

О вѣроятности а posteriori.

А. А. Маркова.

При извѣстныхъ условіяхъ вѣроятность P_k , что въ n испытаній нѣкоторое событіе появится ровно k разъ, опредѣляется по формулѣ

$$P_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k} \frac{\int_0^1 x^{k_0+k} (1-x)^{n_0+n-k_0-k} dx}{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} dx},$$

если въ n_0 наблюденныхъ испытаній то же событіе появилось ровно k_0 разъ.

На основаніи этой формулы при помощи приѣма, который былъ примѣненъ Чебышевымъ къ вѣроятности а priori, нетрудно доказать, что для любого положительнаго числа t вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n}} \leq \frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0} \leq +\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n}}$$

больше

$$1 - \frac{1}{t^2}.$$

Для указанной цѣли прежде всего замѣтимъ, что вышеопредѣленное выраженіе P_k представляетъ коэффициентъ при ξ^k въ разложениі по степенямъ переменнаго ξ функции

$$F(\xi) = \frac{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} (1-x+\xi x)^n dx}{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} dx},$$

ТАКЪ ЧТО

$$\sum_{k=0, 1, 2, \dots, n} P_k \xi^k = \frac{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} (1-x+\xi x)^n dx}{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} dx}.$$

Отсюда кромѣ очевиднаго равенства

$$\sum P_k = 1$$

выводимъ при помощи дифференцированія

$$F'(1) = \sum P_k k = \frac{n \int_0^1 x^{k_0+1} (1-x)^{n_0-k_0} dx}{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} dx} = n \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2},$$

$$F''(1) = \sum P_k k(k-1) = \frac{n(n-1) \int_0^1 x^{k_0+2} (1-x)^{n_0-k_0} dx}{\int_0^1 x^{k_0} (1-x)^{n_0-k_0} dx} \\ = n(n-1) \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} \frac{k_0 + 2}{n_0 + 3}$$

и затѣмъ

$$\sum P_k \left(\frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0} \right)^2 \\ = \sum P_k \frac{k(k-1)}{n^2} + \sum P_k \frac{k}{n^2} - 2 \frac{k_0}{n_0} \sum P_k \frac{k}{n} + \frac{k_0^2}{n_0^2} \sum P_k \\ = \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} \frac{k_0 + 2}{n_0 + 3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} - 2 \frac{k_0}{n_0} \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} + \frac{k_0^2}{n_0^2} \\ = \frac{1}{n} \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} \frac{n_0 + 1 - k_0}{n_0 + 3} + \left(\frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} - \frac{k_0}{n_0} \right)^2 + \frac{1}{n_0 + 3} \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} \frac{n_0 - k_0 + 1}{n_0 + 2}.$$

Съ другой стороны простое тождество

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} - \frac{k_0}{n_0} \right)^2 + \frac{1}{n_0 + 3} \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} \frac{n_0 - k_0 + 1}{n_0 + 2} \\ &= \frac{1}{4(n_0 + 3)} + \left(1 - 2 \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{4(n_0 + 3)} \right\} \end{aligned}$$

обнаруживаетъ, что сумма

$$\left(\frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} - \frac{k_0}{n_0} \right)^2 + \frac{1}{n_0 + 3} \frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} \frac{n_0 - k_0 + 1}{n_0 + 2}$$

должна заключаться между количествами

$$\frac{1}{4(n_0 + 3)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(n_0 + 2)^2} \left\{ 1 + \frac{n_0 + 1}{n_0 + 3} \right\} = \frac{2}{(n_0 + 2)(n_0 + 3)},$$

которыя оба меньше

$$\frac{1}{4n_0}.$$

Еще легче обнаружить неравенство

$$\frac{k_0 + 1}{n_0 + 2} \frac{n_0 + 1 - k_0}{n_0 + 3} < \frac{1}{4}.$$

Слѣдовательно

$$\sum P_k \left(\frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0} \right)^2 < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0} \right).$$

Остается примѣнить къ послѣднему неравенству извѣстныя разсужденія Чебышева *), и мы тотчасъ придемъ къ заключенію, что вѣроятность выполненія неравенствъ

$$-\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0}} \leq \frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0} \leq +\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0}}$$

должна быть больше

$$1 - \frac{1}{t^2}.$$

13 Апрѣля 1900 г.

*) См. напр. въ *Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества* (вторая серія, томъ 1) статью В. Г. Имшенецкаго „Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей“.