4K\zeta^2 - 2K\zeta'. \tag{24}$$

Исключая производные K' и ζ' из первого и третьего уравнений (22) с помощью (23) и (24), получаем два алгебраических уравнения на одну функцию $K(\zeta)$ соответственно первой и второй степени:

$$\begin{gathered}(1 + 3\alpha^2\zeta^2)K = 3\zeta^2(1 + \alpha^2\zeta^2)^2;\\ K^2 - \zeta^2(1 - \alpha^2\zeta^2)K - 2\zeta^4(1 + \alpha^2\zeta^2)^2 = 0.\end{gathered} \tag{25}$$

Очевидно, эти уравнения совместны лишь при $\zeta = 0$ и $K = 0$, что невозможно.

Таким образом, уравнение (21) в тождество не обращается, а следовательно,

$$\varphi_v = \psi_v = 0. \tag{26}$$

Первые два уравнения (17) при условии (26) имеют следующее решение:

$$\varphi = \frac{Dp^2 + C_1}{p^2 - \alpha C_1},\ \psi = \frac{-(1+\alpha)Dp^2 + (1-\alpha)C_1}{(1-\alpha)(p^2 - \alpha C)}. \tag{27}$$

Подставляя значения φ и ψ в третье уравнение (17), получаем

$$\begin{gathered}P(p) + \omega\alpha|\beta|Q(p) = 2\omega|\beta|(u + C_3)\\ \omega^2 = 1,\quad \beta = 1 + (1+\alpha)D.\end{gathered} \tag{28}$$

Здесь

$$P(p) = \arcsin \frac{2\beta^2 p^2 - C_2}{\sqrt{C_2^2 - 4C_1^2\beta^2}};$$

$$Q(p) = \arcsin \frac{2C_1^2 - C_2 p^2}{p^2\sqrt{C_2^2 - 4C_1^2\beta^2}}.$$

D, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Интегрируя (27), находим сеть квазипереноса:

$$v^1 = v - \omega\frac{1-\alpha}{2k}P(p) + \frac{\omega}{2}Q(p); \tag{29}$$

$$v^2 = v + \omega\frac{1+\alpha}{2k}P(p) + \frac{\omega}{2}Q(p), \quad k = \frac{(1-\alpha)|\beta|}{D}.$$

Из (28) и (29) имеем

$$\begin{gathered} p^2 = \frac{1}{2\beta^2}[C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4C_1^2\beta^2}\sin k(v^2 - v^1)]; \\ v = \frac{1-\alpha}{2}v^2 + \frac{1+\alpha}{2}v^1 - \frac{\omega}{2}Q(p); \\ u + \alpha v = \frac{1-\alpha}{2D}(1+\alpha D)v^2 - \frac{1}{2D}[1 - \alpha - \alpha(1+\alpha)D]v^1 - C_3. \end{gathered} \tag{30}$$

Введем новые параметры квазипереноса:

$$\xi = \frac{\alpha - 1 + \alpha(1+\alpha)D}{2D}v^1 - C_3;$$

$$\eta = \frac{1-\alpha}{2D}(1+\alpha D)v^2.$$

Подставляя (30) в (7), убеждаемся, что винтовая поверхность допускает каноническое представление в виде произведения бикватернионов:

$$x = M(\xi)N(\eta); \tag{31}$$

$$M(\xi) = \cos\xi e_0 + \sin\xi e_1 + \varepsilon a[\sin(m\xi + \mu)e_2 + \cos(m\xi + \mu)e_3];$$

$$N(\eta) = \cos\eta e_0 + \sin\eta e_1 + \varepsilon b[\cos(n\eta + C_3)e_2 + \sin(n\eta + C_3)e_3];$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2 + 2\beta C_1}{\beta^2}}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2 - 2\beta C_1}{\beta^2}};$$

$$m = \frac{(1-\alpha)(1+\alpha D) + 2D}{1 - \alpha - \alpha(1+\alpha)D}, \quad \mu = C_3 m, \quad n = \frac{1 + \alpha D + 2D}{1 + \alpha D}.$$

Как видно из (28), в уравнение поверхности постоянная C_1 входит только в квадрате. Поэтому изменение знака C_1 не изменяет поверхности, но существенно изменяет сеть квазипереноса (постоянные a и b при этом меняются местами). Это значит, что поверхность несет две сети квазипереноса (соответствующие $+C_1$ и $-C_1$), которые сливаются в одну при $C_1 = 0$.

Еще две сети получим, заменив β на $-\beta$ $\left(\text{при этом } D \text{ заменится на } -D - \frac{2}{1+\alpha}\right)$. Следовательно, поверхность несет четыре сети квазипереноса.

В формулах (28) — (31) предполагается, что постоянная β не равна нулю, то есть $D \neq -\frac{1}{1+\alpha}$.

Для случая $D = -\frac{1}{1+\alpha}$ получаем:

$$\frac{1}{C_2}\sqrt{C_2 p^2 - C_1^2} + \alpha \arcsin\frac{C_1}{\sqrt{C_2}p} = \omega(u + C_3); \quad (28')$$
$$\omega^2 = 1.$$

Уравнения сети квазипереноса принимают вид

$$\begin{aligned} v^1 &= v + \frac{1}{(1+\alpha)C_2}\sqrt{C_2 p^2 - C_1^2} + \arcsin\frac{C_1}{\sqrt{C_2}p}; \\ v^2 &= v - \frac{1}{(1-\alpha)C_2}\sqrt{C_2 p^2 - C_1^2} + \arcsin\frac{C_1}{\sqrt{C_2}p}. \end{aligned} \quad (29')$$

Из (28′) и (29′) находим формулы обратного преобразования:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{C_1^2}{C_2} + \frac{(1-\alpha^2)^2 C_2}{4}(v' - v^2)^2; \\ v &= \frac{1+\alpha}{2}v^1 + \frac{1-\alpha}{2}v^2 - \arcsin\frac{C_1}{\sqrt{C_2}p}; \\ u + \alpha v &= \frac{1+\alpha}{2}v^1 - \frac{1-\alpha}{2}v^2 - C_3. \end{aligned} \quad (30')$$

Введем новые параметры квазипереноса:

$$\xi = \frac{1+\alpha}{2}v^1 - C_3, \quad \eta = -\frac{1-\alpha}{2}v^2.$$

Подставляя (30′) в (7), записываем винтовую поверхность в виде произведения бикватернионов:

$$x = M(\xi)N(\eta); \quad (31')$$
$$M(\xi) = \cos\xi\cdot e_0 + \sin\xi\cdot e_1 + \varepsilon\{[(1-\alpha)C_2(\xi + C_3)\cos(\xi + C_3) +$$
$$+ C_1\cos C_3\sin\xi]\,e_2 + [(1-\alpha)C_2(\xi + C_3)\sin(\xi + C_3) - C_1\cos C_3\cos\xi]\,e_3\}$$
$$N(\eta) = \cos\eta\cdot e_0 + \sin\eta\cdot e_1 + \varepsilon\{[-(1+\alpha)C_2\eta\cos(\eta + C_3) +$$
$$+ C_1\sin C_3\cos\eta]\,e_2 + [-(1+\alpha)C_2\eta\sin(\eta + C_3) + C_1\sin C_3\sin\eta]\,e_3\}.$$

Винтовая поверхность в этом случае несет две различные сети квазипереноса, соответствующие $+C_1$ и $-C_1$.

§ 3. Кинематическое отображение винтовых поверхностей квазипереноса

В силу кинематического отображения Бляшке — Грюнвальда поверхности квазипереноса соответствует движение с двумя степенями свободы евклидовой плоскости, представимое в виде произведения двух движений с одной степенью свободы. Поскольку винтовые поверхности квазипереноса несут, вообще говоря, четыре сети квазипереноса, такое представление можно осуществить четырьмя способами. Аналитически однопараметрическое движение, соответствующее бикватерниону M и переводящее поле точек e в поле точек r евклидовой плоскости, записывается в виде [2]:

$$r = Me\overline{M}; \quad (32)$$
$$e = e_1 + \varepsilon(xe_2 + ye_3), \quad r = e_1 + \varepsilon(x'e_2 + y'e_3),$$

$\overline{M}$ — бикватернион, сопряженный M:

$$M\overline{M} = \overline{M}M = 1.$$

Подставляя в (32) значения бикватерниона M, получаем

$$\begin{aligned} x' &= x\cos 2\xi - y\sin 2\xi + 2a\cos[(m-1)\xi + \mu]; \\ y' &= x\sin 2\xi + y\cos 2\xi - 2a\sin[(m-1)\xi + \mu]. \end{aligned} \tag{33}$$

Это движение можно осуществить путем качения подвижной центроиды по неподвижной. Неподвижная центроида представляет собой окружность радиуса $|a(m-1)|$:

$$\begin{aligned} x &= a(m-1)\cos[(m+1)\xi + \mu]; \\ y &= -a(m-1)\sin[(m+1)\xi + \mu]. \end{aligned}$$

Подвижная центроида является окружностью радиуса $|a(m+1)|$:

$$\begin{aligned} x' &= a(m+1)\cos[(m-1)\xi + \mu]; \\ y' &= -a(m+1)\sin[(m-1)\xi + \mu]. \end{aligned}$$

Движение, соответствующее бикватерниону N, имеет вид

$$\begin{aligned} x' &= x\cos 2\eta - y\sin 2\eta + 2b\sin[(n+1)\eta + C_3]; \\ y' &= x\sin 2\eta + y\cos 2\eta - 2b\cos[(n+1)\eta + C_3]. \end{aligned} \tag{34}$$

Неподвижной центроидой для него служит окружность радиуса $|b(n+1)|$:

$$\begin{aligned} x &= -b(n+1)\sin[(n-1)\eta + C_3], \\ y &= b(n+1)\cos[(n-1)\eta + C_3]; \end{aligned}$$

а подвижной центроидой — окружность радиуса $|b(n-1)|$:

$$\begin{aligned} x' &= -b(n-1)\sin[(n+1)\eta + C_3], \\ y' &= -b(n-1)\cos[(n+1)\eta + C_3]. \end{aligned}$$

Соответствующие результаты для второго способа расслоения двухпараметрического движения на два однопараметрических получим, меняя местами a и b.

Результаты для третьего способа расслоения получим, заменив постоянную D на $-\frac{(1+\alpha)D+2}{1+\alpha}$ и учитывая, что при этом

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2 - 2\beta C_1}{\beta^2}}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2 + 2\beta C_1}{\beta^2}};$$

$$m = -\frac{[\alpha(1-\alpha)+2][2+(1+\alpha)D]}{(1+\alpha)^2(1+\alpha D)}, \quad n = -\frac{3+\alpha+(1+\alpha)(2+\alpha)D}{1-\alpha-\alpha(1+\alpha)D}.$$

И, наконец, меняя местами последние значения a и b, получаем результаты для четвертого способа.

Для поверхности (31′) движение, соответствующее бикватерниону M, имеет вид

$$\begin{aligned} x' &= x\cos 2\xi - y\sin 2\xi + 2[(1-\alpha)C_2(\xi + C_3)\sin(2\xi + C_3) - C_1\cos C_3\cos 2\xi], \\ y' &= x\sin 2\xi + y\cos 2\xi - 2[(1-\alpha)C_2(\xi + C_3)\cos(2\xi + C_3) + C_1\cos C_3\sin 2\xi]. \end{aligned} \tag{33'}$$

Неподвижная центроида представляет собой прямую:

$$\begin{aligned} x &= (1-\alpha)C_2(\cos C_3 - 2C_3\sin C_3) + 2[C_1\cos C_3 - \xi(1-\alpha)C_2\sin C_3]; \\ y &= (1-\alpha)C_2(\sin C_3 + 2C_3\cos C_3 + 2\xi\cos C_3). \end{aligned}$$

Подвижная центроида — окружность радиуса $|(1-\alpha) C_2|$:

$$x' = (1-\alpha) C_2 \cos(2\xi + C_3);$$
$$y' = (1-\alpha) C_2 \sin(2\xi + C_3).$$

Бикватерниону N соответствует движение:

$$x' = x\cos 2\eta + y\sin 2\eta - 2(1+\alpha) C_2 \eta \sin C_3; \quad (34')$$
$$y' = -x\sin 2\eta + y\cos 2\eta + 2[(1+\alpha) C_2 \eta \cos C_3 - C_1 \sin C_3].$$

Неподвижная центроида — окружность радиуса $|(1+\alpha) C_2|$:

$$x = (1+\alpha) C_2 \cos(2\eta + C_3);$$
$$y = (1+\alpha) C_2 \sin(2\eta + C_3),$$

а подвижная центроида — прямая:

$$x' = (1+\alpha) C_2 (\cos C_3 - 2\eta \sin C_3);$$
$$y' = [(1+\alpha) C_2 - 2C_1] \sin C_3 + 2(1+\alpha) C_2 \eta \cos C_3.$$

Изменив знак C_1, получим соответствующие результаты для второго способа представления винтовой поверхности в виде произведения бикватернионов для случая $\beta = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Blaschke. Ebene Kinematik. Leipzig — Berlin, 1930.
2. Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный. К проблеме В. Бляшке о поверхностях квазипереноса и их связи с кинематикой на плоскости. Вестник Харьковск. ун-та, № 3, серия мех.-мат., т. 31. Изд-во ХГУ, 1964.
3. А. Э. Хатипов. Теория поверхностей в пространстве с распадающимся абсолютом. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. X. Изд-во МГУ, 1956, 285—308.

Поступила 29 июня 1964 г.

О ЦИССОИДАЛЯХ ДВУХ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

В. Н. Боровик (Чернигов)

Изложенные в работе [1] свойства циссоидального преобразования и некоторые общие свойства циссоидальных кривых были установлены нами чисто геометрическим путем. В данной статье показано, как некоторые из этих свойств можно получить с помощью метода координат, а также рассмотрены в этом плане некоторые частные случаи циссоидалей двух конических сечений.

1. Об аналитическом представлении циссоидального преобразования

Пусть начало прямоугольной декартовой системы координат совпадает с полюсом преобразования, а точки пересечения прямой, проходящей через полюс, с образующими $K' = F(x'; y') = 0$ и $K'' = \Phi(x''; y'') = 0$ и их циссоидалью K будут соответственно $M'(x'; y')$, $M''(x''; y'')$ и $M(x, y)$. Легко убедиться, что между координатами соответственных точек кривых K', K'' и K в циссоидальном преобразовании существует следующая зависимость:

$$\begin{aligned} x' &= \tau; \\ y' &= \frac{y}{x}\tau, \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} x'' &= x + \tau; \\ y'' &= \frac{x+\tau}{x} y, \end{aligned} \tag{1}$$

где τ — параметр.

Если образующие кривые K' и K'' порядков n' и n'' обе проходят через полюс и имеют в нем соответственно p-кратную и q-кратную точки, то их уравнения можно записать так:

$$\sum_{i+j=p}^{i+j=n'} a_{ij} x'^i y'^j = 0, \quad \text{где} \quad \begin{cases} i = 0, 1, 2, \ldots, n' \\ j = 0, 1, 2, \ldots, n' \end{cases}$$

$$\sum_{i+j=q}^{i+j=n''} b_{ij} x''^i y''^j = 0, \quad \text{где} \quad \begin{cases} i = 0, 1, 2, \ldots, n'' \\ j = 0, 1, 2, \ldots, n''. \end{cases}$$

Подставив в эти уравнения вместо x', y' и x'', y'' их выражения по формулам (1), получим «параметрические» уравнения циссоидали K:

$$\left[\sum_{i+j=p}^{i+j=n'} a_{ij} \tau^{n'-p} \left(\frac{y}{x}\right)^j\right] \tau^p = 0, \quad \text{где} \quad \begin{cases} i = 0, 1, 2, \ldots, n' \\ j = 0, 1, 2, \ldots, n' \end{cases}$$

$$\left[\sum_{i+j=q}^{i+j=n''} b_{ij} (x+\tau)^{n''-q} \left(\frac{y}{x}\right)^j\right] (x+\tau)^q = 0, \quad \text{где} \quad \begin{cases} i = 0, 1, 2, \ldots, n' \\ j = 0, 1, 2, \ldots, n''. \end{cases}$$

Отвлекаясь от множителей τ^p и $(x+\tau)^q$, будем иметь кривые порядков $n' - p$ и $n'' - q$, которые дают на полюсной прямой $(n' - p)(n'' - q)$

точек циссоидали K, отличных от полюса. Если к этому числу прибавим еще порядок кратности полюса — число $d = n'n'' - pq - s$ (здесь s — число общих несобственных точек кривых K' и K''), то получим формулу для определения порядка циссоидали K:

$$n = 2n'n'' - (pn'' + qn' + s). \tag{2}$$

Она полностью совпадает с формулой (7) работы [1], полученной там чисто геометрически.

Аналогично можно подтвердить аналитически и другие свойства циссоидальных кривых, приведенные в работе [1].

2. Циссоидали 6-го порядка

Циссоидалью двух конических сечений в самом общем случае является кривая 8-го порядка с четырехкратной точкой в полюсе [1]. Но в том случае, когда полюс принадлежит одной из образующих кривых, циссоидаль K_8 приводима. Существенной компонентой ее служит кривая 6-го порядка, т. е. справедлива

Теорема 1. Циссоидалью двух конических сечений, одной из которых принадлежит полюс преобразования, является кривая 6-го порядка с четырехкратной точкой в полюсе.

Для доказательства возьмем два образующих конических сечения

$$K_2' = f_2' + 2f_1' + f_0' = 0 \quad \text{и} \quad K_2'' = f_2'' + 2f_1'' = 0,$$

где f_i' и f_i'' $(i = 0, 1, 2)$ — однородные формы i-й степени относительно x и y. Используя формулы (1), получим уравнение циссоидали кривой K_2' относительно K_2'' и полюса в таком виде:

$$f_2'f_2''^2 + 4f_2'f_2''f_1'' - 2f_1'f_2''^2 + 4f_2'f_1''^2 - 4f_1'f_2''f_1'' + f_0'f_2''^2 = 0, \tag{3}$$

откуда и следует справедливость теоремы 1. В уравнении (3) однородные формы f_i' и f_i'' расположены не симметрично. Это означает, что кривые K_2' и K_2'' не равноправны в образовании циссоидали K_6. Кривую K_2', образом которой является K_6, назовем прообразом кривой K_6 или базисной кривой, а K_2'', проходящую через полюс, назовем осью преобразования или осевой кривой. Легко убедиться, что циссоидальное преобразование в случае, когда полюс лежит на одном из конических сечений, является бирациональным преобразованием 3-го порядка, и, следовательно, циссоидаль K_6 — бирационально эквивалентна кривой 2-го порядка. Поэтому справедлива

Теорема 2. Циссоидаль 6-го порядка двух конических сечений есть уникурсальная кривая.

Согласно теоремам 1 и 2 неприводимая кривая K_6 должна иметь еще четыре двойных точки. Нетрудно показать, что имеет место

Теорема 3. Циссоидаль (K_6) двух конических сечений не может иметь конечных кратных точек, отличных от 4-кратной точки в полюсе. Остается предположить, что четыре двойные точки циссоидали K_6 будут бесконечно удаленными действительными или мнимыми. Согласно свойствам циссоидального преобразования, кривая K_6 может иметь бесконечно удаленные точки только в тех направлениях, что и их образующие кривые. Если осевая кривая проходит через полюс, то прямые, проходящие через полюс параллельно асимптотам базиса, будут пересекать осевую кривую не более, чем в одной точке, отличной от полюса, а с базисом они будут касаться в бесконечно удаленной точке или иметь одну конечную, а другую бесконечно удаленную общие точки. Следовательно, двойных точек в направлениях, параллельных асимптотам базиса, быть не может. Отсюда следует, что действительные двойные точки на бесконечности K_6 имеет только тогда, когда осевой кривой выбрана гипербола или парабола.

Все циссоидальные кривые K_6 разбиты на девять типов в зависимости от выбора образующих (два эллипса, эллипс и гипербола, эллипс и парабола и т. д.), а в каждом типе выделены классы и подклассы кривых соответственно по числу действительных ветвей, проходящих через четырехкратную точку, и по особенностям двойных бесконечно удаленных точек. Вычерчены все 427 существенно различных циссоидалей K_6 двух конических сечений по типам, классам и подклассам. Заметим, что из формул (2) следует, что циссоидаль двух конических сечений K_2' и K_2'' может иметь порядок ниже 6-го, когда образующие имеют общие бесконечно удаленные точки.

3. Циссоидали 4-го порядка

Теорема 4. Циссоидалью двух конических сечений, проходящих через полюс преобразования, является кривая 4-го порядка с тройной точкой в полюсе.

Справедливость теоремы следует из того, что, подвергнув циссоидальному преобразованию (1) образующие $K_2' = f_2' + 2f_1'$ и $K_2'' = f_2'' + 2f_1''$, получим уравнение

$$f_2' f_2'' + f_2' f_1'' - f_1' f_2'' = 0, \tag{4}$$

определяющее кривую 4-го порядка K_4 с тройной точкой в полюсе.

Справедливо и обратное предположение: всякую кривую 4-го порядка с тройной точкой можно представить как циссоидаль определенным образом выбранных двух конических сечений, имеющих действительную общую точку. Для доказательства последнего достаточно сопоставить коэффициенты общего уравнения кривой 4-го порядка с тройной точкой в начале координат и соответствующие коэффициенты циссоидали (4). В результате этого сопоставления получим совместную систему линейных уравнений, решения которой дадут выражения коэффициентов образующих конических сечений через коэффициенты данной кривой 4-го порядка.

Следовательно, имея уравнение кривой 4-го порядка с тройной точкой, можно найти параметры циссоидального преобразования, составить по ним уравнения образующих конических сечений и построить эту кривую как циссоидаль K_4. Из уравнения (4) видно, что с точностью до симметрии роль образующих одинакова. Кроме того, согласно свойствам преобразования (1), асимптотические направления циссоидали полностью определяются асимптотическими направлениями образующих. Это дает возможность классифицировать циссоидали K_4 по числу и характеру асимптотических направлений, ветвей, проходящих через тройную точку, и т. д.

Рассматривая специальные случаи, когда одна или обе образующие кривые — окружности, легко показать справедливость следующих предложений.

Теорема 5. Циссоидалью конического сечения, отличного от окружности, относительно окружности и полюса, помещенного в общей точке образующих, является циркулярная кривая 4-го порядка с тройной точкой в полюсе.

Теорема 6. Циссоидалью двух окружностей, одна из которых проходит через полюс, является бициркулярная кривая 4-го порядка с двойной точкой в полюсе.

Образующие окружности всегда можно подобрать так, что в результате циссоидального отображения получим хорошо известные бициркулярные кривые 4-го порядка с двойной точкой как улитка Паскаля, кардиоида, лемниската Бернулли и др.

Применение циссоидального преобразования к исследованию кривых высших порядков даёт возможность не только изучить многие свойства этих кривых, но и довольно просто осуществить их конструирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Боровик. О некоторых приложениях циссоидального преобразования в теории кривых. Известия Крымского пединститута, т. 35, Симферополь, 1961, стр. 203—218.

2. Н. А. Никулин. Рациональные преобразования и теория алгебраических кривых. Известия Крымского пединститута, т. 35, стр. 5—125.

Поступила 2 октября 1964 г.

О РЕГУЛЯРНОСТИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С РЕГУЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

А. А. Дубровин (Харьков)

1. Постановка задачи и результат

Проблема регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой в пространствах постоянной кривизны в основном решена А. В. Погореловым в работе [1]. Именно, доказана теорема:

Если выпуклая поверхность в пространстве постоянной кривизны имеет регулярную метрику и гауссова кривизна ее всюду больше кривизны пространства, то поверхность регулярна. Точнее, если метрика поверхности k раз дифференцируема ($k \geqslant 5$), то поверхность дифференцируема по крайней мере $k-1$ раз.

В дополнении II работы [1] вопрос о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой в евклидовом пространстве решен полностью следующей теоремой (A):

Если выпуклая поверхность имеет регулярную метрику класса $C^{(n)}$ $(n \geqslant 2)$ и положительную гауссову кривизну, то сама поверхность принадлежит по крайней мере классу $C^{(n-1+\nu)}$ при любом ν, $0 < \nu < 1$.

Наша цель — доказать аналогичное утверждение в пространствах постоянной кривизны.

Теорема 1. Если выпуклая поверхность в пространстве постоянной кривизны имеет регулярную метрику класса $C^{(n)}$ $(n \geqslant 2)$ и положительную внешнюю кривизну, то сама поверхность принадлежит по крайней мере классу $C^{(n-1+\nu)}$ при любом ν, $0 < \nu < 1$.

Для доказательства этого утверждения мы воспользуемся методом, которым А. В. Погорелов доказал теорему (A) [1]. Этот метод в основном заключается в доказательстве следующих предложений:

1) выпуклая поверхность положительной внешней кривизны — гладкая и строго выпуклая;

2) аналитическая метрика кривизны не меньшей K, заданная в круге и имеющая положительную геодезическую кривизну края, реализуется в пространстве постоянной кривизны K выпуклой аналитической шапочкой;

3) выпуклые, изометричные шапочки в пространстве постоянной кривизны равны;

4) для выпуклой регулярной поверхности с положительной внешней кривизной существуют априорные оценки первых и вторых производных координат поверхности в пространстве по внутренним координатам, а также оценки их коэффициентов Гельдера в зависимости только от величин, определяемых внутренней геометрией поверхности.

Первые три пункта подробно освещены в работах [1], [2], поэтому мы ограничимся доказательством лишь четвертого пункта.

Основное средство получения оценок для коэффициентов Гельдера первых производных состоит в сопоставлении поверхности Φ пространства постоянной кривизны с поверхностью $\bar{\Phi}$ евклидова пространства, находящегося с первым в геодезическом соответствии. Этот метод, подробно рассмотренный в книге [2], позволяет перенести трудности в получении оценок в евклидово пространство, где они преодолеваются с помощью теоремы Хейнца [3]. Оценки для вторых производных получаются из второй теоремы Хейнца [4]. Это составляет содержание второго и третьего пунктов настоящей работы.

Как следствие теоремы 1 и теорем А. Д. Александрова о реализуемости многообразий кривизны не меньшей K в пространствах постоянной кривизны K получаются теоремы 2, 3.

Теорема 2. Замкнутое двумерное многообразие кривизны большей K с регулярной метрикой класса $C^{(n)}$ $(n \geqslant 2)$ изометрично регулярной замкнутой поверхности класса $C^{(n-1+\nu)}$ в пространстве постоянной кривизны K.

Теорема 3. Каждая точка двумерного многообразия кривизны большей K с регулярной метрикой класса $C^{(n)}$ $(n \geqslant 2)$ имеет окрестность, изометричную регулярной выпуклой шапочке класса $C^{(n-1+\nu)}$ в пространстве постоянной кривизны K.

2. Априорные оценки для первых производных координат в пространстве по координатам поверхности и их коэффициентов Гельдера

Пусть R_k — пространство постоянной кривизны $K = \pm 1$. Введем в R_k вейерштрассовы координаты x_i $(i = 0, 1, 2, 3)$. Тогда любую точку x пространства R_k можно представить так:

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

где x_i и e_i удовлетворяют следующим условиям:

$$(e_0, e_i) = 0, \quad e_0^2 = \frac{1}{K}, \quad e_i^2 = 1, \quad (e_i, e_j) = 0,$$

$$(i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3);$$

$$x^2 = \frac{x_0^2}{K} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{K}.$$

Пусть имеем выпуклую дважды непрерывно дифференцируемую поверхность Φ с положительной внешней кривизной в пространстве R_k, заданную в области D переменных (u, v) уравнением

$$x = x(u, v).$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Для любой достаточно малой шапочки ω, целиком лежащей на поверхности Φ, могут быть получены оценки первых производных x_u, x_v и их коэффициентов Гельдера, зависящие только от линейного элемента и внешней кривизны шапочки. Точнее, пусть в области $D(\omega) \subset \subset D(u, v)$, соответствующей шапочке, внешняя кривизна K_e и линейный элемент $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ шапочки ω удовлетворяют условиям

$$\text{I} \quad 0 < a \leqslant K_e \leqslant b < \infty,$$

$$\text{II} \quad |E|, |F|, \ldots |G_v| \leqslant c < \infty,$$

$$EG - F^2 > \frac{1}{c}.$$

Тогда справедливы оценки:

$$
\begin{gathered}
|x_u| \leqslant \sqrt{c}, \quad |x_v| \leqslant \sqrt{c}; \\
|x_u(u_1, v_1) - x_u(u_0, v_0)| \leqslant \Gamma(a, b, c, h, \rho)\left(\sqrt{(u_1-u_0)^2+(v_1-v_0)^2}\right)^{\nu}; \\
|x_v(u_1, v_1) - x_v(u_0, v_0)| \leqslant \Gamma(a, b, c, h, \rho)\left(\sqrt{(u_1-u_0)^2+(v_1-v_0)^2}\right)^{\nu},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где (u_0, v_0), (u_1, v_1) — любые две точки $D_\rho(\omega)$ — подмножества всех точек в $D(\omega)$, отстоящих от границы $D(\omega)$ не меньше чем на ρ; h — высота шапочки ω; $\Gamma(a, b, c, h, \rho)$ — непрерывная положительная функция при $0 < a \leqslant b$ и любых положительных c, h, ρ; $0 < \nu < 1$, $\nu(a, b, \rho, h)$ — непрерывная положительная функция, стремящаяся к единице при стягивании шапочки ω в точку.

Доказательство. Мы ограничимся нахождением априорных оценок в эллиптическом пространстве, так как применяемые методы без существенных изменений переносятся в пространство Лобачевского.

Получение оценок для модулей первых производных не составляет труда, так как $x_u^2 = E$; $x_v^2 = G$. Оценки (1) мы получим сначала в некоторой специальной параметризации шапочки ω.

Пусть P — произвольная точка, и U — ее окрестность на поверхности Φ. Введем в пространстве R_k вейерштрассовы координаты $x'(x_0', x_1', x_2', x_3')$ таким образом, чтобы точка P имела координаты $(1, 0, 0, 0)$ и базисный вектор e_3' совпадал с внутренней нормалью к поверхности Φ в точке P. Координаты Вейерштрасса определены только с точностью до знака. Для удобства исследования мы устраним эту неоднозначность, предположив, что рассматриваемая на поверхности окрестность точки P содержится в сфере радиуса $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ с центром в точке $P(1, 0, 0, 0)$. Тогда, очевидно, U содержится в части пространства, для которой $x_0' > d > 0$ и в которой координаты $x'(x_0', x_1', x_2', x_3')$ однозначно определяют каждую ее точку. Пусть, кроме этого, внешняя кривизна поверхности U удовлетворяет условию I.

Отобразим пространство R_k геодезически на евклидово пространство E, сопоставляя точке $x'(x_0', x_1', x_2', x_3')$ из R_k точку y с декартовыми координатами (y_1, y_2, y_3) в евклидовом пространстве E по формуле

$$
y = \frac{x' - e_0'(x'e_0')}{(x'e_0')}. \tag{2}
$$

При геодезическом отображении (2) выпуклой дважды непрерывно дифференцируемой поверхности U пространства R_k будет соответствовать выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая поверхность $\overline{U}$ пространства E.

Более того, из условия I леммы вытекает, что удельная кривизна поверхности $\overline{U}$ заключена в положительных пределах [2]. Действительно, обозначим внешнюю кривизну и площадь на множестве M, $M \subset U$ соответственно через $\omega(M)$ и $S(M)$, а кривизну и площадь на соответствующем множестве $\overline{M}$ поверхности $\overline{U}$ — через $\overline{\omega}(\overline{M})$ и $\overline{S}(\overline{M})$. Из условия I леммы следует, что удельная внешняя кривизна поверхности U ограничена:

$$
0 < a \leqslant \frac{\omega(M)}{S(M)} \leqslant b < \infty.
$$

По лемме 2 [2] существуют такие положительные константы A и B, зависящие только от d, что для удельной кривизны поверхности $\overline{U}$ имеет место неравенство:

$$0 < aA \leqslant \frac{\overline{\omega}(\overline{M})}{\overline{S}(\overline{M})} \leqslant bB < \infty. \tag{3}$$

Отсюда вытекает [5], что поверхность $\overline{U}$ — строго выпуклая. Так как пространство E является соприкасающимся для R_k в точке $P(1, 0, 0, 0)$ и вектор e_3' направлен в этой точке по внутренней нормали поверхности U, то ось y_3 совпадает с внутренней нормалью поверхности $\overline{U}$ в точке $\overline{P}(0, 0, 0)$, и поэтому плоскостью $y_3 = \overline{h}$ можно отрезать от $\overline{U}$ достаточно малую шапочку $\overline{\omega}$. Очевидно, шапочку $\overline{\omega}$ можно представить уравнением $y_3 = f(y_1, y_2)$, где $f(y_1, y_2)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция в выпуклой области Ω, ограниченной проекцией края шапочки на плоскость (y_1, y_2). Для удобства введем обозначения $y_3 = z$, $y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$. Из неравенства (3) следует, что кривизна шапочки $\overline{\omega}$ заключена в положительных пределах:

$$0 < \overline{a} \leqslant \frac{z_{\alpha\alpha} z_{\beta\beta} - z_{\alpha\beta}^2}{(1 + z_\alpha^2 + z_\beta^2)^2} \leqslant \overline{b} < \infty,$$

где $a = aA$, $\overline{b} = bB$.

Известно [3], что для производных функции $z(\alpha, \beta)$, удовлетворяющей этому дифференциальному неравенству и ограниченной $0 \leqslant z \leqslant \overline{h}$, имеют место оценки

$$\begin{gathered} \sqrt{z_\alpha^2(\alpha_0, \beta_0) + z_\beta^2(\alpha_0, \beta_0)} \leqslant \frac{2\overline{h}}{\delta}, \\ \sqrt{[z_\alpha(\alpha_1, \beta_1) - z_\alpha(\alpha_0, \beta_0)]^2 + [z_\beta(\alpha_1, \beta_1) - z_\beta(\alpha_0, \beta_0)]^2} \leqslant \\ \leqslant \overline{\Gamma}_1 \left(\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2}\right)^\nu, \end{gathered} \tag{4}$$

где (α_0, β_0), (α_1, β_1) — любые точки Ω_δ — подмножества всех точек в $\Omega(\alpha, \beta)$, отстоящих от границы Ω не меньше, чем на δ; $\overline{\Gamma}_1 = \overline{\Gamma}_1(\overline{a}, \overline{b}, \overline{h}, \delta)$ — непрерывная положительная функция для $0 < \overline{a} \leqslant \overline{b}$ и всех положительных $\overline{h}$ и δ; $0 < \nu < 1$, $\nu = \frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\overline{R}^2} \sqrt{\frac{\overline{a}}{\overline{b}}}$.

Неравенства (4) равносильны аналогичным оценкам для производных y_α, y_β:

$$\begin{gathered} |y_\alpha| \leqslant \overline{\Gamma}(\overline{h}, \delta), \quad |y_\beta| \leqslant \overline{\Gamma}(\overline{h}, \delta); \\ |y_\alpha(\alpha_1, \beta_1) - y_\alpha(\alpha_0, \beta_0)| \leqslant \overline{\Gamma}(\overline{a}, \overline{b}, \overline{h}, \delta) \left(\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2}\right)^\nu; \\ |y_\beta(\alpha_1, \beta_1) - y_\beta(\alpha_0, \beta_0)| \leqslant \overline{\Gamma}(\overline{a}, \overline{b}, \overline{h}, \delta) \left(\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2}\right)^\nu. \end{gathered} \tag{5}$$

Теперь рассмотрим ω — образ шапочки $\overline{\omega}$ при обратном геодезическом отображении E на R_k:

$$x' = \frac{y + e_0'}{\sqrt{1 + y^2}}. \tag{6}$$

Из свойств геодезического отображения пространств постоянной кривизны следует, что ω является шапочкой, целиком расположенной на поверхности U. Не ограничивая общности, можно считать, что ω и есть та шапочка, для которой выполняются условия I и II леммы и утверждается оценка (1). Дифференцируя формулу (6) и замечая, что $\bar{a}, \bar{b}$ выражаются соответственно через a и b, а $\bar{h}$ — малое одного порядка с h, получаем из неравенств (5) следующие оценки в области Ω_δ:

$$|x'_\alpha| \leqslant \Gamma(h, \delta), \quad |x'_\beta| \leqslant \Gamma(h, \delta);$$
$$|x'_\alpha(\alpha_1, \beta_1) - x'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)| \leqslant \Gamma(a, b, h, \delta)\left(\sqrt{(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2}\right)^\nu; \tag{7}$$
$$|x'_\beta(\alpha_1, \beta_1) - x'_\beta(\alpha_0, \beta_0)| \leqslant \Gamma(a, b, h, \delta)\left(\sqrt{(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2}\right)^\nu.$$

Далее, используя эти неравенства, докажем существование аналогичных оценок для любой регулярной параметризации (u, v) шапочки ω, метрика которой удовлетворяет условию II. Пусть M_1 и M_0 — произвольные внутренние точки шапочки ω. Соединим их кривой γ:

$$(\gamma)\quad \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \lambda t, \\ \beta &= \beta_0 + \mu t, \end{aligned}$$

где $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $M_0 = M(\alpha(t_0), \beta(t_0))$, $M_1 = M(\alpha(t_1), \beta(t_1))$, $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, и введем в рассмотрение вектор $\bar{x}_u(M_1)$, полученный в результате параллельного переноса по шапочке ω вектора $x_u(M_0)$ в точку M_1 вдоль кривой γ.

Представим $x_u(M_1) - x_u(M_0)$ в виде

$$x_u(M_1) - x_u(M_0) = x_u(M_1) - \bar{x}_u(M_1) + \bar{x}_u(M_1) - x_u(M_0).$$

Оказывается возможным оценить вторую разность, используя неравенства (7) и положительность внешней кривизны шапочки, а первую — используя ограниченность производных коэффициентов линейного элемента. Действительно, возьмем в качестве базиса в пространстве R_k вдоль кривой γ векторы $\{x, n, \tau, \xi\}$, где $n = \frac{(x, x_u, x_v)}{|(x, x_u, x_v)|}$ — единичный вектор нормали шапочки, τ — единичный вектор касательной к кривой γ, и $\xi = (x, n, \tau)$. Тогда для того чтобы оценить $\bar{x}_u(M_1) - x_u(M_0)$, достаточно соответствующим образом оценить разности: $x(M_1) - x(M_0)$, $n(M_1) - n(M_0)$, $\tau(M_1) - \tau(M_0)$ и $\vartheta(M_1) - \vartheta(M_0)$, где $\vartheta(M)$ — угол, образованный векторами $\tau(M)$ и $\bar{x}_u(M)$.

Непосредственно из соотношений (7) получаем:

$$s_1 - s_0 = \int_{M_0}^{M_1} ds \leqslant \Gamma_1(h, \delta)\sqrt{(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2};$$
$$|x(M_1) - x(M_0)| \leqslant s_1 - s_0 \leqslant \Gamma_1(h, \delta)\sqrt{(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2};$$
$$|n(M_1) - n(M_0)| \leqslant \Gamma_1(a, b, h, \delta)\left(\sqrt{(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2}\right)^\nu;$$
$$|\tau(M_1) - \tau(M_0)| \leqslant \Gamma_2(a, b, h, \delta)\left(\sqrt{(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2}\right)^\nu.$$

Обозначая через k и k_g кривизну и геодезическую кривизну кривой γ, имеем

$$\left|\int_{M_0}^{M_1} k\, ds\right| = \left|\int_{M_0}^{M_1} (x''_{ss} + x)\, ds\right| \leqslant |x'_s(M_1) - x'_s(M_0)| + s_1 - s_0 =$$
$$= |\tau(M_1) - \tau(M_0)| + s_1 - s_0 \leqslant \Gamma_3(a, b, h, \delta)\left(\sqrt{(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2}\right)^\nu$$

и, следовательно,

$$|\vartheta_1 - \vartheta_0| = \left|\int_{M_0}^{M_1} k_g\, ds\right| \leqslant \left|\int_{M_0}^{M_1} k\, ds\right| \leqslant \Gamma_3(a, b, h, \delta)\left(\sqrt{(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2}\right)^\nu.$$

Таким образом, из полученных неравенств вытекает следующая оценка для разности $\overline{x}_u(M_1) - x_u(M_0)$:

$$|\overline{x}_u(M_1) - x_u(M_0)| \leqslant \Gamma_4(a, b, h, \delta)\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2})^\nu. \qquad (8)$$

Теперь оценим $x_u(M_1) - \overline{x}_u(M_1)$. Для этого развернем поверхностную полосу (γ) на евклидову плоскость. Пусть $N = N(t)$ — точка плоскости, лежащая на развертке $\overline{\gamma}$ кривой γ. Тогда векторы $x_u(t)$, $x_v(t)$ развернутся в векторы плоскости $e_1(t)$ и $e_2(t)$, для которых выполняются соотношения

$$dN = e_1du^1 + e_2du^2, \quad e_1^2 = E, \qquad (e_1e_2) = F, \qquad e_2^2 = G;$$
$$de_i = \Gamma_{ij}^k e_k du^j, \qquad (u^1 = u^1(t), \ \ u^2 = u^2(t); \quad i, j, k = 1,2).$$

По определению параллельного переноса на поверхности имеем

$$x_u(M_1) - \overline{x}_u(M_1) = e_1(N_1) - e_1(N_0),$$

отсюда

$$|x_u(M_1) - \overline{x}_u(M_1)| = \left|\int_{\overline{\gamma}} de_1\right| \leqslant A(c)\int_{\overline{\gamma}} ds \leqslant$$
$$\leqslant \Gamma(c, h, \delta)\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2}. \qquad (9)$$

Из неравенств (8) и (9) получаем в области Ω_δ следующую оценку:

$$|x_u(M_1) - x_u(M_0)| \leqslant \Gamma(a, b, c, h, \delta)(\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2})^\nu. \qquad (10)$$

Теперь нам нужно оценить

$$\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2}$$

через

$$\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2}$$

и δ через ρ. Это нетрудно сделать, если рассмотреть $\overline{ds}^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2$ — линейный элемент шапочки $\overline{\omega}$. В самом деле, дифференцируя формулу (2) и учитывая II, имеем

$$|\overline{E}|,\ |\overline{F}|,\ |\overline{G}| < \Gamma(c),$$
$$\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2 > \frac{1}{c}.$$

Используя эти неравенства, можно указать две положительные константы $A(c)$ и $B(c)$, такие, что

$$A(c)(du^2 + dv^2) \leqslant \overline{ds}^2 \leqslant B(c)(du^2 + dv^2).$$

Отсюда интегрированием устанавливаем неравенство

$$A_1(c)\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2} \leqslant \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2} \leqslant$$
$$\leqslant B_1(c)\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2} \qquad (11)$$

и заключаем, что образ области $D_\rho(\omega)$ при отображении $D(\omega)$ в Ω содержится в области Ω_δ, где $\delta = A_1(c)\rho$.

