

I.

О ПРИВЕДЕНІИ УРАВНЕНІЙ

ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНІЯ СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ КЪ КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ.

Студента *А. А. Ключникова*.

§ 1. Для опредѣленія относительнаго движенія какой-либо системы n матеріальныхъ точекъ по отношенію къ прямоугольной системѣ координатныхъ осей, движущихся извѣстнымъ образомъ въ пространствѣ, можно получить $6n$ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка слѣдующаго вида¹.

$$(I) \begin{cases} m_i \frac{d\xi_i}{dt} = X_i - m_i u + m_i r \eta_i - m_i q \zeta_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_{\varepsilon} \frac{\partial L_{\varepsilon}}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d\eta_i}{dt} = Y_i - m_i v + m_i p \zeta_i - m_i r \xi_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_{\varepsilon} \frac{\partial L_{\varepsilon}}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = Z_i - m_i w + m_i q \xi_i - m_i p \eta_i + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_{\varepsilon} \frac{\partial L_{\varepsilon}}{\partial z_i}, \end{cases}$$

¹ *Bour*, Мém. sur les mouvem. relatifs. Journ. de Liouville. 1863. Janvier.

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = \xi_i + ry_i - qz_i, \\ \frac{dy_i}{dt} = \eta_i + pz_i - rx_i, \\ \frac{dz_i}{dt} = \zeta_i + qx_i - py_i, \end{array} \right.$$

гдѣ i —одно изъ чиселъ $1, 2, \dots n$; m_i —масса какой-либо изъ разсматриваемыхъ матеріальныхъ точекъ; x_i, y_i, z_i —ея координаты въ концѣ времени t относительно системы подвижныхъ осей, слагающія по которымъ дѣйствующей на эту матеріальную точку въ концѣ времени t данной силы суть X_i, Y_i, Z_i , и $L_1=0, L_2=0, \dots L_{3n-k}=0$ —условныя уравненія, въ которыя входятъ $3n$ относительныхъ координатъ и время t .

Затѣмъ $p, q, r; u, v, w$ —слагающія по подвижнымъ осямъ соотвѣтственно угловой скорости вращенія координатной системы въ теченіи промежутка времени dt и ускоренія, которое имѣетъ начало координатной системы въ концѣ времени t ; наконецъ, количества ξ_i, η_i, ζ_i —функции, опредѣленныя уравненіями (II).

Вопросъ, рѣшеніе котораго предлагается въ въ этой статьѣ состоитъ въ слѣдующемъ:

Преобразовать систему $6n$ уравненій вида (I) (II) въ каноническую, допустивъ, что

$$(1) \quad X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial V}{\partial z_i},$$

гдѣ $V = \Phi(x_1, y_1, z_1; \dots x_n, y_n, z_n, t)$, и не дляя ни-какого ограниченія относительно условныхъ уравненій².

§ 2. Введемъ количества T, K, G, V_1 опредѣленныя слѣдующими уравненіями:

¹ Буръ предполагалъ, что время t не входитъ явно ни въ V , ни въ уравненія $L_1=0, L_2=0, \dots$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) + \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(ry_i - qz_i)\xi_i + \\ &\quad + (pz_i - rx_i)\eta_i + (qx_i - py_i)\zeta_i] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(ry_i - qz_i)^2 \\ &\quad + (pz_i - rx_i)^2 + (qx_i - py_i)^2], \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad K = -u \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i - v \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i - w \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i,$$

$$(4) \quad G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(ry_i - qz_i)^2 + (pz_i - rx_i)^2 + (qx_i - py_i)^2],$$

$$(5) \quad V_1 = V + K + G.$$

На основаніи послѣднихъ формулъ, а также уравненія (1), и въ-силу того обстоятельства, что u, v, w, p, q, r независятъ отъ x_i, y_i, z_i , уравненія (I) и (II) можно замѣнить соотвѣтственно уравненіями:

