О ФУНКЦІЯХЪ,

ПОДОБНЫХЪ ФУНКЦІЯМЪ ЛЕЖАНДРА.

К. А. Поссе.

Въ 7 и 9 №№ Comptes rendus за 1885 годъ, Г. Stieltjes сообщилъ нѣкоторыя теоремы и формулы, относящіяся до такъ называемыхъ функцій, подобныхъ функціямъ Лежандра, или полиномовъ Якоби и составляющія существенныя дополненія къ извѣстнымъ свойствамъ этихъ функцій. Настоящая замѣтка заключаетъ въ себѣ доказательство результатовъ Г. Stieltjes, основанное на разсмотрѣніи этихъ функцій, какъ знаменателей подходящихъ дробей въ разложеніи интеграла

$$\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,dz}{x-z}, \ (\alpha \text{ и } \beta > 0)$$

въ непрерывную дробь.

Извѣстно, что разлагая

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь, получаемъ (см. напр. мою диссертацію — «О функціяхъ, подобныхъ функціямъ Лежандра», стр. 28 и слѣд.):

$$\Phi(x)=\cfrac{a}{x-a_2-\cfrac{a_2a_3}{x-a_3-a_4-\cfrac{a_4a_5}{x-a_5-a_6-\cdots\cdots}}}$$

где
$$a=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

$$a_{2n}=\frac{(\alpha+n-1)(\alpha+\beta+n-2)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)},$$

$$a_{2n+1}=\frac{n(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-1)}.$$

Знаменатель n-ой подходящей выражается здѣсь слѣдующимъ образомъ:

$$x^nF\left(1-n-\alpha,-n,\ 2-2n-(\alpha+\beta),\frac{1}{x}\right)\qquad(1)$$

или

$$(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)}F(\alpha+\beta+n-1,-n,\alpha,x)\qquad(2)$$

гдѣ $F\,(a,\ b,\ c,\ x)$ обозначаетъ гипергеометрическій рядъ

$$1+\frac{ab}{1.c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2+\ldots..$$

Обозначая эту цѣлую функцію n-ой степени отъ x черезъ $T_n(\alpha,\beta,x)$ или просто T_n, будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$T_n=x^n-\frac{n(\alpha+n-1)}{\alpha+\beta+2n-2}x^{n-1}+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-3)}x^{n-2}-\ldots..\qquad(1)$$

или

$$T_n = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{n(\alpha+\beta+n-1)}{\alpha} x + \ldots\ldots\right] \qquad (2)$$

Эта функція и называется функціею, подобною функціи Лежандра или полиномомъ Якоби.

Перечислимъ главнѣйшія ея свойства, вытекающія изъ ея опредѣленія.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} T_n \theta_{n-1}\, dx = 0\,, \qquad \mathrm{I}$$

гдѣ θ_{n-1} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-1$.

$$T_{n+2} = (x - a_{2n+3} - a_{2n+4})\, T_{n+1} - a_{2n+2} a_{2n+3} T_n. \qquad \mathrm{II}$$

$$T_n(\alpha, \beta, 1-x) = (-1)^n T_n(\beta, \alpha, x). \qquad \mathrm{III}$$

Изъ выраженія (2) и формулы III вытекаютъ равенства

$$T_n(\alpha, \beta, 0) = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)}\,, \qquad (3)$$

$$T_n(\alpha, \beta, 1) = \frac{\beta(\beta+1)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)}. \qquad (4)$$

Изъ выраженія (1) вытекаетъ соотношеніе

$$T'_n(\alpha, \beta, x) = n\, T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x)\,, \qquad \mathrm{IV}$$

гдѣ T'_n означаетъ производную отъ T_n.