Из неравенств (10), (11) следует, что в области $D_\rho(\omega)$ для коэффициентов Гельдера производной x_u имеет место оценка (1). Аналогично получается оценка для $|x_v(M_1) - x_v(M_0)|$.

3. Априорные оценки для вторых производных вейерштрассовых координат поверхности в пространстве по внутренним координатам

Введение вейерштрассовых координат, как это будет видно ниже, позволяет получить априорные оценки для вторых производных координат в пространстве по координатам поверхности, используя метод, которым Е. Хейнц в работе [4] установил аналогичные оценки для выпуклой поверхности в евклидовом пространстве. При этом сохраняется не только сам метод, но даже и формулировки соответствующих утверждений.

Лемма 2. Пусть $x = x(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$ — уравнение регулярной поверхности Φ с линейным элементом

$$ds^2 = dx^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2;$$

функции $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ — четырежды непрерывно дифференцируемы в области Ω, и выполняются следующие условия:

$$\text{I}\quad |E|,\ |F|,\ \ldots\ |G_{uvv}|,\ |G_{vvv}| \leqslant a,\qquad EG - F^2 \geqslant \frac{1}{a};$$

$$\text{II}\quad k_e = k_i \pm 1 \geqslant b > 0 \qquad (u, v) \in \Omega;$$

$$\text{III}\quad \iint\limits_{\Phi} |H|\,d\sigma \leqslant c < \infty,$$

где K_e, K_i и H — внешняя, гауссова и средняя кривизны Φ.

Тогда для любых двух точек множества Ω_ρ (отстоящих от границы Ω на расстояние, не меньшее ρ) имеют место оценки

$$|x_{uu}|,\ |x_{uv}|,\ |x_{vv}| \leqslant \tau_0(a, b, c, \rho) < \infty, \quad (u, v) \in \Omega_\rho;$$

$$\left.\begin{array}{l} |x_{uu}(u_1, v_1) - x_{uu}(u_0, v_0)| \\ |x_{uv}(u_1, v_1) - x_{uv}(u_0, v_0)| \\ |x_{vv}(u_1, v_1) - x_{vv}(u_0, v_0)| \end{array}\right\} \leqslant \tau_1\left(\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2}\right)^\nu; \tag{1}$$

$$((u_1, v_1),\ (u_0, v_0) \in \Omega_\rho)$$

где ν — любое, $0 < \nu < 1$ и $\tau_1 = \tau_1(a, b, c, \rho, \nu) < \infty$.

Доказательство. Прежде всего напомним некоторые факты из теории поверхностей в пространствах постоянной кривизны. Именно, для поверхностей имеют место следующие деривационные формулы в вейерштрассовых координатах:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma^1_{11} x_u + \Gamma^2_{11} x_v \mp Ex + Ln, \\ x_{uv} &= \Gamma^1_{12} x_u + \Gamma^2_{12} x_v \mp Fx + Mn, \\ x_{vv} &= \Gamma^1_{22} x_u + \Gamma^2_{22} x_v \mp Gx + Nn, \end{aligned} \tag{2}$$

где $n = \frac{(x,\, x_u,\, x_v)}{|(x,\, x_u,\, x_v)|}$ — нормаль поверхности Φ и коэффициенты Γ выражаются через E, F и G точно так же, как соответствующие коэффициенты деривационных формул для поверхностей евклидова пространства.

Связь между коэффициентами первой и второй квадратичных форм устанавливается соотношениями:

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K_i \pm 1; \tag{3}$$

$$L_v - M_u = \Gamma^1_{12}L + (\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})M - \Gamma^2_{11}N;$$
$$M_v - N_u = \Gamma^1_{22}L + (\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12})M - \Gamma^2_{12}N. \tag{4}$$

Формулы для внешней и средней кривизны в R_k имеют вид

$$K_e = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}; \tag{5}$$

$$H = \frac{EN - 2MF + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{6}$$

Вид формул (3), (4), (5) и (6) позволяет использовать схему доказательства теоремы 3 [4] в евклидовом пространстве. Действительно, применяя теорему Ниренберга о характере регулярности дважды непрерывно дифференцируемого решения уравнения эллиптического типа с регулярными коэффициентами [7] к уравнению изгибания поверхности в пространстве постоянной кривизны [1], убеждаемся в том, что рассматриваемая поверхность Ф принадлежит классу $C^{(3,\nu)}$, ν — любое, $0 < \nu < 1$, а следовательно, коэффициенты L, M, $N \in C^{(1,\nu)}$.

Так как $LN - M^2 > 0$, то в каждом круге $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leqslant \rho^2$, заключенном в области Ω, можно указать пару действительных функций $u = u(\alpha, \beta)$ и $v = v(\alpha, \beta)$, которые обладают следующими свойствами:

1) $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ — дважды непрерывно дифференцируемы и отображают круг $\alpha^2 + \beta^2 \leqslant 1$ однозначно и непрерывно на круг $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leqslant \rho^2$, при этом $u(0, 0) = u_0$, $v(0, 0) = v_0$ и

$$u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha \neq 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 < 1);$$

2) для $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ имеют место соотношения

$$L = \sqrt{K_e}\sqrt{EG - F^2}\,\frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha};$$
$$M = \sqrt{K_e}\sqrt{EG - F^2}\,\frac{u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}; \tag{7}$$
$$N = \sqrt{K_e}\sqrt{EG - F^2}\,\frac{u_\alpha^2 + u_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha};$$

3) функции $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta u + \left(\Gamma^1_{11} + \frac{(K_e)_u}{2K_e}\right)(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + \left(2\Gamma^1_{12} + \frac{(K_e)_v}{2K_e}\right)(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + $$
$$+ \Gamma^1_{22}(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0; \tag{8}$$
$$\Delta v + \Gamma^2_{11}(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + \left(2\Gamma^2_{12} + \frac{(K_e)_u}{2K_e}\right)(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + $$
$$+ \left(\Gamma^2_{22} + \frac{(K_e)_v}{2K_e}\right)(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0;$$

4)
$$\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\alpha^2 + v_\beta^2)\,d\alpha d\beta \leqslant \frac{4a^2c}{\sqrt{b}}.$$

Первое утверждение вытекает из теоремы о существовании глобального гомеоморфизма $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ второй квадратичной формы при приведении ее к изотермическим координатам:

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \lambda(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Остальные соотношения доказываются точно так же, как в евклидовом пространстве.

Так как коэффициенты системы (8) определяются только первой квадратичной формой поверхности Ф и по виду совпадают с коэффициентами аналогичной системы в евклидовом пространстве, то, дословно повторяя доказательство теоремы 3 [4], получаем в области Ω_ρ оценки:

$$|L|,\ |M|,\ |N| \leqslant \tau_0'(a, b, c, \rho) < \infty; \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} |L(u_1, v_1) - L(u_0, v_0)| \\ |M(u_1, v_1) - M(u_0, v_0)| \\ |N(u_1, v_1) - N(u, v_0)| \end{array}\right\} \leqslant \tau_1' \left(\sqrt{(u_1-u_0)^2 + (v_1-v_0)^2}\right)^\nu, \tag{10}$$

$$((u_1, v_1),\ (u_0, v_0) \in \Omega_\rho)$$

где ν — любое, $0 < \nu < 1$, $\tau_1' = \tau_1'(a, b, c, \rho, \nu) < \infty$. Подставляя (9) в деривационные формулы (2), используя условия I леммы и замечая, что $|x_u| < \sqrt{a}$, $|x_v| < \sqrt{a}$, получаем

$$|x_{uu}|,\ |x_{uv}|,\ |x_{vv}| \leqslant \tau_0(a, b, c, \rho) < \infty \quad ((u, v) \in \Omega_\rho). \tag{11}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} |x_u(u_1, v_1) - x_u(u_0, v_0)| &\leqslant \tau_0(a, b, c, \rho)\sqrt{(u_1-u_0)^2 + (v_1-v_0)^2}; \\ |x_v(u_1, v_1) - x_v(u_0, v_0)| &\leqslant \tau_0(a, b, c, \rho)\sqrt{(u_1-u_0)^2 + (v_1-v_0)^2}; \\ |\xi(u_1, v_1) - \xi(u_0, v_0)| &\leqslant \tau_1(a, b, c, \rho)\sqrt{(u_1-u_0)^2 + (v_1-v_0)^2}. \\ |x(u_1, v_1) - x(u_0, v_0)| &\leqslant \sqrt{2a}\sqrt{(u_1-u_0)^2 + (v_1-v_0)^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Теперь, используя оценки (11), (12) и деривационные формулы, получаем оценки (1). Лемма доказана.

Далее нам нужно установить оценку для интегральной средней кривизны. Пусть F — регулярная поверхность в регулярном римановом пространстве R, внешняя кривизна которой положительна, $ds^2 = g_{ij}\,dv^i\,dv^j$ — линейный элемент пространства, $d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$ — линейный элемент поверхности. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть ω — область на поверхности F, заключенная внутри геодезического в метрике $d\tilde{s}^2$ круга с центром в точке P достаточно малого радиуса ρ. Пусть в ω выполняются условия:

$$|g_{ij}| < a, \quad \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}\right| < a, \quad \left|\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial v^k\,\partial v^e}\right| < a;$$

$$\sum_{i,j} g_{ij}\xi^i\xi^j > \frac{1}{a}\sum_i (\xi^i)^2;$$

$$|\tilde{g}_{\alpha\beta}| < a, \quad \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 > \frac{1}{a}.$$

$$K_e > \frac{1}{a}.$$

Тогда при достаточно малом $\rho = \rho(a)$ имеет место неравенство

$$\left|\iint_\omega H\,d\sigma\right| < \Gamma(a) < \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Отобразим окрестность точки P пространства R на евклидово пространство E посредством нормальных римановых координат $\{x^i\}$, связанных с точкой P.

При достаточно малом $\rho = \rho(a)$ для средних кривизн поверхностей ω и $\bar{\omega}$, соответствующих ω в E, выполняется неравенство

$$(1 - C\rho)\,|H_\omega| \leqslant |H_{\bar{\omega}}|, \quad 1 - C\rho > \frac{1}{8}, \tag{14}$$

где C — положительная константа, зависящая только от a. Докажем это неравенство.

Пусть γ — регулярная кривая на поверхности ω, и $\bar{\gamma}$ — соответствующая ей регулярная кривая на поверхности $\bar{\omega}$ евклидова пространства E. Возьмем на кривой γ в качестве параметра длину дуги s. Тогда имеет место формула Френе

$$\frac{D\tau}{ds} = c\eta - bn,$$

где τ — единичный вектор касательной к кривой γ; η — единичный вектор нормали к кривой γ, лежащий в касательной плоскости поверхности ω; n — единичный вектор нормали поверхности ω, c и b — геодезическая и нормальная кривизны кривой γ.

Умножая скалярно обе части этой формулы на n, получаем

$$b = -\left(n, \frac{D\tau}{ds}\right) = -\frac{g}{\tilde{g}}\begin{vmatrix} \frac{d^2x^1}{ds^2} & \frac{d^2x^2}{ds^2} & \frac{d^2x^3}{ds^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} + O\left(\Gamma^r_{ke}, \frac{\partial x^k}{\partial u^i}, g\right).$$

Кривую $\bar{\gamma}$, очевидно, можно задать уравнением

$$r = r(s) = x^i(s)\,e_i, \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Пусть $\bar{s}$ — длина дуги кривой $\bar{\gamma}$; $\bar{b}$ — нормальная кривизна на поверхности $\bar{\omega}$, $\bar{n}$ — вектор единичной нормали к $\bar{\omega}$.

Имеем

$$\bar{b} = -\left(\bar{n}, \frac{d^2r}{d\bar{s}^2}\right) = -\left(\bar{n}, \frac{d^2r}{ds^2}\right)\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2,$$

$$b\,\frac{\tilde{g}}{g\bar{g}}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = \bar{b} + O\left(\Gamma^r_{ke}, \frac{\partial x^k}{\partial u^i}, g\right), \tag{15}$$

где

$$\bar{g} = |r_{u_1} \times r_{u_2}|.$$

Применив соотношение (15) к линиям кривизны $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ поверхности $\bar{\omega}$ в любой ее точке $\bar{Q}$ и складывая оба результата, получаем:

$$\frac{\tilde{g}}{g\bar{g}}\left[\left(\frac{ds_1}{d\bar{s}_1}\right)^2\tilde{k}_1 + \left(\frac{ds_2}{d\bar{s}_2}\right)^2\tilde{k}_2\right] = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + O\left(\Gamma^k_{ij}, \frac{\partial x^i}{\partial u^j}, g\right), \tag{16}$$

где $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ — главные кривизны $\bar{\omega}$ в точке $\bar{Q}$, а $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$ — нормальные кривизны в точке Q в соответствующих $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ направлениях.

Так как угол, образованный кривыми γ_1 и γ_2 в точке Q, при достаточно малом $\rho = \rho(a)$ отличается от $\frac{\pi}{2}$ не больше, чем на $\varepsilon > 0$, ($\varepsilon = \varepsilon(a)$

мало вместе с ρ^2), то из формулы Эйлера для выражения нормальной кривизны в любом направлении получаем при малом ρ неравенство

$$|\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2| > (1 - c(a)\rho^2)|k_1 + k_2|, \quad 1 - c\rho^2 > \frac{1}{2}, \tag{17}$$

где k_1, k_2 — главные кривизны поверхности ω.

Из соотношений (16) и (17) вытекает неравенство (14), потому что k_1, $\bar{k}_2$ — одного знака, $\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 > (1 - c(a)\rho^2)$, $|H_\omega| > \frac{1}{a}$, а $\frac{\tilde{g}}{g\bar{g}} > 1 - c_1(a)\rho^2 > \frac{1}{2}$ при достаточно малом $\rho = \rho(a)$.

Теперь оценим $\iint\limits_{\bar{\omega}} \left| H_{\bar{\omega}} \right| d\sigma_{\bar{\omega}}$. Для этого введем в окрестности точки P, содержащую ω три различные системы нормальных координат $\{x^i\}$, $\{y^i\}$, $\{z^i\}$ так, чтобы в каждой из них поверхность ω можно было задать соответственно уравнением

$$x^3 = f(x', x^2), \quad y^3 = \varphi(y', y^2), \quad z^3 = \psi(z', z^2). \tag{18}$$

Этим системам в евклидовом пространстве E соответствуют прямоугольные системы координат с началом в точке P, причем в каждой из них поверхность $\bar{\omega}$ задается соответствующим уравнением из (19).

Не ограничивая общности поверхности ω, можно считать, что оси Px^3, Py^3, Pz^3 не лежат в одной плоскости и образуют между собой равные углы λ. Отсюда следует, что для элемента площади $d\sigma$ поверхности $\bar{\omega}$ имеет место следующее неравенство:

$$d\sigma \leqslant c(\lambda)(dx'\,dx^2 + dy'\,dy^2 + dz'\,dz^2).$$

Умножая это неравенство на $|H_{\bar{\omega}}|$ и интегрируя по поверхности $\bar{\omega}$, получаем

$$\left|\iint\limits_{\bar{\omega}} H_{\bar{\omega}}\, d\sigma\right| \leqslant c(\lambda)\left(\left|\iint\limits_{\bar{\omega}} H_{\bar{\omega}}\, dx'\,dx^2\right| + \left|\iint\limits_{\omega} H_{\bar{\omega}}\, dy'\,dy^2\right| + \left|\iint\limits_{\omega} H_{\bar{\omega}}\, dz'\,dz^2\right|\right).$$

Каждое слагаемое правой части оценивается в зависимости только от метрики поверхности $\bar{\omega}$.

В самом деле, обозначив $z = x^3$, $x = x'$, $y = x^2$, имеем

$$\left|\iint\limits_{\bar{\omega}} H\,dx\,dy\right| = \left|\int\limits_{\Gamma_{\bar{\omega}}} \frac{-z_y dx + z_x dy}{\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}}\right| \leqslant \int\limits_{\Gamma_{\bar{\omega}}} \sqrt{dx^2 + dy^2} \leqslant \bar{e},$$

где $\Gamma_{\bar{\omega}}$ — граница поверхности $\bar{\omega}$, а $\bar{e}$ — ее длина. Следовательно

$$\left|\iint\limits_{\bar{\omega}} H_{\bar{\omega}}\, d\sigma\right| \leqslant 3\bar{e}C(\lambda). \tag{19}$$

При достаточно малом $\rho = \rho(a)$ имеем

$$0 < \frac{\tilde{g}}{\bar{g}} \leqslant A(a) < \infty, \quad 0 < \frac{\bar{e}}{e} < B(a) < \infty.$$

Отсюда и из соотношений (14) и (19) заключаем, что при достаточно малом $\rho = \rho(a)$

$$\left|\iint\limits_{\omega} H\,d\sigma_\omega\right| \leqslant \Gamma(a) < \infty.$$

Лемма доказана.

Априорные оценки (1), в которых используется оценка (13), применяются к последовательности поверхностей F_n с положительной внешней кривизной, сходящейся к общей выпуклой поверхности.

Нам нужно доказать еще, что свойство поверхности F_n задаваться уравнениями (18) внутри некоторого геодезического в метрике F_n круга радиуса ρ не зависит от предельного перехода. Для этого достаточно доказать, что таким свойством обладает предельная поверхность Ф, которая представляет собой общую выпуклую поверхность риманова пространства. Это не представляет большого труда.

Из лемм 2 и 3 заключаем: для выпуклой шапочки с положительной внешней кривизной и регулярной метрикой имеют место оценки для вторых производных координат в пространстве по ее внутренним координатам и их коэффициентов Гельдера с любым показателем ν, $0 < \nu < 1$ в зависимости только от линейного элемента шапочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов, Некоторые результаты по геометрии в целом. Изд-во Харьковского ун-та, 1961.

2. А. В. Погорелов. Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве. Изд-во Харьковского ун-та, 1960.

3. E. Heinz. Uber die Differentialungleichung $0 < \alpha \leqslant rt - s^2 \leqslant \rho < \infty$ Math. zeitschr. 72 (1959).

4. E. Heinz. Neue a — priori — Abschätzungen für den ortsvektor einer Fläche positiver Gausscher krümmung durch Linienelement. Math. zeitschr. 74 (1960).

5. А. В. Погорелов. Изгибание выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1951.

6. А. В. Погорелов. Некоторые вопросы по геометрии в целом в римановом пространстве. Изд-во Харьковского ун-та, 1957.

7. L. Nirenberg. On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity, Commun. pure appl. Math.., 6 (1953).

Поступила 1 августа 1964 г.

КВАЗИТЕТРАЭДРАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ. I

Н. И. Кованцов *(Киев)*

Хорошо известен тетраэдральный комплекс, представляющий собой совокупность прямых, четверки точек пересечения которых с гранями некоторого тетраэдра проективно эквивалентны между собой. Известны следующие свойства этого комплекса:

1. Тетраэдральный комплекс есть некоторый частного вида комплекс 2-го порядка. Следовательно, каждый конус лучей такого комплекса есть, вообще говоря, конус второго порядка (в частности, этот конус может распадаться на пару плоскостей).

2. Каждая точка пересечения луча комплекса с гранями тетраэдра есть инфлекционный центр этого луча.

3. Тетраэдральный комплекс представляет собой совокупность прямых, соединяющих соответственные точки двух трехмерных пространств, между которыми установлено проективное соответствие [1].

Как можно было бы естественным путем обобщить эти свойства?

Попытка обобщить первое свойство привела бы нас к классу всех квадратичных комплексов, теория которых разработана весьма обстоятельно [2, 3]. Обобщение третьего свойства может привести к общей теории точечных преобразований в их связи с теорией комплексов. Было бы желательно проследить эту связь, однако это выходит за рамки настоящей работы.

Остановимся на втором свойстве. Оно допускает три совершенно естественных обобщения, результатом которых оказываются комплексы следующей структуры:

A. Комплекс, представляющий собой совокупность прямых, точки пересечения которых с четырьмя заданными поверхностями проективно эквивалентны между собой, не будучи инфлекционными центрами прямых. Назовем его *квазитетраэдральным комплексом первого рода.*

B. Комплекс, на всех лучах которого четверки инфлекционных центров проективно эквивалентны между собой, без того, чтобы эти центры описывали некоторые поверхности. Назовем его *квазитетраэдральным комплексом второго рода.*

C. Комплекс, объединяющий в себе свойства первого и второго комплексов, т. е. комплекс, все лучи которого пересекают некоторую четверку поверхностей в четверках их инфлекционных центров, проективно эквивалентных между собой.

Что касается последнего комплекса, то в работе [4] нами было показано, что уже требование того, чтобы каждый из четырех инфлекционных центров описывал поверхность, приводит к тетраэдральному комплексу. Комплекс C, характеризуемый усиленным требованием проективной эквивалентности четырех инфлекционных центров, будет тем более тетраэдральным.

В публикуемой сейчас первой части мы ограничимся рассмотрением лишь квазитетраэдральных комплексов первого рода.

1. Существование квазитетраэдральных комплексов первого рода

Мы определили выше квазитетраэдральный комплекс первого рода как такой комплекс, каждый луч которого пересекает заданную четверку поверхностей в четверке точек с заданным сложным отношением W. Естественно, возникают следующие два вопроса:

а) Существуют ли квазитетраэдральные комплексы, отличные от тетраэдрального комплекса?

в) Можно ли для произвольно заданной четверки поверхностей и произвольного сложного отношения W построить квазитетраэдральный комплекс первого рода?

Ниже будет показано, что ответ на первый вопрос является положительным, что же касается ответа на второй вопрос, то он, вообще говоря, тоже положителен. Характер существования квазитетраэдральных комплексов первого рода в значительной мере будет ответом и на второй вопрос.

Докажем следующее предложение:

Квазитетраэдральные комплексы первого рода существуют с произволом в четыре функции двух аргументов.

Действительно, пусть Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 — четыре поверхности. Будем их называть базисными поверхностями квазитетраэдрального комплекса первого рода. Пусть произвольный луч комплекса пересекает эти поверхности соответственно в точках A_1, A_2, M_1, M_2. Поместим в точки A_1 и A_2 вершины сопровождающего тетраэдра и пусть

$$M_1 = A_1 + \lambda_1 A_2, \quad M_2 = A_1 + \lambda_2 A_2. \tag{1.1}$$

По условию, сложное отношение точек $A_1A_2M_1M_2$ равно W (const). Принимая при составлении сложного отношения точки A_1A_2 за базисные, а точки M_1M_2 за делящие, будем иметь

$$\lambda_1 = \lambda_2 W. \tag{1.2}$$

Предполагая, что поверхности Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 попарно не совпадают, мы должны положить $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Примем касательные плоскости к поверхностям Σ_1 и Σ_2 соответственно за координатные плоскости $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$. В таком случае, как нетрудно сообразить, будут иметь место следующие соотношения для форм сопровождающего тетраэдра:

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0. \tag{1.3}$$

Предположим также, что плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_2A_1A_4$ совмещены с касательными плоскостями к конусам, имеющим вершины в точках A_1 и A_2, а координаты вершин один раз пронормированы так, что имеет место следующее равенство между главными формами ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4 координатного тетраэдра:

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0 \tag{1.4}$$

(см. [5]). Впредь базисными формами тетраэдра будем считать формы ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4.

Примем теперь во внимание, что точки M_1, M_2 описывают поверхности σ_1 и σ_2. Так как

$$dM_1 = \omega_1^1 M_1 + (d\lambda_1 + \lambda_1(\omega_2^2 - \omega_1^1))\, A_2 + (\omega_1^3 + \lambda_1\omega_2^3)\, A_3 + (\omega_1^4 + \lambda_1\omega_2^4)\, A_4;$$
$$dM_2 = \omega_1^1 M_2 + (d\lambda_2 + \lambda_2(\omega_2^2 - \omega_1^1))\, A_2 + (\omega_1^3 + \lambda_2\omega_2^3)\, A_3 + (\omega_1^4 + \lambda_2\omega_2^4)\, A_4,$$

то требование линейной зависимости коэффициентов при $A_2A_3A_4$ в каждом из равенств (а лишь выполнение этого требования обеспечивает то, что точки M_1 и M_2 описывают поверхности) приводит к соотношениям

$$d\lambda_1+\lambda_1(\omega_2^2-\omega_1^1)=\alpha_1(\omega_1^3+\lambda_1\omega_2^3)+\beta_1(\omega_1^4+\lambda_1\omega_2^4),\quad d\lambda_2+\lambda_2(\omega_2^2-\omega_1^1)=$$
$$=\alpha_2(\omega_1^3+\lambda_2\omega_2^3)+\beta_2(\omega_1^4+\lambda_2\omega_2^4). \qquad (1.5)$$

Поскольку, однако, $\lambda_1=W\lambda_2$ (см. 1.2), то $d\lambda_1=Wd\lambda_2$. Внося сюда значения $d\lambda_1$ и $d\lambda_2$, определяемые равенствами (1.5), и приравнивая друг другу коэффициенты при ω_2^4, ω_2^3, ω_1^4, будем иметь

$$-W\alpha_2+\beta_2\lambda_1=-\alpha_1+\beta_1\lambda_1;$$
$$\alpha_2=\alpha_1,\quad \beta_1=W\beta_2.$$

Внося значения α_2, β_2, определяемые последними равенствами, в первое равенство, придем к следующей зависимости между коэффициентами α_1 и β_1: $W\alpha_1+\beta_1\lambda_1=0$.

Из двух равенств (1.5) мы можем теперь выписать лишь одно независимое:

$$d\lambda_1+\lambda_1(\omega_2^2-\omega_1^1)=\beta_1[-\lambda_2(\omega_1^3+\lambda_1\omega_2^3)+(\omega_1^4+\lambda_1\omega_2^4)]. \qquad (1.6)$$

Объединяя уравнения (1.3). (1.4) и (1.6), получим систему, решением которой является произвольный квазитетраэдральный комплекс:

$$\omega_1^2=0,\quad \omega_2^1=0,\quad \omega_1^3+\omega_2^4=0;$$
$$d\lambda_1+\lambda_1(\omega_2^2-\omega_1^1)=\beta_1[-\lambda_2(\omega_1^3+\lambda_1\omega_2^3)+(\omega_1^4+\lambda_1\omega_2^4)]. \qquad (1.7)$$

Чтобы исследовать эту систему на совместность, поступаем как обычно. Внешним дифференцированием находим систему ковариантов. Число независимых уравнений этой системы $s_1=4$. Характеристическими формами, не входящими в систему (1.7), будут формы ω_3^2, ω_3^4, ω_3^1, ω_4^1, ω_4^2, ω_4^3, $d\beta_1$, $\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4$. Их число $q=8$. Следовательно, $s_2=4$, а потому число Картана $Q=12$. Таково же, как легко подсчитать, число параметров продолжения $N=12$. Это и доказывает теорему (см. [6]).

2. Геометрическое строение комплексов

То обстоятельство, что класс квазитетраэдральных комплексов первого рода определяется с произволом в четыре функции двух аргументов, дает основание предполагать, что, вероятно, для произвольной четверки поверхностей, вообще говоря, может быть построен такой комплекс. Ниже мы покажем, что такое предположение соответствует действительному положению вещей.

Фиксируем в пространстве некоторый неподвижный тетраэдр $M_0M_1M_2M_3$ (вершины M_1M_2 этого тетраэдра не имеют никакого отношения к точкам (1.1).

Координаты произвольной точки пространства будем обозначать буквами $\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3$. Пусть $\Sigma_1\ \Sigma_2$, σ_1, σ_2 — произвольно заданная четверка поверхностей. Координатная плоскость $M_0M_1M_2$ пересекает эти поверхности по четырем кривым, уравнения которых соответственно могут быть представлены в виде:

$$y=f_1(x),\quad y=f_2(x),\quad y=\varphi_1(x),\quad y=\varphi_2(x), \qquad (2.1$$

где мы положили $x=\xi_1:\xi_0$, $y=\xi_2:\xi_0$. Произвольная прямая $y=kx$, проходящая через точку M_0 и расположенная в плоскости $M_0M_1M_2$, пере секает эти кривые в точках $P_1P_2Q_1Q_2$ (соответственно тому порядку в котором выписаны кривые (2.1)) *.

Пусть точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 имеют координаты

$$P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2), \quad Q_1(X_1, Y_1), \quad Q_2(X_2, Y_2).$$

В таком случае

$$y_1 = f_1(x_1), \quad y_2 = f_2(x_2), \quad Y_1 = \varphi_1(X_1), \quad Y_2 = \varphi_2(X_2),$$
$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = kx_2, \quad Y_1 = kX_1, \quad Y_2 = kX_2.$$

Следовательно,

$$f_1(x_1) = kx_1, \quad f_2(x_2) = kx_2, \quad \varphi_1(X_1) = kX_1, \quad \varphi_2(X_2) = kX_2. \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что эти уравнения имеют решения. Из совокупности корней для каждого уравнения возьмем по одному какому-либо корню. Все такие корни будут, очевидно, функциями параметра k:

$$x_1 = x_1(k), \quad x_2 = x_2(k), \quad X_1 = X_1(k), \quad X_2 = X_2(k). \tag{2.3}$$

Потребуем теперь, чтобы сложное отношение точек $P_1P_2Q_1Q_2$ равнялось заданному числу W, т. е.

$$\frac{X_1 - x_1}{x_2 - X_1} : \frac{X_2 - x_1}{x_2 - X_2} = W \tag{2.4}$$

(мы принимаем, как легко видеть, точки P_1P_2 за базисные, точки Q_1Q_2 — за делящие). Равенство (2.4) следует рассматривать как уравнение относительно k. Пусть $k = k(W)$ — какой-либо корень этого уравнения (мы снова выскажем предположение, что это уравнение имеет решение). Подставляя этот корень в равенство (2.3), найдем точки, которые лежат на поверхностях Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 и сложное отношение которых равно W. Вместе с тем мы получаем прямую l, которая проходит через точку M_0 и пересекает заданную четверку поверхностей в четверке точек с заданным сложным отношением. Если теперь плоскость $M_0M_1M_2$ повернуть вокруг какой-либо оси, проходящей через точку M_0, то мы заставим прямую l описывать конус комплекса, имеющий вершину в точке M_0. Разумеется, это будет не весь конус с этой вершиной, а лишь некоторая часть его. Чтобы получить весь конус, мы должны были бы рассмотреть все сочетания корней уравнений (2.2) и для каждого такого сочетания найти все корни уравнения (2.4). Меняя положение точки M_0 в пространстве, мы таким путем можем построить весь квазитетраэдральный комплекс.

В частности, если каждая из поверхностей Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 является плоскостью, следовательно, если все они, вообще говоря, являются гранями некоторого тетраэдра, то все функции f_1, f_2, φ_1, φ_2 — линейны, и уравнения (2.2) принимают вид

$$a_1x_1 + b_1 = kx_1, \quad a_2x_2 + b_2 = kx_2, \quad A_1X_1 + B_1 = kX_1, \quad A_2X_2 + B_2 = kX_2.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{b_1}{k - a_1}, \quad x_2 = \frac{b_2}{k - a_2}, \quad X_1 = \frac{B_1}{k - A_1}, \quad X_2 = \frac{B_2}{k - A_2}. \tag{2.5}$$

Подставляя это в равенство (2.4), получим следующее квадратное уравнение относительно k:

$$ak^2 - bk + c = 0, \tag{2.6}$$

* Разумеется, мы ограничиваемся рассмотрением лишь тех областей задания кривых (2.1), в которых такое пересечение имеет место.

где

$$a = (B_1 - b_1)(b_2 - B_2) - W(b_2 - B_1)(B_2 - b_1),$$
$$b = (B_1 - b_1)(b_2 A_2 - B_2 a_2) + (b_2 - B_2)(B_1 a_1 - b_1 A_1) -$$
$$- W[(b_2 - B_1)(B_2 a_1 - b_1 A_2) + (B_2 - b_1)(b_2 A_1 - B_1 a_2)],$$
$$c = (B_1 a_1 - b_1 A_1)(b_2 A_2 - B_2 a_2) - W(b_2 A_1 - B_1 a_2)(B_2 a_1 - b_1 A_2).$$

Решая уравнение (2.6), получим два значения корня k, следовательно, каждая плоскость, проходящая через точку M_0, пересекает конус лучей комплекса с вершиной в этой точке по двум образующим. Это означает, что каждый конус комплекса (точка M_0 — произвольная) есть конус второго порядка, а потому комплекс — квадратичный. Мы пришли к известному результату, с которого начали статью — тетраэдральный комплекс есть некоторый комплекс 2-го порядка.

Наши рассуждения не потеряют свою силу, если плоскости, о которых идет речь, и не образуют в обычном смысле тетраэдра. Комплекс, который образуется с помощью таких плоскостей, будет представлять собой некоторое вырождение тетраэдрального комплекса. Сохраняя название тетраэдрального комплекса для случая невырожденного тетраэдра, мы должны рассматривать его вырождение как некоторый частный случай квазитетраэдрального комплекса 1-го рода.

Возможны следующие случаи вырождения (эти случаи не представляют дифференциально-геометрического интереса, поэтому мы ограничимся лишь приведением результатов, проверить которые не составит труда).

1. Плоскости Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 проходят через одну точку P, но никакие три из них не принадлежат одной прямой. В этом случае каждый конус комплекса с вершиной в точке M распадается на пару плоскостей, пересекающихся по прямой MP. Комплекс представляет собой совокупность прямых, касающихся конуса второго порядка с вершиной P. Для каждого W получается свой конус. Плоскости Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 касаются всех этих конусов.

Соотношением $\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0$ из рассмотрения исключаются специальные комплексы, т. е. комплексы касательных к той или иной поверхности. Поскольку рассматриваемый комплекс является специальным, то он не может быть получен из уравнений (1.7) ни при каких частных значениях параметров λ_1, β_1.

2. Плоскости Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 проходят через одну точку P, при этом три из них принадлежат одной и той же прямой m. В этом случае каждый конус комплекса с вершиной в точке M также распадается на пару плоскостей, но одной из плоскостей всегда является плоскость, проходящая через точку M и прямую m.

Чтобы найти вторую плоскость, предположим, например, что именно плоскости Σ_1, Σ_2, σ_1 проходят через прямую m. Проведем через эту прямую некоторую плоскость π, образующую с тремя данными плоскостями четверку со сложным отношением W (предполагается, что плоскости Σ_1, Σ_2, σ_1 перенумерованы в том порядке, в каком они входят в сложное отношение. Тогда плоскость π будет определяться однозначно). Пусть теперь l — линия пересечения плоскости π с плоскостью σ_2. Очевидно, эта линия проходит через точку P. В таком случае вторая плоскость, составляющая распавшийся конус второго порядка, будет определяться точкой M и прямой l.

Комплекс будет представлять собой совокупность всех прямых пространства, каждая из которых пересекает хотя бы одну из двух пересе-

пересекающихся прямых m и l. Это также некоторый специальный квадратичный комплекс, который системами уравнений (1.7), (1.9) охвачен быть не может.

3. Плоскости Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 принадлежат одному и тому же пучку с осью m. Если сложное отношение этих плоскостей не равно W, то данный комплекс — специальный линейный. Его ось совпадает с прямой m. Если же сложное отношение плоскостей равно W, то комплекс становится неопределенным — любая прямая пространства принадлежит такому комплексу.

Как и в двух предыдущих случаях, мы не можем характеризовать рассматриваемый комплекс с помощью уравнений (1.7).

3. Присоединенный тетраэдральный комплекс

Плоскости, касательные к поверхности Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 в точках A_1, A_2, M_1, M_2, имеют соответственно координаты

$$\Sigma_1' = (A_1A_3A_4), \quad \Sigma_2' = (A_2A_3A_4);$$
$$\sigma_1' = (M_1A_3A_4) + \beta_1 (M_1A_3A_2) - \beta_1\lambda_2 (M_1A_2A_4),$$
$$\sigma_2' = (M_2A_3A_4) + \beta_2 (M_2A_3A_2) - \beta_2\lambda_1 (M_2A_2A_4).$$

Для каждого луча A_1A_2 квазитетраэдрального комплекса эти плоскости образуют некоторый тетраэдр. Последний, как уже отмечалось, определяет тетраэдральный комплекс, т. е. совокупность прямых, пересекающих его грани с данным сложным отношением точек пересечения. Если это отношение есть W, то к числу лучей такого комплекса принадлежит и луч A_1A_2. Назовем такой комплекс тетраэдральным комплексом, присоединенным к данному квазитетраэдральному комплексу. Для того, чтобы исследовать взаимосвязь обоих комплексов, найдем прежде всего уравнение присоединенного комплекса.

Пусть $P_1 = A_1 + x_3A_3 + x_4A_4$, $P_2 = A_2 + y_3A_3 + y_4A_4$ — две какие-либо точки на плоскостях Σ_1' и Σ_2' и $H_1 = P_1 + k_1P_2$, $H_2 = P_1 + k_2P_2$ — точки пересечения прямой P_1P_2 с плоскостями σ_1' и σ_2' ($k_1 = Wk_2$). Поскольку теперь $\sigma_1'H_1 = 0$, $\sigma_2'H_2 = 0$, то будем иметь следующие соотношения между коэффициентами x_3, x_4, y_3, y_4, k_1, k_2:

$$-\lambda_1 + \beta_1\lambda_2x_3 - \beta_1x_4 + k_1(1 + \beta_1\lambda_2y_3 - \beta_1y_4) = 0;$$
$$-\lambda_2 + \beta_2\lambda_1x_3 - \beta_2x_4 + k_2(1 + \beta_2\lambda_1y_3 - \beta_2y_4) = 0.$$

Отсюда

$$x_3 = -\frac{k_1}{\lambda_1}y_4, \quad x_4 = -\frac{\lambda_1}{\beta_1} + \frac{k_1}{\beta_1}\left(1 + \beta_1\lambda_2y_3 + \beta_1y_4\left(1 + \frac{1}{W}\right)\right). \tag{3.1}$$

Плюккеровы координаты прямой P_1P_2 есть

$$p_{12} = 1, \ p_{13} = y_3, \ p_{14} = y_4, \ p_{23} = -x_3, \ p_{24} = -x_4, \ p_{34} = x_3y_4 - y_3x_4. \tag{3.2}$$

Исключая из равенств (3.1), (3.2) коэффициенты x_3, x_4, y_3, y_4, k_1, получим

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0, \tag{3.3}$$
$$\beta_1p_{14}p_{24} + \lambda_1(p_{23} - p_{14})p_{12} + \beta_1p_{23}(\lambda_1\lambda_2p_{13} - (\lambda_1 + \lambda_2)p_{14}) = 0. \tag{3.4}$$

Равенство (3.3) есть не что иное, как фундаментальное условие Плюккера. Что же касается равенства (3.4), то оно представляет собой, очевидно, уравнение присоединенного комплекса. Это уравнение — второй степени. Этого, конечно, и следовало ожидать, так как всякий тетраэдральный комплекс есть некоторый частного вида квадратичный комплекс.

Введем теперь в рассмотрение три линейчатых поверхности квазитетраэдрального комплекса, свойства которых будут определенным образом характеризовать и свойства самого комплекса. Эти поверхности (мы их назовем впредь основными поверхностями) определяются окрестностью первого порядка и играют для этой окрестности примерно такую же роль, как главные поверхности для окрестности второго порядка.

Пусть
$$\omega_2^3 : \omega_1^4 : \omega_2^4 \tag{3.5}$$
— некоторая линейчатая поверхность комплекса, проходящая через луч A_1A_2, и пусть A_1, A_2, M_1, M_2 — точки пересечения этого луча с поверхностями Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2.

Пусть сопровождающий тетраэдр канонизирован так, что формы его инфинитезимального смещения удовлетворяют равенствам (1.7). В таком случае касательные плоскости к поверхностям Σ_1, Σ_2 в точках A_1, A_2 пересекаются на ребре A_3A_4. Следовательно, касательные к линиям $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$, вырезаемым на поверхностях Σ_1 и Σ_2 поверхностью (3.5), всегда пересекают ребро A_3A_4. Из равенств
$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4,$$
$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4$$
следует, что этими точками являются
$$V_1 = \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4, \quad V_2 = \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4. \tag{3.6}$$

Касательные к линиям $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, вырезаемым на поверхностях σ_1 и σ_2 поверхностью (3.5), вообще говоря, не пересекают ребра A_3A_4. Потребуем, однако, чтобы такое пересечение имело место. Из равенств
$$dM_1 = \omega_1^1 M_1 + (\omega_1^3 + \lambda_1\omega_2^3)(A_3 - \beta_1\lambda_2 A_2) + (\omega_1^4 + \lambda_1\omega_2^4)(A_4 + \beta_1 A_2),$$
$$dM_2 = \omega_1^1 M_2 + (\omega_1^3 + \lambda_2\omega_2^3)(A_3 - \beta_1\lambda_2 A_2) + (\omega_1^4 + \lambda_2\omega_2^4)\left(A_4 + \frac{\beta_1}{W} A_2\right) \tag{3.7}$$
следует, что пересечение будет иметь место тогда и только тогда, когда
$$-\lambda_2(\omega_1^3 + \lambda_1\omega_2^3) + (\omega_1^4 + \lambda_1\omega_2^4) = 0,$$
$$-\lambda_1(\omega_1^3 + \lambda_2\omega_2^3) + (\omega_1^4 + \lambda_2\omega_2^4) = 0. \tag{3.8}$$

Эти равенства эквивалентны между собой. Следовательно, если касательная к одной из двух указанных выше линий пересекает ребро A_3A_4, то касательная к другой линии также пересекает это ребро.