$$(I') \left\{ \begin{aligned} m_i \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial(V_1 - T)}{\partial x} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_{\varepsilon} \frac{\partial L_{\varepsilon}}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{\partial(V_1 - T)}{\partial y_i} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_{\varepsilon} \frac{\partial L_{\varepsilon}}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{\partial(V_1 - T)}{\partial z_i} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3n-k} \lambda_{\varepsilon} \frac{\partial L_{\varepsilon}}{\partial z_i}, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$(II') \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial m_i \xi_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial m_i \eta_i}, \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial m_i \zeta_i}. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Допустивъ теперь, что каждое изъ количествъ $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ выражено помощью k новыхъ переменныхъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ и (количества) t , входящаго явно въ условныя уравненія, такимъ образомъ что, по вставкѣ этихъ выраженій въ уравненія $L_1=0, L_2=0, \dots, L_{3n-k}=0$, послѣднія обращаются въ тождественныя; умножимъ уравненія (I') соответственно на $\frac{dx_i}{dq_m}, \frac{dy_i}{dq_m}, \frac{dz_i}{dq_m}$ (m — одно изъ чиселъ $1, 2, \dots, k$) и затѣмъ сложимъ; а взявъ сумму подобныхъ результатовъ для $i=1, 2, \dots, n$, получимъ:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{d\xi_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{d\zeta_i}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right] = \\ & = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial V_1}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial V_1}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^{i=1} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Приймаючи во увагу рівності

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial V_1}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial V_1}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right)$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m} \right),$$

рівнянню (6) можна дати вигляд

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{d\xi_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{d\zeta_i}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) + \\ & + \frac{\partial T}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m} \right) = \frac{\partial V_1}{\partial q_m} \end{aligned}$$

или слѣдующій:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \eta_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \zeta_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^{i=n} \left(\xi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \eta_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \zeta_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) = \\ & + \frac{\partial T}{\partial q_m} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m} \right) = \frac{\partial V_1}{\partial q_m}; \end{aligned} \right. \quad (8)$$

но изъ формуль

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q'_k$$

$$y'_i = \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} q'_k$$

$$z'_i = \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial z_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} q'_k,$$

гдѣ $q'_m = \frac{dq_m}{dt}$

слѣдуетъ, во-первыхъ, что

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q_m} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} = \frac{\partial x_i}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial y'_i}{\partial q'_m} = \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} = \frac{\partial y_i}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial z'_i}{\partial q'_m} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m} = \frac{\partial z_i}{\partial q_m}$$

и во-вторыхъ, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_k} q'_k = \frac{\partial x'_i}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial T}{\partial m_i \xi_i}$$

и подобнымъ же образомъ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_m \partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_m \partial q_k} q'_k = \frac{\partial y'_i}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial T}{\partial m_i \eta_i},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} + \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_m \partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_m \partial q_k} q'_k = \frac{\partial z'_i}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial T}{\partial m_i \zeta_i},$$

такъ-что

и

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \eta_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \zeta_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m} \right),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \eta_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \zeta_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial m_i \xi_i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial m_i \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial m_i \zeta_i} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \right) =$$

$$- \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_m} + \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_m} \right),$$

а, слѣдовательно, уравненію (7) можно дать видъ:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m} \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_m} = \frac{\partial V}{\partial q_m}. \quad (8)$$

Желая придать послѣднему уравненію болѣе простую форму, введемъ количества T_2 и T_1 , опредѣленные уравненіями:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2), \quad (9)$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[(ry_i - qz_i) \xi_i + (pz_i - rx_i) \eta_i + (qx_i - py_i) \zeta_i \right], \quad (10)$$

такъ что, на основаніи формулъ (2) и (4), имѣемъ

$$T = T_2 + T_1 + G. \quad (11)$$

Дифференцированіе формулы (9) доставляетъ

$$\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q'_m} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q'_m} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q'_m} \right), \quad (12)$$

а изъ уравненія (11), въ силу теоремы однородныхъ функцій, имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\xi_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} \right) = 2T_2 + T_1. \quad (13)$$

Обративъ вниманіе на равенства (11), (12) и (13), уравненіе (8) можно представить подъ видомъ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial q'_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} (T_2 - G) = \frac{\partial V_1}{\partial q_m}$$

или такъ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = \frac{\partial (T_2 + V + K)}{\partial q_m}.$$

Приписывая въ послѣднемъ уравненіи указателю m послѣдовательно значенія $1, 2, 3, \dots, k$, мы образуемъ слѣдующую систему k совместныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial q'_1} &= \frac{\partial(T_2 + V + K)}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial q'_2} = \frac{\partial(T_2 + V + K)}{\partial q_2}, \\ &\dots \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial q'_k} = \frac{\partial(T_2 + V + K)}{\partial q_k}, \end{aligned} \quad (14)$$

въ которыя входятъ независимое переменное t , искомыя количества $q_1, q_2, \dots, q_k$ и ихъ производныя въ отношеніи t перваго и втораго порядковъ. Эти k дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка можно привести къ $2k$ дифференціальнымъ уравненіямъ 1-го порядка, введя k новыхъ количествъ $p_1, p_2, \dots, p_k$, извѣстнымъ образомъ связанныхъ съ производными $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$.

