ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ

ОДНОГО ЛИНЕЙНАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ n-ГО ПОРЯДКА.

В. П. Алексѣевскаго.

1. Уравненіе, способъ интегрированія котораго излагается въ этой замѣткѣ, имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n-r} a_i z^{-i} D^{n-i} y + a_n z^m y = 0.$$

Докажемъ предварительно нѣсколько тождествъ.

Пусть u — какая нибудь функція перемѣннаго x, p и q числа цѣлыя, тогда по теоремѣ Лейбница, распространенной на производныя съ отрицательными указателями, имѣемъ:

$$D^{-p} x^q D^{p+q} u =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=q} (-1)^i \frac{p(p+1)\dots(p+i-1)}{i!} q(q-1)\dots(q-i+1) x^{q-i} D^{q-i} u$$

но, представивъ правую часть слѣдующимъ образомъ:

$$x^{p+q} \sum_{i=0}^{i=q} \frac{q(q-1)\dots(q-i+1)}{i!} (-1)^i p(p+1)\dots(p+i-1) x^{-(p+i)} D^{q-i} u,$$

легко замѣтить, что

$$D^{-p}x^qD^{p+q}u = x^{p+q}D^qx^{-p}u.$$

Умноживъ эту формулу на постоянное A_q, сообщивъ q всѣ значенія отъ 0 до нѣкотораго цѣлаго числа r и складывая результаты, получимъ:

$$\sum_{q=0}^{q=r} A_qD^{-p}.x^qD^{p+q}u = \sum_{q=0}^{q=r} A_qx^{p+q}D^qx^{-p}u.$$

откуда непосредственно слѣдуетъ

$$x^{-p}.\sum_{q=0}^{q=r} A_qx^{p+q}D^q(D^pu) = D^p\sum_{q=0}^{q=r} A_qx^{p+q}D^q(x^{-p}u). \quad (1)$$

2. Введя слѣдующее знакоположеніе:

$$x^{\mu_1}Dx^{\mu_2}D\ldots x^{\mu_r}Du = \left[x^{\mu_i}D\right]_1^r u,$$

$$s_r = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r,$$

не трудно убѣдиться, что

$$\left[x^{\mu_i}D\right]_1^r u = x^{s_r}\sum_{i=0}^{i=r-1} A_i^{(r)}x^{-i}D^{r-i}u.$$

Для этого стоитъ только, допустивъ справедливость этой формулы для какого нибудь значенія r, продифференцировать обѣ части, а умноживъ обѣ части на x^{μ}, найдемъ, что она справедлива и для $r+1$.

Если положимъ въ послѣдней формулѣ

$$Du = v \quad \mu_r = \alpha + n \quad n > r-1,$$

то, очевидно, имѣемъ:

$$x^{\alpha}.x^{-s_{r-1}}\left[x^{\mu_i}D\right]_1^{r-1}x^{\alpha+n}v = \sum_{i=0}^{i=r-1} A_i^{(r)}x^{n-i}D^{r-1-i}v.$$

Полагая для сокращенія

$$x^{-s_r}\left[x^{\mu_i}D\right]_1^r u=\prod^{r} u,$$

предыдущей формулѣ дадимъ такой видъ:

$$x^{-\alpha}\prod^{r-1} x^{\alpha+n}v=\sum_{i=0}^{i=r-1}A_i^{(r)}x^{n-i}D^{r-1-i}v.$$

Измѣнивъ здѣсь r въ $n-r$, v въ $x^{-(r+1)}v$, находимъ:

$$\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}x^{-(r+1)}v=\sum_{i=0}^{i=n-r-1}A_i^{(n-r)}x^{n-i}D^{n-r-1-i}(x^{-(r+1)}v).$$

Отсюда, на основаніи формулы (1),

$$D^{r+1}\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}x^{-(r+1)}v=$$

$$=x^{-(r+1)}\sum_{i=0}^{i=n-r-1}A_i^{(n-r)}x^{n-i}D^{n-r-1-i}(D^{r+1}v)$$

или

$$D^{r+1}\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}x^{-(r+1)}v=x^{-(r+1)}\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}D^{r+1}v;$$