Точки пересечения касательных с ребром A_3A_4 следующие:
$$v_1 = (\omega_1^3 + \lambda_1\omega_2^3) A_3 + (\omega_1^4 + \lambda_1\omega_2^4) A_4,$$
$$v_2 = (\omega_1^3 + \lambda_2\omega_2^3) A_3 + (\omega_1^4 + \lambda_2\omega_2^4) A_4. \tag{3.9}$$

Линия пересечения плоскостей σ_1', σ_2', касательных к поверхностям σ_1 и σ_2 в точках M_1 и M_2, есть
$$[\sigma_1' \, \sigma_2'] = \left[A_1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1} A_4, \quad A_2 - \frac{1}{\beta_1\lambda_2} A_3\right].$$

Чтобы получить эти координаты, определим прямую $[\sigma_1'\sigma_2']$ следующими двумя точками:
$$P_1 = A_1 + x_3 A_3 + x_4 A_4,$$
$$P_2 = A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4,$$

где x_3, x_4, y_3, y_4 — пока неизвестные коэффициенты. Поскольку теперь

$$P_1\sigma_1' = 0, \quad P_2\sigma_1' = 0, \quad P_1\sigma_2' = 0, \quad P_2\sigma_2' = 0,$$

то

$$-\lambda_1 + x_3\beta_1\lambda_2 - x_4\beta_1 = 0, \quad 1 + y_3\beta_1\lambda_2 - y_4\beta_1 = 0,$$
$$-\lambda_2 + x_3\beta_1\lambda_2 - x_4\frac{\beta_1}{W} = 0, \quad 1 + y_3\beta_1\lambda_2 - y_4\frac{\beta_1}{W} = 0.$$

Отсюда

$$x_3 = 0, \quad x_4 = -\frac{\lambda_1}{\beta_1}, \quad y_3 = -\frac{1}{\beta_1\lambda_2}, \quad y_4 = 0.$$

Следовательно,

$$P_1 = A_1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1}A_4, \quad P_2 = A_2 - \frac{1}{\beta_1\lambda_2}A_3.$$

Потребуем, чтобы касательные к линиям $\overline{\Sigma}_1$, $\overline{\Sigma}_2$ пересекали прямую $[\sigma_1'\sigma_2']$. Мы должны иметь

$$\left(A_1, \quad \omega_1^3A_3 + \omega_1^4A_4, \quad A_1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1}A_4, \quad A_2 - \frac{1}{\beta_1\lambda_2}A_3\right) = 0,$$
$$\left(A_2, \quad \omega_2^3A_3 + \omega_2^4A_4, \quad A_1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1}A_4, \quad A_2 - \frac{1}{\beta_1\lambda_2}A_3\right) = 0.$$

Это дает

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0. \tag{3.10}$$

Эти равенства, как и следовало ожидать, эквивалентны между собой.

Если мы теперь объединим равенства (3.8) и (3.10), то придем к уравнениям

$$\omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^4 = \lambda_1\lambda_2\omega_2^3. \tag{3.11}$$

Таким образом, поверхность (3.11) характеризуется тем, что у нее касательные к линиям ее пересечения с поверхностями σ_1 и σ_2 пересекают линию $[\Sigma_1'\Sigma_2']$, а касательные к линиям пересечения с поверхностями Σ_1 и Σ_2 пересекают линию $[\sigma_1'\sigma_2']$.

Если внести (3.10) в (3.6), то мы получим

$$V_1 = \omega_1^4A_4, \quad V_2 = \omega_2^3A_3. \tag{3.12}$$

Если теперь принять во внимание, что координатная плоскость $A_1A_2A_3$ касается конуса комплекса с вершиной в точке A_1, а плоскость $A_2A_1A_4$ касается конуса с вершиной A_2, то равенства (3.12) дадут основание для формулировки следующего предложения: ***если касательная к кривой $\overline{\Sigma}_2$ $(\overline{\Sigma}_1)$ пересекает прямую $[\sigma_1'\sigma_2']$, то эта кривая касается конуса комплекса с вершиной A_2 (A_1).***

Подобное же предложение может быть сформулировано и для кривых $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$.

Допустим, что имеет место равенство (3.8), следовательно, четыре точки $A_3A_4v_1v_2$ лежат на одной прямой. Сложное отношение этих точек, взятых в следующем порядке

$$A_3v_1A_4v_2,$$

равно

$$\frac{\omega_1^4 + \lambda_2\omega_2^4}{\omega_1^3 + \lambda_2\omega_2^3} : \frac{\omega_1^4 + \lambda_1\omega_2^4}{\omega_1^3 + \lambda_1\omega_2^3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = W,$$

но это есть основное отношение для рассматриваемого квазитетраэдрального комплекса.

Подобное же имеет место, очевидно, и для четверки точек на прямой $[\sigma_1'\sigma_2']$. Поскольку теперь четверка касательных к кривым $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$, $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ пересекает три скрещивающиеся прямые A_1A_2, A_3A_4, $[\sigma_1'\sigma_2']$, то мы можем высказать следующее предложение:

четверка касательных к кривым $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$, $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$, определяемым уравнениями (3.11), принадлежит одной и той же квадрике. Этой же квадрике, но другому семейству, принадлежат и прямые A_1A_2, A_3A_4, $[\sigma_1'\sigma_2']$.

Четыре поверхности Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 можно еще двумя способами разбить на пары. Для такого разбиения могут быть дословно повторены все предыдущие рассуждения, относящиеся к парам (Σ_1, Σ_2) и (σ_1, σ_2). Возьмем, например, пары (Σ_1, σ_1) и (Σ_2, σ_2). Линии пересечения касательных плоскостей каждой пары определяются соответственно плюккеровыми координатами:

$$[\Sigma_1', \sigma_1'] = \left[A_3 + \frac{\beta_1}{W} A_1, \quad A_4 - \frac{\beta_1}{\lambda_1} A_1\right], \ [\Sigma_2', \sigma_2'] = \left[A_4 + \frac{\beta_1}{W} A_2, \quad A_3 - \beta_1\lambda_2 A_2\right]. \tag{3.13}$$

Пусть линейчатая поверхность комплекса представлена формами (3.5) и пусть $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$, $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ — линии, вырезаемые ею на поверхностях Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2. Потребуем, чтобы касательные к линиям $\bar{\Sigma}_2$, $\bar{\sigma}_2$ пересекали прямую $[\Sigma_1', \sigma_1']$, а касательные к линиям $\bar{\Sigma}_1$, σ_1 пересекали прямую $[\Sigma_2', \sigma_2']$. Это приводит к следующим двум независимым равенствам:

$$\begin{aligned} \omega_1^3 + \lambda_2\omega_2^3 &= 0, \\ \omega_1^4 + \lambda_1\omega_2^4 &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Наконец, разобьем четверку поверхностей Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 на пары (Σ_1, σ_2), (Σ_2, σ_1). Линии пересечения касательных плоскостей к поверхностям каждой пары имеют следующие плюккеровы координаты:

$$[\Sigma_1', \sigma_2'] = \left[A_3 + \beta_1 A_1, \quad A_4 - \frac{\beta_1}{\lambda_1} A_1\right], \quad [\Sigma_2', \sigma_1'] = [A_4 + \beta_1 A_2, \quad A_3 - \beta_1\lambda_2 A_2]. \tag{3.15}$$

Потребуем, чтобы касательные к линиям $\bar{\Sigma}_2$, $\bar{\sigma}_1$ пересекали прямую $[\Sigma_1', \sigma_2']$, а касательные к линиям $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ пересекали прямую $[\Sigma_2', \sigma_1']$. Это приводит к двум новым равенствам

$$\begin{aligned} \omega_1^3 + \lambda_1\omega_2^3 &= 0, \\ \omega_1^4 + \lambda_2\omega_2^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Уравнения (3.14) и (3.16) определяют еще две косых линейчатых поверхности комплекса, проходящих через луч A_1A_2.

Каждая из поверхностей (3.14) и (3.16) определяет квадрику. Квадрика, соответствующая поверхности (3.14), задается тремя прямыми $[A_1A_2]$, $[\Sigma_1', \sigma_1'[$, $[\Sigma_2', \sigma_2']$. Квадрика, соответствующая поверхности (3.16), задается прямыми $[A_1A_2]$, $[\Sigma_1'\sigma_2']$, $[\Sigma_2'\sigma_1']$.

Возьмем какую-либо из четырех касательных плоскостей, например, Σ_1'. В этой плоскости лежат три прямые

$$[A_3A_4], \ [\Sigma_1'\sigma_1'], \ [\Sigma_1'\sigma_2'].$$

Эти прямые не проходят через одну точку. Две последних пересекают первую в точках

$$o_1 = A_3 + \lambda_2 A_4, \quad o_2 = A_3 + \lambda_1 A_4.$$

Легко видеть, что сложное отношение четырех точек $A_3 o_2 A_4 o_1$ равно W.

Подобное же предложение имеет место и для других линий пересечения касательных плоскостей между собой. Поскольку положение точек $A_3 A_4$ определяется дифференциально-геометрической структурой комплекса, то имеет смысл исследовать расположение всех тех точек, которые на остальных прямых являются аналогом точек $A_3 A_4$.

4. Основные поверхности квазитетраэдрального комплекса первого рода

Обозначим вершины тетраэдра, гранями которого являются плоскости Σ_1', Σ_2', σ_1', σ_2', буквами

$$o_1 \equiv (\Sigma_1' \Sigma_2' \sigma_1'), \quad o_2 \equiv (\Sigma_1' \Sigma_2' \sigma_2'), \quad O_1 \equiv (\sigma_1' \sigma_2' \Sigma_1'), \quad O_2 \equiv (\sigma_1' \sigma_2' \Sigma_2'). \qquad (4.1)$$

Тогда

$$\Sigma_1' = (o_1 o_2 O_1), \quad \Sigma_2' = (o_1 o_2 O_2);$$
$$\sigma_1' = (O_1 O_2 o_1), \quad \sigma_2' = (O_1 O_2 o_2).$$

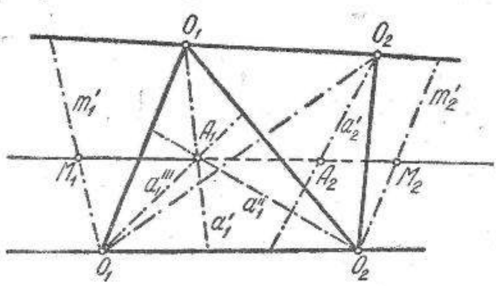
Легко показать, что

$$o_1 = A_3 + \lambda_2 A_4, \qquad o_2 = A_3 + \lambda_1 A_4; \qquad (4.2)$$
$$O_1 = A_1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1} A_4, \quad O_2 = A_2 - \frac{1}{\beta_1 \lambda_2} A_3.$$

Возьмем теперь три линейчатых поверхности (3.11), (3.14) и (3.16). Назовем их основными поверхностями комплекса. Каждая из этих поверхностей вырезает на поверхностях Σ_1, Σ_2, σ_1, σ_2 четверку линий, касательные к которым пересекают соответствующую пару противоположных ребер тетраэдра:

1) поверхности (3.11) соответствует пара $(o_1 o_2, O_1 O_2)$;
2) поверхности (3.14) — пара $(o_1 O_1, o_2 O_2)$;
3) поверхности (3.16) — пара $(o_1 O_2, o_2 O_1)$.

Касательные к кривым, проходящим через точки A_1, A_2, M_1, M_2, будем обозначать буквами a_1', a_1'', a_1''', a_2' и т. д., причем количество штрихов соответствует номеру кривой в только что приведенном списке.



Пусть теперь A_1 — одна из четырех точек A_1, A_2, M_1, M_2. Тогда плоскость Σ_1', касательная к поверхности Σ_1 в этой точке, будет совпадать с гранью $O_1 o_1 o_2$ тетраэдра $O_1 O_2 o_1 o_2$. Чтобы получить прямые a_1', a_1'' и a_1''', касательные к кривым, вырезаемым на Σ_1 тремя основными поверхностями, достаточно соединить точку A_1 с вершинами O_1, o_1, o_2 треугольника $O_1 o_1 o_2$ (см. чертеж).

Возьмем какую-нибудь четверку прямых, например, четверку a_1', a_2', m_1', m_2', определяемую первой базисной поверхностью. Легко видеть, что каждая из прямых этой четверки проходит в соответствующей грани тетраэдра через одну из его вершин, причем нет такой вершины, через которую проходили бы две прямые четверки.

Если одна из прямых задана, например, a_1', то остальные три определяются однозначно. Действительно, пусть a_1' проходит через точку O_1. В таком случае однозначно определяются противоположные ребра тетраэдра O_1O_2, o_1o_2. Прямая a_2' пройдет через точку O_2, так как в плоскости $o_1o_2O_2$ только эта прямая проходит через точку A_2 и пересекает ребра O_1O_2, o_1o_2. Аналогично, прямая m_1' пройдет через точку o_1, а прямая m_2' — через точку o_2.

Основная поверхность зависит от того тетраэдра, к которому отнесен этот комплекс. В частности, если вершины тетраэдра помещены в точки A_1 и M_1, то мы придем ко второй основной поверхности, если в точки A_1M_2 — к третьей.

Легко показать, что основные поверхности пересекают друг друга вдоль их общей образующей инволютивно (см. [7]). Действительно, условие инволютивного пересечения двух линейчатых поверхностей $\omega_2^3 : \omega_1^4 : \omega_2^4$ и $\bar{\omega}_2^3 : \bar{\omega}_1^4 : \bar{\omega}_2^4$ имеет вид

$$\omega_2^3\bar{\omega}_1^4 + \bar{\omega}_2^3\omega_1^4 - \omega_1^3\bar{\omega}_2^4 - \bar{\omega}_1^3\omega_2^4 = 0. \tag{4.3}$$

Возьмем две каких-нибудь основных поверхности, например, первую и вторую:

$$\omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^4 = \lambda_1\lambda_2\omega_2^3;$$
$$\bar{\omega}_1^4 = -\lambda_1\bar{\omega}_2^4, \quad \bar{\omega}_2^3 = \frac{1}{\lambda_2}\bar{\omega}_2^4.$$

Внося это в равенство (4.3), получим тождество. Аналогично доказывается справедливость утверждения для двух других пар основных поверхностей.

Основные поверхности определяются дифференциальной окрестностью первого порядка. Дифференциальная окрестность второго порядка естественным образом выделяет три главных поверхности. У каждого тетраэдрального комплекса главные поверхности всегда совпадают с основными. Остается открытым вопрос о том, существуют ли иные комплексы, обладающие таким свойством.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reye. Geometrie der Lage, 1868.
2. R. Sturm. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, Leipzig, 1892.
3. K. Lindler. Die Entwiclung und der gegenwartige Stand der differentiellen Liniengeometrie, Jahresbericht Dt. Math. Ver., B. 15., 1906.
4. Н. И. Кованцов. Квазиспециальные комплексы. Матем. сб., 41, 3, 1957.
5. Н. И. Кованцов. Канонический тетраэдр комплекса прямых в проективном пространстве. Укр. матем. журн., т. 8, № 2, 1956.
6. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М. — Л., 1948.
7. Н. И. Кованцов. К проективной теории комплекса прямых. Докл. АН СССР, т. 95, № 5, 1954.

Поступила 19 сентября 1964 г.

О МЕРЕ МНОЖЕСТВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ ПОДМНОЖЕСТВ

А. В. Луценко (Харьков)

Пусть в пространстве E_n заданы непрерывная r-членная группа G_r преобразований

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

и q-параметрическое множество S геометрических элементов

$$F(x_1, \ldots, x_n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_q) = 0, \tag{2}$$

где параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ — существенны.

М. Стока [1] показал, что если группа G_r оставляет множество S инвариантным, то она порождает в пространстве параметров M_q группу $H_r(\alpha)$ преобразований

$$\alpha'_k = g_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_q,\ \ a_1, \ldots, a_r), \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

изоморфную группе G_r. При этом если соответствующими друг другу инфинитезимальными операторами групп являются

$$
\begin{gathered}
X_k(f) = \xi^i_k(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},\\
Y_k(f) = \eta^j_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\frac{\partial f}{\partial \alpha_j},\\
(k = 1, 2, \ldots, r),
\end{gathered} \tag{3}
$$

то на многообразии (2) имеют место тождества

$$\sum_{i=1}^{n}\xi^i_k\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{q}\eta^j_k\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{4}$$

Однако не были указаны достаточные условия для того, чтобы группа G_r оставляла инвариантным множество S. Исходя из соотношений (4), мы докажем теорему (§ 2), устанавливающую такие условия.

Как известно, для определения плотности меры множества S достаточно знать инфинитезимальные операторы группы $H_r(\alpha)$, нахождение которых не представляет затруднений, если известны конечные преобразования группы G_r. Мы покажем (§ 2), как находить инфинитезимальные операторы группы $H_r(\alpha)$, зная лишь инфинитезимальные операторы группы G_r.

В § 3 рассматривается вопрос об измеримых подмножествах неизмеримого множества геометрических элементов. Здесь же найдены все измеримые относительно евклидовых движений и афинных преобразований подмножества кривых 2-го порядка.

В дальнейшем мы предполагаем, что рассматриваемые нами функции дифференцируемы столько раз, сколько это необходимо для рассуждений. Относительно рассматриваемых многообразий мы предположим, что они не содержат особых точек.

§ 1. Обозначим через r_ν ранги матриц

$$\begin{pmatrix} F_{\alpha_k} \\ \dfrac{\partial F_{\alpha_k}}{\partial x_i} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial^\nu F_{\alpha_k}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_\nu}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, q \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $F_{\alpha_k} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_k}$. Известно [2], что число существенных параметров функции $F(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ (впредь такая функция будет записываться в виде $F(x, \tilde{\alpha})$) равно максимальному числу, содержащемуся в последовательности $\{r_\nu\}$. Следовательно, параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ функции $F(x, \alpha)$ существенны тогда и только тогда, когда ранг хотя бы одной матрицы (5) равен q.

Лемма. Рассмотрим уравнение

$$\eta_1\varphi_1(x, \alpha) + \eta_2\varphi_2(x, \alpha) + \cdots \eta_q\varphi_q(x, \alpha) = \psi(x, \alpha) \tag{6}$$

с неизвестными $\eta_1, \ldots, \eta_q$. Для того чтобы это уравнение имело единственное решение, независящее от переменных $x_1, \ldots, x_n$, необходимо и достаточно, чтобы ранг по крайней мере одной из матриц последовательности

$$\begin{pmatrix} \varphi_k(x, \alpha) \\ \dfrac{\partial \varphi_k(x, \alpha)}{\partial x_i} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial^\nu \varphi_k(x, \alpha)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_\nu}} \end{pmatrix} \begin{matrix} (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \\ (k = 1, 2, \ldots, q) \end{matrix} \tag{7}$$

был равен q и ранги матриц

$$\begin{pmatrix} \varphi_k(x, \alpha) & \psi(x, \alpha) \\ \dfrac{\partial \varphi_k(x, \alpha)}{\partial x_i} & \dfrac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial x_i} \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^\nu \varphi_k(x, \alpha)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_\nu}} & \dfrac{\partial^\nu \varphi(x, \alpha)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_\nu}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

не превосходили q.

Не нарушая общности рассуждений, предположим, что равен q ранг матрицы (7) при $\nu = q - 1$. Тогда система уравнений

$$\eta_1 \frac{\partial^k \varphi_1}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} + \eta_2 \frac{\partial^k \varphi_2}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} + \cdots + \eta_q \frac{\partial^k \varphi_q}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k \psi}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} \tag{9}$$

имеет единственное решение $\eta_1, \ldots, \eta_q$.

Покажем, что $\eta_k = \eta_k(\alpha)$. В силу условий леммы функции η_k удовлетворяют также уравнениям

$$\eta_1 \frac{\partial^q \varphi_1}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_q}} + \cdots + \eta_q \frac{\partial^q \varphi_q}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_q}} = \frac{\partial^q \psi}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_q}}. \tag{10}$$

Последовательно дифференцируя по x_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ каждое из уравнений (9), получим систему

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial^k\varphi_1}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}+\cdots+\frac{\partial\eta_q}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial^k\varphi_q}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}+\eta_1\frac{\partial^{k+1}\varphi_1}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}\partial x_s}+$$
$$+\cdots+\eta_q\frac{\partial^{k+1}\varphi_q}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}\partial x_s}=\frac{\partial^{k+1}\psi}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}\partial x_s}, \tag{11}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$.

Учитывая соотношения (9) и (10), имеем

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial^k\varphi_1}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}+\cdots+\frac{\partial\eta_q}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial^k\varphi_q}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}=0,\quad (s=1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\eta_k}{\partial x_s}=0.$$

Таким образом, $\eta_k = \eta_k(\alpha)$.

Необходимость условий леммы следует из системы уравнений, полученной последовательным дифференцированием уравнения (6) по $x_1, \ldots, x_n$.

§ 2. Инфинитезимальные операторы группы (1) обозначим через

$$X_k(f) = \xi_k^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

Теорема. Для того, чтобы группа (1) оставляла инвариантным множество (2), порождая при этом в пространстве M_q группу $H_r(\alpha)$, изоморфную группе (1), необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц каждой последовательности

$$\begin{pmatrix} F_{\alpha_s} & X_k(F) \\ \dfrac{\partial F_{\alpha_s}}{\partial x_i} & \dfrac{\partial X_k(F)}{\partial x_i} \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^\nu F_{\alpha_s}}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_\nu}} & \dfrac{\partial^\nu X_k(F)}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_\nu}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots, r \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{13}$$

не превосходили q. При этом коэффициенты инфинитезимальных операторов $Y_k(f) = \eta_k^i\dfrac{\partial f}{\partial\alpha_i}$ группы $H_r(\alpha)$ удовлетворяют (по крайней мере на многообразии $F(x, \alpha) = 0$) уравнениям

$$X_k(F) + \sum_{i=1}^{q}\eta_k^i(\alpha)\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial\alpha_i} = 0\quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{14}$$

Как показал М. Стока [1], группа (1), оставляя инвариантным множества (2), порождает в пространстве параметров M_q группу $H_r(\alpha)$, изоморфную группе (1). При этом по крайней мере на многообразии (2) имеют место тождества (14).

Последовательно дифференцируя соотношения (14) по $x_1, \ldots, x_n$, получим системы уравнений, из которых следует (с учетом существенности параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ функции $K(x, \alpha)$): ранги матриц последовательности (13) не превосходят q.

Наоборот, пусть ранги матриц (13) не превосходят q. Так как параметры α_k существенны, то, не нарушая общности, можно считать, что равен q ранг матрицы

$$\begin{matrix} F_{\alpha_k} \\ \dfrac{\partial F_{\alpha_k}}{\partial x_i} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial^{q-1} F_{\alpha_k}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{q-1}}} \end{matrix} \tag{15}$$

На основании леммы заключаем, что уравнение

$$\sum_{j=1}^{q} \eta_k^j F_{\alpha_j} + X_k(F) = 0 \tag{16}$$

имеет (единственное) решение $\eta_k'(\alpha), \ldots, \eta_k(\alpha)$.

Известно, что инфинитезимальные операторы группы G_r удовлетворяют соотношениям

$$(X_i, X_j) f = c_{ij}^1 X_1(f) + c_{ij}^2 X_2(f) + \cdots + c_{ij}^r X_r(f), \tag{17}$$

где c_{ij}^s — структурные константы группы. Покажем, что операторы

$$Y_k(f) = \eta_k^i(\alpha) \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{18}$$

где функции $\eta_k', \ldots, \eta_k^q$ являются решением k-го уравнения системы (14), удовлетворяют тем же соотношениям, то есть, покажем, что

$$\begin{matrix} \mu_{ij}^1 \equiv c_{ij}^1 \eta_1' + c_{ij}^2 \eta_2' + \cdots + c_{ij}^r \eta_r' - [Y_i(\eta_j') - Y_j(\eta_i')] = 0 \\ \cdot \\ \mu_{ij}^q \equiv c_{ij}^1 \eta_1^q + c_{ij}^2 \eta_2^q + \cdots + c_{ij}^r \eta_r^q - [Y_i(\eta_j^q) - Y_j(\eta_i^q)] = 0. \end{matrix} \tag{19}$$

Так как

$$(X_i + Y_i,\ X_j + Y_j) f = (X_i,\ X_j) f + (Y_i,\ Y_j) f$$

и в силу (16)

$$(X_i + Y_i,\ X_j + Y_j) F \equiv 0,$$

то

$$(X_i,\ X_j) F = -(Y_i,\ Y_j) F,$$

или на основании (17)

$$(Y_i,\ Y_j) F = -\sum_{\lambda=1}^{r} c_{ij}^\lambda X_\lambda(F).$$

С другой стороны, соотношения (16) дают

$$X_\lambda(F) = -Y_\lambda(F).$$

Подставляя в предыдущее равенство, получаем

$$(Y_i,\ Y_j) F = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{ij}^\lambda Y_\lambda(F),$$

или

$$\sum_{\lambda=1}^{r} c_{ij}^\lambda Y_\lambda(F) - (Y_i,\ Y_j) F = 0.$$

Учитывая обозначения (19), имеем

$$\mu_{ij}^1 F_{\alpha_1} + \mu_{ij}^2 F_{\alpha_2} + \cdots + \mu_{ij}^q F_{\alpha_q} = 0.$$

Дифференцируя это соотношение $q-1$ раз по $x_1, \ldots, x_n$, получаем систему уравнений

$$\mu_{ij}^1 \frac{\partial^k F_{\alpha_1}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} + \cdots + \mu_{ij}^q \frac{\partial^k F_{\alpha_q}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} = 0, \tag{20}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1).$$

Так как ранг матрицы (15) равен q, то из этой системы заключаем

$$\mu_{ij}^1 = \mu_{ij}^2 = \cdots = \mu_{ij}^q = 0.$$

Итак, операторы $Y_k(f)$ образуют группу, изоморфную группе G_r.

Покажем теперь, что многообразие

$$F(x, \alpha) = 0$$

под действием любого преобразования группы G_r переходит в многообразие того же семейства (2), т. е. многообразие

$$F(x', \alpha) = 0$$

есть не что иное, как многообразие

$$F(x, \alpha') = 0.$$

Пусть значения $x_1', \ldots, x_n'$ и $\alpha_1', \ldots, \alpha_q'$ соответствуют набору параметров $a_1, \ldots, a_r$ при преобразованиях соответственно групп G_r и $H_r(\alpha)$. Раскладывая в ряд по степеням параметров a_k функции $F(x', \alpha)$ и $F(x, \alpha')$ и пренебрегая бесконечно малыми порядка выше 1-го, получаем

$$F(x', \alpha) + F(x, \alpha') = 2F(x, \alpha) + \sum_{k=1}^{r} [X_k(F) + Y_k(F)]\, a_k.$$

Учитывая, что на многообразии $F(x, \alpha) = 0$ выполнены равенства $X_k(F) + Y_k(F) = 0$, заключаем, что точки, связанные соотношением $F(x, \alpha) = 0$, при преобразовании группы G_r переходят в точки, для которых $F(x', \alpha) = -F(x, \alpha')$. А это означает, что многообразие $F(x', \alpha) = 0$ эквивалентно многообразию $F(x, \alpha') = 0$.

Таким образом, группа G_r оставляет инвариантным множество (2), порождая при этом в пространстве M_q параметров группу $H_r(\alpha)$, единственность которой следует из того, что уравнения (14), которым должны удовлетворять коэффициенты инфинитезимальных операторов группы $H_r(\alpha)$, при условиях теоремы имеют единственное решение.

Рассмотрим примеры.

1. Группа евклидовых движений на плоскости оставляет инвариантным множество прямых

$$F \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 1 = 0.$$

Действительно, инфинитезимальными операторами группы являются

$$X_1(f) = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad X_3(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

и матрицы (13) с учетом соотношения $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 1 = 0$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_1 & -\frac{1+\alpha_1 x_1}{\alpha_2} & \frac{-\alpha_1(1+\alpha_1 x_1)}{\alpha_2} - \alpha_2 x_1 \\ 1 & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & -\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} - \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 & \frac{-(1+\alpha_1 x_1)}{\alpha_2} & \alpha_1 \\ 1 & \frac{-\alpha_1}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \frac{-(1+\alpha_1 x_1)}{\alpha_r} & \alpha_2 \\ 1 & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Ранги этих матриц равны 2, т. е. выполнены условия теоремы.

Найдем инфинитезимальные операторы группы $H_3(\alpha)$. Для этого нужно решить уравнение типа (14):

$$\eta_1^1 x_1 - \eta_1^2 \frac{1}{\alpha_2}(1+\alpha_1 x_1) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1+\alpha_1 x_1) - \alpha_2 x_1 = 0;$$

$$\eta_2^1 x_1 - \eta_2^2 \frac{1}{\alpha_r}(1+\alpha_1 x_1) + \alpha_1 = 0;$$

$$\eta_3^1 x_1 - \eta_3^2 \frac{1}{\alpha_2}(1+\alpha_1 x_1) + \alpha_2 = 0.$$

Дифференцируя каждое из этих уравнений, имеем

$$\eta_1^1 x_1 - \eta_1^2 \frac{1+\alpha_1 x_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1(1+\alpha_1 x_1)}{\alpha_2} + \alpha_2 x_1; \qquad \eta_2^1 x_1 - \eta_2^2 \frac{1+\alpha_1 x_1}{\alpha_2} = \alpha_1;$$

$$\eta_1^1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\eta_1^2 = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} + \alpha_2. \qquad \eta_2^1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\eta_2^2 = 0.$$

$$\eta_3^1 x_1 - \eta_3^2 \frac{1+\alpha_1 x_1}{\alpha_2} = \alpha_2;$$

$$\eta_3^1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\eta_3^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$\eta_1^1 = \alpha_2, \qquad \eta_1^2 = -\alpha_1;$$
$$\eta_2^1 = \alpha_1^2, \qquad \eta_2^2 = \alpha_1\alpha_2;$$
$$\eta_3^1 = \alpha_1\alpha_2, \qquad \eta_3^2 = \alpha_2^2.$$

Таким образом, группа $H_3(\alpha)$ имеет вид

$$Y_1(f) = \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2};$$

$$Y_2(f) = \alpha_1^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \alpha_1\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2};$$

$$Y_3(f) = \alpha_1\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \alpha_2^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}.$$

2. Легко проверить, что группа афинных преобразований, инфинитезимальными операторами которой являются

$$X_1(f) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_2(f) = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

$$X_3(f) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_4(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_5(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

оставляет инвариантным множество парабол

$$x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_1^2 x_2^2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 = 0. \tag{21}$$

Найдем инфинитезимальные операторы группы $H_5(\alpha)$. Для этого нужно решить уравнения типа (14):

$$
\begin{aligned}
&2x_2(x_1+\alpha_1x_2)\,\eta_1^1+x_1\eta_1^2+x_2\eta_1^3+\eta_1^4+2\,(x_1^2-\alpha_1^2x_2^2)+\alpha_2x_1-\alpha_3x_2=0\\
&2x_2(x_1+\alpha_1x_2)\,\eta_2^1+x_1\eta_2^2+x_2\eta_2^3+\eta_2^4+x_2\,(2x_1+2\alpha_1x_2+\alpha_2)=0\\
&2x_2(x_1+\alpha_1x_2)\,\eta_3^1+x_1\eta_3^2+x_2\eta_3^3+\eta_3^4+x_1\,(2\alpha_1x_1+2\alpha_1^2x_2+\alpha_3)=0;\\
&2x_2(x_1+\alpha_1x_2)\,\eta_4^1+x_1\eta_4^2+x_2\eta_1^3+\eta_4^4+2x_1+2\alpha_1x_2+\alpha_2=0;\\
&2x_2(x_1+\alpha_1x_2)\,\eta_5^1+x_1\eta_5^2+x_2\eta_5^3+\eta_5^4+2\alpha_1x_1+2\alpha_1^2x_2+\alpha_3=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Дифференцируя, например, последовательно три раза четвертое из этих уравнений, где в силу (21) можно считать x_2 независимой переменной, получим для определения функций η_4^k систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&2x_2(x_1+\alpha_1x_2)\,\eta_4^1+x_1\eta_4^2+x_2\eta_4^3+\eta_4^4+2x_1+2\alpha_1x_2+\alpha_2=0;\\
&2\,(x_2x_1^1+x_1+2\alpha_1x_2)\,\eta_4^1+x_1^1\eta_4^2+\eta_4^3+2x_1^1+2\alpha_1=0;\\
&2\,(x_2x_1^{11}+2x_1^1+2\alpha_1)\,\eta_4^1+x_1^{11}\eta_4^2+2x_1^{11}=0;\\
&2\,(x_2x_1^{(3)}+3x_1^{11})\,\eta_4^1+x_1^{(3)}\eta_4^2+2x_1^{(3)}=0.
\end{aligned}
$$

Отсюда находим $\eta_4^1=0$, $\eta_4^2=-2$, $\eta_4^3=-2\alpha_1$, $\eta_4^4=-\alpha_2$. Поступая аналогично с каждым из уравнений (22), найдем

$$
\begin{gathered}
\eta_1^1=2\alpha_1,\quad \eta_1^2=\alpha_2,\quad \eta_1^3=3\alpha_3,\quad \eta_1^4=2\alpha_4;\\
\eta_2^1=-1,\quad \eta_2^2=0,\quad \eta_2^3=-\alpha_2,\quad \eta_2^4=0;\\
\eta_3^1=\alpha_1^2,\quad \eta_3^2=2\alpha_1\alpha_2-\alpha_3,\quad \eta_3^3=2\alpha_1\alpha_3,\quad \eta_3^4=2\alpha_1\alpha_4;\\
\eta_5^1=0,\quad \eta_5^2=-2\alpha_1,\quad \eta_5^3=-2\alpha_1^2,\quad \eta_5^4=-\alpha_3.
\end{gathered}
$$

Таким образом,

$$
\begin{gathered}
Y_1(f)=2\alpha_1\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}+3\alpha_3\frac{\partial f}{\partial\alpha_3}+2\alpha_4\frac{\partial f}{\partial\alpha_4};\\
Y_2(f)=-\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}-\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\alpha_3};\\
Y_3(f)=\alpha_1^2\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}+(2\alpha_1\alpha_2-\alpha_3)\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}+2\alpha_1\alpha_3\frac{\partial f}{\partial\alpha_3}+2\alpha_1\alpha_4\frac{\partial f}{\partial\alpha_4};\\
Y_4(f)=-2\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}-2\alpha_1\frac{\partial f}{\partial\alpha_3}-\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\alpha_4};\\
Y_5(f)=-2\alpha_1\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}-2\alpha_1^2\frac{\partial f}{\partial\alpha_3}-\alpha_3\frac{\partial f}{\partial\alpha_4}
\end{gathered}
$$

являются инфинитезимальными операторами группы $H_5(\alpha)$.

§ 3. Пусть группа G_r оставляет инвариантным множество (2).

Определение. Мы назовем множество (2) измеримым относительно группы G_r, если измерима группа $H_r(\alpha)$, порожденная в пространстве M_q параметров группой G_r. Меру группы $H_r(\alpha)$ (интегральный вариант q-го порядка) мы будем считать мерой множества (2).

Известно ([3] и [4]), что для измеримости группы $H_r(\alpha)$ необходимо и достаточно, чтобы она была транзитивной и чтобы выполнялись соотношения

$$
\sum_{j=1}^{q} Y_j(\lambda_{ij})=0\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,r-q),
\tag{23}
$$

причем $\lambda_{ij}(\alpha)$ определяются из соотношений

$$
Y_{q+i}(f)=\sum_{j=1}^{q}\lambda_{ij}Y_j(f),
$$

где $Y_1(f),\ \ldots,\ Y_q(f)$ — линейно несвязанные инфинитезимальные операторы группы $H_r(\alpha)$. В частности, простотранзитивная группа измерима, так как в этом случае условия (23) выполнены тождественно.

Предположим, что условия (23) не имеют места, т. е. множество (2) неизмеримо. Поставим задачу о выделении измеримых подмножеств этого множества. Подмножества семейства (2) определяются соотношениями вида

$$\begin{aligned}&\varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = 0;\\ &\varphi_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = 0, \quad (m < q).\end{aligned} \tag{24}$$

Любой элемент множества (2), определяемый параметрами $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, которые удовлетворяют соотношениям (24), должен переводиться преобразованием группы G_r в элемент множества (2), параметры которого удовлетворяют тем же условиям (24). А это означает, что соответствующее преобразование группы $H_r(\alpha)$ переводит точку $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ многообразия (24) в точку этого же многообразия. То есть многообразие (24) должно быть инвариантным для группы $H_r(\alpha)$.

Таким образом, для того чтобы соотношения (24) выделяли подмножество, которое группа G_r оставляет инвариантным, необходимо и достаточно, чтобы многообразие (24) было инвариантным относительно группы $H_r(\alpha)$.

Докажем следующую *лемму:*

Пусть группа G_r с инфинитезимальными операторами

$$X_k(f) = \xi_k^j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (k = 1, 2, \ldots r) \tag{25}$$

транзитивна. Не нарушая общности, можно считать, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_n^1 & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix}$$

отличен от тождественного нуля, а

$$X_{n+s}(f) = \lambda_{s1}(x)X_1(f) + \cdots + \lambda_{sn}(x)X_n(f), \quad (s = 1, 2, \ldots, r-n). \tag{26}$$

Тогда имеют место следующие формулы:

$$X_k(\Delta) = \Delta \cdot \left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \xi_k^j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}(c_{kj}^j + c_{kj}^{n+1}\lambda_{1j} + c_{kj}^{n+2}\lambda_{2j} + \cdots + c_{kj}^{r}\lambda_{r-nj})\right]; \tag{I}$$

$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

$$X_{n+s}(\Delta) = \Delta \cdot \sum_{k=1}^{n}\lambda_{sk}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \xi_k^j}{\partial x_j} + c_{kj}^j + c_{kj}^{n+1}\lambda_{1j} + \cdots + c_{kj}^{r}\lambda_{r-nj}\right)\right], \tag{II}$$

где c_{kj}^p — структурные константы группы.

На основании равенств

$$X_k(\xi_j^s) - X_j(\xi_k^s) = c_{kj}^1\xi_1^s + \cdots + c_{kj}^r\xi_r^s \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} k, j = 1, 2, \ldots, r \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

легко найти

$$X_k(\Delta) = \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{j-1}^1 & \xi_{j-1}^2 & \ldots & \xi_{j-1}^n \\ X_j(\xi_k^1) & X_j(\xi_k^2) & \ldots & X_j(\xi_k^n) \\ \xi_{j+1}^1 & \xi_{j+1}^2 & \ldots & \xi_{j+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{j-1}^1 & \xi_{j-1}^2 & \dots & \xi_{j-1}^n \\ \sum\limits_{\nu=1}^{r} c_{kj}^{\nu}\xi_\nu^1 & \sum\limits_{\nu=1}^{r} c_{kj}^{\nu}\xi_\nu^2 & \dots & \sum\limits_{\nu=1}^{r} c_{kj}^{\nu}\xi_\nu^n \\ \xi_{j+1}^1 & \xi_{j+1}^2 & \dots & \xi_{j+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix}.$$

Обозначим определители, стоящие под знаками первой и второй сумм, соответственно, через Δ_j и δ_j.

Тогда имеем

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta_j = \frac{\partial\xi_k^1}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^1\Delta_{j1}\right) + \frac{\partial\xi_k^2}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^1\Delta_{j2}\right) + \dots + \frac{\partial\xi_k^n}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^1\Delta_{jn}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{\partial\xi_k^1}{\partial x_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^n\Delta_{j1}\right) + \frac{\partial\xi_k^2}{\partial x_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^n\Delta_{j2}\right) + \dots + \frac{\partial\xi_k^n}{\partial x_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^n\Delta_{jn}\right),$$

где Δ_{jk} — алгебраическое дополнение элемента ξ_j^k определителя Δ. Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j^k\Delta_{js} = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq s \\ \Delta \text{ при } k = s \end{cases}$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta_j = \Delta\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\xi_k^j}{\partial x_j}.$$

Представив определитель δ_j в виде суммы r определителей и учитывая, что в силу (26)

$$\xi_{n+k}^s = \lambda_{k1}\xi_1^s + \lambda_{k2}\xi_2^s + \dots + \lambda_{kn}\xi_n^s, \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, r-n \\ s = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

получаем

$$\delta_j = c_{kj}^j\Delta + \Delta\left(c_{kj}^{n+1}\lambda_{1j} + c_{kj}^{n+2}\lambda_{2j} + \dots + c_{kj}^{r}\lambda_{r-nj}\right).$$

Подставив в формулу

$$X_k(\Delta) = \sum_{j=1}^{n}(\Delta_j + \delta_j)$$

выражения для $\sum\limits_1^n\Delta_j$ и $\sum\limits_1^n\delta_j$, получаем соотношение (I).

Следствие. Пусть определитель Δ раскладывается на множители

$$\Delta = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\dots\,\varphi_m(x).$$

Если многообразия $\varphi_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ не имеют общих точек и если на этих многообразиях коэффициенты $\lambda_{kj}(x)$ принимают конечные значения, то каждое из этих многообразий является инвариантным для группы G_r.

Обозначим через $\psi(x) = \frac{\Delta}{\varphi_k(x)}$.

Тогда

$$X_\lambda(\varphi_k(x)) = X_\lambda\left(\Delta\cdot\frac{1}{\psi}\right) = \Delta\cdot X_\lambda\left(\frac{1}{\psi}\right) + \frac{1}{\psi}X_\lambda(\Delta) = \Delta U(x)$$

и на многообразии $\varphi_k(x) = 0$

$$X_\lambda(\varphi_k(x)) = 0.$$

Ниже мы покажем, что все инвариантные многообразия транзитивной группы содержатся в многообразиях, определяемых уравнением $\Delta = 0$.