Изъ общихъ формулъ въ теоріи непрерывныхъ дробей (см. напр. мою диссертацію, стр. 17) получается формула

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}T_n^2(\alpha,\beta,x)\,dx = aa_2a_3\ldots a_{2n+1} =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)^2}. \qquad (5)$$

Функція $T_n(\alpha,\beta,x)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$(1-x)x\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha-(\alpha+\beta)x)\frac{dy}{dx}+n(\alpha+\beta+n-1)y=0, \quad \mathrm{V}$$

и всякая цѣлая функція n-ой степени, удовлетворяющая этому уравненію, отличается отъ T_n только постояннымъ множителемъ.

Переходимъ теперь къ доказательству теоремъ и формулъ Г. Stieltjes.

Теорема.

Функція $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$

$$=(x_1x_2\ldots x_n)^\alpha[(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)]^\beta\Pi(x_i-x_k)^2,$$

гдѣ α и $\beta>0$, а перемѣнныя $x_1,x_2,\ldots x_n$ не выходятъ изъ предѣловъ 0 и 1, достигаетъ своего maximum'а, когда $x_1,x_2,\ldots x_n$ дѣлаются равными корнямъ уравненія

$$T_n(\alpha,\beta,x)=0.$$

Здѣсь $\Pi(x_i-x_k)^2$ обозначаетъ произведеніе квадратовъ разностей, составленныхъ изъ величинъ x_1, x_2,$\ldots x_n$.

Доказательство.

Уравненія, опредѣляющія величины x_1, x_2,$\ldots x_n$, соотвѣтствующія maximum'у функціи $\Phi(x_1,\ldots x_n)$, можно написать подъ видомъ

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0 \text{ или } \frac{\partial \lg \Phi}{\partial x_k} = 0$$

для $k = 1, 2, \ldots\ldots n.$

Полагая

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots.(x - x_n)$$

и обозначая через Δ дискриминантъ этой функціи, будемъ имѣть

$$\frac{\partial \lg \Phi}{\partial x_k} = \frac{\alpha}{x_k} - \frac{\beta}{1 - x_k} + \frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k} = 0$$

или

$$x_k(1 - x_k)\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k} + (\alpha - (\alpha + \beta)x_k) = 0. \qquad (6)$$

Далѣе, имѣя $\Delta = \Pi(x_i - x_k)^2$, находимъ

$$\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k} = 2\sum_{(i)} \frac{1}{x_k - x_i}, \ (i \gtrless k).$$

Съ другой стороны, полагая

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - x_k)},$$

находимъ

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \sum_{(i)} \frac{1}{x - x_i}, \ (i \gtrless k),$$

т. е.

$$\frac{(x - x_k)\varphi'(x) - \varphi(x)}{(x - x_k)\varphi(x)} = \sum_{(i)} \frac{1}{x - x_i}, \ (i \gtrless k)$$

и дѣлая $x = x_k$, находимъ

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi''(x_k)}{\varphi'(x_k)}=\sum_{(i)}\frac{1}{x_k-x_i},$$

откуда

$$\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k}=\frac{\varphi''(x_k)}{\varphi'(x_k)},$$

и уравненіе (6) даетъ

$$x_k(1-x_k)\varphi''(x_k)+(\alpha-(\alpha+\beta)x_k)\varphi'(x_k)=0$$

для $k=1,\ 2,\ldots n$.

Слѣдовательно, цѣлая функція n-ой степени

$$x(1-x)\varphi''(x)+(\alpha-(\alpha+\beta)x)\varphi'(x)$$

отличается отъ $\varphi(x)$ только постояннымъ множителемъ, который, очевидно, равенъ

$$-n(\alpha+\beta+n-1),$$

такъ что окончательно имѣемъ

$$x(1-x)\varphi''(x)+(\alpha-(\alpha+\beta)x)\varphi'(x)+n(\alpha+\beta+n-1)\varphi(x)=0,$$

а потому $$\varphi(x)=T_n(\alpha,\beta,x),$$
что и тр. док.