умноживъ же обѣ части на x^{-n+r+1}, получаемъ:

$$x^{-n+r+1}D^{r+1}\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}x^{-(r+1)}v=$$

$$=x^{-(\alpha+n)}\prod^{n-r-1}x^{(\alpha+n)}\,.\,D^{r+1}v. \qquad (1)'$$

3. Теперь докажемъ слѣдующее тождество:

$$\left[x^{-n+r+1}D^{r+1}\right]^k \prod^{n-r} D^r u_\rho =$$

$$= x^{-\mu_{n-r,\,\rho+k}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\,\rho+k}} D^{r+1}\left[x^{-n+r+1}D^{r+1}\right]^k u_\rho. \quad (2)$$

Здѣсь $\mu_{n-r,\,\rho+k} = \mu_{n-r,\,\rho} + nk.$

а $[x^{-n+r+1}D^{r+1}]^k$ означаетъ повтореніе k разъ операціи, указанной въ скобкахъ.

Пусть u_ρ и $u_{\rho+1}$ двѣ произвольныя функціи, связанныя уравненіемъ:

$$u_\rho = D^{-(r+1)} x^{n-r-1} u_{\rho+1}.$$

Замѣтивъ, что

$$\prod^{n-r} D^r u_\rho = x^{-\mu_{n-r,\,\rho}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\,\rho}} D^{r+1} u_{\rho+1}$$

послѣ подстановки вмѣсто u_ρ его значенія и дифференцируя обѣ части $(r+1)$ разъ, имѣемъ:

$$D^{r+1}\prod^{n-r} D^r u_\rho = D^{r+1}\left\{x^{-\mu_{n-r,\,\rho}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\,\rho}+n}\right\} x^{-(r+1)} u_{\rho+1},$$

по умноженіи обѣихъ частей на x^{-n+r+1}, на основаніи формулы $(1)'$, получимъ:

$$x^{-n+r+1}D^{r+1}\prod^{n-r} D^r u_\rho = x^{-\mu_{n-r,\,\rho+1}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\,\rho+1}} D^{r+1} u_{\rho+1}.$$

Послѣднее равенство можно написать такимъ образомъ:

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+1} =$$

$$= \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+1}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+1}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+1}.$$

Замѣтивъ, что выраженія въ скобкахъ имѣютъ тотъ-же самый видъ, мы въ-правѣ написать:

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+1}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+1}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+1} =$$

$$= \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+2}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+2}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+2}$$

. . . .

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+k-1}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+k-1}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+k-1} =$$

$$= \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+k}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+k}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+k}.$$

Исключая изъ всѣхъ этихъ равенствъ $u_{\rho+1} \ldots\ldots u_{\rho+k-1}$, найдемъ:

$$\left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^k \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho}} \right\} D^{r+1} u_\rho =$$

$$= x^{-\mu_{n-r,\rho+k}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+k}} D^{r+1} u_{\rho+k}$$

при чемъ въ силу зависимости между u_ρ и $u_{\rho+1}$ имѣемъ:

$$u_\rho = \left[D^{-(r+1)} x^{n-r-1} \right]^k u_{\rho+k}.$$

Исключая изъ двухъ послѣднихъ равенствъ $u_{\rho+k}$, и получимъ искомое тождество. Если же изъ этихъ же равенствъ исключить u_ρ и принять условно

$$\left[D^{-(r+1)}x^{n-r-1}\right]^k u_{\rho+k} = \left[x^{-n+r+1}D^{r+1}\right]^{-k} u_{\rho+k},$$

то не трудно будетъ замѣтить, что тождество (2) имѣетъ мѣсто и для отрицательныхъ значеній k.