Теорема. Если транзитивная группа (25) имеет инвариантное многообразие

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0; \\ \ldots\ldots &\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{28}$$

то в точках этого многообразия необходимо $\Delta = 0$.

В каждой точке инвариантного многообразия (28) должны выполняться равенства

$$X_k(F_\lambda) \equiv \xi_k^1 \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} + \cdots + \xi_k^n \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_n} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что $\Delta = 0$ на многообразии (28).

Вопрос об измеримости подмножества, выделяемого соотношениями (24), решается рассмотрением группы тех преобразований, которые претерпевают точки многообразия (24) при преобразованиях группы $H_r(\alpha)$.

Пусть множество (2) неизмеримо вследствие интранзитивности группы $H_r(\alpha)$. Рассмотрим матрицу коэффициентов инфинитезимальных операторов (18) группы $H_r(\alpha)$:

$$\begin{pmatrix} \eta_1^1 & \ldots & \eta_1^q \\ \eta_2^1 & \ldots & \eta_2^q \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \eta_r^1 & \ldots & \eta_r^q \end{pmatrix}.$$

Так как группа интранзитивна, то ранг этой матрицы $p < q$. Не нарушая общности, будем считать, что минор

$$\begin{vmatrix} \eta_1^1 & \ldots & \eta_1^p \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \eta_p^1 & \ldots & \eta_p^p \end{vmatrix} \neq 0, \tag{29}$$

т. е. что линейно несвязанными являются операторы $Y_1(f), \ldots, Y_p(f)$. В этом случае группа $H_r(\alpha)$ имеет $q - p$ независимых абсолютных инвариантов:

$$\varphi_{p+1}(\alpha), \ \ldots, \ \varphi_q(\alpha).$$

Не нарушая общности, можно считать

$$\frac{D(\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_q)}{D(\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_q)} \neq 0.$$

Покажем, что подмножество множества (2), выделяемое соотношениями

$$\varphi_{p+1}(\alpha) = c_{p+1}, \ \ldots, \ \varphi_q(\alpha) = c_q \tag{30}$$

измеримо, если $p = r$.

Построим группу тех преобразований, которые претерпевают точки многообразия (30) под влиянием преобразований группы $H_r(\alpha)$. Для этого перейдем к новым переменным:

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_p, \ \beta_{p+1} = \varphi_{p+1}, \ \ldots, \ \beta_q = \varphi_q(\alpha).$$

Тогда

$$Y_k(f) = \sum_{i=1}^{p} \eta_k^i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \sum_{\lambda=p+1}^{q} Y_k(\varphi_\lambda) \frac{\partial f}{\partial \beta^\lambda}.$$

Так как $Y_k(\varphi_\lambda) \equiv 0$, окончательно имеем:

$$Y_k(f) = \sum_{i=1}^{p} \eta_k^i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \tag{31}$$

где $\eta_k^i = \eta_k^i(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_q)$, причем β_i играет роль параметров, так как по ним не производится дифференцирование. Из условий (29) и $p = r$ следует, что группа (31) простотранзитивна, следовательно, измерима.

Если $p < r$, то группа (31) будет транзитивной и для того, чтобы подмножество, выделяемое соотношениями (30), было измеримым, необходимо и достаточно выполнение условий (23).

Замечание. Как известно ([3] и [4]), если группа (25) абелева, то плотность $M(x)$ меры этой группы равна $\frac{1}{\Delta}$. Из формулы (I) леммы следует, что если группа простотранзитивна и ее структурные константы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^{j} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{32}$$

то плотность $M(x)$ меры этой группы равна $\frac{1}{\Delta}$. (Утверждение для абелевой группы содержится здесь как частный случай).

Действительно, чтобы функция $M(x)$ была плотностью меры, необходимо и достаточно, чтобы она была единственным, с точностью до мультипликативной константы, решением системы уравнений

$$X_k(M) + M \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_k^j}{\partial x_j} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Но из (I) следует, что $X_k\left(\frac{1}{\Delta}\right) + \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_k^j}{\partial x_j} = 0$. Следовательно, $M = \frac{C}{\Delta}$.

Например, группа

$$X_1(f) = 2x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2z\frac{\partial f}{\partial z};$$
$$X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x};$$
$$X_3(f) = yz\frac{\partial f}{\partial y} + y^2 z\frac{\partial f}{\partial z}$$

простотранзитивна, так как $\Delta = yz(2z - y^2)$. Структурные константы этой группы таковы

$$c_{12}^{1} = 0, \quad c_{12}^{2} = -2, \quad c_{12}^{3} = 0;$$
$$c_{13}^{1} = 0, \quad c_{13}^{2} = 0, \quad c_{13}^{3} = 2;$$
$$c_{23}^{1} = c_{23}^{2} = c_{23}^{3} = 0.$$

Условия (32) выполнены. Следовательно, $M = \frac{1}{yz(2z - y^2)}$.

В работе [6] установлено, что множество кривых второго порядка

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + R = 0 \tag{33}$$

измеримо относительно группы евклидовых движений и афинной группы на плоскости.

4 зак

Найдем подмножества кривых (33), измеримые относительно вышеуказанных групп.

Рассмотрим группу евклидовых движений. Ее инфинитезимальными операторами являются

$$X_1(f) = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_3(f) = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{34}$$

Как показано в [6], эта группа порождает в пространстве M_5 параметров (B, C, D, E, R) группу H_3 с инфинитезимальными операторами

$$\begin{gathered} Y_1(f) = (2B^2 - C + 1)\frac{\partial f}{\partial B} + 2B(1 + C)\frac{\partial f}{\partial C} + (2BD - E)\frac{\partial f}{\partial D} + \\ + (D + 2BE)\frac{\partial f}{\partial E} + 2BR\frac{\partial f}{\partial R}; \\ Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial D} + B\frac{\partial f}{\partial E} + 2D\frac{\partial f}{\partial R}; \\ Y_3(f) = B\frac{\partial f}{\partial D} + C\frac{\partial f}{\partial E} + 2E\frac{\partial f}{\partial R}. \end{gathered} \tag{35}$$

Эта группа интранзитивна. Решим систему уравнений

$$Y_1(f) = 0, \quad Y_2(f) = 0, \quad Y_3(f) = 0,$$

независимые интегралы которой являются абсолютными инвариантами группы H_3. Легко проверить, что эта система имеет два независимых интеграла

$$\frac{B^2 - C}{(1 + C)^2}, \quad \frac{\Delta}{(1 + C)^3},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & B & D \\ B & C & E \\ D & E & R \end{vmatrix}$.

Рассмотрим подмножество кривых второго порядка, выделяемое соотношениями

$$\frac{B^2 - C}{(1 + C)^2} = k_1, \quad \frac{\Delta}{(1 + C)^3} = k_2. \tag{36}$$

Построим группу тех преобразований, которые претерпевают точки многообразия (36) под влиянием преобразований группы (35). С этой целью введем новые переменные, считая $B^2 - C \neq 0$:

$$B_1 = \frac{B^2 - C}{(1 + C)^2}, \quad C, \quad D, \quad E, \quad R_1 = \frac{\Delta}{(1 + C)^3}. \tag{37}$$

Тогда

$$\begin{gathered} Y_1(f) = 2B(1 + C)\frac{\partial f}{\partial C} + (2BD - E)\frac{\partial f}{\partial D} + (D + 2BE)\frac{\partial f}{\partial E}; \\ Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial D} + B\frac{\partial f}{\partial E}; \\ Y_3(f) = B\frac{\partial f}{\partial D} + C\frac{\partial f}{\partial E}. \end{gathered} \tag{38}$$

Здесь $B = B(B_1, C)$ определяется из соотношений (37). Группа (38) просто-транзитивна, следовательно, измерима. Найдем ее меру. Для этого нужно решить систему уравнений

$$\begin{gathered} Y_1(M) + 2\left[3B + (1 + C)\frac{\partial B}{\partial C}\right]M = 0, \\ Y_2(M) = 0, \quad Y_3(M) = 0. \end{gathered}$$

Единственным с точностью до мультипликативной константы решением этой системы является

$$M = \frac{1}{(1+C)^3 \sqrt{C + k_1 (1+C)^2}}.$$

Таким образом, мера подмножества, выделяемого условиями (36), равна

$$\mu = \int \frac{dC\, dD\, dE}{(1+C)^3 \sqrt{C + k_1 (1+C)^2}}.$$

Примечание. Соотношения (36) выделяют подмножество эллипсов (гипербол) с произвольными, но одинаковыми осями. Если же $B^2 - C = 0$, то соотношения (36) принимают вид:

$$B^2 - C = 0, \quad \frac{E - BD}{(1+C)^{3/2}} = \gamma. \tag{39}$$

Введем новые переменные в группе (35):

$$B,\ C_1 = B^2 - C,\ D,\ E_1 = \frac{E - BD}{(1+C)^{3/2}},\ R.$$

Получим

$$Y_1(f) = (1 + B^2)\frac{\partial f}{\partial B} + (2BD - E)\frac{\partial f}{\partial D} + 2BR\frac{\partial f}{\partial R};$$

$$Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial D} + 2D\frac{\partial f}{\partial R};$$

$$Y_3(f) = B\frac{\partial f}{\partial D} + 2E\frac{\partial f}{\partial R}.$$

Здесь $E = BD + E_1(1 + C)^{3/2}$. Эта группа простотранзитивна. Найдем ее меру:

$$Y_1(M) + 5BM = 0, \quad Y_2(M) = 0, \quad Y_3(M) = 0.$$

Отсюда

$$M = (1 + B^2)^{-5/2}.$$

Таким образом, подмножество (39) измеримо и его мера

$$\mu = \int (1 + B^2)^{-5/2}\, dB\, dD\, dR.$$

Примечание. Соотношения (39) выделяют множество парабол с фиксированным параметром $p = \gamma$.

Найдем остальные инвариантные многообразия группы (35). Для этого нужно [5] приравнять нулю миноры наивысшего порядка матрицы коэффициентов операторов (35). Как легко видеть, это означает, что можно найти те многообразия, на которых операторы $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, $Y_3(f)$ линейно связаны, т. е.

$$\lambda_1 Y_1(f) + \lambda_2 Y_2(f) + \lambda_3 Y_3(f) = 0,$$

причем по крайней мере один из коэффициентов λ_k отличен от нуля. Это равенство эквивалентно следующим:

$$\lambda_1(2B^2 - C + 1) = 0;$$
$$\lambda_1 2B(1 + C) = 0;$$
$$\lambda_1(2BD - E) + \lambda_2 + \lambda_3 B = 0;$$
$$\lambda_1(D + 2BE) + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0;$$
$$\lambda_1 2BR + \lambda_2 2D + \lambda_3 2E = 0.$$

Эта система совместна только на двух многообразиях:

$$B^2 - C = 0, \quad E - BD = 0, \tag{40}$$

или

$$B = 0, \quad C = 1. \tag{41}$$

Многообразия (40), (41) являются инвариантными для группы (35). Действительно,

$$Y_k(B^2 - C) = 0, \quad Y_k(E - BD) = 0$$

на многообразии (40), и $Y_k(B) = 0$, $Y_k(C) = 0$ на многообразии (41).

В первом случае, введя новые переменные

$$B, \; C_1 = C - B^2, \; D, \; E_1 = E - BD, \; R,$$

получим, что на многообразии (40) группа (35) принимает вид

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= (1 + B^2)\frac{\partial f}{\partial B} + BD\frac{\partial f}{\partial D} + 2BR\frac{\partial f}{\partial R}; \\ Y_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial D} + 2D\frac{\partial f}{\partial R}; \\ Y_3(f) &= B\frac{\partial f}{\partial D} + 2BD\frac{\partial f}{\partial R}. \end{aligned} \tag{42}$$

Группа (42) интранзитивна. Следовательно, подмножество кривых второго порядка, выделяемое соотношениями (40), неизмеримо. (Это подмножество состоит из всевозможных пар параллельных прямых $x + By = -D \pm \sqrt{D^2 - R}$). Группа (42) имеет одно инвариантное многообразие, определяемое ее абсолютным инвариантом

$$\frac{D^2 - R}{1 + B^2} = \gamma.$$

Точки этого многообразия претерпевают преобразования группы (замена переменных B, D, $R_1 = \frac{D^2 - R}{1 + B^2}$),

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= (1 + B^2)\frac{\partial f}{\partial B} + BD\frac{\partial f}{\partial D}; \\ Y_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial D}; \\ Y_3(f) &= B\frac{\partial f}{\partial D}. \end{aligned} \tag{43}$$

Но многообразие

$$C - B^2 = 0, \; E - BD = 0, \; \frac{D^2 - R}{1 + B^2} = \gamma, \tag{44}$$

как легко видеть, является инвариантным и для группы (35), и точки этого многообразия претерпевают преобразования группы (43). Эта группа транзитивна: операторы $Y_1(f)$ и $Y_2(f)$ не связаны, а $Y_3(f) = BY_2(f)$. Условие измеримости выполнено:

$$Y_2(B) \equiv 0.$$

Решив систему уравнений

$$Y_1(M) + 3BM = 0, \quad Y_2(M) = 0, \quad Y_3(M) = 0,$$

получаем меру подмножества, выделяемого соотношениями (44):

$$\mu = \int (1 + B^2)^{-3/2}\, dB\, dD,$$

или, произведя в интеграле замену переменных $u = \frac{1}{D}$, $v = \frac{B}{D}$,

$$\mu = \int \frac{du\, dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}. \tag{45}$$

Примечание. Соотношения (44) выделяют при каждом фиксированном γ множество пар параллельных прямых $x + By = -D \pm \sqrt{\gamma(1 + B^2)}$, расстояние между которыми равно $2\sqrt{\gamma}$. Формула (45) была получена Картаном в качестве меры множества прямых относительно группы евклидовых движений.

Построим теперь группу преобразований, которые претерпевают точки многообразия (41). Введем новые переменные

$$B,\ C_1 = C - 1,\ D,\ E,\ R.$$

Тогда группа (35) принимает вид

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= -E\frac{\partial f}{\partial D} + D\frac{\partial f}{\partial E}; \\ Y_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial D} + 2D\frac{\partial f}{\partial R}; \\ Y_3(f) &= \frac{\partial f}{\partial E} + 2E\frac{\partial f}{\partial R}. \end{aligned} \tag{46}$$

Эта группа интранзитивна; следовательно, множество, выделяемое соотношениями (41) (множество всевозможных окружностей), неизмеримо. Группа (46) имеет инвариантное многообразие, определяемое ее абсолютным инвариантом

$$D^2 + E^2 - R = \gamma.$$

Но многообразие

$$B = 0, \quad C = 1, \quad D^2 + E^2 - R = \gamma \tag{47}$$

является, как легко видеть, инвариантным и для группы (35), и его точки претерпевают преобразования следующей группы (в группе (46) замена D, E, $R_1 = D^2 + E^2 - R$):

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= -E\frac{\partial f}{\partial D} + D\frac{\partial f}{\partial E}; \\ Y_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial D}; \\ Y_3(f) &= \frac{\partial f}{\partial E}, \end{aligned}$$

которая представляет собой группу евклидовых движений. Ее мера равна

$$\mu = \int dD\, dE.$$

Примечание. Соотношения (47) выделяют при каждом фиксированном γ множество окружностей с одинаковым радиусом.

Резюмируя вышеизложенное, получаем, что

множество кривых второго порядка

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + R = 0,$$

не будучи измеримым относительно группы евклидовых движений, имеет следующие измеримые подмножества:

I. $\frac{B^2 - C}{(1 + C)^2} = k_1$, $\frac{\Delta}{(1 + C)^3} = k_2$;

$$\text{II. } B^2 - C = 0,\ \frac{E - BD}{(1 + C)^{3/2}} = \gamma;$$
$$\text{III. } B^2 - C = 0,\ E - BD = 0,\ \frac{D^2 - R}{1 + B^2} = \gamma;$$
$$\text{IV. } B = 0,\ C = 1,\ D^2 + E^2 - R = \gamma.$$

В работе [6] установлено, что множество кривых (33) неизмеримо относительно группы афинных преобразований. В пространстве M_5 параметров афинной группой порождается группа H_5 с инфинитезимальными операторами:

$$\begin{aligned}
&Y_1(f) = 2B\frac{\partial f}{\partial B} + 4C\frac{\partial f}{\partial C} + D\frac{\partial f}{\partial D} + 3E\frac{\partial f}{\partial E} + 2R\frac{\partial f}{\partial R};\\
&Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial B} + 2B\frac{\partial f}{\partial C} + D\frac{\partial f}{\partial E};\\
&Y_3(f) = (2B^2 - C)\frac{\partial f}{\partial B} + 2BC\frac{\partial f}{\partial C} + (2BD - E)\frac{\partial f}{\partial D} + 2BE\frac{\partial f}{\partial E} + 2BR\frac{\partial f}{\partial R};\\
&Y_4(f) = \frac{\partial f}{\partial D} + B\frac{\partial f}{\partial E} + 2D\frac{\partial f}{\partial R};\\
&Y_5(f) = B\frac{\partial f}{\partial D} + C\frac{\partial f}{\partial E} + 2E\frac{df}{\partial R}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Несвязанными являются операторы $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, $Y_4(f)$, $Y_5(f)$, а

$$Y_3(f) = BY_1(f) - CY_2(f) - EY_4(f) + DY_5(f). \tag{49}$$

Следовательно, группа интранзитивна.

Найдем инвариантные многообразия этой группы. Прежде всего, такое многообразие определяется абсолютным инвариантом группы

$$\frac{\delta^{3/2}}{\Delta} = k, \tag{50}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & B & D \\ B & C & E \\ D & E & R \end{vmatrix}, \quad \delta = B^2 - C.$$

Остальные инвариантные многообразия могут быть получены приравниванием нулю миноров наивысшего порядка матрицы коэффициентов операторов (48). Но это эквивалентно отысканию многообразий, на которых имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 Y_1(f) + \cdots + \lambda_5 Y_5(f) = 0;\\
&\mu_1 Y_1(f) + \cdots + \mu_5 Y_5(f) = 0,
\end{aligned}$$

где ранг матрицы $\left\| \begin{matrix} \lambda_i \\ \mu_i \end{matrix} \right\|$ равен 2 на этих многообразиях. В силу (49) одно из этих соотношений выполнено во всем пространстве M_5. Задача свелась к определению многообразий, на которых выполнено равенство:

$$\gamma_1 Y_1(f) + \gamma_2 Y_2(f) + \gamma_4 Y_4(f) + \gamma_5 Y_5(f) = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно таким:

$$\gamma_1 2B + \gamma_2 = 0;$$
$$\gamma_1 4C + \gamma_2 2B = 0;$$
$$\gamma_1 D + \gamma_4 + \gamma_5 B = 0;$$
$$\gamma_1 3E + \gamma_2 D + \gamma_4 B + \gamma_5 C = 0;$$
$$\gamma_1 2R + \gamma_4 2D + \gamma_5 2E = 0.$$

Эта система совместна на многообразии

$$B^2 - C = 0, \quad E - BD = 0, \tag{51}$$

которое является инвариантным для группы (48), так как $Y_k(B^2 - C) = 0$ и $Y_k(E - BD) = 0$ на этом многообразии. Легко видеть, что инвариантным является также многообразие

$$B^2 - C = 0. \tag{52}$$

Построим группу преобразований, которые претерпевают точки многообразия (50). Введя новые переменные ($k \neq 0$)

$$B,\ C,\ D,\ E,\ R_1 = \frac{\delta^{3/2}}{\Delta},$$

получаем

$$Y_1(f) = 2B\frac{\partial f}{\partial B} + 4C\frac{\partial f}{\partial C} + D\frac{\partial f}{\partial D} + 3E\frac{\partial f}{\partial E};$$
$$Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial B} + 2B\frac{\partial f}{\partial C} + D\frac{\partial f}{\partial E};$$
$$Y_3(f) = (2B^2 - C)\frac{\partial f}{\partial B} + 2BC\frac{\partial f}{\partial C} + (2BD - E)\frac{\partial f}{\partial D} + 2BE\frac{\partial f}{\partial E};$$
$$Y_4(f) = \frac{\partial f}{\partial D} + B\frac{\partial f}{\partial E};$$
$$Y_5(f) = B\frac{\partial f}{\partial D} + C\frac{\partial f}{\partial E}.$$

Для этой транзитивной группы условие измеримости выполнено. Действительно, операторы $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, $Y_4(f)$, $Y_5(f)$ несвязаны, $Y_3(f)$ выражается по формуле (49), а

$$Y_1(B) + Y_2(-C) + Y_4(-E) + Y_5(D) \equiv 0.$$

Определив плотность меры из системы уравнений

$$Y_1(M) + 10M = 0, \quad Y_2(M) = 0, \quad Y_3(M) + 10BM = 0;$$
$$Y_4(M) = 0, \quad Y_5(M) = 0,$$

получаем выражение для меры

$$\mu = \int (B^2 - C)^{-5/2}\, dB\, dC\, dD\, dE.$$

Многообразие (52) выделяет множество парабол, измеримость которого относительно афинной группы доказана в [6].

Построим теперь группу преобразований, которые претерпевают точки многообразия (51). Введя новые переменные

$$B,\ C_1 = B^2 - C,\ D,\ E_1 = E - BD,\ R,$$

получим

$$Y_1(f) = 2B\frac{\partial f}{\partial B} + D\frac{\partial f}{\partial D} + 2R\frac{\partial f}{\partial R};$$
$$Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial B};$$
$$Y_3(f) = B^2\frac{\partial f}{\partial B} + BD\frac{\partial f}{\partial D} + 2BR\frac{\partial f}{\partial R};$$
$$Y_4(f) = \frac{\partial f}{\partial D} + 2D\frac{\partial f}{\partial R};$$
$$Y_5(f) = B\frac{\partial f}{\partial D} + 2BD\frac{\partial f}{\partial R}.$$

Эта группа транзитивна. Операторы $Y_1(f)$, $Y_2(f)$, $Y_4(f)$ несвязаны, а

$$Y_3(f) = BY_1(f) - B^2Y_2(f);$$
$$Y_5(f) = BY_4(f).$$

Условия измеримости выполнены:

$$Y_1(B) + Y_2(-B^2) \equiv 0;$$
$$Y_4(B) \equiv 0.$$

Решив соответствующую систему уравнений для плотности меры, найдем, что мера

$$\mu = \int (D^2 - R)^{-5/2}\, dB\, dD\, dR.$$

Примечание. Соотношения (51) выделяют множество пар параллельных прямых $x + By = -D \pm \sqrt{D^2 - R}$.

В случае $D^2 - R = 0$ имеем для группы (48) инвариантное многообразие

$$B^2 - C = 0, \quad E - BD = 0, \quad D^2 - R = 0. \tag{53}$$

Точки этого многообразия претерпевают преобразования группы

$$Y_1(f) = 2B\frac{\partial f}{\partial B} + D\frac{\partial f}{\partial D};$$
$$Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial B};$$
$$Y_3(f) = B^2\frac{\partial f}{\partial B} + BD\frac{\partial f}{\partial D};$$
$$Y_4(f) = \frac{\partial f}{\partial D};$$
$$Y_5(f) = B\frac{\partial f}{\partial D}.$$

Эта группа транзитивна, но неизмерима. Действительно, несвязанными являются два оператора $Y_2(f)$ и $Y_4(f)$, а

$$Y_1(f) = 2BY_2(f) + DY_4(f), \quad Y_3(f) = B^2Y_2(f) + BDY_4(f), \quad Y_5(f) = BY_4(f).$$

Условия измеримости не выполнены, так как уже

$$Y_2(2B) + Y_4(D) = 3.$$

Следовательно, подмножество, выделяемое соотношениями (53) (множество прямых $x + By = -D$), неизмеримо.

Резюмируя, получаем, что

множество кривых второго порядка, будучи неизмеримым относительно афинной группы, имеет следующие измеримые подмножества:

I. $\frac{\delta^{3/2}}{\Delta} = k$;

II. $B^2 - C = 0,\ \Delta \neq 0$;

III. $B^2 - C = 0,\ E - BD = 0$.

Выражаю глубокую благодарность проф. Г. И. Дринфельду, под руководством которого выполнена работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. I. Stoka. Rev. Univ. nac Tucuman. 1962, A14, № 1—2, 25—29.
2. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М., 1947.
3. М. Г. Чеботарьов. Про визначення міри груп Лі. Зап. Харьковск. матем. об-ва, т. XIV, 1937.
4. Г. И. Дринфельд. О мере групп Ли. Зап. Харьковск. матем. об-ва, т. XXI, 1949.
5. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. М.— Л., 1940.
6. Г. И. Дринфельд и А. В. Луценко. О мере множеств геометрических элементов. Вестник Харьковск. ун-та, № 3, серия мех.-мат., т. 31. Изд-во ХГУ, 1964.

Поступила 7 сентября 1964 г.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В СООТВЕТСТВИИ ПО ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ВНЕШНИХ НОРМАЛЕЙ

А. И. Медяник (Харьков)

Назовем соответствующими точками двух строго выпуклых поверхностей те точки, в которых внешние нормали поверхностей параллельны.

Пусть F_1 и F_2 — выпуклые поверхности, P_1 и P_2 — соответствующие точки с нормалью $\boldsymbol{n}^*$. Перенесем параллельно одну из поверхностей так, чтобы точки P_1 и P_2 совпали. Если при этом окажется, что в некоторой окрестности общей точки F_1 и F_2 их опорные функции $H_1(\boldsymbol{n})$ и $H_2(\boldsymbol{n})$ удовлетворяют неравенству

$$|H_1(\boldsymbol{n}) - H_2(\boldsymbol{n})| > c|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}^*|^2, \quad (\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{n}^*, \ c = \text{const} > 0), \tag{1}$$

то будем говорить, что поверхности F_1 и F_2 допускают сильное внутреннее касание.

Теорема 1. Пусть F_1 и F_2 — бесконечные строго выпуклые поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, сферическим изображением которых является единичная полусфера с полюсом $\boldsymbol{n}_0$. Если выполнено условие

$$\lim_{(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)\to 0} [H_1(\boldsymbol{n}) - H_2(\boldsymbol{n})] = 0, \tag{2}$$

то поверхности F_1 и F_2 либо совпадают, либо допускают сильное внутреннее касание.

Доказательство. Введем прямоугольные декартовы координаты x, y, z, поместив начало координат в центр сферы, на которой строится сферическое изображение, и приняв за направление оси z вектор $\mathbf{n}_0$.

Рассмотрим поверхность Φ:

$$z = H_1(x, y, 1) - H_2(x, y, 1). \tag{3}$$

Пусть некоторая плоскость отсекает от поверхности Φ конечную часть. Тогда, как показал А. В. Погорелов [1], опорные функции F_1 и F_2 после некоторого параллельного переноса одной из поверхностей удовлетворяют неравенству (1). Другими словами, в этом случае поверхности F_1 и F_2 допускают сильное внутреннее касание.

Предположим, что никакая плоскость не отсекает от Φ конечной части. Тогда Φ является поверхностью обобщенной отрицательной кривизны, а поверхности F_1 и F_2 не допускают сильного внутреннего касания. Докажем, что поверхности F_1 и F_2 совпадают.

Покажем сначала, что правая часть равенства (3) растет медленнее $\sqrt{x^2+y^2}$ при $x^2+y^2 \to \infty$. Для этого воспользуемся положительной однородностью первой степени функций $H_i(x, y, z)$ $(i = 1, 2)$ и условием (2):

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{H_1(x, y, 1) - H_2(x, y, 1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \lim_{x^2+y^2\to\infty} \left[H_1\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right) - H_2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)\right] =$$
$$= \lim_{(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)\to 0} [H_1(\boldsymbol{n}) - H_2(\boldsymbol{n})] = 0. \tag{4}$$

Так как Ф — поверхность обобщенной отрицательной кривизны и для нее выполняется (4), то по теореме С. Н. Бернштейна [2, 3] Ф — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны плоскости (x, y).

Точке (x, y, z) поверхности Ф поставим в соответствие точку единичной полусферы $X^2+Y^2+Z^2=1$ $(Z \geqslant 0)$ с координатами

$$X=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad Y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad Z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

При таком отображении прямолинейным образующим поверхности Ф соответствуют большие полукруги единичной полусферы. Действительно, если проекция образующей L_p на плоскость (x, y) имеет уравнение $y = kx+p$, то этой образующей соответствует большой полукруг S_p, являющийся пересечением единичной полусферы $Z \geqslant 0$ и плоскости $kx - y + pz = 0$.

Из установленного соответствия следует, что на каждом большом полукруге S_p разность R_p опорных функций $H_1(x, y, z)$ и $H_2(x, y, z)$ является линейной функцией. Так как на границе сферического изображения значения опорных функций равны, то R_p имеет вид

$$R_p = c_p z. \tag{5}$$

Из строгой выпуклости поверхностей F_1 и F_2 вытекает непрерывность производной

$$\frac{\partial\,[H_1(x, y, z)-H_2(x, y, z)]}{\partial z}, \tag{6}$$

так как геометрический смысл этой производной — разность координат z соответствующих точек поверхностей F_1 и F_2. Из непрерывности функции (6) и в силу того, что на каждом S_p разность опорных функций имеет вид (5), следует, что $c_p = c$ на всей полусфере. Значит,

$$H_1(x, y, z) - H_2(x, y, z) = cz$$

или

$$H_1(\boldsymbol{n}) = H_2(\boldsymbol{n}) + c\,(\mathbf{n}\mathbf{n}_0). \tag{7}$$

Из равенства (7) заключаем, что параллельным переносом на вектор $c\mathbf{n}_0$ поверхность F_2 совмещается с поверхностью F_1.

Требование строгой выпуклости поверхностей F_1 и F_2 существенно. Это подтверждает следующий пример.

В качестве исходных поверхностей для построения F_1 и F_2 возьмем замкнутые выпуклые поверхности $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, представляющие собой круговые цилиндры, дополненные полусферами одного и того же радиуса. Пусть вектор $\mathbf{n}_0$ имеет координаты $\{0, 0, 1\}$. К поверхности F_i $(i=1, 2)$ вдоль линии $(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)=0$ вместо куска поверхности, на котором $(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)<0$, подклеиваем цилиндр, проектирующий поверхность $\overline{F}_i$ в направлении оси z. Получаем бесконечные выпуклые поверхности F_1 и F_2. Пусть l_i — длина образующей цилиндрической части $\overline{F}_i$, φ_i — угол между этой образующей и плоскостью (x, y). Положим

$$l_2 = l_1 \cos\varphi_1, \quad 0<\varphi_1<\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = 0.$$

Таким образом, мы построили пример двух бесконечных выпуклых поверхностей F_1 и F_2, которые не совпадают и не допускают сильного внутреннего касания. Заведомо эти поверхности не являются строго выпуклыми.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1а. Пусть F_1 и F_2 — строго выпуклые поверхности трехмерного евклидова пространства, сферическое изображение которых покрывает замкнутую единичную полусферу. Если на границе сферического изображения опорные функции поверхностей равны, то F_1 и F_2 либо совпадают, либо допускают сильное внутреннее касание.

Теорема 1*а* пересекается с теоремой А. Д. Александрова из работы [4], доказанной им с помощью теорем о дифференциальных уравнениях. Приведем формулировку этой теоремы.

Пусть две выпуклые поверхности S' и S'' имеют сферическим изображением одну и ту же замкнутую полусферу G. Пусть в точках края их опорные функции равны и всюду в точках с одинаковыми нормалями n

$$\Phi(k_1', k_2', \ldots, \mathrm{n}) = \Phi(k_1'', k_2'', \ldots \mathrm{n}),$$

где Φ — функция главных радиусов кривизны, удовлетворяющая условию $\frac{\partial\Phi}{\partial k_i'} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial k_i} > 0$. Тогда поверхности равны; они совмещаются переносом в направлении, перпендикулярном краю полусферы G.

Для n-мерного евклидова пространства при $n > 3$ имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть F_1 и F_2 — бесконечные выпуклые поверхности в E^n, сферическим изображением которых является единичная полусфера с полюсом n_0. Если

$$\lim_{(nn_0)\to 0} \frac{H_1(n) - H_2(n)}{(nn_0)} = 0,$$

то поверхности F_1 и F_2 либо совпадают, либо допускают сильное внутреннее касание.

Непосредственно из теорем 1, 2 вытекает следующее утверждение для регулярных поверхностей.

Теорема 3. Пусть F_1 и F_2 — бесконечные строго выпуклые регулярные поверхности в E^n, удовлетворяющие условиям:

а) обе поверхности имеют сферическим изображением одну и ту же единичную полусферу с полюсом n_0;

б) для опорных функций F_1 и F_2 имеет место равенство

$$\lim_{(nn_0)\to 0} [H_1(n) - H_2(n)] = 0 \quad \text{для } n = 3;$$

$$\lim_{(nn_0)\to 0} \frac{H_1(n) - H_2(n)}{(nn_0)} \quad \text{для } n > 3;$$

в) индикатрисы Дюпена в точках с параллельными внешними нормалями не помещаются одна строго внутри другой параллельным переносом.

Тогда поверхности F_1 и F_2 совпадают.

Теоремы 1, 2, 3 являются обобщениями теорем А. В. Погорелова, доказанных им в работе [5].

Воспользуемся теоремой 1а для установления следующего свойства, имеющего место для замкнутых строго выпуклых поверхностей.

Теорема 4. Пусть замкнутая строго выпуклая поверхность F трехмерного евклидова пространства такова, что в точках с нормалями, симметричными относительно плоскости π, она не допускает сама с собой сильного внутреннего касания. Тогда F имеет плоскость симметрии, параллельную π.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что плоскость π параллельна плоскости (x, y). Пусть $\boldsymbol{n}_0$ единичный орт оси z.

Линия $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_0) = 0$ разбивает поверхность F на две части — F_1 и $\bar{F}_2$. Отразив $\bar{F}_2$ симметрично относительно плоскости (x, y), получим поверхность F_2, которая имеет сферическим изображением одну и ту же замкнутую единичную полусферу, что и поверхность F_1. Из построения поверхностей F_1 и F_2 следует, что опорные функции на границе сферического изображения равны. Поверхности F_1 и F_2 строго выпуклы. Применив к ним теорему 1а получим, что поверхности F_1 и F_2 совпадают. Значит, F имеет плоскость симметрии параллельную плоскости π.

Если бы поверхность F была регулярной, то теорему 4 можно было бы сформулировать в терминах непомещаемости индикатрис Дюпена.

Из теоремы 4 следует теорема А. Д. Александрова [4].

Теорема. Пусть на замкнутой выпуклой поверхности S в точках с нормалями, симметричными относительно некоторой плоскости p, некоторая функция $\Phi(k_1;\ k_2,\ \boldsymbol{n})$, удовлетворяющая условию $\frac{\partial\Phi}{\partial k_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial k_2} > 0$, имеет равные значения. Тогда S имеет плоскость симметрии, параллельную p.

Следует отметить, что теорема А. Д. Александрова доказана и для n-мерного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Одно общее характеристическое свойство шара. УМН XI, 5(71), 1956.

2. С. Н. Бернштейн. Усиление теоремы о поверхностях отрицательной кривизны. Ленинград. Уч. зап. ун-та, сер. мат. 15, 1948.

3. Г. М. Адельсон-Вельский. Обобщение одной геометрической теоремы С. Н. Бернштейна. ДАН 49, 1945.

4. А. Д. Александров. Теоремы единственности для поверхностей «в целом», 1. Вестн. ЛГУ. 19, 1956.

5. А. В. Погорелов. Одна общая теорема единственности для бесконечных выпуклых поверхностей. ДАН, 65, 1949.

Поступила 1 августа 1964 г.

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ БЛЯШКЕ ДЛЯ МНОГОГРАННИКОВ

А. Д. Милка (Харьков)

1. Пусть P — конечный ориентированный многогранник, ломаная Γ — его граница. Будем считать, что к каждой вершине Γ подходит хотя бы одно внутреннее ребро многогранника.

Предположим, что многогранник P подвергается бесконечно малому изгибанию. Тогда каждая его грань вращается с определенной угловой скоростью. Разность векторов угловых скоростей, или векторов вращений, любой пары смежных граней направлена вдоль их общего ребра.

Пусть O — некоторая вершина многогранника, r — ее радиус-вектор. Обозначим $y_1, y_2, \ldots, y_n$ векторы вращений граней, сходящихся в O, упорядоченные по возрастанию индексов согласно ориентации P. Введем вектор

$$\Omega = y_1 \times y_2 + y_2 \times y_3 + \cdots + y_{n-1} \times y_n + y_n \times y_1,$$

если O — внутренняя вершина P, и вектор

$$\omega = y_1 \times y_2 + y_2 \times y_3 + \cdots + y_{n-1} \times y_n,$$

если O — граничная вершина.

Имеет место формула

$$\sum_i r_i \Omega_i + \sum_j r_j \omega_j = 0, \qquad (*)$$

где символ i обозначает суммирование по всем внутренним вершинам многогранника, а символ j — по всем граничным вершинам.

Доказательство. В выражении

$$\Phi \equiv \sum_i r_i \Omega_i + \sum_j r_j \omega_j$$

перейдем к суммированию по внутренним ребрам многогранника. Пусть l — некоторое ребро, r_s, r_t — радиусы-векторы его концов, y_p, y_q — векторы вращений граней, смежных по ребру l. С точностью до знака соответствующее слагаемое в преобразованной сумме равно

$$r_s y_p y_q + r_t y_q y_p.$$

Но

$$r_s y_p y_q + r_t y_q y_p = {}^1/_2 (r_s - r_t)(y_p + y_q)(y_q - y_p) = 0,$$

поскольку векторы $r_s - r_t$, $y_p - y_q$ коллинеарны.

Следовательно, и $\Phi = 0$. Формула (*) доказана.

Формула (*) справедлива и для замкнутого многогранника. В этом случае слагаемое $\sum_j$ в формуле будет отсутствовать.

Формула (*) является аналогом известной формулы Бляшке для поля вращений регулярной поверхности[1].

[1] В. Бляшке. Дифференциальная геометрия. ОНТИ, М.— Л., 1935, § 93, формула (26).

2. Пусть V — выпуклый многогранный угол. Допускается, что плоскости некоторых (но не всех) граней V могут совпадать. Ориентируем угол V так, чтобы направление обхода вокруг вершины вместе с направлением в сферическое изображение угла образовало левый винт.

Предположим, что угол V подвергается бесконечно малому изгибанию. Обозначим $y_1, y_2, \ldots, y_n$ векторы вращений граней V, упорядоченные по возрастанию индексов согласно принятой ориентации угла. Введем вектор

$$\Omega = y_1 \times y_2 + y_2 \times y_3 + \cdots + y_n \times y_1.$$

Лемма. Если $\Omega \neq 0$, то вектор Ω направлен в сферическое изображение угла V. Если число граней угла V, плоскости которых попарно различны, не меньше трех, то из равенства $\Omega = 0$ следует $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$. Если число указанных граней равно двум, то из равенства $\Omega = 0$ вытекает, что совпадают векторы вращений граней, принадлежащих одной и той же плоскости.

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда число граней, плоскости которых попарно различны, не меньше трех.

Доказательство леммы проведем индукцией по числу граней рассматриваемых углов. Для угла с тремя гранями $\Omega = 0$. В этом случае всегда $y_1 = y_2 = y_3$. Пусть лемма уже доказана для углов с числом граней, меньшим n. Будем поэтому считать, что число граней угла V, рассматриваемого в лемме, равно n.

Первый случай. Плоскости пары соседних граней α_1, α_2 угла V совпадают.

Можно считать, что граням α_1, α_2 отвечают векторы вращений y_1, y_2 соответственно. Построим выпуклый угол V' с $(n-1)$-й гранью. Гранями угла V' считаем все грани угла V, за исключением α_1, α_2, и грань $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ со сторонами l_1, l_2, где l_k — сторона α_k. Движение ребер угла V' при изгибании угла V определяет бесконечно малое изгибание угла V', поскольку угол между ребрами l_1, l_2 стационарен. Пусть y — вектор вращения грани α. Тогда $y, y_3, \ldots, y_n$ — векторы вращения граней угла V'. Введем вектор

$$\Omega' = y \times y_3 + y_3 \times y_4 + \cdots + y_n \times y.$$

Имеем

$$\Omega = y_1 \times y_2 + y_2 \times y_3 + \cdots + y_n \times y_1 =$$
$$= y \times y_2 + y_2 \times y_3 + y_3 \times y + \Omega' + y \times y_n + y_n \times y_1 + y_1 \times y +$$
$$+ y \times y_1 + y_1 \times y_2 + y_2 \times y.$$

Но

$$y \times y_2 + y_2 \times y_3 + y_3 \times y = {}^1/_2 (y_2 - y + y_3 - y) \times (y_3 - y_2) = 0,$$

поскольку векторы $y_2 - y$, $y_3 - y$, $y_3 - y_2$ коллинеарны. Аналогично

$$y \times y_n + y_n \times y_1 + y_1 \times y = 0,$$

так что

$$\Omega = \Omega' + y \times y_1 + y_1 \times y_2 + y_2 \times y.$$

Легко проверить, что вектор

$$\Omega'' = y \times y_1 + y_1 \times y_2 + y_2 \times y,$$

если не равен нулю, направлен по нормали к грани α в сферическое изображение угла V, а из равенства $\Omega'' = 0$ следует $y_1 = y_2 = y$.

Учитывая теперь предположение индукции и тот факт, что сферические изображения углов V' и V совпадают, из равенства

$$\Omega = \Omega' + \Omega''$$

заключаем, что лемма верна и для угла V. Действительно, если $\Omega \neq 0$, то вектор Ω направлен в сферическое изображение угла V, поскольку этим свойством обладает каждый из векторов Ω', Ω'', отличный от нуля, первый — в силу индуктивного предположения, второй — на основании ранее сделанного замечания. Если $\Omega = 0$, то из тех же соображений $\Omega' = \Omega'' = 0$ и $y_3 = y_4 = \cdots = y_n = y = y_1 = y_2$.

Второй случай. Плоскости любой пары граней угла V различны.