Такъ, если положимъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T_2}{\partial q'_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial T_2}{\partial q'_k} = p_k, \quad (15)$$

то для опредѣленія искомыхъ количествъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ и $p_1, p_2, \dots, p_k$ будемъ имѣть $2k$ дифференціальныхъ уравненій (14) и (15) перваго порядка.

Съ цѣлью преобразовать послѣднія уравненія, условимся на время разсматривать $2k$ количествъ $q_1, q_2, \dots, q_k; p_1, p_2, \dots, p_k$, какъ независимыя переменныя, и дѣйствіе дифференцированія относительно ихъ означать характеристикой δ ; количества же $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$ суть по формуламъ (15) функціи предыдущихъ $2k$ переменныхъ и еще количества t . Подставивъ въ выраженіе

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] = T$$

вмѣсто производныхъ $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ ихъ выраженія въ количествахъ $t, q_1, q_2, \dots, q_k, q'_1, q'_2, \dots, q'_k$, какъ напр. $\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q'_k} q'_k$ вмѣсто $\frac{dx_i}{dt}$, можно количество T представить подъ видомъ суммы трехъ членовъ $T'', T', T^{(0)}$, которые соотвѣтственно суть однородныя функціи второй, первой и нулевой степени относительно производныхъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$. Итакъ, имѣемъ равенство:

$$T = T'' + T' + T^{(0)}, \quad (16)$$

изъ котораго слѣдуетъ, что $\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q'_m} q'_m = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial (T'' + T' + T^{(0)})}{\partial q'_m} q'_m$

$$= \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T''}{\partial q'_m} q'_m + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T'}{\partial q'_m} q'_m + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial q'_m} q'_m, \text{ но такъ-какъ}$$

$$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T''}{\partial q'_m} q'_m = 2T' \text{ и } \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T'}{\partial q'_m} q'_m = T \text{ — на основаніи теоре-}$$

мы однородныхъ функцій, а $\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial q'_m} q'_m = 0$ — вслѣдствіе того,

что $T^{(0)}$ не содержитъ производныхъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$; то имѣемъ:

$$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q'_m} q'_m = 2T'' + T'. \quad (17)$$

Изъ равенствъ (17) и (16) находимъ черезъ дифференцирование:

$$2\delta T'' + \delta T' = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m \delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta q'_m$$

$$\text{и } \delta T = \delta T'' + \delta T' + \delta T^0 = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta q'_m ;$$

а отсюда черезъ вычитаніе получимъ:

$$\delta (T'' - T^{(0)}) = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m \delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} - \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m . \quad (18)$$

Обращаясь теперь къ уравненію (11) и замѣчая, во-первыхъ, что G не содержитъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$, а во-вторыхъ, что, на основаніи уравненій (15), $\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} = p_m$, найдемъ, что

$$\frac{\partial T}{\partial q'_m} = p_m + \frac{\partial T_1}{\partial q'_m},$$

откуда
$$\delta \frac{\partial T}{\partial q'_m} = \delta p_m + \delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m}; \quad (19)$$

но, съ другой стороны, T_1 есть функція первой степени относительно количествъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$, такъ-что производная $\frac{\partial T}{\partial q'_m}$ не содержитъ въ себѣ этихъ количествъ, а слѣдовательно, и количествъ $p_1, p_2, \dots, p_k$, и есть функція только отъ $t, q_1, q_2, \dots, q_k$; а потому

$$\delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} = \delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \delta q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \delta q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} .$$

На основаніи послѣдней формулы уравненію (19) можно дать видъ

$$\delta \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} = \delta p_m + \delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m} + \dots + \delta q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial T_1}{\partial q'_m};$$

а, слѣдовательно, уравненіе (18) можетъ быть представлено такъ

$$\delta (T^{(1)} - T^{(0)}) = \sum_{m=1}^{m=k} q'_m \delta p_m + \sum_{m=1}^{m=k} \left(q'_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} + \dots + q'_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial T_1}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right) \delta q_m$$

Здѣсь въ первой части $T^{(0)}$ есть функція только количествъ $t, q_1, q_2, \dots, q_k$; тогда какъ T'' содержитъ въ себѣ еще производныя $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$; исключивъ изъ T'' эти производныя помощью уравненій (15), означимъ выраженіе функціи T'' въ количествахъ $q_1, q_2, \dots, q_k; p_1, p_2, \dots, p_k$ черезъ $T^{(1)}$.