Изъ разсмотрѣнія тождества (2) вытекаетъ слѣдующее: если положить

$$u_\rho = v_r$$

$$v_{r+1} = \left[x^{-n+r+1}D^{r+1}\right]^{k_{n-r-1}} v_r,$$

причемъ k_{n-r-1} замѣняетъ k, то предыдущее тождество можно представить въ видѣ:

$$\left[x^{-n+r+1}D^{r+1}\right]^{k_{n-r-1}} \prod^{n-r} D^r v_r =$$

$$= x^{\mu_{n-r,\rho+k}} \prod^{n-r-1} x^{-\mu_{n-r,\rho+k}} D^{r+1} v_{r+1}.$$

Предполагая $\qquad \mu_{n-r,\rho+k} = 0$

или, что то-же, $\qquad \mu_{n-r,\rho} = -nk_{n-r-1}$,

получаемъ:

$$\left[x^{-n+r+1}D^{r+1}\right]^{k_{n-r-1}} \prod^{n-r} D^r v_r = \prod^{n-r-1} D^{r+1} v_{r+1}.$$

Такъ какъ эта формула справедлива при всякомъ значеніи r отъ 0 до n, то давъ r всѣ значенія отъ 0 до $n-1$, по исключеніи промежуточныхъ функцій $v_1, v_2, \ldots . v_{r-1}$, легко находимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\left[x^{-n+r}D^r\right]^{k_{n-r}}\left[x^{-n+r-1}D^{r-1}\right]^{k_{n-r+1}}\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\left[x^{-n+1}D\right]^{k_{n-1}}\prod^{n}v_0=\prod^{n-r}D^r v_r\\&v_r=\left[x^{-n+r}D^r\right]^{k_{n-r}}\cdots\cdots\left[x^{-n+1}D\right]^{k_{n-1}}v_0\end{aligned}\right\}\quad(2)'$$

или полагая для краткости

$$v_r=\Phi^{(r)}v_0,\quad v_0=\Phi^{(-r)}v_r$$

имѣемъ:

$$\Phi^{(r)}\prod^{n}v_0=\prod^{n-r}D^r v_r$$

или

$$\Phi^{(r)}\prod^{n}v_0=\prod^{n-r}D^r\Phi^{(r)}v_0.\qquad(3)$$

Если положить въ этихъ формулахъ $r=n-1$ и замѣтить, что $\prod^{1}u=Du$, то найдемъ:

$$\Phi^{(n-1)}\prod^{n}v_0=D^n\Phi^{(n-1)}v_0.\qquad(3)'$$

Выводъ этотъ справедливъ, когда $\mu_{i+1},_{\rho}=-nk_i$, гдѣ k_i цѣлое положительное или отрицательное число.

4. Переходимъ теперь къ интегрированію уравненія

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}a_i z^{-i}D^{n-i}y+a_n z^m y=0.\qquad(I)$$

Согласно съ сказаннымъ въ § 2, это уравненіе можно представить въ видѣ:

$$z^{-s_n}\left[z^{\mu_i} D\right]_1^n y + a_n z^m y = 0. \qquad \text{(I)}'$$

Не трудно привести это уравненіе къ другому такого-же вида, въ которомъ соотвѣтственное m равно нулю.

Дѣйствительно, сдѣлавъ замѣну независимаго перемѣннаго по формулѣ

$$z = \frac{x^{p+1}}{p+1},$$

гдѣ p пока произвольное постоянное количество, и умноживъ обѣ части уравненія на x^{np}, получимъ:

$$x^{-s_n(p+1)+np}\left[x^{\mu_i(p+1)-p} D\right]_1^n y + \frac{a_n}{(p+1)^m} x^{m(p+1)+np} y = 0.$$

Выбравъ p такъ, чтобы

$$m(p+1) + np = 0, \qquad \text{(a)}$$

и положивъ для краткости

$$\mu_i(p+1) - p = -nk_{i-1}, \quad -s_n(p+1) + np = n\sigma \qquad \text{(b)}$$

$$\sigma = k_0 + k_1 + \ldots + k_{n-1}, \quad \frac{a_n}{(p+1)^m} = \lambda,$$

послѣднее уравненіе обращаемъ въ такое:

$$x^{n\sigma}\left[x^{-nk_{i-1}} D\right]_1^n y + \lambda y = 0, \qquad \text{(II)}$$