Пусть α_n, α_1, α_2 — три последовательные грани угла V, которым отвечают векторы вращений y_n, y_1, y_2. Построим выпуклый угол $\tilde{V}$ с $(n+1)$-й гранью. Гранями этого угла считаем все грани угла V, за исключением α_1, и грани $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_n$, плоскости которых совпадают с плоскостями граней α_2, α_n соответственно. Изгибание угла V определяет бесконечно малое изгибание угла $\tilde{V}$ такое, что граням $\tilde{\alpha}_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \tilde{\alpha}_n$ отвечают векторы вращений $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1$ соответственно.

Построим выпуклый угол V' с $(n-1)$-й гранью. Гранями угла V' считаем все грани угла V, за исключением α_1, α_2, α_n, и грани $\alpha_2' = \tilde{\alpha}_2 + \alpha_2$, $\alpha_n' = a_n + \tilde{\alpha}_n$. Заметим, что сферическое изображение угла $\tilde{V}$ содержит сферическое изображение угла V'. Изгибание угла $\tilde{V}$ определяет бесконечно малое изгибание угла V'. Пусть y_2', y_n' — соответствующие векторы вращений граней α_2', α_n'. Тогда $y_2', y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n'$ — векторы вращений граней угла V'. Введем векторы

$$\Omega' = y_2' \times y_3 + y_3 \times y_4 + \cdots + y_{n-1} \times y_n' + y_n' \times y_2',$$

$$\Omega'' = y_2' \times y_1 + y_1 \times y_2 + y_2 \times y_2', \quad \Omega''' = y_n' \times y_n + y_n \times y_1 + y_1 \times y_n'.$$

Поступая, как и в первом случае, найдем равенство

$$\Omega = \Omega' + \Omega'' + \Omega''',$$

из которого следует утверждение леммы для угла V.

Лемма доказана.

3. Формулу (*) п. 1 в сочетании с леммой п. 2 в ряде случаев можно применять для доказательства жесткости выпуклых многогранников. Этим путем, например, можно получить простое доказательство известной теоремы о жесткости замкнутого выпуклого многогранника.

О ТОЧКАХ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НЕЖЕСТКОСТИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

А. Д. Милка (Харьков)

Поверхность F с краем γ называется нежесткой относительно точки O (плоскости α), если на этой поверхности существует нетривиальное изгибающее поле, такое, что стационарны расстояния точек γ от точки O (плоскости α). Во втором случае говорят также, что F допускает изгибание скольжения относительно α.

Если поверхность F нежесткая относительно плоскости α, будем говорить, что F нежесткая относительно бесконечно удаленной точки, заданной нормалью к α.

Точки, относительно которых поверхность F нежесткая, назовем точками относительной нежесткости.

Мы будем рассматривать только регулярные (дважды непрерывно дифференцируемые) поверхности. Изгибающие поля этих поверхностей также будем предполагать регулярными.

В данной работе изучается распределение в пространстве точек относительной нежесткости односвязных выпуклых поверхностей вращения.

Пусть F — поверхность с краем γ. Определим в пространстве два множества — G_1 и G_2. Точку O пространства отнесем к множеству G_1, если каждый луч, исходящий из точки O и пересекающий γ, не пересекает поверхность F в другой какой-то точке. Точку O пространства отнесем к множеству G_2, если каждый луч, исходящий из точки O и пересекающий γ, пересекает F еще в одной точке.

Как известно, поверхность положительной кривизны с краем является жесткой относительно точки $O \in G_1$, если через эту точку проходит плоскость, от которой поверхность лежит с одной стороны [1].

Теорема 1. Пусть F — односвязная поверхность вращения положительной кривизны с краем γ, однозначно проектирующаяся на плоскость края. Тогда множество G_1 не содержит точек относительной нежесткости поверхности F, а в области G_2 есть точки относительной нежесткости, и они образуют счетное множество взаимно не пересекающихся аналитических поверхностей вращения с общим краем γ. Эти поверхности сходятся к части границы области G_2, не содержащей точек поверхности F.

Пример. Пусть F — полусфера $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Поверхности, на которых находятся точки относительной нежесткости поверхности F, определяются уравнениями $z = n(1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Полусфера не имеет других точек относительной нежесткости.

Доказательство теоремы 1 занимает большую часть работы и содержится в § 1. Оно основано на изучении спектра некоторого самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. По-видимому, вне области G_2 нет точек относительной нежесткости. Чтобы подтвердить это предположение, достаточно установить, что непрерывный и дискретный спектры указанного оператора не пересекаются.

Теорема, аналогичная теореме 1, имеет место и для любой односвязной поверхности вращения положительной кривизны. Достаточно учесть следующую лемму, вытекающую из теоремы Дарбу — Зауэра [2].

Лемма 1. Если поверхность нежесткая относительно точки O, то образ F при проективном преобразовании является поверхностью, нежесткой относительно образа точки O.

Доказательство этой леммы простое и в работе не приводится.

В работе обобщается известный результат Рембса об изгибаниях скольжения [3].

Теорема 2. Пусть F — замкнутая поверхность вращения положительной кривизны, $\boldsymbol{n}$ — направление в пространстве, не перпендикулярное оси поверхности, G — одна из частей, на которые разбивается поверхность ее линией тени относительно направления $\boldsymbol{n}$. Тогда существует счетное множество широт, принадлежащих G, каждая из которых разделяет F на две части так, что часть с большей интегральной кривизной допускает изгибание скольжения относительно плоскости с нормалью $\boldsymbol{n}$. Эти широты сгущаются к наибольшей широте γ поверхности, принадлежащей $\overline{G}$.

Основные пункты доказательства теоремы 2 содержатся в § 1. Необходимо заметить следующее. В теореме утверждается существование частей поверхности F, нежестких относительно бесконечно удаленной точки O пространства, заданной направлением $\boldsymbol{n}$. Можно рассматривать случай, когда точка O конечная. При этом имеет место теорема, аналогичная теореме 2. Доказательство теоремы 2 в равной степени относится и к этому случаю.

Результаты, которые содержатся во втором параграфе, не связаны с основным содержанием работы. Но их получение основано на некоторых фактах, установленных в § 1, а также на лемме 1. В начале параграфа приводится способ построения нежестких поверхностей вращения и строятся примеры нежестких замкнутых аналитических поверхностей вращения. Во второй части параграфа строится пример нежесткой замкнутой поверхности, склеенной из двух кусков различных овалоидов. Причем линия склеивания есть линия соприкасания поверхностей.

В заключение заметим, что теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место и для общих выпуклых поверхностей вращения (п. 7, § 1)

Результаты настоящей работы допускают перенесение в пространства постоянной кривизны.

§ 1. Доказательство теоремы 1

1. Пусть F — односвязная поверхность вращения положительной кривизны с краем γ. Обозначим $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор оси поверхности, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(v)$ — единичный, перпендикулярный к $\boldsymbol{e}$ вектор, который с изменением v описывает окружность с осью $\boldsymbol{e}$ и длиной дуги v. К подвижному трехграннику $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}')$ будем относить все рассматриваемые векторы. Уравнение поверхности F имеет вид

$$\boldsymbol{r}(\rho, v) = \rho \boldsymbol{a}(v) + u(\rho)\,\boldsymbol{e}.$$

Будем считать, что окружность γ — единичного радиуса. Предположим, что функция $u = u(\rho)$, задающая меридиан поверхности, однозначна на сегменте $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, а производная $u''(\rho)$ на этом сегменте непрерывна и положительна. Кроме того, будем считать, что на краю поверхности $u(1) = u'(1) = 1$.

Пусть $\tau = \tau(\rho, v)$ — регулярное изгибающее поле поверхности F:

$$\tau = \varphi(\rho, v)\, e + \psi(\rho, v)\, a + \chi(\rho, v)\, a'.$$

Следуя Кон-Фоссену [4], разложим функции φ, ψ, χ в ряды Фурье по координате v:

$$\varphi = \sum \varphi_k(\rho)\, e^{ikv},\ \psi = \sum \psi_k(\rho)\, e^{ikv},\ \chi = \sum \chi_k(\rho)\, e^{ikv}.$$

Функции φ_k, ψ_k, $\chi_k (k = 0, \ \pm 1, \ \ldots)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\psi_k' + u'\varphi_k' = 0,$$
$$k^2 u'\varphi_k + (k^2 - 1)\,\psi_k + \rho\psi_k' = 0, \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \ldots),$$
$$\psi_k + ik\chi_k = 0,$$

а функции $\varphi_k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \ldots)$ — уравнениям

$$\rho \frac{d}{d\rho}(u'\varphi_k') - k^2 u''\varphi_k = 0, \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \ldots). \tag{*}$$

Каждый регулярный при $\rho = 0$ фундаментальный интеграл φ_k соответствующего уравнения системы (*) порождает на поверхности изгибающее поле $\tau_k \equiv \tau_k(\rho, v)$:

$$\tau_k = Re\, e^{ikv}\,(\varphi_k(\rho)\, e + \psi_k(\rho)\, a + \chi_k(\rho)\, a'),$$

нетривиальное при $|k| \geqslant 2$. Линейная комбинация $a_0\tau_0 + a_1\tau_1$ с постоянными a_i является полем скоростей бесконечно малого движения поверхности.

Регулярные при $\rho = 0$ интегралы системы уравнений (*) определяются с точностью до постоянных множителей. Поэтому возможно следующее, более удобное представление компонент поля τ:

$$\varphi = \sum C_k\varphi_k(\rho)\, e^{ikv},\ \psi = \sum C_k\psi_k(\rho)\, e^{ikv},\ \chi = \sum C_k\chi_k(\rho)\, e^{ikv},$$

где C_k — константы, а $\varphi_k = \varphi_{-k}$ — вещественные интегралы соответствующих уравнений системы (*), нормированные так, что $\psi_k(1) = -1 \quad (k = 0, \pm 1, \ \ldots)$. Можно доказать, что каждая из нормированных функций $\varphi_k\,(k \geqslant 2)$ является выпуклой $(\varphi_k''(\rho) > 0$ при $0 < \rho \leqslant 1)$, причем $\varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = 0$. Легко проверяется и следующее свойство этих функций: величины $\omega_k = \varphi_k(1) - 1 \quad (k \geqslant 2)$ монотонно убывают к нулю.

Для поверхности F докажем теорему 1.

2. Ось поверхности F является осью вращения множества точек относительной нежесткости. Поэтому распределение этих точек достаточно выяснить в одной из плоскостей, проходящих через ось, например, в плоскости $v = 0$.

Введем в этой плоскости систему координат (ρ, u), приняв за базисные векторы орты $a(0)$ и e. Вместе с плоскостью (ρ, u) будем рассматривать и ее проективный образ — плоскость (s, λ):

$$s = 2\,(1 - u)\,\rho^{-1},\ \lambda = 2u\rho^{-1}.$$

Обозначим G область, границу которой определяют кривые

$$u = u(\rho),\ u = \rho \ \text{при}\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1,$$
$$u = u(-\rho),\ u = -\rho \ \text{при}\ -1 \leqslant \rho \leqslant 0.$$

Эта область является сечением области G_2, соответствующей поверхности F. Если обозначить $\lambda = \lambda(s)$ образ в плоскости (s, λ) меридиана

$u = u(\rho)$ поверхности, то образ области G определяется неравенствами

$$2 < \lambda < \lambda(s) \text{ при } s > 0.$$
$$-2 > \lambda > -\lambda(-s) \text{ при } s < 0.$$

В плоскости (ρ, u) сечение замыкания $\sigma_1 + \sigma_2$ определяется неравенством $|u\rho^{-1}| \geqslant 1$. Образ этого множества в плоскости (s, λ) находится вне полосы $|\lambda| < 2$.

Пусть (ρ, u) — точка относительной нежесткости, τ — соответствующее изгибающее поле. Учитывая краевое условие, находим, что коэффициенты C_k поля τ удовлетворяют системе уравнений в конечных разностях. При этом оказывается, что условия вещественности поля τ $(C_{-k} = \overline{C}_k)$ выполнены, а коэффициенты C_0 и C_1 связаны зависимостью только с коэффициентом C_2. Уравнения для коэффициентов $C_k\,(k \geqslant 2)$ имеют вид

$$\rho\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)C_{k-1} + 2\left[(1-u)\,\varphi_k(1) - 1\right]C_k + \rho\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)C_{k+1} = 0, \qquad (1)$$
$$(k = 2, 3, \ldots)$$

или, при $\rho \neq 0$,

$$\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)C_{k-1} + (s\omega_k - \lambda)\,C_k + \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)C_{k+1} = 0, \quad (k = 2, 3, \ldots). \qquad (2)$$

Если поверхность F нежесткая относительно бесконечно удаленной точки O плоскости (ρ, u), то коэффициенты $C_k\,(k \geqslant 2)$ соответствующего изгибающего поля также удовлетворяют системе уравнений (2), в которой $\lambda = -s$, (s, λ) — образ точки O. Условия $C_{-k} = \overline{C}_k$ выполняются и в этом случае, а коэффициенты C_0 и C_1 связаны зависимостью только с коэффициентом C_2.

Очевидно, точки относительной нежесткости, лежащие на оси поверхности, имеют координаты $u_k = 1 - \varphi_k^{-1}(1)$ $(k = 2, 3, \ldots)$. На поверхности им соответствуют фундаментальные поля τ_k $(k = 2, 3, \ldots)$. В плоскости (s, λ) образы этих точек бесконечно удалены и принадлежат прямым $\lambda = \omega_k s$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Точки u_k находятся в области G. Действительно, $u_k > 0$, так как $\omega_k > 0$, а при $k \geqslant 2$

$$\varphi_k^{-1}(1) = \varphi_k^{-1}(1)\int_0^1 u'\varphi_k' d\rho = 1 - \int_0^1 u''\varphi_k\varphi_k^{-1}(1)\,d\rho > 1 - \int_0^1 u''\rho\, d\rho = 1 - u(0),$$

так что $u_k < u(0)$.

Если поверхность F нежесткая относительно некоторой точки плоскости (ρ, u), то образ этой точки в плоскости (s, λ) условимся также называть точкой относительной нежесткости.

Надо выяснить распределение точек относительной нежесткости в конечной части плоскости (s, λ). Для этого можно использовать систему уравнений (2), но здесь удобнее перейти к новой системе уравнений в конечных разностях, матрица которой симметрическая.

3. Пусть (s, λ) — точка относительной нежесткости, $\{C_k\}$ — коэффициенты соответствующего изгибающего поля τ. Обозначим

$$P_k = (k^2 - 1)^{1/2}\,C_k, \quad b_k = \left(\frac{k-1}{k}\,\frac{k+2}{k+1}\right)^{1/2} \quad (k \geqslant 1).$$

Учитывая, что поле τ регулярно и, следовательно, его коэффициенты $C_k = 0\,(k^{-2})$, заключаем.

Для того чтобы точка (s, λ) была точкой относительной нежесткости, необходимо, чтобы существовало нетривиальное решение $\{P_k\}_{k=2}^{\infty}$ системы уравнений в конечных разностях

$$b_{k-1}P_{k-1} + (s\omega_k - \lambda) P_k + b_k P_{k+1} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

принадлежащее l^2: $\sum |P_k|^2 < \infty$.

Введем сепарабельное гильбертово пространство l^2 с ортонормированным базисом и в нем самосопряженный оператор $\mathbf{A}_s$, определяемый матрицей Якоби:

$$\mathbf{A}_s = \begin{Vmatrix} s\omega_2 & b_2 & 0 & . \\ b_2 & s\omega_3 & b_3 & . \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{Vmatrix}$$

связанной с системой уравнений (3). Будем иметь равенство $\mathbf{A}_s\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = \{P_k\}_{k=2}^{\infty} \in l^2$, означающее, что λ является собственным значением оператора $\mathbf{A}_s$.

Пусть D_s — дискретная часть спектра оператора $\mathbf{A}_s$. Условие $\lambda \in D_s$, таким образом, необходимо, чтобы точка (s, λ) была точкой относительной нежесткости. Если для некоторой пары чисел s и λ это условие выполняется, а соответствующие величины P_k убывают достаточно быстро, точка (s, λ) заведомо будет точкой относительной нежесткости. Коэффициенты соответствующего изгибающего поля находятся следующим образом. Полагаем $C_k = (k^2 - 1)^{-1/2} P_k$ $(k \geqslant 2)$, вычисляем C_0 и C_1, остальные коэффициенты определяем равенствами $C_{-k} = \bar{C}_k$.

Как изестно, дискретный спектр самосопряженного оператора состоит не более чем из счетного множества точек. Отсюда следует, что множество точек относительной нежесткости поверхности F имеет в пространстве меру нуль.

Учитывая теорему Вейля о вполне непрерывных возмущениях самосопряженного оператора, заключаем, что непрерывный спектр C оператора $\mathbf{A}_s$ занимает сегмент $|\lambda| \leqslant 2$. Поэтому часть спектра оператора $\mathbf{A}_s$, лежащая вне этого сегмента, принадлежит D_s и, если она бесконечна, может иметь предельными точками только концы сегмента. Множества D_s и C, вообще говоря, пересекаются, что создает определенные трудности при локализации D_s. Можно показать, что D_0 пусто. Это означает, что в плоскости кривой γ, края поверхности F, нет точек относительной нежесткости. По-видимому, в рассматриваемом случае $D_s \cap C$ пусто, но так ли это на самом деле, нам неизвестно.

4. Изучим часть спектра D_s, которая не принадлежит сегменту $|\lambda| \leqslant 2$. Следствием будет теорема 1. Действительно, при $\lambda \in D_s$ и $|\lambda| > 2$ точка (s, λ) является точкой относительной нежесткости, поскольку соответствующие величины P_k убывают как коэффициенты аналитической функции ([5], теорема Перрона). Из последнего замечания и одной теоремы А. Д. Александрова и Е. П. Сенькина [1], между прочим, следует, что $\lambda \bar{\in} D_s$, если $\lambda s < 0$ и $|\lambda| > 2$. Сначала докажем лемму.

Лемма 2. Существуют положительные постоянные α, β такие, что при $k \geqslant 2$

$$\alpha k^{-1} \leqslant \omega_k \leqslant \beta k^{-1}.$$

Доказательство. Из уравнений (*) и принятой нормировки функций $\varphi_k(\rho)$ следует $k^2\omega_k = \varphi'_k(1) - 1$. Для доказательства леммы достаточно установить, что

$$\alpha' k \leqslant \varphi'_k(1) \leqslant \beta' k, \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

где α', β' — положительные постоянные, и учесть, что $\omega_k > 0$. Так как $\varphi_k(1) \to 1$, то при доказательстве этих неравенств для функций $\varphi_k(\rho)$ можно принять нормировку $\varphi_k(1) = 1$. Введем новую переменную $t = \int\limits_\rho^1 (u')^{-1} d\rho$. Функции $\sigma_k(t) \equiv \varphi_k(\rho)$ удовлетворяют на полуоси $t \geqslant 0$ уравнениям

$$\sigma''_k - k^2 q^2 \sigma_k = 0, \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

где $q \equiv q(t) \equiv (u' u'' \rho^{-1})^{1/2}$.

Очевидно, $\sigma_k(0) = 1$, $\sigma'_k(0) = -\varphi'_k(1)$, $\sigma_k(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $a \leqslant q \leqslant b$, где постоянные a, b таковы, что $0 < a \leqslant u''(\rho) \leqslant b$ при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Докажем неравенства

$$ak \leqslant -\sigma'_k(0) \leqslant bk, \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Пусть $\sigma_r(t)$, $\sigma_s(t)$ — два интеграла уравнения

$$\sigma'' - k^2 q^2 \sigma = 0, \quad (k \geqslant 2 \text{ — целое}),$$

подчиненные условиям $\sigma_r(0) = 1$, $\sigma'_r(0) = \sigma_s(0) = 0$, $\sigma'_s(0) = k$. Представляя решение $\sigma_k(t)$ в виде $\sigma_k = \sigma_r - h\sigma_s$, где h — некоторая константа, и учитывая, что при $t \to \infty$ $\sigma_k \to 0$, $\sigma_s \to \infty$ [6], находим, что

$$h^{-1} = \lim_{t \to \infty} \sigma_s \sigma_r^{-1} = k \int\limits_0^\infty \sigma_r^{-2} dt.$$

На основании теорем сравнения [6] $\operatorname{ch} kat \leqslant \sigma_r(t) \leqslant \operatorname{ch} kbt$. Следовательно, $a \leqslant h \leqslant b$ и $ak \leqslant \varphi'_k(1) \leqslant bk$. Лемма доказана.

Так как величины ω_k убывают достаточно медленно, то правее точки $\lambda = 2$ спектр оператора $\mathbf{A}_s (s > 0)$ бесконечен [7]. Тем самым на оси $s (s \neq 0)$ определяется счетное множество нечетных функций $\{\lambda = \lambda_k(s)\}_{k=2}^\infty$, таких, что, во-первых, $2 < \lambda_{k+1}(s) < \lambda_k(s)$ и $\lambda_k(s) \to 2$ при $k \to \infty$, если $s > 0$, во-вторых, значениями $\lambda = \lambda_k(s)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ исчерпываются все собственные числа оператора $\mathbf{A}_s$, не принадлежащие сегменту $|\lambda| \leqslant 2$. Отсюда следует, что в плоскости (s, λ) вне полосы $|\lambda| \leqslant 2$ нет других точек относительной нежесткости, кроме точек $(s, \lambda_k(s))$.

Согласно теореме Реллиха об аналитических возмущениях самосопряженного оператора, функции $\lambda = \lambda_k(s)$ аналитические, а кривые $\lambda = \lambda_i(s)$ и $\lambda = \lambda_j(s)$ при $i \neq j$ не пересекаются. При фиксированном k соответствующий собственный вектор оператора $\mathbf{A}_s$, норма которого единица, а аргумент первой координаты фиксирован, также аналитически зависит от s.

Поскольку оператор $\frac{d}{ds}\mathbf{A}_s$ положительный, каждая из функций $\lambda = \lambda_k(s)$ монотонно возрастает [8], а функция $\lambda = \lambda_2(s)$ $(s > 0)$, кроме того, выпуклая, так как при фиксированном s число $\lambda_2(s)$ является наибольшим собственным значением оператора $\mathbf{A}_s$.

Исследуем поведение функций $\lambda = \lambda_k(s)$ на бесконечности. Переходя в системе (3) к новому параметру $\tilde{s} = s^{-1}$ и изучая спектр оператора

$\tilde{s}\mathbf{A} + \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ не зависят от s и определяются равенством $\mathbf{A}_s = \mathbf{A} + s\mathbf{B}$, убеждаемся в следующем. Существует счетное множество аналитических на оси $\tilde{s}$ четных функций $\{\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_k(\tilde{s})\}$, таких, что, во-первых, $\tilde{\lambda}_k(0) = \omega_k$, $\tilde{\lambda}_k(\tilde{s}) = \lambda_k(s)\,s^{-1}$ $(\tilde{s} \neq 0)$; во-вторых, значениями $\tilde{\lambda}_k(\tilde{s})$ исчерпываются все собственные числа оператора $\tilde{s}\mathbf{A} + \mathbf{B}$ вне части плоскости $(\tilde{s}, \tilde{\lambda})$, определяемой неравенством $|\tilde{\lambda}\tilde{s}^{-1}| \leqslant 2$; в-третьих, при фиксированном k соответствующий вектор оператора $\tilde{s}\mathbf{A} + \mathbf{B}$, норма которого единица, а аргумент первой координаты фиксирован, аналитически зависит от $\tilde{s}$.

Докажем, что при $s > 0$ $\lambda_k(s) < \lambda(s)$. При s достаточно большом это неравенство справедливо. Если при некотором s неравенство все же нарушается, то найдется значение s_0 такое, что $\lambda_k(s_0) = \lambda(s_0)$. Это значит, что на поверхности F существует точка, относительно которой F нежесткая, что невозможно [1]. Неравенство справедливо.

Итак, мы полностью выяснили характер распределения точек относительной нежесткости вне полосы $|\lambda| \leqslant 2$ плоскости (s, λ). Применительно к поверхности F этот результат и составляет содержание теоремы 1. Теорема 1 доказана

Пусть Φ — одна из поверхностей в области G_2, на которой расположены точки относительной нежесткости поверхности F, O — точка на этой поверхности, определяемая координатами (ρ, v), τ — соответствующее точке O изгибающее поле. Можно показать, что поле τ аналитически зависит от координат (ρ, v) и некоторого параметра θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\tau(\rho, v, \theta) = \tau(\rho, v, \theta + 2\pi))$, если точку O смещать на поверхности Φ.

Приведем пример поверхности, для которой полностью выясняется распределение точек относительной нежесткости.

Пусть F — часть параболоида $u = u(\rho) = \frac{1}{2}(1 + \rho^2)$ $(\rho \leqslant 1)$. В этом случае $\omega_k = k^{-1}$, и система уравнений (2) эквивалентна дифференциальному уравнению первого порядка для гладкой функции $\tilde{\chi}(e^{iv}) = \sum\limits_{k \geqslant 2} k^{-1} C_k e^{ikv}$:

$$\tilde{\chi}_v(e^{iv} - \lambda + e^{-iv}) + i\tilde{\chi}(e^{-iv} + s - e^{iv}) = iCe^{iv},$$

где $C \neq 0$ — постоянная.

Исследование решений этого уравнения, зависящих от параметров s и λ, показывает, что при $|\lambda| \leqslant 2$ функции $Im\tilde{\chi}(e^{iv})$ и $Re\tilde{\chi}(e^{iv})$ имеют особенности и не являются всюду гладкими. Это означает, что в полосе $|\lambda| \leqslant 2$ плоскости (s, λ) нет точек относительной нежесткости поверхности F. Покажем, что и ряд $\sum\limits_{k \geqslant 2} |P_k|^2$ расходится, если $|\lambda| \leqslant 2$. Действительно, в противном случае, сходился бы ряд $\sum\limits_{k \geqslant 2} |C_k|$, и функция $\tilde{\chi}(e^{iv})$ была бы всюду гладкой [9], что невозможно.

Вычисления показывает, что при $|\lambda| > 2$ точка (s, λ) тогда и только тогда будет точкой относительной нежесткости, когда $s\lambda > 0$ и для некоторого целого $k \geqslant 2$ имеем $s^2 = k^2(\lambda^2 - 4)$. Если $s > 0$, то с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля, функция $\tilde{\chi}(e^{iv})$ имеет вид

$$\tilde{\chi}(z) = \left(\frac{\beta^2}{k - 1} w - \frac{1}{k} + \frac{\alpha^2}{k + 1} w^{-1} - \gamma w^k\right)(z - \lambda + z^{-1}),$$

где α $(|\alpha| < 1)$, β — корни уравнения $x^2 - \lambda x + 1 = 0$, $\gamma = 2k^{-1}(k^2 - 1)\beta^{2k}$, $w = (z - \alpha)(z - \beta)^{-1}$.

Тем самым не только выясняется распределение точек относительной нежесткости, но и в явном виде выписываются соответствующие изгибающие поля.

Меридианы поверхностей, на которых находятся точки относительной нежесткости поверхности F, определяются из уравнений

$$1-u=k\,(u^2-\rho^2)^{1/2},\ \ (k=2,3,\ldots).$$

На основании разобранного примера и леммы 1 можно указать распределение точек относительной нежесткости для любого колпака, отсеченного от поверхности второго порядка положительной кривизны, в частности, для полусферы. Распределение бесконечно удаленных точек относительной нежесткости сферического колпака уже изучалось в работе [10].

6. Наметим доказательство теоремы 2.

Меридиан поверхности F определяется двузначной функцией $u=u(\rho)$. Будем считать, что точка $\rho=0$, $u=0$ — полюс поверхности F, принадлежащий σ. Построим бесконечную поверхность вращения F' с меридианом $u=u'(\rho)\equiv u^{-1}(\rho')$, где $\rho=\rho' u^{-1}(\rho')$. Эта поверхность есть проективный образ F. Обозначим O' образ точки O, заданной направлением $\mathbf{n}$, при том же преобразовании.

Пусть для поверхности F_ρ, отсекаемой от F' параллелью ρ, точка O' является точкой относительной нежесткости. Это условие приводит к системе уравнений в конечных разностях, аналогичной (1), которой удовлетворяют коэффициенты $C_k\,(k\geqslant 2)$ соответствующего изгибающего поля, определяемые нормировкой $\psi_k(\rho)=-1\ \ (k\geqslant 2)$.

Введем сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом и в нем самосопряженный оператор $\mathbf{A}(\rho)$, определяемый симметризованной матрицей полученной системы уравнений. Будем иметь равенство $\mathbf{A}(\rho)\,\mathbf{x}=0$, где $\mathbf{x}=\{(k^2-1)^{1/2}C_k\}_{k=2}^{\infty}\in l^2$, означающее, что число $\lambda=0$ есть собственное значение оператора $A(\rho)$. Обозначим D_ρ — дискретную, C_ρ — непрерывную части спектра оператора $\mathbf{A}(\rho)$. Условие $O\in D_\rho$, таким образом, необходимо, чтобы поверхность F_ρ была нежесткой относительно точки O'. Достаточным является условие $\lambda=0\in D_\rho/C_\rho$. Изучение оператора $\mathbf{A}(\rho)$ показывает, что множество D_ρ/C_ρ равно $\{\lambda_k(\rho)\}_{k=2}^{\infty}$, причем $\lambda_k(\rho)>\lambda_{k+1}(\rho)>\lambda_1(\rho)\in C_\rho$ и $\lambda_k(\rho)\to\lambda_1(\rho)$ при $k\to\infty$. Рассматривая ρ в качестве параметра, убеждаемся в следующем. Каждая из функций $\lambda_k(\rho)$ непрерывна и монотонно убывает, а разности $\lambda_k(\rho)-\lambda_{k+1}(\rho)$ положительны на полуоси $\rho>0$. При достаточно большом ρ $\lambda_2(\rho)<0$, а при $\rho=\rho_1$, отвечающем образу параллели γ поверхности F $\lambda_1(\rho_1)=0$. Отсюда заключаем, что существует счетное множество $\{\rho_k\}_{k=2}^{\infty}$ значений ρ таких, что $\rho_{k+1}<\rho_k$, $\rho_k\to\rho_1$ и на полуоси $\rho>\rho_1$, уравнение $\mathbf{A}(\rho)\,\mathbf{x}=0$ разрешимо только при значениях $\rho=\rho_k$ $(k=2,3,\ldots)$. Иными словами, при $\rho>\rho_1$ поверхности F_{ρ_k} $(k=2,3,\ldots)$ и только они являются нежесткими относительно точки O', откуда следует теорема 2.

7. Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место и для общих выпуклых поверхностей вращения. Метод их доказательства почти не изменяется. Поверхность, для которой доказывается аналог теоремы 1, не должна вырождаться в конус.

Система уравнений, которым удовлетворяют компоненты φ_k, ψ_k, χ_k фундаментальных полей τ_k, приводится в работе А. Д. Александрова [11]. Существование полей τ_k вытекает из теоремы существования изгибающего поля общей выпуклой поверхности по заданной на краю вертикальной составляющей поля. Эта теорема доказана А. В. Погореловым [12]. Лемма 2 в общем случае не имеет места, но свойство $\omega_k \to 0$ (монотонно) сохраняется. При доказательстве этого факта используется основная лемма А. В. Погорелова для вертикальной составляющей изгибающего поля общей выпуклой поверхности [12]. При изучении спектра оператора $\mathbf{A}(\rho)$ (теорема 2) используется теорема о непрерывной зависимости спектра возмущенного оператора, доказанная в работе [13].

§ 2. Об одном способе построения нежестких замкнутых поверхностей вращения

1. Обычно при построении нежесткой замкнутой поверхности вращения используют уравнение

$$\rho(u)\chi_k''(u) + (k^2-1)\rho''(u)\chi(u) = 0,$$

подбирая меридиан поверхности так, чтобы это уравнение имело регулярное решение [4, 14].

Этот способ довольно громоздкий и, вообще говоря, не дает возможности в явном виде выписать уравнение построенной поверхности.

Мы укажем простой способ построения нежестких поверхностей. Основываясь на нем, приведем пример замкнутой аналитической нежесткой поверхности вращения, уравнение и изгибающее поле которой выписываются в явном виде.

Будем исходить из уравнения для функции $\varphi_k(\rho)$

$$\rho\frac{d}{d\rho}(u'\varphi_k') - k^2u''\varphi_k = 0.$$

Это уравнение позволяет строить нежесткие поверхности путем задания составляющих φ_k их фундаментальных изгибающих полей.

Действительно, из уравнения имеем

$$u = \int \exp\left(\int \frac{\rho\varphi_k''}{k^2\varphi_k - \rho\varphi_k'}\,d\rho\right)d\rho,$$

так что меридиан поверхности вполне определяется функцией $\varphi_k(\rho)$. Если эта функция задана и поверхность определена, остается только найти компоненты ψ_k и χ_k фундаментального изгибающего поля τ_k поверхности. При выборе функции $\varphi_k(\rho)$ надо лишь проследить за тем, чтобы в интегралах, выражающих функцию $u = u(\rho)$, не появились особенности.

Пример. Пусть $k \geqslant 2$ — целое число, а функция φ_k задана на полуоси $\rho \geqslant 0$ и имеет вид

$$\varphi_k = (\rho^k + \rho^{-k})^{-1}.$$

Эта функция определяет аналитическую бесконечную поверхность вращения Φ_k с меридианом

$$u = \int_0^\rho \rho\left(\frac{\rho^k+\rho^{-k}}{(k+1)\rho^k + (k-1)\rho^{-k}}\right)^2 d\rho.$$

Изгибающее поле τ_k этой поверхности имеет составляющие

$$\begin{aligned}
&\varphi_k = (\rho^k + \rho^{-k})^{-1};\\
&\varphi_k = -k(k^2-1)^{-1}((k+1))\rho^k + (k-1)\rho^{-k})^{-1}\rho;\\
&\chi_k = ik^{-1}\psi_k.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что при проективном преобразовании поверхности Φ_k в замкнутую поверхность, получим поверхность аналитическую и нежесткую.

2. Пусть F_j $(j = 1, 2)$ — две проективно неэквивалентные поверхности вращения положительной кривизны с общим краем γ, $u = u_j(\rho)$ $(j = 1, 2)$ — соответствующие меридианы этих поверхностей, уравнение $\rho = 1$ определяет окружность γ.

Предположим, что функции $u_j(\rho)$ однозначны и регулярны на сегменте $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, причем $u_j(1) = u_j'(1) = 1$ $(j = 1, 2)$. Пусть A_k^j $(j = 1, 2,$ $k \geqslant 2$ — целое число) — «k-е» точки относительной нежесткости соответствующих поверхностей, принадлежащие оси вращения, которые определяются решениями $\varphi_k^j(\rho)$ уравнений

$$\rho \frac{d}{d\rho}(u_j'(\varphi_k^j)') - k^2 u_j' \varphi_k^j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

а

$$\tau_k^j(\rho, v) = Re Ce^{ikv}(\varphi_k^j e + \psi_k^j a + \chi_k^j a'), \quad (j = 1, 2) —$$

соответствующие изгибающие поля поверхностей F_j $(j = 1, 2)$, где $\psi_k^1(1) = \psi_k^2(1) = -1$.

Предположим, что точки A_k^1 и A_k^2 совпадают. Тогда поверхность, склеенная из F_1 и F_2, является нежесткой.

Доказательство. Достаточно проверить равенство $\tau_k^1(1, v) = \tau_k^2(1, v)$. А это равенство справедливо, так как

$$A_k^1 \equiv A_k^2 \text{ и } \psi_k^j(1) = -1 \quad (j = 1, 2).$$

В том, что рассмотренная пара поверхностей существует, нетрудно убедиться, если воспользоваться леммой 1.

Если поверхности F_1 и F_2 (проективно не эквивалентные!) строить методом, указанным в начале этого параграфа (п. 1), можно добиться следующего. Поверхности F_1 и F_2 вдоль линии склеивания имеют заданный порядок соприкосновения, конечный или бесконечный, либо же совпадают в окрестности этой линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров и Е. П. Сенькин. О неизгибаемости выпуклых поверхностей. Вестник ЛГУ, № 3, 1955.
2. Н. Ф. Ефимов. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. Успехи матем. наук, вып. 2, 1948.
3. E. Rembs. Math. Ann. 111 (1935), 529—535.
4. С. Э. Кон-Фоссен. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. Физматгиз, 1959, 87—99.
5. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, 1959.
6. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. Изд-во иностр. лит., 1962; 136, 198.
7. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа. Физматгиз, 1963, 193—194.
8. Э. Ч. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Изд-во иностр. лит., т. 2, 1961, 111.
9. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, 1961, 91.
10. Н. И. Черней. О бесконечно малых изгибаниях сферических сегментов относительно произвольной плоскости. Укр. матем. журнал, т. 14, № 4, 1962.
11. А. Д. Александров. О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей. Матем. сб., т. 1 (43), № 3, 1936.
12. А. В. Погорелов. Изгибания общих выпуклых поверхностей. Изд-во ХГУ, 1959.
13. М. К. Гавурин. Об оценках собственных чисел и векторов возмущенного оператора. ДАН СССР, 96 (1954), 1093—1095.
14. E. Rembs. Math. Zeitschr., 56 (1952), 271—279.

О ПОВЕРХНОСТЯХ, НЕСУЩИХ КОНТИНУУМ СЕТЕЙ КВАЗИПЕРЕНОСА

Л. Т. Моторный (Харьков)

В статье [1] были определены все поверхности вращения, являющиеся одновременно поверхностями квазипереноса. Было доказано, что найденные поверхности несут четыре сети квазипереноса, либо континуум сетей.

Цель настоящей работы, представляющей собой продолжение статьи [1], — отыскать все поверхности, несущие континуум сетей квазипереноса. Оказывается, что они являются поверхностями вращения специального вида.

§ 1. Поверхностью квазипереноса [2] называется поверхность, допускающая каноническое представление

$$\mathfrak{X}(u, v) = \mathfrak{a}(u)\,\mathfrak{T}(v), \tag{1}$$

где $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{T}$ — кватернионы вида

$$\mathfrak{a} = A_0 e_0 + A_1 e_1 + \varepsilon (A_2 e_2 + A_3 e_3);$$

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \quad e_i e_j = e_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2; \quad \varepsilon^2 = 0,$$

нормированные так, что

$$A_0^2 + A_1^2 = 1.$$

Из уравнения (1) получаются для координат поверхности следующие выражения:

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos(u + v); \\ x_1 &= \sin(u + v); \\ x_2 &= A_2(u)\cos v + A_3(u)\sin v + B_2(v)\cos u - B_3(v)\sin u; \\ x_3 &= A_3(u)\cos v - A_2(u)\sin v + B_3(v)\cos u + B_2(v)\sin u. \end{aligned} \tag{2}$$

Координатная сеть является сетью квазипереноса.

Наша задача — определить функции $A_2(u)$, $A_3(u)$, $B_2(v)$, $B_3(v)$ так, чтобы поверхность (2) несла континуум сетей квазипереноса.

В статье [1] было доказано: чтобы сеть кривых

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{\delta v}{\delta u} = \psi(u, v) \tag{3}$$

была сетью квазипереноса, необходимо и достаточно, чтобы она была квазисопряженной

$$b_{11} + b_{12}(\varphi + \psi) + b_{22}\varphi\psi = \varepsilon_{12}(\varphi - \psi) \tag{4}$$

и чебышевской

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v' \, \partial v^2} + G^k_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v'} \cdot \frac{\partial u^\beta}{\partial v^2} = 0, \tag{5}$$

где $u^1 = u$, $u^2 = v$, v^1, v^2 — параметры сети квазипереноса, коэффициенты g_{ij}, b_{ij}, $G^k_{\alpha\beta}$ определяются из деривационных формул

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \, \partial u^j} = G^m_{ij} \frac{\partial x}{\partial u^m} - g_{ij} x + b_{ij} X$$

$X(0, 0, \xi_2, \xi_3)$ — полюс касательной плоскости (ξ_i) относительно абсолюта квазиэллиптического пространства.

Тензор ε_{ik} формулы (4) имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \left(x, \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u^k}, X\right).$$

Коэффициенты первой квадратичной формы

$$g_{ik} = 1, \quad i, k = 1, 2.$$

Введем новые обозначения:

$$A_2 + A_3' = U_0 \cos u - U_1 \sin u, \quad A_3 - A_2' = U_0 \sin u + U_1 \cos u;$$
$$B_2 - B_3' = V_1 \sin v - V_0 \cos v, \quad B_3 + B_2' = V_0 \sin v + V_1 \cos v;$$
$$b = b_{11} b_{12}, \quad b' = b_{12}^2, \quad b'' = b_{22} b_{12}. \tag{6}$$

Тогда

$$-b = V_0 U_1' + V_1 U_0' + U_2;$$
$$-b'' = V_0' U_1 + V_1' U_0 + V_2;$$
$$b' = U_0^2 + U_1^2 + V_0^2 + V_1^2 + 2(U_1 V_1 \mp U_0 V_0). \tag{7}$$

Здесь

$$U_2 = U_0' U_1 - U_1' U_0, \quad V_2 = V_0' V_1 - Y_1' V_0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\varepsilon_{12}^2 = b_{12}^2 = b', \quad G_{ik}^1 = -G_{ik}^2, \quad G_{11}^1 = \frac{b_u'}{2b'}, \quad G_{22}' = \frac{b_v'}{2b'}, \quad G_{12}^1 = 0. \tag{8}$$

Учитывая (7), (8), перепишем условия (4), (5) так:

$$\varphi_u + \psi \varphi_v = (\varphi + 1)\left(\frac{b_u'}{2b'} - \frac{b_v'}{2b'} \varphi\psi\right);$$
$$\psi_u + \varphi \psi_v = (\psi + 1)\left(\frac{b_u'}{2b'} - \frac{b_v'}{2b'} \varphi\psi\right); \tag{5'}$$
$$b - 2b'\varphi + b''\varphi\psi = 0. \tag{4'}$$

Вместо функций φ, ψ, связанных зависимостью (4'), введем новую функцию σ:

$$\sigma = b' - \frac{b}{\varphi} = b''\psi - b',$$

откуда

$$\varphi = \frac{b}{b' - \sigma}, \quad \psi = \frac{\sigma + b'}{b''}.$$

Внеся эти значения φ, ψ и их производные в (5'), получим

$$\begin{aligned}(\sigma^2 + bb'' - b'^2)\,\sigma_u &= a_1\sigma^3 + b_1\sigma^2 + c_1\sigma + d_1,\\ (\sigma^2 + bb'' - b'^2)\,\sigma_v &= a_2\sigma^3 - b_2\sigma^2 + c_2\sigma - d_2,\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$a_1 = \frac{2b_v}{b''}, \quad b_1 = 3b_v - \frac{bb_v''}{b''} + \frac{2bb_v'}{b''},$$

$$c_1 = 3bb_v' - b''b_u' - \frac{2bb'b_v''}{b''} - b'b_u' + \frac{bb'b_v'}{b''} - bb_v + b''b_u,$$

$$d_1 = \frac{3}{2} bb'b_v' - \frac{1}{2} b'b''b_u' - \frac{bb'^2 b_v''}{b''} + \frac{3}{2} bb''b_u' - b'b''b_u - \frac{b^2}{2} b_v'.$$

Коэффициенты a_2, b_2, c_2, d_2 получаются из a_1, b_1, c_1, d_1, заменой b на b'', u на v.