Послѣднее равенство, въ которомъ первая часть есть:

$$\sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial (T^{(1)} - T^{(0)})}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial p_m} \delta p_m,$$

по произвольности дифференціаловъ $\delta q_m, \delta p_m$ разлагается на равенства:

$$q'_m = \frac{\partial T^{(1)}}{\partial p_m}, \quad (20)$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial (T^{(1)} - T^{(0)})}{\partial q_m} = \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l} - \frac{\partial T}{\partial q_m}. \quad (21)$$

Представимъ иначе входящую сюда сумму $\sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l}$.

Такъ-какъ формулы (II) § 1 при новыхъ обозначеніяхъ принимаютъ видъ:

$$\xi_t = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial x}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial x}{\partial t} + qz_i - ry_i,$$

$$\eta_i = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial y_i}{\partial t} + rx_i - pz,$$

$$\xi_i = \sum_{m=1}^{m=k} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} q'_m + \frac{\partial z_i}{\partial t} + py_i - qx_i,$$

то, по формулѣ (10) функцію T_1 , можно представить, какъ сумму двухъ другихъ $T_1^{(1)}$ и $T_1^{(0)}$, изъ которыхъ первая есть однородная первой степени относительно производныхъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$, а вторая опредѣляется формулою

$$T_1^{(0)} = - \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\left(qz_i - ry_i \right) \frac{\partial x_i}{\partial t} + \left(rx_i - pz_i \right) \frac{\partial y_i}{\partial t} + \left(py_i - qx_i \right) \frac{\partial z_i}{\partial t} \right] - 2G,$$

такъ-что производныхъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$ въ себѣ не содержитъ:

Такимъ образомъ, на основаніи теоремы однородныхъ функцій, имѣемъ

$$\sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l} = \sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial (T_1^{(1)} + T_1^{(0)})}{\partial q'_l}$$

$$= \sum_{l=1}^{l=k} q'_l \frac{\partial T_1}{\partial q'_l} = T'_1 = T_1 - T_1^{(0)};$$

послѣ этого уравненію (21) можно дать видъ:

$$\frac{\partial (T_1 - T_1^{(0)} - T)}{\partial q_m} = \frac{\partial (T^{(11)} - T^{(0)})}{\partial q_m}, \text{ или, на основаніи формулы (11),}$$

слѣдующій

$$\frac{\partial (-T_2 - G - T_1^{(0)})}{\partial q_m} = \frac{\partial (T^{(11)} - T^{(0)})}{\partial q_m}; \text{ а отсюда}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_m} = - \frac{\partial [T^{(11)} - (T^{(0)} - T_1^{(0)} - G)]}{\partial q_m} = - \frac{\partial (T^{(11)} - T_2^{(0)})}{\partial q_m}, \quad (22)$$

гдѣ $T_2^{(0)} = T^{(0)} - T_1^{(0)} - G$.

На основаніи формулъ (22) и (15) уравненія (14) могутъ быть написаны такъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= - \frac{\partial (T^{(11)} - V - (T^{(0)} + K))}{\partial q_1} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dp_k}{dt} &= - \frac{\partial (T^{(11)} - V - (T_2^{(0)} + K))}{\partial q_k}; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

что же касается уравненій (15), то послѣднія могутъ быть замѣнены уравненіями вида (20).

Такимъ образомъ вмѣсто уравненій (14) и (15) можетъ взять (23) и слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial T_1^{(11)}}{\partial p_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial T^{(11)}}{\partial p_k} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Положивъ для краткости $H = T^{(1)} - V - (T_2^{(0)} + K)$ и замѣтивъ, что количества V , $T_2^{(0)}$ и K не зависятъ отъ p_1 , p_2 , p_k , мы можемъ уравненіямъ (23) и (24) дать слѣдующій видъ:

$$\frac{dp_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$

$$\frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

который и есть каноническій.