Для вычисленія самаго maximum'а функціи Φ, замѣчаемъ, что

$$[x_1x_2\ldots.x_n]^\alpha[(1-x_1)(1-x_2)\ldots.(1-x_n)]^\beta=$$

$$=[(-1)^nT_n(\alpha,\beta,0)]^\alpha[T_n(\alpha,\beta,1)]^\beta=$$

$$=\frac{[\alpha(\alpha+1)\ldots.(\alpha+n-1)]^\alpha[\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)]^\beta}{[(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+n)\ldots.(\alpha+\beta+2n-2)]^{\alpha+\beta}}.$$

Слѣдовательно, все дѣло сводится къ вычисленію дискриминанта $\Pi(x_i - x_k)^2$ функціи $T_n'(\alpha, \beta, x)$.

Для этой цѣли замѣчаемъ вмѣстѣ съ Г. Stieltjes, что если X есть цѣлая функція степени n, съ коэффиціентомъ 1 при x^n, X_1—ея производная, $x_1, x_2, \ldots x_n$—ея корни, а $X_2, X_3, \ldots X_n$ рядъ функцій Штурма, составляемыхъ по схемѣ

$$X = QX_1 - X_2, X_1 = Q_1 X_2 - X_3, \ldots X_{n-2} = Q_{n-2} X_{n-1} - X_n, \quad \text{VI}$$

то, обозначая черезъ $A_1, A_2, \ldots A_n$ коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x въ функціяхъ $X_1, X_2, \ldots X_n$, будемъ имѣть для выраженія дискриминанта функціи X слѣдующую формулу

$$\Delta = \Pi(x_i - x_k)^2 = A_1^2 A_2^2 \ldots A^2_{n-1} X_n \qquad (8)$$

или

$$\Delta = A_1^2 A_2^2 \ldots A^2_{n-1} A_n,$$

потому что X_n = постоянному A_n.

Эта формула есть только частный случай формулъ, получаемыхъ по теоремѣ Сильвестера и Борхгардта (см. *Serret*, Cours d'Algèbre supérieure, T. I, стр. 570), въ силу которой вообще имѣемъ

$$A_1^2 A_2^2 \ldots A^2_{k-1} X_k =$$
$$= \sum (x_1 - x_2)^2 \ldots (x_1 - x_k)^2 \ldots (x_{k-1} - x_k)^2 (x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n),$$

откуда вытекаетъ, что

$$A_1^2 A_2^2 \ldots A^2_{k-1} A_k = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots s_{k-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots s_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1}, & s_k, & \ldots s_{2k-2} \end{vmatrix},$$

гдѣ $s_\mu = x_1{}^\mu + x_2{}^\mu + \ldots + x_n{}^\mu$.

Обращаясь къ нашему случаю, въ которомъ

$$X = T_n(\alpha, \beta, x),$$

$$X_1 = T'_n(\alpha, \beta, x) = n T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x),$$

дѣлимъ $T_n(\alpha, \beta, x)$ на $T'_n\ (\alpha, \beta, x)$ и обозначаемъ частное черезъ Q, а остатокъ черезъ R.

Подставляя въ формулу I

$T_n = Q T'_n + R$, находимъ:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\Big\{Q T'_n + R\Big\}\theta_{n-1}\,dx = 0;$$

полагая $\theta_{n-1} = x(1-x)\theta_{n-3}$, гдѣ θ_{n-3} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-3$, находимъ:

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\ \Big\{nQ T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x) + R\Big\}\theta_{n-3}\,dx = 0$$

или замѣчая, что Q есть 1-ой степени относительно x,

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta R\,\theta_{n-3}\,dx = 0\,,$$

откуда и вытекаетъ, что R отличается отъ

$$T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x)$$

только постояннымъ множителемъ. Такимъ образомъ находимъ соотношеніе

$$T_n(\alpha,\beta,x) = Q T'_n(\alpha,\beta,x) - c_2 T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x), \qquad (8)$$

гдѣ c_2 — постоянное.