Таким образом, мы получили два дифференциальных уравнения в частных производных первого порядка на одну неизвестную функцию σ.

Условия совместности системы (9) имеет вид

$$(\sigma^2 + bb'' - b'^2)(A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D) = 0, \qquad (10)$$

где

$$A = a_{1_v} - a_{2_u}, \quad B = b_{1_v} + b_{2_u} - a_1 b_2 - a_2 b_1,$$
$$C = c_{1_v} - c_{2_u} + 2(a_1 c_2 - a_2 c_1) + a_2 (bb'' - b'^2)_u - a_1 (bb'' - b'^2)_v,$$
$$D(bb'' - b'^2) = (bb'' - b'^2)(d_{1_v} + d_{2_u}) - d_1 c_2 - d_2 c_1 - d_1 (bb'' - b'^2)_v - d_2 (bb'' - b'^2)_u.$$

В условии (10) множитель $\sigma^2 + bb'' - b'^2$ не равен нулю, ибо в противном случае $\varphi = \psi$ и семейства сети совпадают.

Если (10) не является тождеством относительно σ, то поверхность может иметь только конечное число сетей квазипереноса. Если же (10) тождество, то система (9) вполне интегрируема и определяет решение, зависящее от произвольной постоянной.

Таким образом, чтобы поверхность несла континуум сетей квазипереноса, необходимо и достаточно выполнение условий

$$A = B = C = D = 0.$$

§ 2. 1. Приравняем нулю коэффициент A в (10):

$$a_{1_v} = a_{2_u}.$$

Заметив, что $b''_u = b_v$, перепишем это условие так:

$$\left(\ln \frac{b}{b''}\right)_{uv} = 0. \qquad (11)$$

Учитывая равенства

$$b'' b''_{uv} - b''_u b''_v = bQ^3,$$
$$bb_{uv} - b_u b_v = b'' P^3,$$

где

$$P^3 = U''_0 U'_1 - U''_1 U'_0; \quad Q^3 = V''_0 V'_1 - V''_1 V'_0$$

можно уравнение (11) записать следующим образом:

$$bQ = Pb''. \qquad (11')$$

Если $b = 0$, то одно семейство сетки квазипереноса является асимтотическим. Следовательно, поверхность есть цилиндр, образующие которого — правые (левые) параллели. Цилиндры допускают квазиперенос любой кривой на поверхности вдоль прямолинейных образующих, т. е. сеть квазипереноса определяется с точностью до произвольной функции.

Отбросив тривиальный случай цилиндра, имеем, что из $P = 0$ следует $Q = 0$.

Покажем, что при $P = Q = 0$ поверхность — цилиндр.

Пусть

$$P^3 = U''_0 U'_1 - U''_1 U'_0 = 0, \quad Q^3 = V''_0 V'_1 - V''_1 V'_0 = 0. \qquad (12)$$

Из уравнений (12) следует

$$U_1 = C_0 U_0 + C_1; \quad V_1 = D_0 V_0 + D_1.$$

Теперь уравнения (7) принимают вид

$$
\begin{aligned}
-b &= U_0'\,[V_0\,(C_0+D_0)+C_1+D_1];\\
-b'' &= V_0'\,[U_0\,(C_0+D_0)+C_1+D_1];\\
b' &= (U_0-V_0)^2+(C_0U_0+D_0V_0+C_1+D_1)^2.
\end{aligned}
\tag{7'}
$$

Сделаем замену:

$$V_0=\frac{\eta}{\sqrt{1+D_0^2}}-\frac{C_1+D_1}{C_0+D_0},\quad U_0=\frac{\xi}{\sqrt{1+C_0^2}}-\frac{C_1+D_1}{C_0+D_0}.$$

Уравнения (7′) запишутся так:

$$b=\alpha\xi'\eta;\quad b''=\alpha\xi\eta';\quad b'=\xi^2+\eta^2+2\xi\eta\beta,$$

где

$$\alpha=-\frac{C_0+D_0}{\sqrt{1+C_0^2}\sqrt{1+D_0^2}},\quad \alpha^2+\beta^2=1.$$

Из равенства нулю коэффициента B в (10) следует:

$$4\frac{\eta''}{\eta'}-\frac{\eta}{\eta'}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)'-\frac{6\eta'}{\eta}+4\frac{\xi''}{\xi'}-\frac{\xi}{\xi'}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)'-\frac{6\xi'}{\xi}=\frac{8\beta}{\alpha},$$

откуда

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\eta\eta''}{\eta'}\right)' &= 5\eta''-6\frac{\eta'^2}{\eta}-\frac{\delta}{\alpha}\eta';\\
\left(\frac{\xi\xi''}{\xi'}\right)' &= 5\xi''-6\frac{\xi'^2}{\xi}+\frac{\delta-8\beta}{\alpha}\xi',
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где δ — постоянная.

Из равенства нулю коэффициента C в (10) получаем:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\xi\xi''}{\xi'}\right)' &= \bar{\alpha}\xi''+\alpha_1\xi^2\xi'+\beta_1\xi\xi'+\gamma_1\xi';\\
\alpha^2\alpha_2\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)' &= \frac{24\xi'}{\xi^3}+\bar{\beta}\xi\xi'+\delta_1\xi';\\
\left(\frac{\eta\eta''}{\eta'}\right)' &= \bar{\alpha}\eta''+\alpha_2\eta^2\eta'+\beta_2\eta\eta'+\gamma_2\eta';\\
\alpha^2\alpha_1\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)' &= \frac{24\eta'}{\eta^3}=\bar{\beta}\eta\eta'+\delta_2\eta',
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, α_i, β_i, γ_i, δ_i — постоянные.

Оказывается, что система (13), (14) совместна только при $\xi'=\eta'=0$, но тогда $b''=b=0$ и поверхность — цилиндр.

Таким образом, если $P=Q=0$, то единственными поверхностями, несущими сеть квазипереноса, являются цилиндры. Отбросив этот тривиальный случай, будем считать $PQ\neq 0$.

2. В силу (7) уравнение (11′) принимает вид

$$Q\,(V_1U_0'+V_0U_1'+V_2)=P\,(V_0'U_1+V_1'U_0+V_2).\tag{11''}$$

Это функциональное уравнение на четыре функции одного аргумента $U_0(u)$, $U_1(u)$, $V_0(v)$, $V_1(v)$ и их производные. Уравнение (11″) состоит из суммы произведений функций u на функцию v. В силу $PQ\neq 0$ имеем $U_0'V_0'\neq 0$.

Разделим (11″) на $U_0'V_0'$ и продифференцируем по u, v:

$$\left(\frac{QV_0}{V_0'}\right)'\left(\frac{U_1}{U_0'}\right)'+\left(\frac{Q}{V_0'}\right)'\left(\frac{U_2}{U_0'}\right)'=\left(\frac{PU_0}{U_0'}\right)'\left(\frac{V_1}{V_0'}\right)'+\left(\frac{P}{U_0'}\right)'\left(\frac{V_2}{V_0'}\right)'.\tag{15}$$

Разделим (15) на $\left(\frac{U_1'}{U_0'}\right)'\left(\frac{V_1'}{V_0'}\right)'$ и снова продифференцируем по u, v:

$$\left[\left(\frac{Q}{V_0'}\right)' : \left(\frac{V_1'}{V_0'}\right)'\right]'\left[\left(\frac{U_2'}{U_0'}\right)' : \left(\frac{U_1'}{U_0'}\right)'\right]' = \left[\left(\frac{P}{U_0'}\right)' : \left(\frac{U_1'}{U_0'}\right)'\right]'\left[\left(\frac{V_2}{V_0'}\right)' : \left(\frac{V_1'}{V_0'}\right)'\right]'. \qquad (16)$$

Из этого уравнения следует:

$$P = \alpha U_2 + \alpha_1 U_1 + \beta_1 U_0', \quad Q = \alpha V_2 + \alpha_2 V_1' + \beta_2 V_0', \qquad (17)$$

где α, α_i, β_i — постоянные.

Подставив значения P, Q по (17) в (16) и (11″), получим

$$M_1 U_0' = N_1 U_1', \quad R_1 U_0' = S_1 U_1'; \quad M_2 V_0' = N_2 V_1', \quad R_2 V_0' = S_2 V_1', \qquad (18)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \alpha U_0 U_1 - \alpha_2 U_1 + \beta_1 U_0 - \gamma_1, & M_2 &= \alpha V_0 V_1 - \alpha_1 V_1 + \beta_2 V_0 - \gamma_2, \\ N_1 &= \alpha U_0^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) U_0 + \beta, & N_2 &= \alpha V_0^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) V_0 + \beta, \\ R_1 &= \alpha U_1^2 + (\beta_1 - \beta_2) U_1 - \gamma, & R_2 &= \alpha V_1^2 + (\beta_2 - \beta_1) V_1 - \gamma, \\ S_1 &= \alpha U_0 U_1 - \alpha_1 U_1 - \beta_2 U_0 + \gamma_2, & S_2 &= \alpha V_0 V_1 - \alpha_2 V_1 - \beta_1 V_0 + \gamma_1. \end{aligned} \qquad (19)$$

Из (18) следует

$$M_1 S_1 = R_1 N_1, \quad M_2 S_2 = N_2 R_2,$$

или

$$EU_0^2 + 2FU_0U_1 + GU_1^2 + 2HU_0 + 2KU_1 + L = 0, \qquad (20)$$

$$EV_0^2 - 2FV_0V_1 + GV_1^2 + 2HV_0 - 2KV_1 + L = 0, \qquad (20^*)$$

где

$$E = \alpha\gamma - \beta_1\beta_2, \quad 2F = \alpha(\gamma_1 - \gamma_2) + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2, \quad G = \alpha_1\alpha_2 - \alpha\beta,$$
$$2H = \beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 - \gamma(\alpha_1 + \alpha_2), \; 2K = \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 - \beta(\beta_1 - \beta_2), \; L = \beta\gamma - \gamma_1\gamma_2.$$

Таким образом, функции U_0, U_1 (соответственно V_0, V_1) связаны квадратичной зависимостью.

3. Докажем, что (20) не есть тождество. Действительно, из равенства нулю коэффициентов в (20) имеем:

$$\begin{gathered} \alpha\gamma = \beta_1\beta_2, \quad \alpha(\gamma_1 - \gamma_2) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad \gamma(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2, \\ \alpha\beta = \alpha_1\alpha_2, \quad \beta(\beta_1 - \beta_2) = \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2, \quad \beta\gamma = \gamma_1\gamma_2. \end{gathered} \qquad (21)$$

Здесь $\alpha \neq 0$, ибо тогда $PQ = 0$, поэтому

$$\gamma = \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}, \quad \beta = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha}.$$

Введем обозначения

$$\alpha\gamma_1 = p_1, \quad \alpha\gamma_2 = p_2, \quad \alpha_2\beta_1 = q_1, \quad \alpha_1\beta_2 = q_2.$$

Теперь система (21) запишется так:

$$\begin{gathered} p_2 - q_2 = p_1 - q_1, \quad \beta_1(p_2 - q_2) = \beta_2(p_1 - q_1), \\ \alpha_1(p_1 - q_1) = \alpha_2(p_2 - q_2), \quad p_1p_2 = q_1q_2. \end{gathered} \qquad (21')$$

Из (21′) следует

$$p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2,$$

а из (19):

$$\begin{aligned} \alpha M_1 &= (\alpha U_0 - \alpha_2)(\alpha U_1 + \beta_1), \\ \alpha N_1 &= (\alpha U_0 - \alpha_1)(\alpha U_0 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Теперь (18) принимает вид:

$$\frac{U_0'}{\alpha U_0 - \alpha_1} = \frac{U_1'}{\alpha U_1 + \beta_1},$$

откуда

$$\alpha U_0 - \alpha_1 = C(\alpha U_1 + \beta_1).$$

C — постоянная, а следовательно $PQ = 0$.

Итак, если (20) тождество относительно U_0, U_1, то $PQ = 0$.

4. Продифференцируем (20) и присоединим к нему первое из уравнений (18). Записывая условие совместности полученной системы и вычитая из него уравнение (20), умноженное на αU_0, получим:

$$E_1 U_0^2 + 2F_1 U_0 U_1 + G_1 U_1^2 + 2H_1 U_0 + 2K_1 U_1 + L_1 = 0. \tag{22}$$

Аналогично

$$E_2 V_0^2 + 2F_2 V_0 V_1 + G_2 V_1^2 + 2H_2 V_0 + 2K_2 V_1 + L_2 = 0, \tag{22*}$$

где

$$E_1 = \beta_1 F - \alpha H - (\alpha_1 + \alpha_2) E; \quad E_2 = -\beta_2 F - \alpha H - (\alpha_1 + \alpha_2) E;$$
$$2F_1 = \beta_1 G - (2\alpha_2 + \alpha_1) F - \alpha K; \quad 2F_2 = \beta_2 G + (2\alpha_1 + \alpha_2) F + \alpha K;$$
$$G_1 = -\alpha_2 G; \qquad G_2 = -\alpha_1 G;$$
$$2H_1 = \beta_1 K + \beta E - \alpha L - \gamma_1 F - (\alpha_1 + \alpha_2) H;$$
$$2H_2 = -\beta_2 K + \beta E - \alpha L + \gamma_2 F - (\alpha_1 + \alpha_2) H;$$
$$2K_1 = \beta F - \gamma_1 G - \alpha_2 K; \qquad 2K_2 = -\beta F - \gamma_2 G + \alpha_1 K;$$
$$L_1 = \beta H - \gamma_1 K; \qquad L_2 = \beta H + \gamma_2 K.$$

Коэффициенты уравнений (22), (22*) пропорциональны коэффициентам (20), (22*), иначе

$$U_0' = U_1' = 0 \text{ и } PQ = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &E_1 = \rho E, \quad F_1 = \rho F, \quad G_1 = \rho G, \quad H_1 = \rho H, \quad K_1 = \rho K, \quad L_1 = \rho L; \\ &E_2 = \sigma E, \quad F_2 = -\sigma F, \quad G_2 = \sigma G, \quad H_2 = \sigma H, \quad K_2 = -\sigma K, \quad L_2 = \sigma L. \end{aligned} \tag{23}$$

Система (23) совместна тогда и только тогда, если

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda, \quad \beta_1 = -\beta_2 = \mu, \quad \gamma_1 = -\gamma_2 = \nu. \tag{24}$$

Предположим, что хоть один из коэффициентов E, G не равен нулю. Не ограничивая общности, можно считать $E \neq 0$. В дальнейшем мы покажем, что при $E = G = 0$ поверхность представляет собой цилиндр.

Квадратную зависимость между U_0, U_1 (соответственно V_0, V_1) можно представить в параметрической форме следующим образом:

$$U_0 = a_0 p(u) + \frac{b_0}{p(u)} + c_0, \quad U_1 = a_1 p(u) - \frac{a_1}{p(u)} + c_1; \tag{25}$$

$$V_0 = b_0 q(v) + \frac{a_0}{q(v)} + c_0, \quad V_1 = a_1 q(v) - \frac{a_1}{q(v)} - c_1, \tag{25*}$$

где

$$a_1 = \frac{d}{b - \bar b}; \quad c_1 = \frac{\bar c - c}{b - \bar b}; \quad a_0 = -\frac{\bar b d}{(b - \bar b)\sqrt{E}}; \quad b_0 = \frac{bd}{(b - \bar b)\sqrt{E}};$$

$$c_0 = \frac{\bar b c - \bar c b}{(b - \bar b)\sqrt{E}}; \quad d^2 = c\bar c - L; \quad b = \frac{F + \sqrt{F^2 + EG}}{\sqrt{E}};$$

$$\bar b = \frac{F - \sqrt{F^2 - EG}}{\sqrt{E}}; \qquad c = \frac{FH - KE + H\sqrt{F^2 - EG}}{\sqrt{E}\sqrt{F^2 - EG}};$$

$$\bar c = \frac{-FH + KE + H\sqrt{F^2 - EG}}{\sqrt{E}\sqrt{F^2 - EG}}.$$

Таким образом, равенство нулю коэффициента A в (10) привело к тому, что четыре функции U_0, U_1, V_0, V_1, а следовательно, и A_2, A_3, B_2, B_3 выразились через две функции $p(u)$, $q(v)$ посредством (25), (25*).

§ 3.1. Для определения функций $p(u)$, $q(v)$ приравняем нулю коэффициент B в (10):

$$B = b_{1v} + b_{2u} - a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \qquad (26)$$

Внесем в (26) значения b, b', b'' по (7), а затем заменим U_0, U_1, V_0, V_1 по (25), (25*). Мы получим функциональное уравнение на функции $p(u)$, $q(v)$ и их производные

$$P_0 + P_1 q + P_2 q^2 + \frac{P_3}{q} + \frac{P_4}{q_2} + Q_0 + Q_1 p + Q_2 p^2 + \frac{Q_3}{p} + \frac{Q_4}{p_2} = 0, \qquad (27)$$

где

$$\begin{gathered}
\frac{-4p^2}{a^3} P_4 = \frac{p}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' + \frac{2p''}{p'}, \quad a^3 = 2a_1(a_0 + b_0); \\
\frac{2p^2}{a_3} P_3 = \frac{2p^2}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' + \frac{pp''}{p'} - 3p'; \\
-\frac{4}{a^3} P_2 = \frac{p^3}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' - \frac{4p^2 p''}{p'} + 6pp'; \\
\frac{2}{a^3} P_1 = \frac{2p^2}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' - \frac{5pp''}{p'} + 3p'; \\
\frac{4p}{6a^3}(P_0 - 8U_0^2 - 8U_1^2) = \frac{p^2}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' - \frac{pp''}{p'} - p'.
\end{gathered} \qquad (28)$$

$$\begin{gathered}
\frac{q}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' + \frac{2q''}{q'} = -\frac{4q^2}{a^3}\left[Q_4 - 4r - \frac{4(a_1^2 - a_0 b_0)}{q^2}\right]; \\
\frac{2q^2}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' + \frac{qq''}{q'} - 3q' = \frac{2q^2}{a^3}\left[Q_3 + 24sq - \frac{8(a_1^2 - a_0 b_0)}{q} + 16(b_0 c_0 - a_1 c_1)\right]; \\
\frac{q^3}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' - \frac{4q^2 q''}{q'} + 6qq' = -\frac{4}{a^3}[Q_2 - 4r - 4(a_1^2 - a_0 b_0) q^2]; \\
\frac{2q^2}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' - \frac{5qq''}{q'} + 3q' = \frac{2}{a^3}\left[Q_1 - 8(a_1^2 - a_0 b_0) q + \frac{24r}{q} + 16(a_0 c_0 + a_1 c_1)\right]; \\
\frac{q^2}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' - \frac{qq''}{q'} - q' = \frac{-4q}{6a^3}\left[Q_0 + 8(a_1^2 - a_0 b_0) + 8(c_0^2 + c_1^2) - \frac{12r}{q^2} - 12sq^2\right]; \\
r = a_0^2 + a_1^2, \quad s = b_0^2 + a_1^2.
\end{gathered} \qquad (29)$$

Из функционального уравнения (27) следует

$$\begin{gathered}
P_4 = \frac{\alpha}{p^2} - \frac{\alpha_1}{p} + \beta_1 p^2 + \gamma_1 p + \delta_1, \quad Q_4 = -\frac{\alpha}{q^2} - \frac{\alpha_1}{q} + \beta_2 q^2 + \gamma_2 q + \delta_2; \\
P_3 = \frac{\alpha_2}{p^2} - \frac{\beta}{p} + \lambda_1 p^2 + \mu_1 p + \nu_1, \quad Q_3 = \frac{\alpha_1}{q_2} + \frac{\beta}{q} + \lambda_2 q^2 + \mu_2 q + \nu_2; \\
P_2 = \delta p^2 + e_1 p + m_1 - \frac{\lambda_2}{p} - \frac{\beta_2}{p^2}, \quad Q_2 = m_2 + e_2 q - \delta q^2 - \frac{\lambda_1}{q} - \frac{\beta_1}{q^2}; \\
P_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon p - e_2 p^2 - \frac{\mu_2}{p} - \frac{\gamma_2}{p^2}, \quad Q_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon q - e_1 q^2 - \frac{\mu_1}{q} - \frac{\gamma_1}{q^2}; \\
P_0 = \gamma - \varepsilon_2 p - m_2 p^2 - \frac{\nu_2}{p} - \frac{\delta_2}{p^2}, \quad Q_0 = -\gamma - \varepsilon_1 q - m_1 q^2 - \frac{\nu_1}{q} - \frac{\delta_1}{q^2}.
\end{gathered} \qquad (30)$$

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений (28), (29) третьего порядка на функции $p(u)$, $q(v)$. Из этой системы функции $p(u)$, $q(v)$, а следовательно, $A_2(u)$, $A_3(u)$, $B_2(v)$, $B_3(v)$ определяются с точностью до постоянных, значения которых мы уточним, приравнивая к нулю остальные коэффициенты в (10).

Из первого и третьего уравнений (28) следует:

$$\frac{6p^2p''}{p'} - 6pp' = -\frac{4}{a^3}\left[p^4P_4 - P_2\right],$$

откуда

$$p' = -\frac{2}{3a^3}\left[\frac{\beta_1}{4}p^5 + \frac{\gamma_1}{3}p^4 + \frac{\delta_1}{2}p^3 - \alpha_1 p^2 + (\alpha - \delta)\,p\ln p + e_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{m_1}{2p} - \frac{\lambda_2}{3p^2} - \frac{\beta_2}{4p^3} + C'p\right]; \tag{31}$$

аналогично

$$q' = -\frac{2}{3a^3}\left[\frac{\beta^2}{4}q^5 + \frac{\gamma_2}{3}q^4 + \frac{\delta_2}{2}q^3 - \alpha_2 q^2 + (\alpha - \delta)\,q\ln q + e_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{m_2}{2q} - \frac{\lambda_1}{3q^2} - \frac{\beta_1}{4q^3} + \widetilde{C}q\right]. \tag{31*}$$

Мы ищем общее решение системы (28), (29), поэтому найденные значения p', q' должны тождественно удовлетворять всем уравнениям (28), (29). Подставляя в каждое из уравнений (28), (29) значения p', q' по (31), (31*), получим систему многочленов относительно p либо q с постоянными коэффициентами при них. Они должны быть тождествами, поэтому коэффициенты при различных степенях p или q равны нулю.

Таким образом, мы получили систему условий на коэффициенты α, β, γ, δ, ..., решение которой

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0; \quad e_2 = \alpha_1 = -\varepsilon_2 = \nu_2;$$

$$e_1 = \alpha_2 = -\varepsilon_1 = \nu_1; \quad \alpha = \delta = \frac{C'}{3}; \quad \beta = \varepsilon = 2\alpha; \quad \gamma = -2C' = 2\widetilde{C};$$

$$\mu_2 = -2\delta_2 - 16s; \quad \mu_1 = -2\delta_1; \quad m_1 = -\delta_2 - 8s;$$

$$m_2 = -\delta_1 - 8r; \quad c_0 = c_1 = 0; \quad a_1^2 = a_0 b_0. \tag{32}$$

Итак, из равенства нулю коэффициента B в (10) следует

$$p' = Ap^3 + Bp^2 + Cp - D + \frac{\bar{E}}{p};$$

$$q' = E'q^3 + Dq^2 - Cq - B + \frac{\bar{A}}{q}, \tag{33}$$

где

$$A = -\frac{\delta_1}{3a^3}; \quad B = \frac{2\alpha_1}{3a^3}; \quad C = -\frac{2C'}{3a^3}; \quad D = \frac{2\alpha_2}{3a^3};$$

$$E' = \frac{4s - \delta_2}{3a^3}; \quad A + \bar{A} = \frac{4r}{a^3}; \quad E' + \bar{E} = \frac{4s}{a^3}.$$

2. В силу (32) перепишем уравнения (25), (25*) следующим образом:

$$U_0 = a_0 p + \frac{b_0}{p}; \quad U_1 = a_1 p - \frac{a_1}{p};$$

$$V_0 = b_0 q + \frac{a_0}{q}; \quad V_1 = a_1 q - \frac{a_1}{q}.$$

Подставляя эти значения в (7), получим

$$b = -\frac{a^3p'(pq-1)^2}{2p^2q}; \quad b'' = -\frac{a^3q'(pq-1)^2}{2pq^2};$$

$$b' = \frac{(pq-1)^2}{p^2q^2}(rp^2 + sq^2). \tag{7''}$$

Приравняем нулю коэффициент C в (10):

$$c_{1v} - c_{2u} + 2a_1c_2 - 2a_2c_1 + a_2(bb'' - b'^2)_u - a_1(bb'' - b'^2)_v = 0.$$

Подставляя сюда значения b, b', b'' по (7''), получим

$$2\frac{p''}{p'}(2rp^3q + spq^3 + sq^2) - 2\frac{q''}{q'}(2spq^3 + rp^3q + rp^2) + 2p'(2sq^3 - 3rp^2q - 3rp) - 2q'(2rp^3 - 3spq^2 - 3sq) + (pq-1)(rp^2 + sq^2)\left[\frac{q}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' - \frac{p}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)'\right] = 0.$$

Внеся значения p'', p', q'', q' по (33), получим многочлен относительно p, q, но так как p, q не постоянные ($PQ \neq 0$), то все коэффициенты при различных степенях pq равны нулю.

Из равенства нулю коэффициентов следует:

$$sA = rE', \quad rD = sB = 0, \quad sC = rC = 0.$$

В силу $E \neq 0$, имеем $sr \neq 0$. Значит,

$$B = C = D = 0.$$

Теперь (33) принимает вид

$$p' = Ap^3 + \frac{\overline{E}}{p},$$

$$q' = E'q^3 + \frac{\overline{A}}{q}, \quad sA = rE'. \tag{33'}$$

3. Приравняем нулю коеффициент D в (10):

$$(b'^2 - bb'')(d_{1v} + d_{2u}) + d_1c_2 + d_2c_1 + d_1(bb'' - b'^2)_v + d_2(bb'' - b'^2)_u = 0.$$

Подставляя значения коэффициентов c_i, d_i, b, b', b'', а затем внеся значения p'', p', q'', q' по (33') получим многочлен относительно p, q, из равенства нулю коэффициентов которого вытекает:

$$A\overline{A} = E'\overline{E} = 0. \tag{34}$$

Следовательно, возможны два случая в силу (33), (33'):

$$A = E' = 0,$$

либо

$$\overline{A} = \overline{E} = 0. \tag{35}$$

Таким образом, имеем два решения для $p(u)$ и $q(v)$:

$$p' = \frac{4r}{a^3}p^3, \quad q' = \frac{4s}{a^3}q^3, \tag{36_1}$$

или

$$p' = \frac{4s}{a^3p}, \quad q' = \frac{4r}{a^3q}, \tag{36_2}$$

откуда

$$p^2(u) = \frac{1}{C_1 - 4\sqrt{\frac{r}{s}}\,u}, \quad q^2(v) = \frac{1}{C_2 - 4\sqrt{\frac{s}{r}}\,v} \tag{$36_1'$}$$

и

$$p^2(u) = 4\sqrt{\frac{s}{r}}\,u + \overline{C}_1, \quad q^2(v) = 4\sqrt{\frac{r}{s}}\,v + \overline{C}_2. \tag{$36_2'$}$$

§ 4. 1. Найдем каноническое представление найденных поверхностей квазипереноса. Из (6) следует:

$$A_3 + A_3'' = U_0' \cos u - U_1' \sin u.$$

Учитывая значение U_0, U_1, будем иметь

$$A_3 + A_3'' = p'(a_0 \cos u - a_1 \sin u) - \frac{p'}{p^2}(b_0 \cos u + a_1 \sin u),$$

откуда, если p_1 определяется по (36_1),

$$A_3(u) = \alpha \sin(u + \beta) + \sqrt{\gamma - \delta u} \cos(u + \vartheta),$$

где

$$\gamma = \frac{k^2 C_1 \operatorname{tg}^2 \vartheta}{4}, \quad 2\delta = k^2 \operatorname{tg} \vartheta, \quad a_0 = k \cos \vartheta, \quad a_1 = k \sin \vartheta,$$

α, β — постоянные.

Теперь из (6) следует:

$$A_2(u) = \alpha \cos(u + \beta) + \sqrt{\gamma - 2\delta u} \sin(u + \vartheta).$$

Для случая, когда p' определяется по (36_2), имеем такое же выражение для $A_2(u)$, $A_3(u)$, но только с другими значениями постоянных.

Аналогично для $B_2(v)$, $B_3(v)$ имеем

$$B_2(v) = \bar{\alpha} \cos(v + \bar{\beta}) + \sqrt{\gamma^* - 2\delta v} \cos(v - \vartheta);$$

$$B_3(v) = \bar{\alpha} \sin(v + \bar{\beta}) + \sqrt{\gamma^* - 2\delta v} \sin(v - \vartheta),$$

где

$$\gamma^* = \frac{k^2 C_2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}{4}, \quad \bar{\alpha}, \ \bar{\beta} \text{ — постоянные.}$$

Таким образом, найденные поверхности квазипереноса имеют каноническое представление:

$$\mathfrak{X}(u, v) = \mathfrak{a}(u) \mathfrak{T}(v), \tag{37}$$

где

$$\mathfrak{a}(u) = e_0 \cos u + e_1 \sin u + \varepsilon \{[\alpha \cos(u + \beta) + \sqrt{\gamma - 2\delta u} \sin(u + \vartheta)] e_2 + [\alpha \sin(u + \beta) + \sqrt{\gamma - 2\delta u} \cos(u + \vartheta)] e_3\};$$

$$\mathfrak{T}(v) = e_0 \cos v + e_1 \sin v + \varepsilon \{[\bar{\alpha} \cos(v + \bar{\beta}) + \sqrt{\gamma^* - 2\delta v} \cos(v - \vartheta)] e_2 + [\bar{\alpha} \sin(v + \bar{\beta}) + \sqrt{\gamma^* - 2\delta v} \sin(v - \vartheta)] e_3\}.$$

Параметр ϑ отвечает различным способам канонического представления этих поверхностей квазипереноса.

2. В предыдущих рассуждениях мы оставили в стороне случай $E = G = 0$. Рассмотрим теперь этот случай.

Пусть $E = G = 0$, $F \neq 0$. Квадратичная зависимость (20) принимает вид

$$2FU_0U_1 + 2HU_0 + 2KU_1 + L = 0. \tag{20'}$$

Вместо U_0, U_1 введем функцию $p(u)$, чтобы выполнялось (20′):

$$U_0 = a_0 p(u) + b_0,$$

$$U_1 = -\frac{a_1}{p(u)} + b_1, \tag{38}$$

где

$$a_1^2 = \frac{L}{2} - \frac{KH}{F}, \quad a_0 = \frac{a_1}{F}, \quad b_0 = -\frac{K}{F}, \quad b_1 = \frac{H}{F}.$$

Функция $p(u)$ определяется с точностью до постоянного множителя, выбором которого можно добиться

$$a_0 = a_1 = a.$$

Аналогично для V_0, V_1 имеем:

$$V_0 = -aq(v) + b_0,$$
$$V_1 = -\frac{a}{q(v)} - b_1. \tag{38*}$$

Из равенства нулю коэффициента B в (10) имеем:

$$P_0 + P_1 q + P_2 q^2 + \frac{P_3}{q} + \frac{P_4}{q^2} + Q_0 + Q_1 p + Q_2 p^2 + \frac{Q_3}{p} + \frac{Q_4}{p^2} = 0, \tag{39}$$

где

$$-\frac{2}{a^2} P_4 = \frac{p^3}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' - \frac{4p^2p''}{p'} + 6pp';$$
$$-\frac{1}{a^2} P_3 = \frac{2p^2}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' - \frac{5pp''}{p'} + 3p';$$
$$-\frac{2p^2}{a^2} P_2 = \frac{p}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' + \frac{2p''}{p'};$$
$$-\frac{p^2}{a^2} P_1 = \frac{2p^2}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' + \frac{pp''}{p'} - 3p';$$
$$-\frac{p}{a^2}(P_0 - 8u_0^2 - 8u_1^2) = \frac{p^2}{p'}\left(\frac{p''}{p'}\right)' - \frac{pp''}{p'} - p'. \tag{28'}$$

$$\frac{2}{a^2}[Q_4 - 4a^2] = \frac{q^3}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' - \frac{4q^2q''}{q'} + 6qq';$$
$$\frac{1}{a^2}\left[Q_3 - \frac{24a^2}{q} - 16ab_1\right] = \frac{2q^3}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' - \frac{5qq''}{q'} + 3q';$$
$$\frac{2q^2}{a^2}[Q_2 - 4a^2] = \frac{q}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' + \frac{2q''}{q'};$$
$$\frac{q^2}{a^2}[Q_1 - 24a^2q + 16ab_0] = \frac{2q^3}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' + \frac{qq''}{q'} - 3q';$$
$$\frac{q}{3a^2}\left[Q_0 - \frac{12a^2}{q^2} + 8(b_0^2 + b_1^2) - 12a^2q^2\right] = \frac{q^2}{q'}\left(\frac{q''}{q'}\right)' - \frac{qq''}{q'} - q'. \tag{29'}$$

Решение функционального уравнения (39) совпадает с (30). Подставляя в (28′), (29′) значение P_i, Q_i по (30), получим систему дифференциальных уравнений третьего порядка на функции $p(u)$, $q(v)$. Общее решение этой системы имеет вид

$$p' = A'p^3 + B'p^2 + C'p + D' + \frac{\overline{E}'}{p};$$
$$q' = \overline{A}'q^3 - B'q^2 + C'q - D' + \frac{E'}{q}, \tag{40}$$

где

$$A' = -\frac{m_1}{6a^2},\quad B' = \frac{\lambda_2}{6a^2},\quad C' = \frac{-C}{3a^2},\quad D' = -\frac{\gamma_1}{3a^2};$$
$$E' = -\frac{\delta_1}{6a^2},\quad \overline{A}' = A' + \frac{2}{a^2},\quad \overline{E}' = E' + \frac{2}{a^2}. \tag{41}$$

В силу (38), (38*) перепишем уравнение (7) так:

$$b = \frac{a^2p'(p+q)^2}{p^2q};$$
$$b'' = -\frac{a^2q'(p+q)^2}{pq^2};$$
$$b' = \frac{a^2(p+q)^2(1+p^2q^2)}{p^2q^2}.$$

Приравняв нулю коэффициент C в (10), получим многочлен относительно p, q. Из равенства нулю его коэффициентов следует

$$A' = B' = C' = \bar{A}' = 0,$$

что противоречит (41).

Таким образом, случай $E = G = 0$ невозможен.

Теорема. Все поверхности квазипереноса, несущие континуум сетей квазипереноса, исчерпываются уравнениями (37).

3. Покажем, что все поверхности квазипереноса (37) являются поверхностями вращения специального вида. Подвергнем поверхность (37) произвольному движению

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{M}\mathfrak{X}\mathfrak{N},$$

где

$$\mathfrak{M} = e_0 \cos \mu + e_1 \sin \mu + \varepsilon m \,(e_2 \cos \bar{\mu} + e_3 \sin \bar{\mu});$$
$$\mathfrak{N} = e_0 \cos \nu + e_1 \sin \nu + \varepsilon n \,(e_2 \cos \bar{\nu} + e_3 \sin \bar{\nu}).$$

Задаваясь определенным движением, т. е. подбирая соответствующие значения параметров движения μ, ν, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, m, n, можно добиться следующего представления кватернионов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{a}(\xi) = e_0 \cos \xi + e_1 \sin \xi + \varepsilon \sqrt{\gamma_1 - 2\delta\xi}\,[e_2 \sin(\xi + \vartheta) + e_3 \cos(\xi + \vartheta)],$$
$$\mathfrak{T}(\eta) = e_0 \cos \eta + e_1 \sin \eta + \varepsilon \sqrt{\overset{*}{\gamma}_1 - 2\delta\eta}\,[e_2 \cos(\eta - \vartheta) + e_3 \sin(\eta - \vartheta)], \quad (37')$$

где

$$\xi = u + \mu, \quad \eta = v + \nu.$$

В работе [1] было показано, что поверхность (37′) есть поверхность вращения, несущая континуум сетей квазипереноса.

Таким образом, доказана теорема:

Единственной поверхностью квазипереноса, несущей континуум сетей квазипереноса, является поверхность вращения (37′).

Кинематическое отображение поверхностей (37′) было рассмотрено нами в статье [1].

В заключение хочу поблагодарить научного руководителя профессора Я. П. Бланка за полезные советы и замечания, высказанные при обсуждении статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк и Л. Т. Моторный. К проблеме В. Бляшке о поверхностях квазипереноса и их связи с кинематикой на плоскости. Записки Харьковского матем. об-ва. Вестник Харьковск. ун-та, серия мех.-мат., т. 31. Изд-во ХГУ, 1964.

2. W. Blaschke. Ebene Kinematik. Leipzig — Berlin, 1930.

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ АКСИОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙКИ И ЭТАЛОНА ДЛИНЫ

П. М. Олоничев (Винница)

1. Построения в евклидовой плоскости с помощью линейки и переносителя отрезков впервые рассмотрел известный немецкий математик Гильберт. Он же доказал, что линейкой и переносителем отрезков решаются те и только те задачи, которые аналитически сводятся к построению отрезков с длинами, выражаемыми через длины данных отрезков с помощью рациональных операций и иррациональной операции извлечения квадратного корня из суммы квадратов [1].

Венгерский математик Куршак заметил, что переноситель отрезков в построениях Гильберта можно заменить более «слабым» инструментом — эталоном длины, выполняющим операцию перенесения постоянного отрезка [2].

Наконец, нетрудно показать (см. теорему 2), что и использование эталона длины можно ограничить откладыванием его лишь от фиксированной точки. В последнем случае эталон длины выполняет операцию построения точек пересечения любой прямой, проходящей через фиксированную точку O, с окружностью, центром которой является точка O, а радиус равен эталону длины.

Цель настоящей статьи — рассмотреть некоторые операции, заменяющие операцию эталона длины, в которых фигурируют не только окружности, но и кривые второго порядка вообще и их дуги.

2. Введем определения и обозначения, которые будут использованы в статье.

Будем считать известными понятия задачи на построение и понятие решения этой задачи, т. е. самого построения, которое определяется выбранной системой аксиом.

Задачей Гильберта назовем задачу в евклидовой плоскости, которая допускает решение с помощью линейки и вышеуказанной операции построения точек пересечения прямой, проходящей через центр фиксированной окружности, с самой окружностью. Соответствующее построение будем называть построением Гильберта.

В дальнейшем, для сокращения, прямую, проходящую через центр кривой второго порядка, будем называть центральной прямой этой кривой, а через фокус — фокальной прямой.

Аксиомы построений Гильберта.

A. Даны центр O и точка P окружности ω. Окружность ω будем называть базисной окружностью построений Гильберта.

B. (Аксиома данной фигуры). Данная фигура считается построенной.

C. (Аксиома произвольной точки). Точка, принадлежащая построенной фигуре или не принадлежащая ей, считается построенной.

D. Если построены две точки, то построена и проходящая через них прямая.

E. Точка пересечения двух пересекающихся построенных прямых считается построенной.

F. Считается построенной точка пересечения построенной центральной прямой окружности ω с ω.

Между прочим, как приведенную систему аксиом построений Гильберта, так и систему аксиом любых других построений можно считать индуктивным определением понятия построенной фигуры.

Система аксиом построений Гильберта с базисной окружностью ω и ее центром O определяет множество задач Гильберта, которое назовем классом задач Гильберта и обозначим как $H(O; \omega)$. Систему аксиом тех или иных построений будем называть аксиоматической базой соответствующего класса задач. Так, вышеприведенная система аксиом будет аксиоматической базой для $H(O; \omega)$.

Обозначим множество всех классов задач буквой Ω. На множестве Ω будем рассматривать бинарное отношение включения в теоретико-множественном смысле (знак $\subset$). Отношение включения, очевидно, будет частичным отношением порядка [3]. Для доказательства включения H_1 в H_2 необходимо и достаточно доказать, что задачи, выполнимость которых постулируется в аксиоматической базе H_1, принадлежат H_2.

На множестве Ω определено и другое важное бинарное отношение равенства или совпадения в теоретико-множественном смысле, которое, конечно, будет отношением эквивалентности. Для отношения равенства сохраним обычный знак ($=$). Как известно, $H_1 = H_2$ тогда и только тогда, когда $H_1 \subset H_2$ и $H_2 \subset H_1$. Наконец, будем встречаться с бинарным отношением частичного совпадения классов задач.

Определение. H_1 и H_2 удовлетворяют отношению частичного совпадения (символически $H_1 \supset\subset H_2$), если и только если их пересечение не пусто и не имеют места ни $H_1 \subset H_2$, ни $H_2 \subset H_1$.

