Note sur le problème du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance.

Par M. N. Saltykow.

Le problème dont il s'agit revient à intégrer le système canonique d'équations différentielles ordinaires

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{dy'}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x'}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y'}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où l'on a posé

$$H = -\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{m}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{m'}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{y^2}.$$

Le système (1) admet deux intégrales bien connues

$$\left.\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= L, \\ (xy' - yx')^2 - a^2 y'^2 &= M, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

L, M désignant les fonctions

$$L = \frac{2m}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{2m'}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{\alpha^2}{y^2} + 2\beta$$

$$M = \frac{2ma(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} - \frac{2m'a(x+a)}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{\alpha^2}{y^2}(a^2 - x^2 - y^2) + \gamma,$$

β, γ étant deux constantes arbitraires *). Comme la première des intégrales (2) est celle des forces vives, la seconde ne contenant pas explicitement la variable t, on en conclut que les équations (2) forment un système de deux intégrales en involution par rapport au système canonique (1). Donc en effectuant la qudrature de la différentielle exacte

$$x'dx + y'dy, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

x', y' représentant les valeurs tirées des équations (2), on obtient, d'après le théorème de Jacobi **), les deux autres intégrales du système (1) par différentiation seulement.

C'est ainsi que toutes les difficultés du problème consistent à résoudre les équations (2) et à intégrer la différentielle (3). On y parvient aisément par l'introduction de nouvelles variables de Jacobi λ', λ'' ***) en posant

$$ax = \sqrt{(a^2 - \lambda')(a^2 - \lambda'')}, \qquad ay = \sqrt{-\lambda'\lambda''}.$$

Il s'ensuit, en effet,

$$2a(x'dx + y'dy) = 2[x'd\sqrt{(a^2-\lambda')(a^2-\lambda'')} + y'd\sqrt{-\lambda'\lambda''}] =$$

$$= -[\sqrt{\lambda''(a^2-\lambda')}\,.y' + \sqrt{-\lambda'(a^2-\lambda'')}\,.x']\frac{d\lambda'}{\sqrt{-\lambda'(a^2-\lambda')}} +$$

$$+ [\sqrt{-\lambda'(a^2-\lambda'')}\,.y' - \sqrt{\lambda''(a^2-\lambda')}\,.x']\frac{d\lambda''}{\sqrt{\lambda''(a^2-\lambda'')}}.$$

Mais d'après les formules de Jacobi ****), les expressions en crochets rectilignes deviennent

$$a\sqrt{-(M+\lambda'L)}, \qquad a\sqrt{M+\lambda''L},$$

la première étant fonction de λ' seulement et la seconde ne contenant que λ''. La différentielle (3) prend donc la forme

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{M+\lambda''L}{\lambda''(a^2-\lambda'')}}\,d\lambda'' - \sqrt{\frac{M+\lambda'L}{\lambda'(a^2-\lambda')}}\,d\lambda'\right],$$

les variables λ', λ'' étant séparées.

---

*) Jacobi. Gesammelte Werke, Bd. IV, Theoria novi mutiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi, p. 465.

**) Jacobi. Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 35. Ce théorème publié en 1836 ne présente qu'un cas particulier de celui de Liouville, annoncé par ce geomètre en 1856, Journal de Liouville, 1-re série, t. XX, p. 137.

***) Bd. IV, pp. 467—468.

****) Bd. IV, p. 468, formules (14), (15).

Par conséquent, les deux intégrales requises s'obtiennent en différentiant l'intégrale de cette dernière formule partiellement par rapport aux constantes arbitraires γ et β:

$$\int \frac{d\lambda''}{\sqrt{\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda''L)}} - \int \frac{d\lambda'}{\sqrt{\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda'L)}} = \gamma',$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\lambda'' d\lambda''}{\sqrt{\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda''L)}} - \frac{1}{2}\int \frac{\lambda' d\lambda'}{\sqrt{\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda'L)}} = t+\beta',$$

γ', β' étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Quant à λ', λ'', elles sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 + (x^2 + y^2 - a^2)\,\lambda - a^2y^2 = 0$$

et ne présentent donc qu'un cas particulier des coordonnées elliptiques dont se servit Jacobi en traitant le même problème par sa seconde méthode *).

---

*) Vorlesungen über Dynamik. Zweite Ausgabe, 1884. S. 221.