Для опредѣленія c_2, умножаемъ обѣ части равенства (8) на $x^\alpha(1-x)^\beta T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x)\,dx$ и интегрируемъ отъ 0 до 1; тогда получимъ:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}T_n(\alpha,\beta,x)x(1-x)T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)dx=$$

$$=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}nQT_{n-1}(\alpha+1,\beta+1,x)T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)dx$$

$$-c_2\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}T^2{}_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)\,dx$$

или замѣчая, что коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x въ функціяхъ T_μ равны 1, получимъ:

$$-\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}T_n^2(\alpha,\beta,x)\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}T^2{}_{n-1}(\alpha+1,\beta+1,x)\,dx\\ \displaystyle-c_2\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}T^2{}_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)\,dx.\end{array}\right\}$$

Всѣ интегралы, входящіе въ эту формулу, могутъ быть взяты по формулѣ (5), послѣ чего получаемъ:

$$c_2=\frac{(n-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)^2}. \qquad (9)$$

Далѣе, замѣнивъ въ формулѣ II α на $\alpha+1$, β на $\beta+1$, n на $n-k$, получимъ для $k\geqq 3$ соотношеніе

$$T_{n-k+2}(\alpha+1,\beta+1,x)=$$

$$=q_{n-k+1}T_{n-k+1}(\alpha+1,\beta+1,x)-c_kT_{n-k}(\alpha+1,\beta+1,x),$$

гдѣ $c_k=\dfrac{(n-k+1)(\alpha+n-k+1)(\beta+n-k+1)(\alpha+\beta+n-k+1)}{(\alpha+\beta+2n-2k+1)(\alpha+\beta+2n-2k+2)^2(\alpha+\beta+2n-2k+3)}$, (10)

а q_{n-k+1} — линейная функція.

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующій рядъ соотношеній

$$\left.\begin{aligned}
&T_n(\alpha,\beta,x) = QT'_n(\alpha,\beta,x) - c_2 T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x),\\
&\qquad\qquad T_{n-1}(\alpha+1,\beta+1,x) =\\
&= q_{n-2} T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x) - c_3 T_{n-3}(\alpha+1,\beta+1,x),\\
&T_{n-2}(\ldots.) = q_{n-3} T_{n-3}(\ldots.) - c_4 T_{n-4},(\ldots.),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&T_2(\ldots.) = q_1\, T_1(\ldots.) - c_n.
\end{aligned}\right\}\ \mathrm{VII}$$

Чтобы привести этотъ рядъ соотношеній къ виду VI, полагаемъ

$$T_n(\alpha,\beta,x) = X$$
$$T'_n(\alpha,\beta,x) = X_1 = c_1 T_{n-1}(\alpha+1,\beta+1,x),$$

гдѣ $c_1 = n$, и умножаемъ равенства системы VII соотвѣтственно на

$$1,\ c_1,\ c_2,\ c_1c_3,\ c_2c_4,\ c_1c_3c_5,\ c_2c_4c_6,\ldots..$$

Тогда система VII приведется къ виду VI, причемъ будемъ имѣть:

$$X_2 = c_2 T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x),$$
$$X_3 = c_1c_3 T_{n-3}(\alpha+1,\beta+1,x),$$

и вообще

$$X_k = c_1c_3\ldots.c_k T_{n-k}(\alpha+1,\beta+1,x),\ \text{для } k \text{ нечетнаго},$$
$$X_k = c_2c_4\ldots.c_k T_{n-k}(\alpha+1,\beta+1,x),\ \text{для } k \text{ четнаго}.$$

Слѣдовательно, коэффиціентъ A_k при x^{n-k} въ функціи X_k будетъ равенъ $c_1\, c_3\ldots\ldots.c_k$ въ первомъ и $c_2\, c_4\ldots\ldots.c_k$ во второмъ случаѣ. Отсюда въ обоихъ случаяхъ находимъ

$$A_1{}^2 A_2{}^2 \ldots.A^2{}_{k-1} A_k = c_1{}^k c_2{}^{k-1} \ldots.c^2{}_{k-1} c_k$$