Одной из основных проблем теории геометрических построений является изучение вопроса о том, какие классы задач удовлетворяют вышеуказанным отношениям равенства, включения и частичного совпадения.

Опустим доказательства первых пяти теорем, оставив лишь некоторые указания.

Теорема 1. $H(O; \omega) = H(O_1; \omega)$ для любых окружностей ω и ω_1 с центрами O и O_1.

Эта теорема позволяет говорить о классе H, не отмечая базисной окружности.

Теорема 2. Класс задач H совпадает с классом задач, решаемых с помощью линейки и эталона длины l.

3. Рассмотрим класс задач $H^*(O; \omega)$, аксиоматическая база которого отличается от аксиоматической базы $H(O; \omega)$ тем, что аксиома F заменена аксиомой F^*: Если построена прямая, то построены и касательные к ω, параллельные построенной прямой.

Теорема 3. $H(O; \omega) = H^*(O; \omega)$.

Для доказательства теоремы необходимо и достаточно убедиться в том, что задачи, выполнимость которых постулируется в аксиомах F^* и F, принадлежат соответственно $H(O; \omega)$ и $H^*(O; \omega)$.

В дальнейшем договоримся обозначать такие задачи теми же буквами, что и аксиомы. При таком соглашении требуется доказать, что $F^* \in H(O; \omega)$, $F \in H^*(O; \omega)$. Доказательство сводится к проверке возможности построения параллельных, перпендикуляров, касательных и точек соприкосновения средствами из H и H^* [4].

Теперь рассмотрим класс задач $H^{**}(O; \omega)$, базой для которого служат аксиомы A, B, C, D, E и F^{**}: Если построена точка и если существуют касательные из этой точки к ω, то они построены.

Теорема 4. $H^{**}(O; \omega) = S(O; \omega)$,
где $S(O, \omega)$ — известный класс задач Штейнера, решаемых с помощью линейки и неподвижного круга ω.

Очевидно, достаточно доказать, что $S \subset H^{**}$. Но последнее усматривается из того, что средствами из H^{**} можно строить перпендикуляры, параллели, точки пересечения нецентральных прямых с ω. Построение же точек пересечения центральных прямых с ω сводится с помощью автоморфной коллинеации Хюттемана [5] к построению точек пересечения уже нецентральных прямых.

4. Рассмотрим новый класс задач $H_1(O; \omega)$ с базой A, B, C, D, E, F, где

A_1: Даны центр O и точки P, Q окружности ω;

F_1: Если построен луч внутри угла POQ, то построена его точка пересечения с ω.

Теорема 5. $H_1(O; \omega) = H(O; \omega)$.

Основная трудность при доказательстве $H \subset H_1$ состоит в построении точек пересечения центральной прямой с ω. Для этого находится конечная последовательность отражений в прямых центрального пучка, при которой образом данной центральной прямой будет центральная прямая внутри угла POQ.

Небезынтересно заметить, что такая же идея может быть использована при доказательстве известной теоремы Севери и Мордухай-Болтовского о равенстве с классом S [6, 7] класса задач, решаемых с помощью линейки и начерченной дуги окружности с центром.

5. Перейдем теперь к исследованию классов задач, в базах которых постулируются уже операции построения точек пересечения прямых, проходящих через центр или фокус кривой 2-го порядка, с самой кривой. Из таких классов рассмотрим вначале класс задач $H_2(O; \gamma)$ с базой A_2, B, C, D, E, F, где

A_2: Даны центр O и три точки P, O, Q кривой 2-го порядка γ (базисной кривой);

F_2: Если построена центральная прямая d кривой γ, то построена и точка пересечения прямой d с γ.

Такие построения назовем построениями с помощью линейки и центрально-точечной кривой 2-го порядка. В случаях, когда γ будет центральной кривой, аксиома F_2 разъяснений не требует. В случае же, когда за кривую принята парабола, мы должны (A_2) считать заданной пару параллельных прямых, проходящих через несобственный центр параболы, а также (F_2) считать построенной точку пересечения параболы с любой построенной прямой пучка параллельных прямых, определяемого этой параболой.

Очевидно, в классе H_2 всегда содержатся задачи на построение параллельных прямых. Действительно, для эллипса и гиперболы мы располагаем отрезками с серединой O, а для параболы можно построить несобственный полюс одной из прямых заданного пучка и тем самым получить еще пару параллельных прямых.

Теорема 6. В классе H_2 нет задачи на построение прямого угла. Действительно, в противном случае, осуществив аффинную коллинеацию такого построения, мы получили бы построение, вообще говоря, уже непрямого угла.

6. Теперь заменим в базе класса H_2 аксиому A_2 аксиомой A_3: Даны центр O, фокус I и вершина M кривой второго порядка γ. Соответствующий класс задач обозначим $H_3(O; I, \gamma)$, а соответствующие построения будем называть построениями с помощью линейки и центрально-точечной кривой 2-го порядка γ с фокусом.

Рассмотрим в отдельности три возможных случая в зависимости от типа кривой γ.

а) Базисная кривая γ — эллипс. При изучении класса H_3 с эллипсом в роли базисной кривой нам потребуются две числовые области $F[a, b]$, $\Phi[b; F]$. Если a и b — два действительных числа, не равные нулю, то определим область $F[a, b]$ как область, содержащую

1) a, $\sqrt{a^2-b^2}\ (a^2 \geqslant b^2)$.

2) вместе с числами f', f'', f''' числа

$$f' \pm f'', \frac{f'f''}{f'''}, \quad \sqrt{(f')^2+a^2}\ (f''' \neq 0).$$

Определим область Φ как область, содержащую $\varphi = b\frac{f'}{f''}$, где $f', f'' \in F$, $f'' \neq 0$.

Очевидно, если $\varphi', \varphi'', \varphi''' \in \Phi$, $\varphi''' \neq 0$, то и

$$\varphi' \pm \varphi'', \quad \frac{\varphi'\varphi''}{\varphi'''} \in \Phi,$$

что легко доказать, воспользовавшись определением области F.

Теорема 7. Задача на построение точки (x, y) в ортогональной декартовой системе координат, в которой эллипс γ определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

принадлежит H_3 тогда и только тогда, когда $x \in F$, $y \in \Phi$.

Достаточность. Докажем, что любая точка (x, y) с $x \in F$ и $y \in \Phi$ может быть построена принятыми средствами. Наличие центра O и операция F_2 дают возможность построить параллелограмм — «минимальную» фигуру, позволяющую с помощью линейки строить параллельные прямые; следовательно, на оси x мы можем строить отрезки OX, получающиеся из построенных отрезков с помощью операций $\pm$ и построения 4-го пропорционального [8]. Далее, как известно из проективной геометрии, фокус I и точки кривой определяют ортогональную инволюцию в пучке прямых с центром I, а потому можно строить с помощью линейки и перпендикулярные прямые. Поэтому, если на оси x построена точка (f, o), то, восставив в этой точке и точке O перпендикуляры к оси x и воспользовавшись операцией F_2 и проведением параллельных, мы сможем построить точку (f, b). Наконец, найдя точку пересечения прямой

$$\frac{x}{y}=\frac{f}{b}$$

с γ, мы получим точку с абсциссой

$$x'=\frac{af}{\sqrt{f^2+a^2}},$$

а

$$x=\sqrt{f^2+a^2}=\frac{af}{x'}.$$

Следовательно, точку (x, o), при $x \in F$, действительно можно построить. Совсем просто убедиться в возможности построения точек (o, y) для $y = b\frac{f'}{f''}$. Для этого достаточно заметить, что прямая, определяемая точками (o, y) и (f', o), параллельна прямой с точками (o, b) и (f'', o). Итак, все операции, определяющие области F и Φ, осуществимы с помощью средств, дозволенных для решения задач из H_3, и достаточность доказана.

Необходимость. Пусть рассматриваемая задача принадлежит H_3. Докажем, что тогда $x \in F$ и $y \in \Phi$. В соответствии с условием точка (x, y) получена с помощью проведения прямых через построенные или произвольные точки, построения точек пересечения двух прямых, построения точек пересечения центральных прямых с γ. Нам следует доказать, что каждое из таких построений приводит к точкам с абсциссой из F и ординатой из Φ. Рассмотрим точки $O(o, o)$, $I\left(\sqrt{a^2-b^2}, o\right)$, $M(a, o)$, $N(o, b)$. Их, как известно, построить можно. Можно построить и точки на оси x, которые получаются из a, $\sqrt{a^2-b^2}$ с помощью рациональных операций $\pm$ и построения 4-го пропорционального. Обозначим полученную при этом числовую область через F_1, а ее элементы через f_1. На оси y мы можем строить точки $\pm\frac{m}{n}b$ (m, n — натуральные числа) и любую точку $\varphi_1 = b\frac{f'}{f_1'}$. Между прочим, так как $\frac{m}{n}b$ содержится среди чисел φ_1, то о первом можно и не упоминать.

Обозначим последнюю числовую область через Φ_1, а ее элементы через φ_1. Значит, мы можем строить все точки (x, y), для которых $x \in F_1$, $y \in \Phi_1$. Такие точки будем называть точками области R_1. Договоримся все произвольные точки, которыми будем пользоваться в построениях, брать из R_1. Более того, при построениях линейкой, если построен четырехугольник (не параллелограмм), можно вообще не пользоваться аксиомой произвольной точки [9].

Теперь докажем, что точки пересечения прямых, определяемых точками области R_1, принадлежат R_1. Пусть

$$y-\varphi_1 = \frac{\varphi_1'-\varphi_1}{f_1'-f_1}(x-f_1); \quad y-\varphi_1'' = \frac{\varphi_1'''-\varphi_1''}{f_1'''-f_1''}(x-f_1'')$$

— уравнения двух таких прямых. Перепишем их короче:

$$y-\varphi_1 = \frac{\overset{\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ}{f_1}}(x-f_1); \qquad y-\varphi_1'' = \frac{\overset{\circ\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ\circ}{f_1}}(x-f_1'').$$

Решим совместно

$$\varphi_1''-\varphi_1 = \left(\frac{\overset{\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ}{f_1}} - \frac{\overset{\circ\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ\circ}{f_1}}\right)x + \frac{\overset{\circ\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ\circ}{f_1}}f_1'' - \frac{\overset{\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ}{f_1}}f_1.$$

Обозначив левую часть последнего равенства через φ^t, запишем его как

$$\varphi^t = \left(\frac{\overset{\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ}{f_1}} - \frac{\overset{\circ\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ\circ}{f_1}}\right)x + \frac{\overset{\circ\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ\circ}{f_1}}f_1'' - \frac{\overset{\circ}{\varphi_1}}{\overset{\circ}{f_1}}f_1.$$

Заменив здесь каждое из φ его выражением типа $b\frac{f_1}{f_1^t}$ и, воспользовавшись тем, что вместе с f_1, f_1^*, $f_1^{**} \neq 0$ и

$$f_1 \pm f_1^*, \ \frac{f_1 f_1^*}{f^{**}}$$

принадлежит F, мы получим, что и $x \in F_1$. Аналогично доказывается, что и $y \in \Phi_1$.

Итак, отправляясь от точек O, I, M, N, пользуясь линейкой и допуская построение параллельных прямых к данным, приходим только к точкам из области R_1.

Расширим теперь область R_1 с помощью присоединения к ней абсцисс x_0 точек пересечения центральных прямых, проходящих через точки $(f_1\, \varphi_1)$ области R_1, с эллипсом γ. Обозначим расширенную область через F_2 (с элементами f_2) и найдем явное выражение для x_0:

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{\varphi_1}{f_1};\ y_0 = x_0 \frac{\varphi_1}{f_1} = x_0 \frac{b}{f_1'}.$$

Подставив в

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

получим, что

$$x_0 = \pm \frac{af_1'}{\sqrt{(f_1')^2 + a^2}}.$$

Но присоединение x_0 к области F_1 равносильно присоединению $\sqrt{(f_1')^2+a^2}$. Следовательно, область F_2 содержит вместе с f_2, f_2', f_2'' и

$$f_2 \pm f_2',\ \frac{f_2 f_2'}{f_2''},\ \sqrt{(f_1')^2 + a^2}.$$

Соответственно область Φ_2 будет состоять из элементов в $b\frac{f_2}{f_2'}$.

Итак, мы можем построить точки области R_2 с $x \in F_2$, $y \in \Phi_2$. Продолжая процесс, мы придем к области абсцисс F_n, ординат Φ_n и точек R_n, которые можно построить средствами для решения задач из H_3. Теперь допустим, что задача на построение (x, y) принадлежит H_3 и пусть при ее решении используются n точек базисного эллипса (не считая точек $(\pm a, o)$, $(o, \pm b)$). Тогда последовательно присоединяя эти точки к R_1, мы придем к R_{n+1}, и (x, y), во всяком случае, должно принадлежать R_{n+1}. Но тогда $x \in F$ и $y \in \Phi$. Необходимость доказана.

Теорема 8. В H_3 с эллипсом в роли γ нет задачи на построение точки (b, o).

Другими словами, в теореме утверждается, что средствами, допустимыми для решения задач из H_3, нельзя повернуть отрезок на прямой угол. На основании предыдущей теоремы следует убедиться, что $b \in F$.

Область F содержит a, $\sqrt{a^2 - b^2}$, причем b входит под корень в четной степени. Любой элемент f получается из этих двух с помощью рациональных операций $\pm$, построения 4-го пропорционального и иррациональной операции $\sqrt{f^2 + a^2}$. Эти операции будут приводить всякий раз к алгебраическим выражениям f, в каждое слагаемое которых, как под корнем, так и вне корня, b будет входить всегда в четной степени. Последнему необходимому условию принадлежности f к области F не удовлетворяет число b и, следовательно, $b \in F$. Следствие. $H \subset H_3$.

Теорема 9. $H_3 \subset H$.

Для доказательства (см. теорему 7) достаточно отметить, что центр эллипса γ, его фокус и его вершина определяют отрезки a и $\sqrt{a^2 - b^2}$, и вспомнить, что с помощью средств Гильберта выполнимы построение $\pm$, построение 4-го пропорционального, построение $\sqrt{f^2 + a^2}$.

б) Базисная кривая γ — гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Здесь следует за область $F[a, b]$ принять область, содержащую a, $\sqrt{a^2 + b^2}$ и вместе с f', f'', $f''' \neq 0$ также и $f' \pm f''$, $\frac{f'f''}{f'''}$, $\sqrt{(f')^2 - a^2}$. Так как ось ординат не пересекает гиперболу, то, в отличие от предыдущего случая, целесообразно считать заданной некоторую точку (o, c). За область $\Phi[c; F]$ примем область, состоящую из чисел вида $c\frac{f'}{f'''}$. Теоремы 7 и 8 здесь сохраняются, но с дополнительным условием о задании точки (o, c) и с заменой в заключении теоремы 8 точки (b, o) на точку (c, o). Теорема 9 иметь места не будет, так как средствами Гильберта невозможно построить $\sqrt{f^2 - a^2}$. Поэтому теорему 9 заменит

Теорема 10. $H_3 \supset\subset H$.

в) Базисная кривая — парабола $y^2 = 2px$.

Как и в случае б), будем считать заданным на оси y отрезок длины c. Примем за область $F[p]$ множество действительных чисел, в которое входит число p и вместе с $f, f', f'' \neq 0$ числа

$$f' \pm f, \frac{ff'}{f''}, \frac{c^2}{f''}.$$

За область $\Phi[c; F]$ примем множество действительных чисел $\varphi = c\frac{f}{f''}$. Как и для гиперболы и с той же оговоркой здесь будут иметь место теоремы 7, 8, но в то же время сохранится и теорема 9.

Следствие. Из теоремы 9 для эллипса и параболы имеем $H_3 \subset H$, но $H_2 \subset H_3$, следовательно, $H_2 \subset H$; для гиперболы очевидно $H_2 \supset\subset H$, (см. теорему 10).

7. Теперь рассмотрим класс $H_4(I; O; \gamma)$ с аксиоматической базой A_3, B, C, D, E и аксиомой F_4. Если построена фокальная прямая кривой γ, то построена точка пересечения этой прямой с γ. Для параболы договоримся определять центр O заданием оси параболы. Будем называть соответствующие построения построениями с помощью линейки и фокально-точечной кривой 2-го порядка γ с центром.

Теорема 11. $H_4(I; O; \gamma) = H(O; \omega)$.

1) $H_4 \subset H$.

а) Кривая γ — эллипс.

Известны центр O, фокус I, вершина M базисного эллипса (для удобства будем считать точку M концом большой оси эллипса). Следует доказать, что средствами Гильберта решается задача на построение точки пересечения фокальной прямой с γ.

Примем за окружность ω для класса H окружность с центром I и радиусом $r = 2OM$. Возьмем произвольную прямую, проходящую через точку I. По аксиоме F нам известна точка пересечения X этой прямой с ω; соединим X с I_1 (второй фокус эллипса) и построим середину L отрезка I_1X. Восставим в точке L перпендикуляр к I_1X, и точка пересечения Y перпендикуляра с IX будет искомой точкой эллипса. Доказательство последнего следует из того, что

$$IY + YI_1 = IX = r.$$

б) Кривая γ — гипербола.

В этом случае за радиус окружности ω примем $|IM - I_1M|$. В остальном построение повторится.

в) Кривая γ — парабола.

Известны ее вершина M, фокус I. Построим вначале директрису (достаточно удвоить отрезок MI и восставить к оси в полученной точке перпендикуляр). Пусть теперь имеем прямую IL. Построим биссектрису угла MIL и обозначим точку ее пересечения с директрисой K. Восставим в середине отрезка KI перпендикуляр. Точка пересечения последнего с прямой IL и будет искомой точкой параболы.

2) $H \subset H_4$.

Доказательство разрешимости задачи F с помощью линейки и фокально-точечной кривой γ с центром может быть осуществлено с помощью рассуждений из пункта I, но в обратном порядке. При этом в первых двух случаях мы непосредственно убедимся в разрешимости F, а в последнем случае придем к построению биссектрисы произвольного угла LIM, а значит, и к решению задачи F.

Замечание. Нами доказано, что класс задач Гильберта совпадает с классом задач, решаемых с помощью линейки и фокально-точечной кривой 2-го порядка с центром, но не совпадает с классом задач, решаемых с помощью линейки и центрально-точечной кривой 2-го порядка с фокусом. Этот результат позволяет оценить роль точки O (центра и фокуса базисной окружности) в построениях Гильберта. Действительно, теперь ясно, что точка O как центр требуется в построениях Гильберта лишь для проведения параллельных прямых, а в основной задаче на построение точки пересечения любой прямой, проходящей через точку O, с окружностью, разрешимость которой постулируется в аксиоме F, следует считать точку O уже фокусом окружности.

8. Наконец, рассмотрим класс задач $H_5(I;\ O;\ \gamma)$, база которого отличается от базы класса H_4 тем, что вместо кривой 2-го порядка с центром, фокусом и вершиной рассматривается дуга кривой 2-го порядка с центром, фокусом и одной из точек. Рассуждая как и в пункте 7, нетрудно убедиться, что $F_1 \in H_5$, т. е. $H_5 \supset H_1$, но $H_1 = H$, следовательно, $H_5 \supset H$. Обратно, $H \supset H_4 \supset H_5$ и окончательно $H_5 = H$.

9. Если к базе класса H_5 присоединить аксиому J (точка пересечения построенной прямой, пересекающейся с дугой кривой γ, построена), то придем, как известно, к базе класса задач Штейнера S. Поэтому если обозначить класс H, к базе которого присоединена аксиома J, как H^+, то получим

$$H^+ = H_1^+ = H_3^+ = H_4^+ = H_5^+ = S; \quad H_2^+ \subset S.$$

Автор пользуется случаем выразить свою признательность А. С. Смогоржевскому и А. М. Заморзаеву, любезно согласившимся прочитать работу и сделавшим к ней ряд замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гильберт. Основания геометрии. Гостехиздат, 1948, 180—190.
2. J. Kurschak. Das Streckenabtragen, Mat. Ann. 50, 1902, 597—598.
3. Г. Биркгоф. Теория структур. ИЛ, М., 1952, 16—35.
4. А. Адлер. Теория геометрических построений. Одесса, 1910, 135—143.
5. F. Hüttemann, Ein Beitrag zu den Steinerschen Konstruktionen, Iber. Dtsch. Math. Ver. Bd. 43, 1933, 184, 185.
6. F. Severi. Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso, Circolo Matematico di Palermo, 1904.
7. Д. Мордухай-Болтовский. О геометрических построениях с помощью линейки при условии, что дана неизменная дуга круга с центром. Вестник опытной физики и элем. матем., 1910, 522.
8. F. Enriques. Fragen der Elementargeometrie, II, 1907, 104—109.
9. А. Л. Пикус. Некоторые вопросы теории геометрических построений на плоскости и в пространстве. Ученые труды Пятигорского гос. пединститута, 8, 1955, 169—177.

Поступила 1 июня 1964 г.

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФОРМЫ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЕ МЕТРИКИ

Е. П. Сенькин (Харьков)

Теорема 1. Пусть F_1 и F_2 — регулярные строго выпуклые поверхности положительной гауссовой кривизны, однозначно проектирующиеся на плоскость $z = 0$. Пусть между точками F_1 и F_2 установлен гомеоморфизм, при котором расстояния соответствующих точек границ от плоскости $z = 0$ равны. Тогда, если соответствующие направления на F_1 и F_2 образуют достаточно малые углы, F_1 и F_2 можно параметризовать так, что будет иметь место оценка

$$|z_1 - z_2| < C \sqrt{\iint\limits_D [(G^{(2)}_{uu} - G^{(1)}_{uu}) - 2(F^{(2)}_{uv} - F^{(1)}_{uv}) + (E^{(2)}_{vv} - E^{(1)}_{vv})]\, du\, dv}, \quad (1)$$

где z_1, z_2 — высоты соответствующих точек F_1, F_2 над плоскостью $z = 0$; C — постоянная; $E^{(i)}$, $F^{(i)}$, $G^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ — коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей F_1, F_2.

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме.

Лемма. Пусть F_1 и F_2 — регулярные строго выпуклые поверхности положительной гауссовой кривизны, между точками которых установлен гомеоморфизм. Тогда, если соответствующие направления на F_1 и F_2 образуют достаточно малые углы, поверхность Φ с радиусом-вектором $\rho = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{(1)} + \boldsymbol{r}^{(2)})$ имеет положительную гауссову кривизну, где $\boldsymbol{r}^{(1)}$, $\boldsymbol{r}^{(2)}$ — радиусы-векторы поверхностей $F^{(1)}$, $F^{(2)}$.

Для доказательства рассмотрим выражение гауссовой кривизны поверхности Φ:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Имеем

$$LN - M^2 = (\rho_{uu}\boldsymbol{n})(\rho_{vv}\boldsymbol{n}) - (\rho_{uv}\boldsymbol{n})^2 = \frac{1}{4}[(\boldsymbol{r}^{(1)}_{uu}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}^{(2)}_{uu}\boldsymbol{n})(\boldsymbol{r}^{(1)}_{vv}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}^{(2)}_{vv}\boldsymbol{n}) - \\ - (\boldsymbol{r}^{(1)}_{uv}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}^{(2)}_{uv}\boldsymbol{n})^2].$$

Так как направления на F_1 и F_2 достаточно близки, то $EG - F^2 \neq 0$. Кроме того, можем написать $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 + \alpha$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2 + \beta$, где $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ — соответствующие нормали F_1, F_2, а α, β — достаточно малые по модулю векторы. Используя это представление, получим

$$LN - M^2 = (L_1N_1 - M_1^2) + (L_2N_2 - M_2^2) + (L_1N_2 - 2M_1M_2 + L_2N_1) + O(\alpha, \beta).$$

Отсюда видно, что, если α, β по модулю достаточно малы, то знак выражения $LN - M^2$ определяется первыми тремя членами, которые положительны. Если гауссовы кривизны поверхностей F_1 и F_2 больше некоторой постоянной, то гауссова кривизна поверхности Φ также больше некоторой постоянной. Можно было бы более точно оценить гауссову кривизну поверхности Φ в зависимости от искривления F_1 и F_2 в пространстве и близости направлений, но мы этим заниматься не будем.

Докажем теорему 1. Рассмотрим выражение

$$\rho_{uu}(r_{vv}^{(1)}-r_{vv}^{(2)})-2\rho_{uv}(r_{uv}^{(1)}-r_{uv}^{(2)})+\rho_{vv}(r_{uu}^{(1)}-r_{uu}^{(2)})=$$
$$=r_{uu}^{(1)}r_{vv}^{(1)}-r_{uv}^{(1)^2}-(r_{uu}^{(2)}r_{vv}^{(2)}-r_{uv}^{(2)^2}). \qquad (2)$$

На срединной поверхности с радиусом-вектором ρ введем координаты $u=x$, $v=y$. На поверхностях F_1 и F_2 они будут, вообще говоря, общими. Если r, s, t — вторые производные составляющей ρ по оси z, ζ — составляющая по оси z вектора $r^{(1)}-r^{(2)}$, то равенство (2) примет вид

$$r\zeta_{yy}-2s\zeta_{xy}+t\eta_{xx}=r_{uu}^{(1)}r_{vv}^{(1)}-r_{uv}^{(1)^2}-(r_{uu}^{(2)}r_{vv}^{(2)}-r_{uv}^{(2)2}). \qquad (3)$$

Справа мы пишем u и v, чтобы подчеркнуть, что для поверхностей F_1 и F_2 декартовы координаты срединной поверхности являются общими. Известно, что

$$r_{uu}^{(i)}r_{vv}^{(i)}-r_{uv}^{(i)^2}=-\frac{1}{2}G_{uu}^{(i)}+F_{uv}^{(i)}-\frac{1}{2}E_{vv}^{(i)} \quad (i=1,2).$$

Равенство (3) примет вид

$$r\zeta_{yy}-2s\zeta_{xy}+t\zeta_{xx}=\frac{1}{2}[(G_{uu}^{(2)}-G_{uu}^{(1)})-2(F_{uv}^{(2)}-F_{uv}^{(1)})+(E_{vv}^{(2)}-E_{vv}^{(1)})]=\Delta. \qquad (4)$$

Таким образом, составляющая ζ вектора $r^{(1)}-r^{(2)}$ должна удовлетворять линейному уравнению (4). В силу леммы это уравнение эллиптического типа. Но тогда, согласно А. Д. Александрову [1], имеет место оценка

$$|\zeta|<C\sqrt{\iint\limits_D\frac{\Delta^2}{rt-s^2}\,du\,dv}\ ,$$

где интегрирование ведется по области, в которую проектируется срединная поверхность Φ, а C — постоянная, зависящая от размеров этой области. Учитывая, что выражение $rt-s^2$ ограничено снизу, получим

$$|\zeta|<C_1\sqrt{\iint\limits_D\Delta^2\,du\,dv}\ .$$

Теорема 2. Пусть F_1, F_2 — регулярные строго выпуклые поверхности положительной гауссовой кривизны, звездно расположенные относительно точки O, причем существует плоскость α, проходящая через O, относительно которой F_1 и F_2 расположены в одном полупространстве. Пусть между точками F_1 и F_2 установлен гомеоморфизм, при котором расстояния от точки O до соответствующих точек границ поверхностей F_1, F_2 равны. Тогда, если соответствующие направления на F_1, F_2 образуют достаточно малые углы, F_1 и F_2 можно параметризовать так, что будет иметь место оценка

$$|r_1-r_2|<$$
$$<C\sqrt{\iint\limits_D[C_1|U_1|+C_2|U_2|+C_3|U_3|+C_4|U_4|+C_5|U_5|+C_6|U_6|]^2\,du\,dv}, \qquad (5)$$

где r_1, r_2 — расстояния до соответствующих точек F_1, F_2 от точки O,

$$U_1=(E_{vv}^{(2)}-E_{vv}^{(1)})-2(F_{uv}^{(2)}-F_{uv}^{(1)})+(G_{uu}^{(2)}-G_{uu}^{(1)}).$$
$$U_2=2[(E_v^{(2)}-E_v^{(1)})-(F_u^{(2)}-F_u^{(1)})];$$
$$U_3=2[(G_u^{(2)}-G_u^{(1)})-(F_v^{(2)}-F_v^{(1)})];$$
$$U_4=G^{(2)}-G^{(1)},\quad U_5=2(F^{(2)}-F^{(1)}),\quad U_6=E^{(2)}-E^{(1)}.$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 зависят от максимумов модулей z и производных z до второго порядка.

Ввиду громоздкости элементарных выкладок мы не будем доказывать теорему 2. Укажем лишь идею доказательства.

Пусть $\boldsymbol{r}^{(1)}$, $\boldsymbol{r}^{(2)}$ — радиусы-векторы поверхностей F_1, F_2. Согласно лемме, срединная поверхность $\rho = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{(1)} + \boldsymbol{r}^{(2)})$ имеет положительную кривизну. Примем плоскость α за плоскость $z = 0$. Пусть $\rho = \{x, y, z\}$; $\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2)} = \{\xi, \eta, \zeta\}$. Сделаем проективное преобразование по формулам

$$x' = \frac{x}{z}; \quad y' = \frac{y}{z}; \quad z' = \frac{1}{z}; \quad \xi' = \frac{\xi}{z}; \quad \eta' = \frac{\eta}{z}; \quad \zeta' = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{z}.$$

Тогда срединная поверхность перейдет в выпуклую поверхность Φ', однозначно проектирующуюся на плоскость $z = 0$. Введем на поверхности Φ' декартовы координаты; для поверхностей F_1, F_2 они будут, вообще говоря, общими. Поле $\{\xi', \eta', \zeta'\}$ будет удовлетворять линейному уравнению вида (3), в правой части которого стоит выражение в квадратных скобках оценки (5). Радиальная составляющая поля $\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2)}$ по вектору ρ равна

$$\frac{(\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2)})(\boldsymbol{r}^{(1)} + \boldsymbol{r}^{(2)})}{|\boldsymbol{r}^{(1)} + \boldsymbol{r}^{(2)}|} = \frac{\boldsymbol{r}^{(1)^2} - \boldsymbol{r}^{(2)^2}}{|\boldsymbol{r}^{(1)} + \boldsymbol{r}^{(2)}|}; \quad \zeta' = \frac{\boldsymbol{r}^{(1)^2} - \boldsymbol{r}^{(2)^2}}{|z_1 + z_2|}. \tag{6}$$

Так как для точек границ F_1 и F_2 $\boldsymbol{r}^{(1)^2} - \boldsymbol{r}^{(2)^2} = 0$, то $\zeta' = 0$ на границе поверхности. Следовательно, для ζ' можем написать оценку (5). Но тогда, согласно (6), можем оценить и $|r^{(1)} - r^{(2)}|$.

С помощью оценок (1) и (5) могут быть доказаны различные теоремы однозначной определенности и жесткости регулярных выпуклых поверхностей. Для примера докажем однозначную определенность замкнутых регулярных выпуклых поверхностей. Для этого возпользуемся следующей леммой [2], [3].

Лемма. Пусть F_1 и F_2 — изометричные общие замкнутые выпуклые поверхности. Если F_1 не равна F_2, то на них найдутся соответствующие по изометрии точки $x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$, такие, что после их совмещения будут выполнены следующие условия.

1. Расстояния $r_1(x_1)$, $r_2(x_2)$ от некоторой точки O пространства до точек x_1, x_2 будут равны.

2. Окрестности точек x_1, x_2 будут звездно расположены относительно точки O и обращены выпуклостью в одну сторону.

3. Для всех соответствующих по изометрии точек x, близких к x_1, x_2 будет иметь место неравенство $r_1(x) > r_2(x)$.

Теперь достаточно поверхность F_1 как угодно мало сдвинуть в сторону точки O, как на F_1, F_2 появится множество G, на котором $r_1(x) < r_2(x)$, а на границе G будет $r_1(x) = r_2(x)$. Части поверхностей, соответствующие множеству G, будут удовлетворять условиям теоремы 2. Но тогда правая часть оценки (5) в силу изометрии поверхностей равна нулю, и, следовательно, для всех точек F_1 и F_2 будет $r_1(x) = r_2(x)$, т. е. F_1 равна F_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле. ДАН СССР, 134, 5, 1960.

2. А. Д. Александров и Е. П. Сенькин. О неизгибаемости выпуклых поверхностей. Вестник ЛГУ, 1955, № 8.

3. Е. П. Сенькин. Однозначная определенность одного класса общих выпуклых поверхностей с границей. Вестник ЛГУ, 1961, № 19.

Поступила 1 августа 1964 г.

О НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

А. С. Смогоржевский (Киев) *и Е. С. Столова* (Ровно)

В настоящей статье рассматриваются некоторые свойства ряда плоских кривых 3-го и 4-го порядков, в том числе одной кривой геометрии Лобачевского, не отмечавшиеся ранее в литературе.

§ 1. Уравнение любой циркулярной кривой 3-го порядка можно привести к виду

$$xy^2 = -x^3 + 2bx^2 + cx + d. \tag{1}$$

Если $F(\alpha, \beta)$ — один из фокусов этой кривой, то прямые

$$y - \beta = \pm i(x - \alpha) \tag{2}$$

касаются ее [1]. Назовем прямую, проходящую через точки касания, директрисой, соответствующей фокусу F (по аналогии с директрисами кривых 2-го порядка).

Теорема 1. Директриса циркулярной кривой 3-го порядка, соответствующая ее фокусу F, параллельна прямолинейной поляре точки F относительно той же кривой. Если δ и Δ — соответственно расстояния от F до этих прямых, то $\delta : \Delta = 2 : 3$[1].

Казалось бы, для доказательства достаточно сослаться на формулу Котеса

$$\frac{3}{r} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3},$$

полагая в ней, в применении к прямым (2), $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \infty$, но такое рассуждение не имеет силы, поскольку расстояние между двумя различными точками изотропной прямой равно нулю или, если одна из точек бесконечно удалена, является неопределенным. Поэтому мы пойдем по иному пути.

Обозначим абсциссы точек касания прямых (2) с кривой (1) через $\sigma \pm i\tau$, где σ и τ — вещественные числа. Тогда уравнение директрисы, соответствующей фокусу F, будет иметь вид

$$(\sigma - \alpha)x - \tau y - \sigma(\sigma - \alpha) - \tau(\tau - \beta) = 0. \tag{3}$$

Пусть $\beta \neq 0$, $d > 0$. Решая совместно уравнения (1) и $y - \beta = i(x - \alpha)$, получим

$$2(\alpha - b + \beta i)x^2 - (\alpha^2 - \beta^2 + c + 2\alpha\beta i)x - d = 0. \tag{4}$$

Приравнивая нулю дискриминант этого уравнения и принимая во внимание, что α и β — вещественные числа, будем иметь

$$\begin{gathered} \alpha(\alpha^2 - \beta^2 + c) + 2d = 0, \\ (\alpha^2 - \beta^2 + c)^2 - 4\alpha^2\beta^2 + 8d(\alpha - b) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

---

[1] Заметим, что в случае кривых 2-го порядка поляра фокуса совпадает с соответствующей ему директрисой.

Отсюда

$$d^2 + 2\alpha^2(\alpha - b)\,d - \alpha^4\beta^2 = 0 \tag{6}$$

и

$$d = -\alpha^2(\alpha - b - M), \tag{7}$$

где $M = +\sqrt{(\alpha - b)^2 + \beta^2}$.

Из (4) находим

$$x = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + c + 2\alpha\beta i}{4(\alpha - b + \beta i)} = \frac{-d + \alpha^2\beta i}{2\alpha(\alpha - b + \beta i)} =$$
$$= \frac{-d(\alpha - b) + \alpha^2\beta^2 + \beta[\alpha^2(\alpha - b) + d]\,i}{2\alpha M^2}.$$

Далее,

$$-d(\alpha - b) + \alpha^2\beta^2 = \alpha^2[(\alpha - b)^2 - M(\alpha - b)] + \alpha^2\beta^2 =$$
$$= \alpha^2[M^2 - M(\alpha - b)] = Md; \quad \alpha^2(\alpha - b) + d = \alpha^2 M.$$

Таким образом,

$$\sigma = \frac{d}{2\alpha M}, \quad \tau = \frac{\alpha\beta}{2M}.$$

Теперь, после ряда преобразований, связанных с использованием равенств (5), (6), (7), можно уравнению (3) придать вид

$$Ax + 2\alpha\beta y - 2\alpha\beta^2 = 0, \tag{8}$$

где $A = 3\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha b - c$.

Уравнение поляры точки F будет:

$$Ax + 2\alpha\beta y - 2\alpha^2 b - 2\alpha c - 3d = 0. \tag{9}$$

Применив к уравнениям (8) и (9) преобразование $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, получим соответственно:

$$AX + 2\alpha\beta Y + 4\alpha^3 - 4\alpha^2 b + 2d = 0,$$
$$AX + 2\alpha\beta Y + 6\alpha^3 - 6\alpha^2 b + 3d = 0.$$

Отсюда ясно, что

$$\delta : \Delta = (4\alpha^3 - 4\alpha^2 b + 2d) : (6\alpha^3 - 6\alpha^2 b + 3d) = 2 : 3.$$

Нетрудно убедиться, что теорема справедлива также в случаях $\beta \neq 0$, $d < 0$ и $\beta = 0$.

§ 2. Рассмотрим линию плоскости Лобачевского, определяемую в прямоугольных координатах уравнением

$$Y = X. \tag{10}$$

Если длина перпендикуляра, опущенного из точки линии (10) на ось абсцисс, равна R, то для площади S треугольника, ограниченного этим перпендикуляром, отрезком оси абсцисс и дугой линии (10), получим

$$S = 2r^2 \operatorname{sh}^2 \frac{R}{2r},$$

где r — величина, связанная с кривизной K пространства Лобачевского соотношением $K = -\frac{1}{r^2}$. Иными словами, этот треугольник равновелик круговому сектору радиуса R с центральным углом, равным одному радиану. Если в этом треугольнике заменить криволинейную сторону соответствующей ей хордой, то, очевидно, в построенном так прямолинейном треугольнике острые углы будут равны между собой — обстоятельство, лежащее в основе приводимых ниже теорем.

Используя зависимости между вейерштрассовыми и прямоугольными координатами [2]

$$\xi = \operatorname{sh}\frac{X}{r}\operatorname{ch}\frac{Y}{r},$$

$$\eta = \operatorname{sh}\frac{Y}{r},$$

$$\zeta = \operatorname{ch}\frac{X}{r}\operatorname{ch}\frac{Y}{r},$$

получим уравнение линии (10) в вейерштрассовых координатах:

$$\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+1}} = \frac{\xi}{\zeta}.$$

Для приведения этого уравнения к однородному виду и перехода к однородным координатам $x:y:z$ воспользуемся соотношениями $1 = \zeta^2 - \xi^2 - \eta^2$ и $x:y:z = \xi:\eta:\zeta$. В результате будем иметь:

$$y = x\sqrt{z^2 - x^2}.$$

Полагая здесь $z = 1$ и освобождаясь от иррациональности, получим уравнение образа линии (10), точнее, линии $Y^2 = X^2$, на карте Бельтрами:

$$y^2 = x^2(1 - x^2). \tag{11}$$

Отсюда заключаем, что линия $Y^2 = X^2$ есть кривая 4-го порядка плоскости Лобачевского.

Уравнение кривой (11) в полярных координатах φ^*, ρ^* имеет вид

$$\rho^* = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi^*}}{\cos^2\varphi^*}.$$

Отсюда, после перехода к карте Пуанкаре по формулам

$$\varphi = \varphi^*,\ \rho = \frac{\rho^*}{1+\sqrt{1+\rho^{*2}}}$$

(ср. [2] или [3]), получим

$$\rho^2 = \cos 2\varphi,$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, \tag{12}$$

т. е. уравнение лемнискаты Бернулли.

Конформное преобразование

$$w = \frac{2z}{z+1}, \tag{13}$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$, переводит лемнискату (12) в строфоиду:

$$v^2 = u^2\frac{1-u}{1+u}, \tag{14}$$

а с помощью преобразования подобия кривые (12) и (14) можно превратить соответственно в линии:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),\ y^2 = x^2\frac{a-x}{a+x}.$$

Исходя из свойств линии (10) и принимая во внимание конформность карты Пуанкаре, преобразования (13) и преобразования подобия, легко убедиться в справедливости следующих теорем:

Теорема 2. Если через точку P лемнискаты Бернулли провести окружность γ гиперболического пучка окружностей с основными точками в вершинах лемнискаты и соединить P отрезком прямой с центром O лемнискаты, то отрезок OP образует равные углы с окружностью γ и с осью лемнискаты, проходящей через ее вершины.

Теорема 3. Если через точку P строфоиды провести окружность λ с центром в вершине A строфоиды и провести окружность μ через точку P, узловую точку O строфоиды и точку, симметричную с O относительно A, то окружность μ образует равные углы с осью строфоиды и окружностью λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Смогоржевский и Е. С. Столова. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. Физматгиз, 1961.
2. О. С. Смогоржевський. Основи геометрії. «Рад. школа», Київ, 1954.
3. А. С. Смогоржевский. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. Гостехиздат, М.-Л., 1951.

Поступила 27 августа 1964 г.

К ТЕОРИИ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Г. И. Студенцов (Харьков)

В работе [2] рассматривались вопросы проективно-дифференциальной геометрии пары поверхностей, затрагивающие в основном окрестности первого и второго порядка. В настоящей работе, используя метод Г. Ф. Лаптева [1], мы рассматриваем некоторые вопросы проективно-дифференциальной геометрии пары поверхностей с учетом окрестностей более высокого порядка. Устанавливается, что единственной парой поверхностей, имеющей общую квадрику Дарбу, является пара Демулена—Годо, либо две области одной квадрики. Устанавливаются условия, при которых поверхности пары имеют в соответствующих точках общие прямые канонического пучка (директрисы Вильчинского, либо проективные нормали).

§ 1. Предварительные замечания

Пара поверхностей (A_0), (A_3) рассматривается относительно общего координатного тетраэдра $\{A_0A_1A_2A_3\}$ первого порядка, две вершины которого A_0 и A_3 помещены в соответствующие точки пары поверхностей, а две другие — A_1 и A_2 совмещены с двойными точками — точками пересечения касательных к двойным линиям.