или, наконецъ, вводя символъ Π:

$$\prod^{n} y + \lambda y = 0.$$

Если всѣ k_{i-1} суть числа цѣлыя, то, подвергая обѣ части этого уравненія операціи, которую мы означали чрезъ $\Phi^{(n-1)}$, получимъ:

$$\Phi^{(n-1)} \prod^{n} y + \lambda \Phi^{(n-1)} y = 0,$$

или, на основаніи формулы (3)′,

$$D^n \Phi^{(n-1)} y + \lambda \Phi^{(n-1)} y = 0.$$

Допустивъ, что

$$\Phi^{(n-1)} y = \omega,$$

получаемъ уравненіе:

$$D^n \omega + \lambda \omega = 0,$$

интегралъ котораго извѣстенъ.

Убѣдившись такимъ образомъ, что уравненіе (II) интегрируется, когда k_{i-1} суть цѣлыя числа, при помощи равенствъ (a) и (b) легко находимъ, что уравненіе вида (I)′ интегрируется, когда

$$\mu_i = -\frac{(m+n)(nk_{i-1}+1)-n}{n}, \qquad \text{(III)}$$

гдѣ m совершенно произвольно.

И такъ, для того чтобы уравненіе вида (I), коэффиціенты котораго суть данныя числа

$$a_1, a_2, \ldots a_{n-1},$$

интегрировалось, необходимо, чтобы коэффиціенты эти были равны соотвѣтственнымъ коэффиціентамъ уравненія (I)′, которые мы для ясности означимъ чрезъ $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$. Но послѣдніе суть опредѣленныя функціи (алгебраическія) количествъ: k_1,

$k_2, \ldots k_{n-1}, m$; слѣдовательно, приравнявъ одни коэффиціенты другимъ, мы получимъ систему изъ $(n-1)$ уравненій:

$$A_1 = a_1, A_2 = a_2, \ldots, A_{n-1} = a_{n-1} \qquad \text{(IV)}$$

съ n неизвѣстными $k_1, \ldots k_{n-1}, m$. Предположимъ, что мы опредѣлили $k_1, k_2, \ldots k_{n-2}$ и m чрезъ k_{n-1}; если при этомъ окажется, что всѣ $k_1, k_2, \ldots k_{n-2}$ выражаются чрезъ k_{n-1} такъ, что при предположеніи k_{n-1} цѣлымъ числомъ и всѣ остальные $k_1, k_2 \ldots k_{n-2}$ будутъ цѣлыми числами, то, при найденномъ значеніи m въ функціи k_{n-1}, данное уравненіе съ коэффиціентами $a_1, \ldots a_{n-1}$ интегрируется.

Въ частномъ случаѣ, когда

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0,$$

т. е. когда данное уравненіе имѣетъ видъ:

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_n z^m y = 0, \qquad \text{(V)}$$

два значенія m могутъ быть легко опредѣлены. Дѣйствительно, не трудно замѣтить, что при высказанныхъ условіяхъ, уравненія (IV) между прочимъ удовлетворяются, когда

$$\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{n-1} = 0,$$

что возможно на основаніи формулы (III), когда

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-1} = k,$$

при чемъ

$$m = -n + \frac{n}{nk+1}.$$

Второе значеніе m опредѣлится, если положить въ уравненіи (V)

$$z = -\frac{1}{x}, \quad y = x^{n-1}u,$$

ибо на основаніи извѣстной формулы

$$\frac{d^n y}{d\left(-\frac{1}{x}\right)^n} = x^{n+1}\frac{d^n(x^{n-1}y)}{dx^n}$$

уравненіе (V) преобразуется въ такое

$$\frac{d^n u}{dx^n} + (-1)^m a_n x^{m_1} u = 0,$$

гдѣ

$$m_1 = -(m + 2n).$$

Отсюда

$$m_1 = -n - \frac{n}{nk+1}.$$