и, взявъ выраженія c_k по формуламъ (9) и (10), окончательно получаемъ:

$$A_1^2 A_2^2 \ldots . A^2_{k-1} A_k = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots s_{k-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots s_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1}, & s_k, & \ldots s_{2k-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{r=0}^{k-r} (n-r)^{k-r} (\alpha+n-1-r)^{k-1-r} (\beta+n-1-r)^{k-1-r} \prod\limits_{r=0}^{k-3} (\alpha+\beta+n-2-r)^{k-2-r}}{\prod\limits_{r=0}^{2k-3} (\alpha+\beta+2n-2-r)^{2k-2-r}}$$

При $k=n$, получаемъ выраженіе дискриминанта функціи $T_n(\alpha,\beta,x)$

$$\Delta = \frac{2^2 3^3 \ldots n^n (\alpha+1)(\alpha+2)^2 \ldots (\alpha+n-1)^{n-1} (\beta+1)(\beta+2)^2 \ldots . (\beta+n-1)^{n-1}}{(\alpha+\beta+n-1)^{n-1} (x+\beta+n)^n \ldots . (\alpha+\beta+2n-2)^{2n-2}} \tag{11}$$

Перемножая (7) и (11) находимъ и величину maximum'а Φ, а именно

$$\prod_{r=1}^{r=n} \frac{r^r (\alpha+r-1)^{\alpha+r-1} (\beta+r-1)^{\beta+r-1}}{(\alpha+\beta+n+r-2)^{\alpha+\beta+n+r-2}}. \tag{12}$$

Если въ формулѣ I замѣнимъ x черезъ $\frac{1+x}{2}$ и z черезъ $\frac{1+z}{2}$, и положимъ

$$\mathrm{T}_n(\alpha,\beta,x) = T_n\left(\alpha,\beta,\frac{1+x}{2}\right),$$

то $T'_n(\alpha, \beta, x)$ будетъ цѣлая функція n-ой степени отъ x, удовлетворяющая условію

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} T_n \theta_{n-1}\, dx = 0,$$

гдѣ θ_{n-1} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-1$, а также и дифференціальному уравненію

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha - \beta - (\alpha+\beta)x)\frac{dy}{dx} + n(n-1+\alpha+\beta)y = 0. \quad (13)$$

Корни этой функціи $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ связаны съ корнями $x_1, x_2, \ldots x_n$ функціи T_n соотношеніемъ $\xi_i = 2x_i - 1$, а потому дискриминантъ функціи $T'_n(\alpha, \beta, x)$ получится черезъ умноженіе дискриминанта функціи T_n на $2^{n(n-1)}$.

При $\alpha = \beta = 1$ функція $T_n(1, 1, x)$ отличается отъ Лежандровой функціи только постояннымъ множителемъ, поэтому изъ предыдущихъ формулъ прямо получаются аналогичныя формулы для Лежандровыхъ функцій, данныя Г. Stieltjes.

Выраженіе функціи $T_n(\alpha, \beta, x)$ по формулѣ (1) сохраняетъ смыслъ и при $\alpha = \beta = 0$; функція $T_n(0, 0, x) = T_n\left(0, 0, \frac{1+x}{2}\right)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + n(n-1)y = 0 \qquad (14)$$