Инфинитезимальное смещение тетраэдра

$$dA_i = \omega_i^j A_j \qquad (i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

запишем в виде таблицы

	A_0	A_1	A_2	A_3
dA_0	$\alpha_0\omega^1 + \beta_0\omega^2$	ω^1	ω^2	0
dA_1	$am\omega^1 + bn\omega^2$	$\alpha_1\omega^1 + \beta_1\omega^2$	$f\omega^1 + g\omega^2$	$\alpha\omega^1 + \beta\omega^2$
dA_2	$bm\omega^1 + cn\omega^2$	$k\omega^1 + l\omega^2$	$\alpha_2\omega^1 + \beta_2\omega^2$	$\beta\omega^1 + \gamma\omega^2$
dA_3	0	$m\omega^1$	$n\omega^2$	$\alpha_3\omega^1 + \beta_3\omega^2$

Здесь $(A_0A_1A_2A_3) = 1$.

Дифференцируя внешним образом ω_i^j, получим условия интегрируемости (уравнения структуры):

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]. \tag{1}$$

Полная система дифференциальных уравнений пары поверхностей относительно координатного тетраэдра $\{A_i\}$ имеет вид

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0,$$
$$[\omega_0^k \omega_k^3] = 0, \ [\omega_3^k \omega_k^0] = 0.$$

Продолжения этой системы приводят к фундаментальным тензорам второго порядка, присоединенным к поверхностям пары:
для поверхности (A_0)

$$a_{11} = \alpha, \ a_{12} = a_{21} = \beta, \ a_{22} = \gamma,$$
$$|a| = \alpha\gamma - \beta^2,$$
$$a^{11} = \frac{\gamma}{|a|}, \ a^{12} = a^{21} = -\frac{\beta}{|a|}, \ a^{22} = \frac{\alpha}{|a|};$$

для поверхности (A_3)

$$\bar{a}_{11} = a, \ \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = b, \ \bar{a}_{22} = c,$$
$$|\bar{a}| = ac - b^2,$$
$$\bar{a}^{11} = \frac{c}{|\bar{a}|}, \ \bar{a}^{12} = \bar{a}^{21} = -\frac{b}{|\bar{a}|}, \ \bar{a}^{22} = \frac{a}{|\bar{a}|}.$$

Последующие инварианты третьего, четвертого и пятого порядка пары поверхностей легко получить, используя метод продолжений Г. Ф. Лаптева [1]. Так, для поверхности (A_0) дифференцирование приводит к фундаментальным объектам третьего порядка Λ_{ijk}:

$$da_{ij} = a_{ik}\omega_j^k + a_{jk}\omega_i^k - a_{ij}(\omega_0^0 + \omega_3^3) + \Lambda_{ijk}\omega^k.$$

Последующие величины определяются следующим образом:

$$b_k = a^{ij}\Lambda_{ijk};$$
$$b^i = a^{ik}b_k;$$
$$\hat{b} = b_k b^k;$$
$$b_{ijk} = 4\Lambda_{ijk} - a_{(ij}b_{k)};$$
$$b_{ij} = a^{\alpha\beta}a^{pq}b_{\alpha p i}b_{\beta q j};$$
$$b_0 = a^{ij}b_{ij};$$
$$|b| = |b_{ij}|.$$

Дифференцирование основного инварианта третьего порядка b_0 приводит к новым величинам c^k:

$$d\ln b_0 = \omega_3^3 - \omega_0^0 + c_k\omega^k,$$

а дифференциальные уравнения для величин b_i

$$db_i = b_k\omega_i^k - b_i\omega_0^0 - 4(\omega_i^0 - a_{ij}\omega_3^j) + l_{ij}\omega^j$$

определяет систему новых величин l_{ij} четвертого порядка, при помощи которых и уже известных величин определяются новые величины

$$l = a^{ij}l_{ij};$$
$$\hat{l} = l - \frac{1}{4}b;$$
$$\hat{l}_{ij} = l_{ij} - \frac{b_i b_j}{4} - \frac{\hat{l}a_{ij}}{2};$$
$$\hat{l}_k = a^{ip}a^{jq}\hat{l}_{ij}b_{pqk};$$

$$l^i = b^{ik} l_k;$$
$$l_j = a_{ji} l^i;$$
$$k_i = \frac{b_i}{3} - l_i;$$
$$j_k = \frac{1}{2}\left(c_k - \frac{1}{4} b_k\right);$$
$$j^i = a^{ik} j_k;$$
$$h_k = \frac{1}{2}\left(c_k + \frac{1}{4} b_k\right);$$
$$h^i = a^{ik} h_k.$$

Аналогично получаются эти же величины для поверхности (A_3).

§ 2. Пара поверхностей с общими квадриками Дарбу

Уравнения квадрик Дарбу поверхностей (A_0) и (A_3) имеют вид [1]

$$a_{ij}x^ix^j + \frac{1}{2} b_i x^i x^3 - 2x^0x^3 + \left(\frac{\hat{l}}{b} + \sigma b_0\right) x^3x^3 = 0.$$
$$\bar{a}_{ij}x^ix^j + \frac{1}{2} \bar{b}_i x^i x^3 - 2x^0x^3 + \left(\frac{\hat{l}}{8} + \overline{\sigma b_0}\right) x^0x^0 = 0.$$

Из этих уравнений следует, что поверхности пары имеют общую квадрику Дарбу при условии

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij};$$
$$b_i = \bar{b}_i = 0;$$
$$\frac{\bar{\hat{l}}}{8} + \bar{\sigma}\bar{b}_0 = \frac{l}{8} + \sigma b_0 = 0.$$

Первые три равенства

$$a = \alpha, \ b = \beta, \ c = \gamma \qquad (*)$$

означают, что асимптотические касательные одной поверхности пары пересекают асимптотические касательные второй поверхности. Кроме того, обращение в нуль b_i и $\bar{b}_i$ при условии $a_{ii} \neq 0$ и $m \neq n$ (поверхности пары не являются поверхностями Демулена — Годо и не соответствуют перспективно) приводит к тому, что все последующие инварианты обращаются в нуль, т. е.

$$\bar{\hat{l}} = \hat{l} = 0,$$
$$\bar{b}_0 = b_0 = 0.$$

Кроме этого, обращаются в нуль и основные трехвалентные тензоры третьего порядка b_{ijk} и $\bar{b}_{ijk}$ поверхностей пары. Обращение этих тензоров в нуль, как известно [1], является необходимым и достаточным условием вырождения поверхностей пары в квадрики, а из (*) следует, что (A_0) и (A_3) — две области одной квадрики.

В случае $m = n$ поверхности пары соответствуют перспективно; вершины A_1 и A_2 координатного тетраэдра $\{A_i\}$ можно выбрать в точках пересечения асимптотических касательных к поверхности (A_0) с прямой A_1A_2. При этом

$$a_{11} = a_{22} = 0.$$

Чтобы пара перспективно соответствующих поверхностей имела общую квадрику Дарбу в соответствующих точках, необходимо также, чтобы и

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0.$$

При этих условиях асимптотические линии поверхностей (A_0) и (A_3) соответствуют, а касательные к ним пересекаются, т. е. поверхности пары являются поверхностями Демулена — Годо.

§ 3. Пара поверхностей с общими первыми директрисами Вильчинского

Как известно [1], прямая канонического пучка поверхности (A_0) в точке A_0 определяется парой точек

$$P_0 = A_0, \quad P = [(\tau - 1)\, l^i + \tau j^i]\, A_i + A_3. \tag{2}$$

Аналогично, прямая канонического пучка поверхности (A_3) в точке A_3 определяется парой точек

$$\overline{P}_0 = A_3, \; \overline{P} = [(\bar{\tau} - 1)\, \bar{l}^i + \bar{\tau} \bar{j}^i]\, A_i + A_0,$$

где τ и $\bar{\tau}$ — параметры пучков.

Прямая канонического пучка будет директрисой Вильчинского при $\tau = \bar{\tau} = 0$, поэтому пара поверхностей (A_0), (A_3) в соответствующих точках будет иметь общие директрисы Вильчинского при условии

$$l^i = 0, \quad \bar{l}^i = 0.$$

Если

$$l^1 = l^2 = 0,$$

т. е.

$$b^{1k} \hat{l}_k = 0, \quad b^{2k} \hat{l}_k = 0, \tag{3}$$

тогда, рассматривая общий случай, когда дискриминант $|b| = |b_{ij}|$ отличен от нуля

$$|b| \neq 0,$$

из уравнений (3) следует

$$\hat{l}_{22} b_{111} - (\hat{l}_{12} + \hat{l}_{21})\, b_{112} + \hat{l}_{11} b_{122} = 0;$$
$$\hat{l}_{22} b_{112} - (\hat{l}_{12} + l_{21})\, b_{122} + \hat{\bar{l}}_{11} b_{222} = 0.$$

Но основной тензор третьего порядка b_{ijk} аполярен тензору второго порядка a^{ij}:

$$a^{ij} b_{ijk} = 0,$$

поэтому

$$\frac{\hat{l}_{11}}{\alpha} = \frac{\hat{l}_{12} + \hat{l}_{21}}{2\beta} = \frac{\hat{l}_{22}}{\gamma}.$$

Аналогичные условия, при тех же предположениях, получим, исходя из уравнений $\bar{l}^i = 0$.

Таким образом, пара поверхностей (A_0), (A_3) имеет общую первую директрису Вильчинского при условии

$$\frac{\hat{l}_{11}}{\alpha} = \frac{\hat{l}_{12} + \hat{l}_{21}}{2\beta} = \frac{\hat{l}_{22}}{\gamma};$$
$$\frac{\hat{\bar{l}}_{11}}{a} = \frac{\hat{\bar{l}}_{12} + \hat{\bar{l}}_{21}}{2b} = \frac{\hat{\bar{l}}_{22}}{c}.$$

§ 4. Пара поверхностей с общими первыми проективными нормалями

Прямая канонического пучка, определяемая двумя точками (2), будет проективной нормалью при $\tau = 1$, поэтому пара поверхностей (A_0), (A_3) будет иметь общие проективные нормали при условии

$$j^i = 0, \quad \bar{j}^i = 0.$$

Из уравнений

$$j^1 = 0, \quad j^2 = 0$$

следует

$$\begin{aligned} \gamma j_1 - \beta j_2 &= 0 \\ \beta j_1 - \alpha j_2 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая

$$\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0,$$

получаем

$$j_1 = j_2 = 0,$$

или

$$c_1 = \frac{b_1}{4}, \quad c_2 = \frac{b_2}{4}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \left[\ln \frac{2\beta\,(b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122})}{\sqrt[4]{(\alpha\gamma - \beta^2)^6}}\right]_u &= 2\alpha_3; \\ \left[\ln \frac{2\beta\,(b_{111}b_{222} - b_{112}b_{122})}{\sqrt[4]{(\alpha\gamma - \beta^2)^6}}\right]_v &= 2\beta_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично из уравнений

$$\bar{j}^i = 0$$

следуют уравнения

$$\begin{aligned} \left[\ln \frac{2b\,(\bar{b}_{111}\bar{b}_{222} - \bar{b}_{112}\bar{b}_{122})}{\sqrt[4]{(ac - b^2)^6}}\right]_u &= 2v_0; \\ \left[\ln \frac{2b\,(\bar{b}_{111}\bar{b}_{222} - \bar{b}_{112}\bar{b}_{122})}{\sqrt[4]{(ac - b^2)^6}}\right]_v &= 2\beta_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (4) и (5) определяют пару поверхностей с общими первыми проективными нормалями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московск. матем. об-ва, т. 2. 1953.

2. Г. И. Студенцов. К проективно-дифференциальной геометрии пары поверхностей. Вестник мех.-мат. фак-та Харьковского ун-та и Харьковского матем. об-ва, 1964.

Поступила 23 августа 1964 г.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И КРАТЧАЙШИЕ ИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКИ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

М. А. Улановский (Харьков)

Цель настоящей заметки — изучение инвариантной (точнее, односторонне инвариантной) римановой метрики на $Gl^+(n)$ — группе вещественных квадратных матриц с положительными определителями. Определяется соответствующая метрике аффинная связность, интегрируются уравнения геодезических и рассматриваются некоторые теоремы о кратчайших линиях.

Метрическая геометрия на множестве матриц рассматривалась Зигелем [1] и Хуа-Ло-Кеном [2]. Однако определение метрики, объект $|Gl^+(n)|$ и цели исследования в этой заметке отличны от рассмотренных в цитированных работах.

Определяемая ниже метрика допускает интерпретацию в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Именно, пусть $\frac{dx}{dt} = p(t)\,x$ — линейная система (x — n — вектор, $p(t)$ — $n \times n$ — матрица). Общее решение этой системы может быть записано в виде $x = \alpha(t)\,x_0$, где x_0 — начальный вектор, а матрица $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению $d\alpha\alpha^{-1} = p(t)\,dt$ и начальному условию: $\alpha(t_0) = \varepsilon$ (ε — единица группы $Gl^+(n)$). Если $\alpha_1 \in Gl^+(n)$ — произвольная заданная матрица, то найдется бесчисленное множество систем, для которых общее решение определяется матрицей $\alpha(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$, $\alpha(0) = \varepsilon$ и $\alpha(t_1) = \alpha_1$. Естественно попытаться найти наименьшее значение t_1 и линейную систему, осуществляющую минимум. Однако легко видеть, что $\inf t_1 = 0$: путем замены параметра, например, $t = kt'$, можно получить систему, «достигающую» α_1 при сколь угодно малом t_1.

Поставленный вопрос будет иметь смысл при какой-либо нормировке матрицы $p(t)$, исключающей возможность подобной замены параметра. Определим норму матрицы p как $\sqrt{\varphi(p)}$, где φ — какая-либо положительно определенная квадратичная форма от элементов p. Выбор формы φ не может быть продиктован каким-либо внутренним правилом; по-видимому, достаточно естественно выбрать в качестве φ сумму квадратов элементов p, или, что то же, $s_p(pp')$ (как и всюду в дальнейшем, p' — матрица, полученная из p транспонированием строк и столбцов; spa — след матрицы a).

Ситуация может быть теперь описана следующим образом. Каждой системе $dx = \omega x$ $(\omega = p(t)\,dt)$ соответствует кривая $\alpha(t) \subset Gl^+(n)$; параметр t может быть заменен каноническим параметром s, для которого $\frac{d\alpha}{ds}\alpha^{-1} = q(s)$, $sp(qq') = 1$ $\left(s = \int\limits_0^t \sqrt{sp(qq')}\,dt\right)$. «Расстояние» от произвольной матрицы $\alpha_1 \in Gl^+(n)$ до единицы ε есть $\inf s_1$, $\alpha(s_1) = \alpha_1$. «Кратчайшая» — система, общее решение которой осуществляет этот infimum.

Но форма

$$ds^2 = sp(pp')\,dt^2 = sp(\omega\omega'), \tag{1}$$

где $\omega = d\alpha\alpha^{-1}$, определяет риманову метрику на $Gl^{+}(n)$. Элементы матрицы ω суть линейные дифференциальные формы на $Gl^{+}(n)$, инвариантные относительно правых сдвигов:

$$\bar{\alpha} = \alpha \cdot a \; (a = \mathrm{const},\ a,\ \alpha,\ \bar{\alpha} \in Gl^{+}(n)).$$

Действительно, $d\bar{\alpha}\bar{\alpha}^{-1} = d(\alpha a)\, a^{-1}\alpha^{-1} = d\alpha\alpha^{-1}$. Следовательно, и метрика ds^2 инвариантна относительно таких сдвигов.

* * *

Итак, рассматриваемый объект — базисное n^2-мерное многообразие $Gl^{+}(n)$ класса C^{ω}, и определенная на нем риманова метрика

$$ds^2 = sp\,(d\alpha\alpha^{-1}(\alpha^{-1})'\, d\alpha').$$

Касательное пространство E_α контравариантных векторов в произвольной точке $\alpha \in Gl^{+}(n)$ можно представить как векторное пространство всех $n \times n$ матриц (особенных и неособенных); естественный базис E_α — e_{ij} — матрицы, все элементы которых равны нулю, кроме элемента (i, j), равного 1. Построим также в каждом E_α базис (назовем его нормальным), полученный из естественного базиса в E_ε — касательном пространстве единицы ε — соответствующим правым сдвигом. Линейные формы — элементы $\omega = d\alpha\alpha^{-1}$ — получают теперь следующую интерпретацию: они представляют собой компоненты вектора $\rho \in E_\alpha$ относительно нормального базиса (если компоненты ρ в естественном базисе суть элементы $d\alpha$).

Определим теперь на $Gl^{+}(n)$ аффинную связность, соответствующую метрике (1).

Теорема 1. Абсолютный дифференциал вектора в связности, соответствующей метрике (1), может быть задан формулой

$$Da = da - \frac{1}{2}\{[\omega a] - [\omega' a] + [\omega a']\}, \tag{2}$$

где $[\omega a] = \omega a - a\omega$; a — матрица из компонент данного вектора в нормальном репере; ω — вектор, в направлении которого вычислен дифференциал.

Для доказательства достаточно проверить, что длина параллельно переносимого вектора в метрике (1) постоянна и кручение связности (2) равно нулю.

Итак, пусть вектор a переносится параллельно в направлении ω, т. е. $da = \frac{1}{2}(\delta_1 a + \delta_2 a)$, где $\delta_1 a = [\omega - \omega',\ a]$ и $\delta_2 a = [\omega a']$. Имеем: $\delta_1 sp\,(aa') = sp\,([\omega - \omega', a]\, a') + sp\,(a\,[a', \omega' - \omega]) = sp\,(\omega - \omega')\, aa' - spa\,(\omega - \omega')\, a' + spaa'\,(\omega' - \omega) - spa\,(\omega' - \omega)\, a' = 0$, так как $sp\,(abc) = sp\,(bca) = sp\,(cab)$; $\delta_2 sp\,(aa') = sp\,[\omega a']\, a' + spa\,[a\omega'] = sp\omega\,(a')^2 - spa'\omega a' + spa^2\omega' - spa\omega' a = 0$.

Чтобы вычислить тензор кручения связности (2), применим следующий формальный прием. В общем случае 2-формы кручения

$$\Omega^i(d, \delta) = d\omega^i(\delta) - \delta\omega^i(d) + \omega^i_k(d)\,\omega^k(\delta) - \omega^i_k(\delta)\,\omega^k(d)$$

могут быть получены из абсолютного дифференциала вектора a^i:

$$Da^i = da^i + \omega^i_k(d)\, a^k$$

заменой вектора a' на $\omega'(\delta)$ и последующим альтернированием по символам d, δ. Применяя эти операции к формуле (2), получим матрицу Ω, элементы которой суть формы кручения Ω^i, $i = 1 \ldots n^2$:

$$\Omega = d\omega(\delta) - \frac{1}{2}\{[\omega(d)\,\omega(\delta)] - [\omega'(d)\,\omega(\delta)] + [\omega(d)\,\omega'(\delta)]\} - \delta\omega(d) + \\ + \frac{1}{2}\{[\omega(\delta)\,\omega(d)] - [\omega'(\delta)\,\omega(d)] + [\omega(\delta)\,\omega'(d)]\} = d\omega(\delta) - \delta\omega(d) - \\ - [\omega(d)\,\omega(\delta)].$$

Далее, $d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = d(\delta\alpha\alpha^{-1}) - \delta(d\alpha\alpha^{-1}) = \delta\alpha d(\alpha^{-1}) - d\alpha\delta(\alpha^{-1}) = -\delta\alpha\alpha^{-1}d\alpha\alpha^{-1} + d\alpha\alpha^{-1}\delta\alpha\alpha^{-1} = [\omega(d)\,\omega(\delta)]$, откуда $\Omega = 0$.

Чтобы получить уравнение геодезической, достаточно записать, что касательный вектор к кривой $\alpha(s) < Gl^+(n) - \omega = d\alpha \cdot \alpha^{-1}$ переносится автопараллельно:

$$d\omega - \frac{1}{2}\{[\omega\omega] - [\omega'\omega] + [\omega\omega']\} = 0.$$

Итак, дифференциальное уравнение геодезических имеет вид

$$d\omega = [\omega\omega']. \tag{3}$$

Оказывается возможным проинтегрировать эти уравнения.

Теорема 2. Уравнение геодезической, проходящей через ε в направлении вектора $a \in E_\varepsilon$, можно записать в виде

$$x(a,\ s) = e^{(a-a')s}e^{a's}, \tag{4}$$

где s — метрическая дуга геодезической, и e^a определяется, как обычно, экспоненциальным рядом (общее уравнение геодезических имеет вид $x = e^{(a-a')s}e^{a's}b$, $b = \text{const}$).

Доказательство. Касательный вектор к (4) имеет вид

$$\omega = dxx^{-1} = \{e^{(a-a')s}(a-a')\,e^{a's} + e^{(a-a')s}a'e^{a's}\}\,dse^{-a's}e^{-(a-a')s} = \\ = e^{(a-a')s}ae^{-(a-a')s}ds.$$

далее,

$$d\omega = \{e^{(a-a')s}(a-a')\,ae^{-(a-a')s} - e^{(a-a')s}a\,(a-a')\,e^{-(a-a')s}\}\,ds^2 = \\ = e^{(a-a')s}[aa]'\,e^{-(a-a')s}ds^2 = [\omega\omega'].$$

Сделаем одно замечание. Было бы удобно определить полную метрику $Gl^+(n)$, для которой геодезические совпадали с траекториями одночленных подгрупп — экспонентами e^{as}. Однако такой метрики — инвариантной или неинвариантной — нет (по крайней мере, в целом). Это следует хотя бы из того факта, что не всякую матрицу $x \in Gl^+_*(n)$ можно соединить траекторией e^{as} с ε.

Отметим два дополнительных подпространства $E_\varepsilon : S$ — множество симметричных, и O — множество кососимметричных матриц. Геодезические, касающиеся в точке ε плоскостей S или O, совпадают с экспонентами и образуют, соответственно, поверхность $\overline{S}$, геодезическую в точке ε (множество положительно определенных симметричных матриц) и вполне геодезическую поверхность $\overline{O}^+$ — ортогональную подгруппу. В общем случае геодезическая $e^{(a-a')s}e^{a's}$ совпадает с экспонентой (одночленной подгруппой) тогда и только тогда, когда матрица a нормальна ($aa' = a'a$).

* * *

Пусть $x(a, s)$ — геодезическая, проходящая через точку ε в направлении $a \in E_\varepsilon$ $(x(a, s) = e^{(a-a')s}e^{a's})$. Определим функции $f(a)$ и $\varphi(a, s)$ следующим образом. По определению, $f(a) = \sup s_1$, где s_1 — такое значение параметра s, что дуга геодезической $x(a, s)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_1)$ есть кратчайшая между точками ε и $x(a, s_1)$. Очевидно, $f(a) \geqslant c > 0$, где $c = \text{const}$. Далее, если $\rho(x, y)$ — расстояние между $x, y \in Gl^+(n)$ во внутренней метрике, определенной римановым элементом (1), то $\varphi(a, s) = s - \rho(\varepsilon, x(a, s))$. Легко видеть, что $\varphi(a, s)$ — неубывающая функция от s и $\varphi(a, s) \geqslant 0$.

Лемма. Пусть $\{a_m\}$ — сходящаяся последовательность векторов из E_ε. Тогда $\overline{\lim} f(a_m) \leqslant f(\lim a_m)$ ($\overline{\lim}$ — верхний предел).

Доказательство. Пусть $\lim a_m = a$ и $f(a) < \overline{\lim} f(a_m)$. Выберем подпоследовательность a_{m_i} так, чтобы $\lim f(a_{m_i}) = f(a) + \gamma$, $\gamma > 0$. Очевидно, $\varphi(a, s) > 0$ для всех $s > f(a)$. Пусть $s_{m_i} = f(a_{m_i})$; отрезок $x(a, s)$ $(0 \leqslant \leqslant s \leqslant s_{m_i})$ — кратчайший между ε и $x(a_{m_i}, s_{m_i})$. Точки $x(a_{m_i}, s_{m_i})$ (концы указанных отрезков), очевидно, сходятся к точке $x(a, \bar{s})$, $\bar{s} = f(a) + \gamma$. Так как $\varphi(a, \bar{s}) = \delta > 0$, то мы приходим к противоречию: при достаточно большем m_i отрезок $x(a_{m_i}, s)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_{m_i})$ не может быть кратчайшим. Действительно, если, например $|\bar{s} - s_{m_i}| < \frac{\delta}{3}$ и $\rho(x(a_{m_i}, s_{m_i}), x(a, \bar{s})) < \frac{\delta}{3}$, то точки ε и $x(a_{m_i}, s_{m_i})$ можно соединить «ломаной» меньшей длины, чем s_{m_i}: отрезком кратчайшей, соединяющим ε и $x(a, \bar{s})$, длины $\bar{s} - \delta$, и отрезком $(x(a, \bar{s}), x(a_{m_i}, s_{m_i}))$ длиной $\leqslant \frac{\delta}{3}$.

Из доказанной леммы немедленно следует

Теорема 3. В E_ε существует непустой замкнутый конус K, составленный из векторов a, для которых $f(a) = \infty$ (любой отрезок геодезической, касающейся в ε конуса K, очевидно, является кратчайшим между своими концами).

Действительно, форма (1), очевидно, определяет полную риманову метрику на некомпактном $Gl^+(n)$, откуда следует, что $f(a)$ не ограничена сверху; если $\lim f(a_m) = \infty$ и a — предельная точка $\{a_m\}$, то $f(a) = \infty$. Наконец, если $b_m \to b$ и $b_m \in K$, то и $f(b) = \infty$, т. е. $b \in K$.

Наша дальнейшая задача — определить конус K в касательном пространстве единицы E_ε. Имеет место

Теорема 4. Конус K совпадает с плоскостью S всех симметричных матриц.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

I. Любая несимметричная матрица не принадлежит K.

II. K содержит симметричную матрицу с любым набором собственных чисел. Действительно, поскольку преобразование $x \to rxr^{-1}$ (r — ортогональная матрица) является, как легко видеть, движением метрики (1), из II следует, что K содержит все симметричные матрицы.

Приступим к доказательству утверждения I. Пусть $a \in E_\varepsilon$, $a \neq a'$ и $aa' = a'a$. Геодезическая $x(a, s)$ в этом случае совпадает с экспонентой e^{as}. Назовем левой проекцией произвольной матрицы $y \in Gl^+(n)$ на многообразие S положительно определенных симметричных матриц единственную матрицу из S, равную ry, где r—ортогональная матрица: $np_S\, y = ry$. В частности, $np_{\bar{S}}\, x(a, s) = e^{\frac{a+a'}{2}s}$ (действительно, $e^{\frac{a+a'}{2}s} = e^{\frac{a'-a}{2}s} e^{as}$, где $e^{\frac{a'-a}{2}s}$ ортогональна).

Если s — метрическая дуга геодезической $x(a, s) = e^{as}$, то $|a| = |a'| = \sqrt{sp(aa')} = 1$; $\left|\frac{a+a'}{2}\right| < 1$, поскольку $a \neq a'$ (очевидно, $\left|\frac{a+a'}{2}\right| = \cos\psi$, ψ — угол a с плоскостью S). Рассмотрим «ломаную» $\varepsilon y_1 x_1$, где $x_1 = e^{as_1}$, $y_1 = e^{\frac{a+a'}{2}s_1}$, отрезок εy_1 — геодезическая $e^{\frac{a+a'}{2}s}$ $(0 \leqslant s \leqslant s_1)$, отрезок $y_1 x_1$ — кратчайший. Длина $\varepsilon y_1 x_1$ равна $\left|\frac{a+a'}{2}\right| s_1 + \rho(x_1 y_1)$. Но $\rho(x_1, y_1) \leqslant d_0$, где d_0 — диаметр компактной ортогональной группы $\overline{O}^+$: $\rho(x_1 y_1) = \rho(x_1 y_1^{-1}, \varepsilon)$, где $x_1 y_1^{-1} \in \overline{O}^+$. Очевидно, при $s_1 > \frac{d_0}{1 - \left|\frac{a+a'}{2}\right|}$ длина $\varepsilon y_1 x_1$ меньше длины отрезка εx_1 геодезической $x(a,s) = e^{as}$, который, таким образом, не является кратчайшим $\left(\text{в частности, } f(a) \leqslant \frac{d_0}{1-\cos\psi}\right)$.

Пусть теперь $aa' \neq a'a$, $x(a, s) = e^{(a-a')s}e^{a's}$. Рассмотрим ломаную $\varepsilon z_1 x_1$, где $x_1 = x(a, s_1)$, $z_1 = e^{a's_1}$, и отрезки εz_1 и $z_1 x_1$ — кратчайшие; ее длина $l_{\varepsilon z_1 x_1} = \rho(\varepsilon z_1) + \rho(z_1 x_1)$. Пусть $s_1 = k\delta$ ($k > 0$ — целое). Разобьем дугу $e^{a's}$ $(0 \leqslant s \leqslant s_1)$ на k конгруэнтных (в смысле правого сдвига) отрезков длиной δ. Поскольку $e^{a's}$ заведомо не является геодезической, расстояние между концами каждого из этих отрезков равно $\lambda\delta$, где $\lambda = \text{const}$ и $0 < \lambda < 1$. Поэтому длина ломаной, составленной из кратчайших, соединяющих концы указанных отрезков, равна λs_1, и $\rho(\varepsilon, z_1) < \lambda s_1$, откуда $l_{\varepsilon z_1 x_1} < \lambda s_1 + \rho(z_1, x_1)$.

Поскольку $\rho(z_1, x_1) = \rho(z_1 x_1^{-1}, \varepsilon) \leqslant d_0$ $(z_1 x_1^{-1} \in \overline{O}^+)$, мы снова находим, что при достаточно большом k $(s_1 = k\delta, \ \delta = \text{const})$ $l_{\varepsilon z_1 x_1}$ меньше длины отрезка εx_1 геодезической $x(a, s)$. Утверждение I, таким образом, доказано.

Приступим к доказательству II. Пусть $a \in S$ — произвольно симметричная матрица. На геодезической $x(a, s) = e^{as}$ рассмотрим произвольную последовательность точек $x_1 \ldots x_m$, соответствующих значениям $s_1 \ldots s_m \ldots$ дуги s $(s_m \to \infty)$. Соединив эти точки кратчайшими с ε, получим последовательность отрезков $\varepsilon x_1, \ldots \varepsilon x_2, \ldots \varepsilon x_m \ldots$ геодезических $x(b_m, s) = e^{(b_m - b'_m)}e^{b'_m s}$ $(m = 1 \ldots \infty)$. Переходя, если это нужно, к некоторой подпоследовательности, мы можем предположить, что нормированные касательные векторы $b_m \in E$, этих геодезических сходятся к некоторому $b \in S$, $|b| = |b_m| = 1$. Итак, мы имеем последовательность отрезков геодезической $x(a, s) = e^{as}$ и последовательность кратчайших отрезков геодезических $x(b_m, s) = e^{(b_m - b'_m)s}e^{b'_m s}$, соединяющих ε с точками $x_m = x(a, s_m)$, при этом $s_m \to \infty$ и векторы b_m сходятся к пределу — вектору $b \in S$ (действительно, $f(b_m) \to \infty$ и поэтому $b \in K \subseteq S$). Обозначим также через t_m значения дуги в точках x_m для геодезических $x(b_m, s)$ $(x(b_m, t_m) = x(a, s_m)$; очевидно, $t_m \leqslant s_m)$.

Заметим теперь, что левая проекция на $\overline{S}$ любой геодезической $x(c, s) = e^{(c-c')s}e^{c's}$ совпадает с проекцией экспоненты $e^{c's}$:

$$np_{\overline{S}}\, x(c, s) = re^{(c-c')s}e^{c's} = np_{\overline{S}}\, e^{c's}$$

(r и $re^{(c-c')s}$ — ортогональные матрицы). В частности, точки $\{x_m\}$ можно рассматривать, как проекции точек $y_m = e^{b'_m t_m}$.

Будем рассматривать матрицы из $Gl^+(n)$ как операторы в n-мерном векторном пространстве F_n, снабженном евклидовой метрикой, относительно которой матрицы $a \in S$ можно рассматривать, как самосопряженные; $|\xi|$ — модуль вектора ξ в этой метрике. Пусть среди собственных чисел упомянутой выше матрицы b есть p различных: $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \beta_p$. Рассмотрим убывающую последовательность подпространств F_n: $F_n = F_{r_1} \supset F_{r_2} \supset \cdots \supset F_{r_p}$, инвариантных относительно b; F_{r_i} $(i = 1 \ldots p)$ есть линейная оболочка корневых подпространств, соответствующих собственным числам b, не превышающим β_i. Покажем, что каждое F_{r_i} может быть охарактеризовано следующим свойством: если $\xi \in F_{r_i}$ (но $\xi \bar{\in} F_{r_{i+1}}$), то существует последовательность $\{\xi_m\}$, $\xi_m \to \xi$ такая, что

$$\lim \frac{1}{t_m} \ln |\exp (b_m' t_m) \xi_m| = \beta_i$$

и для каждой последовательности $\xi_m' \to \xi$

$$\lim \frac{1}{t_m} \ln |\exp (b_m' t_m) \xi_m| \geqslant \beta_i.$$

Легко видеть, что собственные числа $\lambda_k^{(m)}$ матриц b_m' сходятся (при соответствующей их нумерации) к собственным числам b. Пусть $F_{r_i}^{(m)}$ — вещественная часть линейной оболочки корневых пространств b_m', соответствующих тем числам $\lambda_k^{(m)}$, для которых $\lim \lambda_k^{(m)} \leqslant \beta_i$. Очевидно, размерности $F_{r_i}^{(m)}$ и F_{r_i} одинаковы, и $F_{r_i}^{(m)}$ сходятся к F_{r_i}. Пусть теперь $\xi \in F_{r_i}$ но $\xi \in F_{r_{i+1}}$), $|\xi| = 1$. Всегда возможно выбрать последовательность $\xi_m \in F_{r_i}^{(m)}$ ($\xi_m \in F_{r_{i+1}}^{(m)}$) так, чтобы $\lim \xi_m = \xi$. Элементарный подсчет показывает, что переменная $|\exp (b_m' t_m) \xi_m|$ имеет порядок $t_m^q \exp (Re \lambda_i^{(m)} t_m) | q \leqslant \leqslant c = \text{const}$, $\lim \lambda_i^{(m)} = \beta_i |$; очевидно,

$$\lim \frac{1}{t_m} \ln |\exp (b_m' t_m) \xi| = \beta_i.$$

С другой стороны, если ξ_m' — произвольная последовательность векторов из F_n, сходящаяся к $\xi \in F_{r_i}$, то $\xi_m' = \xi_m + \eta_m$, где $\xi_m \in F_{r_i}^{(m)}$, а η_m — вектор из дополнительного к $F_{ri}^{(m)}$ подпространства $G_i^{(m)}$ (G_i^m — оболочка инвариантных относительно b_m' подпространств F_n, соответствующих тем $\lambda_k^{(m)}$, для которых $\lim \lambda_k^{(m)} > \beta_i$). Рассмотрим скалярный квадрат вектора $\exp (b_m' t_m) \xi_m'$:

$$(e^{b_m' t_m} \xi_m')^2 = (e^{b_m' t_m} \xi_m)^2 + (e^{b_m' t_m} \eta_m)^2 + 2 (e^{b_m' t_m} \xi_m) \cdot (e^{b_m' t_m} \eta_m).$$

Поскольку $F_{r_i}^{(m)}$ и $G_i^{(m)}$ сходятся к дополнительным подпронстранствам F_{r_i} и G_i, для любых $y_m \in F_{r_i}^{(m)}$, $z_m \in G_i^{(m)}$, начиная с достаточно большого m,

$$\frac{|y_m z_m|}{|y_m| \cdot |z_m|} \leqslant c = \text{const}, \quad 0 \leqslant c < 1.$$

Следовательно,

$$(e^{b_m' t_m} \xi_m')^2 \geqslant (e^{b_m' t_m} \xi_m)^2 + (e^{b_m' t_m} \eta_m)^2 - 2c |e^{b_m' t_m} \xi_m| \cdot |e^{b_m' t_m} \eta_m| \geqslant$$
$$\geqslant (1 - c^2) (e^{b_m' t_m} \xi_m)^2,$$

откуда, как легко видеть,

$$\lim \frac{1}{t_m} \ln |\exp (b_m' t_m) \xi_m'| \geqslant \beta_i.$$

Вспомним теперь, что $\{x_m\}$ — левые проекции на $\bar{S}$ рассмотренных матриц $y_m = e^{b'_m t_m}$: $x_m = r_m y_m$, где r_m — ортогональная матрица. Так как

$$\lim \frac{1}{t_m} \ln |r_m y_m \xi_m| = \lim \frac{1}{t_m} \ln |y_m \xi_m|$$

($|r_m z| = |z|$), то подпространства F_{r_i} $(i = 1 \ldots p)$ обладают относительно матриц x_m тем же свойством: для каждой последовательности $\xi_m \to \xi \in F_{r_i}$ $\lim \frac{1}{t_m} \ln |x_m \xi'_m| \geqslant \beta_i$ и т. д. Но $x_m = \exp(as_m)$; повторяя аналогичные приведенным выше рассуждения для матриц $\exp(as_m)$, получим: F_{r_i} — оболочки соответствующих корневых пространств также и для a; для каждого $\xi \in F_{r_i}$ существует $\xi_m \to \xi$ и $\xi'_m \to \xi$, для которых

$$\lim \frac{\ln |x_m \xi_m|}{t_m} = \beta_i; \quad \lim \frac{\ln |x_m \xi_m|}{s_m} \geqslant \alpha_i;$$
$$\lim \frac{\ln |x_m \xi'_m|}{t_m} \geqslant \beta_i; \quad \lim \frac{\ln |x_m \xi'_m|}{s_m} = \alpha_i$$

(очевидно, среди собственных чисел a также p различных α_i: $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_p$). Из этих соотношений следует, что существует

$$0 < \lim \frac{t_m}{s_m} = \mu = \frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad (i = 1 \ldots p).$$

Но сумма квадратов собственных чисел как a, так и b равна 1, откуда $\mu = 1$, $\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1 \ldots p)$. Утверждение II, очевидно, доказано: $a \in S$ — произвольная матрица; $b \in K$ — матрица с тем же набором собственных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. L. Siegel. Amer. J. Math., v. 65 (1943), 1—86.
2. Loo—Keng—Hua. Trans. Amer. Math. Soc., v. 57 (1945), 441—490; v. 61 (1947), 193—255,

Поступила 23 октября 1964 г.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В «Украинском геометрическом сборнике» публикуются работы, содержащие новые законченные результаты научных исследований по геометрии. Согласно Положению о тематических сборниках, утвержденному Советом Министров УССР 7/I 1964 г., статьи по объему не должны превышать 0,5 печатного листа (12 страниц машинописи); в некоторых случаях редколлегии дается право помещать статьи объемом до 1 листа. К каждой статье автор должен приложить «Авторскую справку» установленного образца. Желательно прилагать отзывы кафедры, научного учреждения, в котором работает автор; к статьям аспирантов и соискателей ученых степеней — отзывы научных руководителей и указание срока предполагаемой защиты диссертации, к которой относится статья.

Согласно упомянутому Положению, авторы не получают гонорара за статьи и бесплатных экземпляров сборника. В связи с этим редколлегия просит авторов вместе со статьями присылать свои заявки на приобретение сборника с указанием количества экземпляров, а также широко оповещать всех заинтересованных лиц о выходе сборника из печати.

К каждой статье необходимо прилагать краткое изложение результатов объемом не более полутора страниц машинописи через два интервала. Редколлегия оставляет за собой право с согласия автора помещать в сборнике такое краткое изложение вместо статьи с развернутым изложением результатов.

Рукопись должна быть четко напечатана на машинке в двух экземплярах на одной стороне листа через два интервала. Формулы, буквенные обозначения и символы должны быть вписаны от руки чернилами четко, без помарок, буквами в полтора раза большего размера, чем машинописные, с ясным различием в написании прописных и строчных букв и букв разных алфавитов. Сходные по написанию строчные и прописные буквы подчеркиваются простым карандашом двумя черточками: прописные снизу, строчные сверху.

Вписываемые от руки знаки нужно размещать реже, чем в обычном письме, чтобы можно было сделать их разметку. Греческие буквы обводятся красным карандашом, готические — синим, векторы подчеркиваются снизу (не сверху!) одной черточкой жирно простым карандашом. Текст, выделяемый курсивом, подчеркивается волнистой линией простым карандашом. Иностранные слова вписываются на машинке с иностранным шрифтом или четко от руки чернилами и сверяются с оригиналом.

Чертежи прилагаются только в случае необходимости, хорошего качества, выполненные тушью на кальке или на плотной чертежной бумаге. На обороте каждого чертежа указывается фамилия автора, название статьи и номер чертежа. В тексте должна быть ссылка на рисунок и указано его место пометкой на поле карандашом, обведенной рамкой.

Список литературы помещается в конце статьи в порядке ссылок в тексте. Библиографические данные приводятся в следующем порядке:

для книг — инициалы и фамилия автора, полное название книги, номер тома, издательство, место и год издания;

для журнальных статей — инициалы и фамилия автора, полное название статьи, название журнала, № тома, № выпуска, год издания, страницы начала и конца статьи.

Не допускаются ссылки в заголовке статьи и ссылки на неопубликованные работы.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Редактор *Д. А. Вайнберг*
Техредактор *Л. Т. Момот*
Корректоры *Р. Е. Дорф, М. Ф. Зозуля*

Сдано в набор 2/III 1965 г. Подписано к печати 15/VII 1965 г. БЦ 34197. Формат 70×108$^{1}/_{16}$. Объем 7,25 физ. печ. л., 9,9 усл. печ. л., 9,0 уч.-изд. л. Зак. № 5-147. Тираж 1000. Цена 63 коп.

КРИ — вып. 5(130)—1965 г., п. 16. БЗ 1965 г., п. 7

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в типографии № 16 Областного управления по печати. Харьков-3, Университетская ул., 16. Зак. 4778