и, какъ видно изъ предыдущаго, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что изъ всѣхъ цѣлыхъ функцій n-ой степени отъ x, корни которыхъ вещественны и не выходятъ изъ предѣловъ -1 и $+1$, функція $T_n(0, 0, x)$ имѣетъ наибольшій дискриминантъ. Значеніе этого дискриминанта Δ_1 получаемъ по формулѣ (11), умножая на $2^{n(n-1)}$ и полагая $\alpha = \beta = 0$, что даетъ

$$\Delta_1 = \frac{2^{n(n-1)}.1.2^2\ldots n^n[1.2^2\ldots(n-1)^{n-1}]^2}{(n-1)^{n-1}n^n\ldots(2n-2)^{2n-2}} =$$

$$= \frac{1.2^2\ldots n^n.1.2^2\ldots(n-2)^{n-2}.1^2.2^4.3^6\ldots(n-1)^{2n-2}.2^{n(n-1)}}{1.2^2\ldots(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-1}\ldots(2n-2)^{2n-2}} =$$

$$= \frac{1.2^2\ldots.n^n.1.2^2\ldots(n-2)^{n-2}}{1.3^3.5^5\ldots.(2n-3)^{2n-3}}.$$

Функція $T_n\,(0, 0, x)$ отличается только постояннымъ множителемъ отъ функціи U_n, опредѣляемой равенствомъ

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n z^n. \qquad (15)$$

Въ самомъ дѣлѣ, равенство это при $x = \pm 1$ обращается въ

$1 \pm z = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} U_n z^n$, откуда видимъ, что при $n \geq 2$, $U_n(+1) = 0$,

$U_n(-1) = 0$.

Дифференцируя (15) по x, находимъ

$$\frac{-1}{\sqrt{1-2xz-z^2}} = \sum U'_n\, z^{n-1},$$

откуда, обозначая Лежандрову функцію n-ой степени черезъ X_n, имѣемъ:

$$U'_n = -X_{n-1}$$

и слѣдовательно, $U_n = -\int\limits_{-1}^{x} X_{n-1}\, dx$.

Дифференціальное уравненіе для Лежандровыхъ функцій даетъ

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\,X'_{n-1}\Big) = -n(n-1)\,X_{n-1},$$

откуда

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\,U''_n\Big)=-n(n-1)\,U'_n$$

и интегрируя отъ -1 до x, находимъ

$$(1-x^2)\,U''_n+n(n-1)\,U_n=0,$$

и, въ силу уравненія (14), получаемъ

$$U_n=C.\mathrm{T}_n(0,0,x),\ \text{что и тр. док.}$$

Полагая въ $\displaystyle\int_0^1\frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz}{x-z}$

$\alpha=1$, $z=\dfrac{u}{\beta-1}$, $x=\dfrac{\xi}{\beta-1}$ и увеличивая затѣмъ β до ∞, получаемъ въ дополненіе къ результатамъ Г. Stieltjes еще слѣдующій.

Знаменатель n-ой подходящей въ разложеніи

$$\int_0^\infty\frac{e^{-u}\,du}{\xi-u}=\cfrac{1}{\xi-1-\cfrac{1^2}{\xi-3-\cfrac{2^2}{\xi-5-\dots\dots}}}$$

есть цѣлая функція $\psi_n(\xi)$ n-ой степени отъ ξ

$$\psi_n(\xi)=\xi^n-n^2\,\xi^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{1.2}\,\xi^{n-2}-\dots\dots,$$

удовлетворяющая уравненію

$$\xi\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(1-\xi)\frac{d\psi}{d\xi}+n\psi=0,$$

и обладающая тѣмъ свойствомъ, что выраженіе

$$\xi_1\,\xi_2\ldots\ldots\xi_n\,e^{-(\xi_1+\xi_2+\ldots\ldots+\xi_n)}\,\Pi(\xi_i-\xi_k)^2,$$

гдѣ всѣ $\xi_i > 0$, достигаетъ своего maximum'a, когда перемѣнныя ξ_i дѣлаются равны корнямъ функціи $\psi_n(\xi)$.

Maximum этотъ равенъ

$$1\,.\,2^2\,.\,3^6\ldots\ldots n^{2n}\,e^{-n^2},$$

а дискриминантъ функціи $\psi_n(\xi)$ равенъ

$$1\,.\,2^3\,.\,3^5\ldots\ldots n^{2n-1}.$$

Спб. 31 Января
1886 года.